МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет естественных наук
Кафедра общей физики

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ
им. акад. С. А. Христиановича СО РАН

В. П. ЗАМУРАЕВ, А. П. КАЛИНИНА

# ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ ПО МЕХАНИКЕ

## Часть 6
## Колебания

Учебное пособие

Новосибирск
2012

УДК 536.7
ББК В36я73-1
З 266

**Замураев В. П., Калинина А. П.** Задачи с решениями по механике: учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. Ч. 6. 170 с.

ISBN 978-5-4437-0066-3

В учебном пособии изложены стандартные алгоритмы решения типовых задач подраздела «Механика» из курса «Физика», читаемого на первом курсе факультета естественных наук НГУ студентам-химикам. Значительная часть задач предлагалась на контрольных работах В. А. Толкачевым, В. А. Багрянским, В. Л. Вязовкиным, Е. М. Глебовым, В. И. Иванниковым, П. А. Пуртовым и др. Группировка задач по частям 1–6 повторяет структуру соответствующей части подраздела «Механика».

Предназначено для преподавателей и студентов вузов.

Рецензент
д-р физ.-мат. наук В. А. Багрянский

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

Учебное пособие рекомендовано к изданию ученым советом ИТПМ СО РАН.

ISBN 978-5-4437-0066-3

## КОЛЕБАНИЯ

**6.1.** Изобразить на векторной диаграмме колебания:
а) $x = a\cos(\omega t + \pi/4)$; б) $x = -2a\cos(\omega t - \pi/6)$ в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/(2\omega)$. Константа $a > 0$.

**6.2.** Изобразить на векторной диаграмме в момент времени $t = 0$ смещение $x = a\cos(\omega t + \pi/3)$, скорость $\dot{x}$ и ускорение $\ddot{x}$.

**6.3.** Частица массой $m$ может двигаться по оси $x$. На частицу действует сила $F_x = -k(x - x_0)$, где $k$ и $x_0$ – константы, причем $k > 0$. Записать полную механическую энергию $E$ этой частицы, выразив ее через $x$ и $\dot{x}$, считая, что в положении равновесия потенциальная энергия частицы равна $U_0$. Определить, зависит ли движение частицы от выбора $U_0$. Вычислить $dE/dt$.

**6.4.** Потенциальная энергия частицы массой $m$ изменяется с координатой $x$ по закону $U = U_0(1 - \cos\alpha x)$. Определить период малых колебаний частицы около положения равновесия $x = 0$.

**6.5.** Потенциальная энергия частицы массой $m$ равна

$$U = -2D\left(\frac{a}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2\right).$$

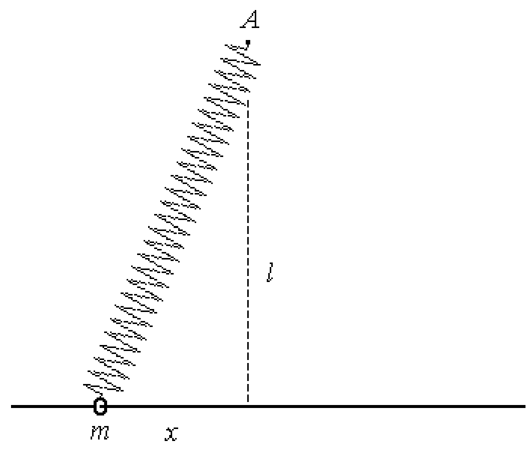
Это так называемый потенциал Кратцера. Здесь $D$ и $a$ – положительные константы, $x$ – координата частицы. Нарисовать график этой зависимости. Определить значение координаты $x_0$, соответствующее положению устойчивого равновесия. Найти частоту $\omega$ малых колебаний частицы.

**6.6.** Чему равен период колебаний частицы массой $m$, если ее потенциальная энергия равна $U(x) = k|x|,\ k > 0,$ а полная энергия $E$?

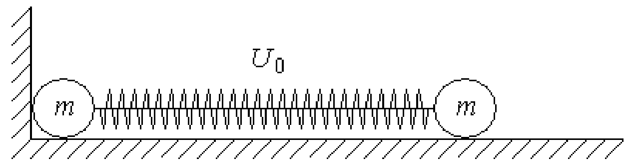
**6.7.** С каким сдвигом по фазе $\Delta\varphi$ меняются во времени кинетическая $T$ и потенциальная $U$ энергии гармонического осциллятора? Как частоты $\omega_T$ и $\omega_U$ изменения $T$ и $U$ во времени связаны с частотой осциллятора?



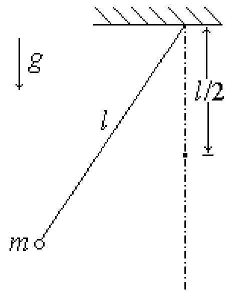
**6.8.** Найти частоту гармонических колебаний небольших размеров колечка массой $m$, способного двигаться без трения по прямому стержню и прикрепленного к пружине, другой конец которой закреплен в точке $A$ на расстоянии $l$ от стержня. Пружина имеет длину $l$ и натянута с силой $F$. Стержень и пружина занимают горизонтальное положение.



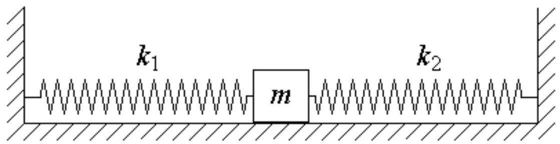

**6.9.** Два шарика одинаковой массы скреплены невесомой пружиной. Пружина сжата так, что запасенная в ней энергия равна $U_0$. Длина пружины в этом состоянии зафиксирована нитью. Шарики лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Один из них касается стенки. Нить пережигают. Вычислить кинетическую энергию центра масс и энергию колебаний после отскока от стенки.



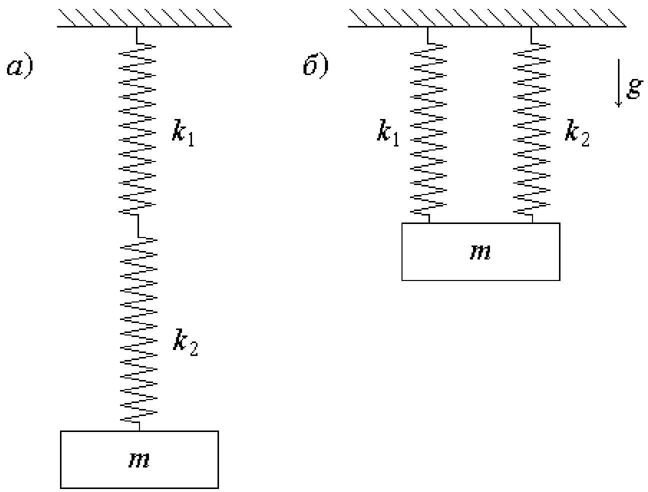

**6.10.** На невесомой нити длиной $l$ подвешено небольших размеров тело. Под точкой подвеса вбит гвоздь на расстоянии $l/2$. Найти период малых колебаний.




**6.11.** Определить период $T$ свободных колебаний груза массой $m$, закрепленного между двумя пружинами жесткости $k_1$ и $k_2$. Трением груза и пружин о подставку, а также массами пружин пренебречь.

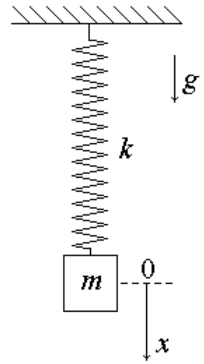



**6.12.** Груз массой $m$ подвешен к двум пружинам, соединенным: а) последовательно, б) параллельно. Определить частоты колебаний груза, если коэффициенты жесткости пружин равны $k_1$ и $k_2$.

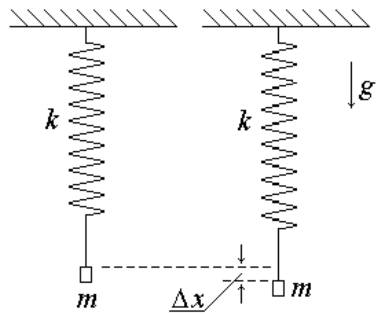





**6.13.** К пружине, закрепленной верхним концом, осторожно подвешивают груз массой $m$ и без толчка отпускают. Выяснить характер движения груза, т. е. найти вид функции $x = x(t)$, где $x$ – координата груза, отсчитываемая в вертикальном направлении. Определить максимальное $T_{max}$ и минимальное $T_{min}$ натяжения пружины. Коэффициент жесткости пружины $k$. Массой пружины пренебречь.

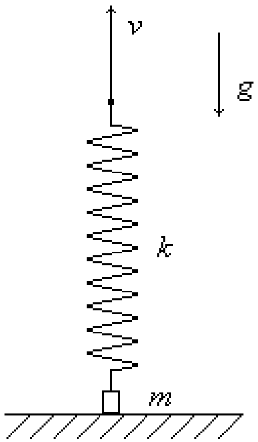



**6.14.** К пружине прикреплена нить, на которой висит груз массой $m$. Оттягивая груз вниз и отпуская без толчка, приводят его в колебания. На какое расстояние $\Delta x$ нужно оттянуть вниз груз, чтобы при колебаниях нить все время была натянута? Коэффициент жесткости пружины равен $k$.

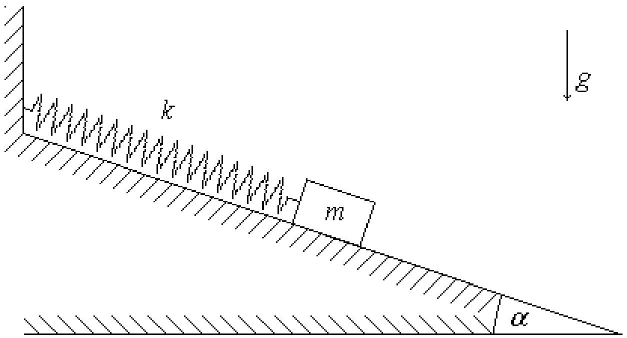



**6.15.** Маленьких размеров тело массой $m$ лежит на столе. К телу прикреплена невесомая недеформированная пружина жесткостью $k$.

Свободный конец пружины начали поднимать с постоянной скоростью $v$. Вычислить максимальное растяжение пружины $x_{max}$.

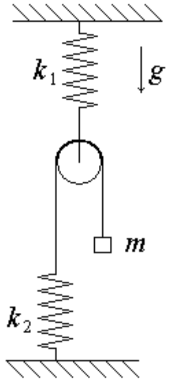



**6.16.** Тело массой $m$ лежит на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha$ и удерживается в положении равновесия пружиной, параллельной наклонной плоскости. Жесткость пружины $k$. Тело передвигают по наклонной плоскости, увеличивая начальное растяжение пружины в три раза, и отпускают. Найти изменение растяжения пружины со временем. Трения нет.

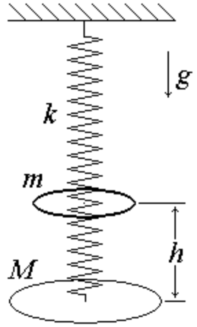




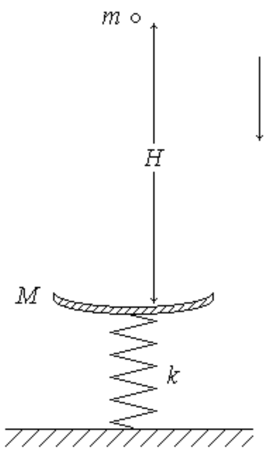

**6.17.** На нижнем конце пружины, жесткость которой $k_1$, подвешен блок, а верхний конец пружины жестко закреплен. Через блок перекинута нерастяжимая нить. Один конец нити прикреплен к пружине, которая другим концом закреплена в земле и имеет жесткость $k_2$. На другом конце нити подвешен груз массой $m$. Обе пружины и оба прямолинейных участка нити вертикальны. Блок, пружины и нить невесомы. Силами трения можно пренебречь. Найти круговую частоту малых гармонических колебаний груза, при которых нить находится все время в натянутом виде.



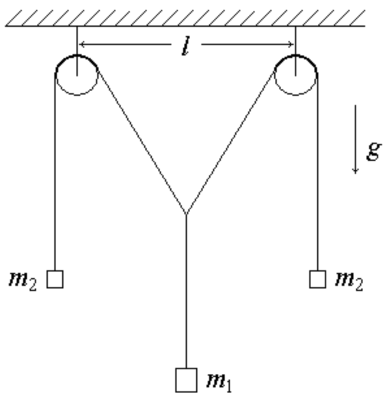

**6.18.** Диск массой $M$ подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой равен $k$. После того как на диск с высоты $h$ падает кольцо массой $m$, диск начинает совершать гармонические колебания. Полагая удар кольца о диск абсолютно неупругим, определить амплитуду колебаний $a$. Массой пружины пренебречь.



**6.19.** Груз массой $m$ отпускают без начальной скорости с высоты $H$ на чашку пружинных весов. Масса чашки равна $M$, жесткость пружины – $k$. При ударе груз прилипает к чашке. Найти частоту и амплитуду его колебаний на весах.

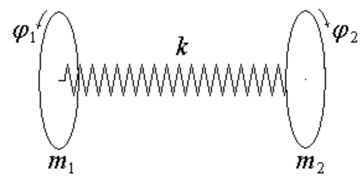



**6.20.** Через два неподвижных блока, расположенных на одном уровне на расстоянии $l$ друг от друга, перекинута невесомая нерастяжимая нить. Посередине между блоками к нити подвешен груз массой $m_1$, а на концах нити подвешены грузы равной массы $m_2$. Отношение масс грузов равно $m_1/m_2=\sqrt{2}$. Размерами и массой блоков можно пренебречь. Трение не учитывать. Найти частоту малых колебаний системы.

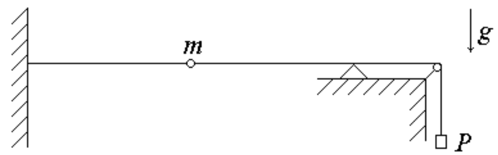




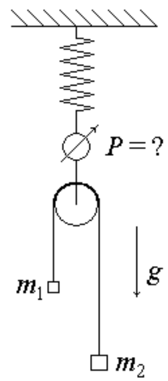

**6.21.** Два диска, имеющих одинаковый радиус $R$, но разные массы $m_1$ и $m_2$, могут вращаться вокруг оси, проходящей через центры дисков перпендикулярно к их плоскостям. Диски соединены пружиной, у которой коэффициент кручения (коэффициент пропорциональности между моментом силы и углом закручивания) равен $k$. Определить период $T$, с которым будут колебаться диски, если их повернуть вокруг оси в противоположные стороны и отпустить.



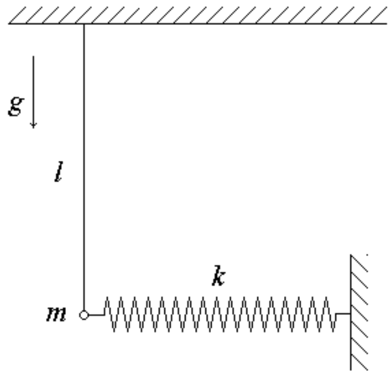

**6.22.** Найти период малых свободных колебаний груза массой $m$, укрепленного на середине тонкой струны длиной $l$. Массой струны можно пренебречь; натяжение струны постоянно и равно $P$.



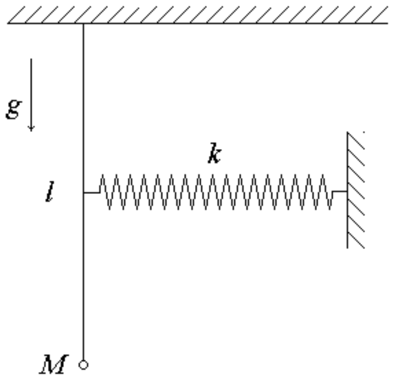

**6.23.** К концам перекинутой через невесомый блок нерастяжимой невесомой нити привязаны грузы массой $m_1$ и $m_2$. Блок подвешен к пружинным весам. Каковы показания весов при свободном движении грузов?



**6.24.** Определить частоту малых колебаний следующей системы: на невесомой нити длиной $l$ подвешен груз массой $m$, груз через горизонтально расположенную пружину жесткости $k$ присоединен к стене. Точки равновесия нити и пружины совпадают.



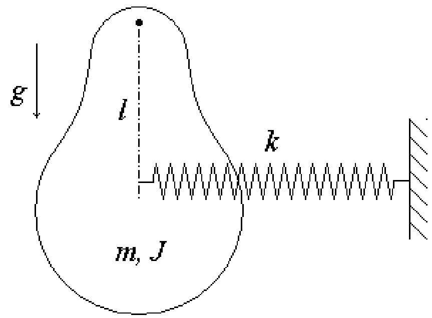

**6.25.** Найти период колебаний груза массой $M$ на невесомом стержне длиной $l$, если к середине стержня прикреплена пружина жесткости $k$. Точки равновесия груза и пружины совпадают.



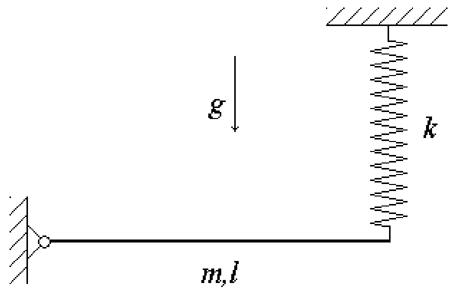

**6.26.** Центр масс физического маятника, показанного на рисунке, находится на расстоянии $l$ от его точки подвеса. Горизонтальная пружина одним концом соединена с маятником в центре масс, другим – со стенкой, перпендикулярной плоскости маятника. Момент инерции маятника равен



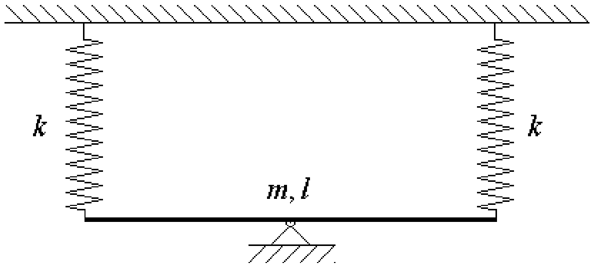
$J$, масса – $m$, жесткость пружины – $k$. Найти период малых колебаний системы. Точки равновесия центра масс маятника и пружины совпадают.



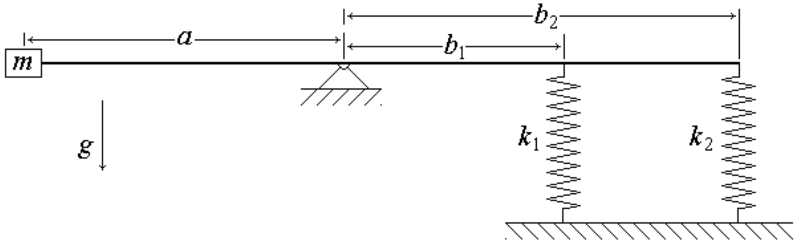

**6.27.** Найти частоту малых колебаний однородного стержня длиной $l$ массой $m$. Один конец стержня закреплен на горизонтальной оси, вокруг которой он может свободно вращаться, а второй удерживается пружиной жесткости $k$. Равновесное положение стержня горизонтальное.



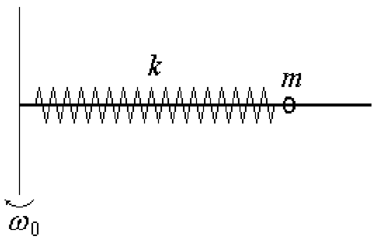

**6.28.** Однородный тонкий стержень длиной $l$ и массой $m$ может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Одинаковые вертикальные пружины жесткости $k$ одним концом соединены с крайними точками стержня, другим – с горизонтальной поверхностью. При горизонтальном положении стержня пружины не растянуты. Найти частоту колебаний системы.




**6.29.** Невесомый стержень может вращаться вокруг шарнира. К концу стержня на расстоянии $a$ от шарнира прикреплен груз массой $m$. С другой стороны от шарнира к стержню прикреплены две пружины. Другим своим концом они присоединены к горизонтальной поверхности. Их жесткость равна $k_1$ и $k_2$, расстояние до шарнира $b_1$ и $b_2$ соответственно. Найти период малых колебаний груза. Колебания происходят в вертикальной плоскости.

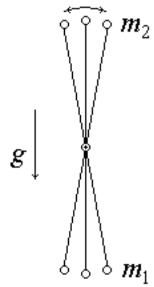



**6.30.** На горизонтальную спицу надето кольцо массой $m$. С помощью пружины, надетой на ту же спицу, кольцо приводится в колебательное движение. Спица с кольцом вращается с угловой скоростью $\omega_0$ вокруг вертикальной оси, проходящей через конец спицы, к которому прикреплена пружина. Жесткость пружины $k$. Найти частоту малых колебаний кольца.

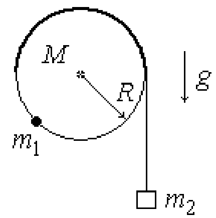




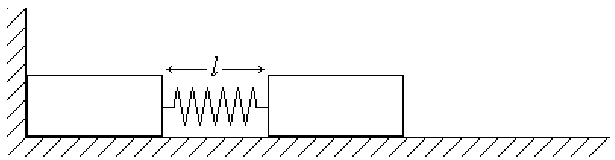

**6.31.** Два маленьких шарика массой $m_1$ и $m_2$ соединены жестким невесомым стержнем длиной $l$. Система может совершать колебания в поле тяжести относительно горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. Найти частоту малых колебаний.



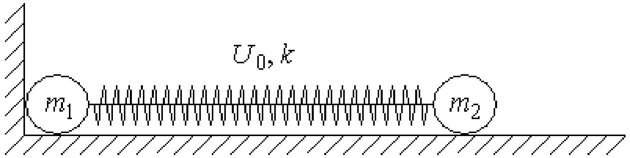

**6.32.** К краю однородного диска массой $M$ и радиусом $R$ прикреплено тело небольших размеров массой $m_1$. Диск может вращаться вокруг своей оси, которая направлена горизонтально. По ободу диска намотана невесомая нить, к концу которой привязано тело массой $m_2 < m_1$. Найти частоту малых колебаний системы вблизи положения равновесия.



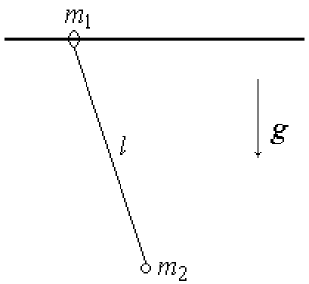

**6.33.** На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых соединенных пружиной бруска. Длина пружины в недеформированном состоянии равна $l$. Левый брусок упирается в стенку. Правый брусок прижимают так, что пружина укорачивается вдвое, и отпускают. Найти максимальную $l_{\max}$ и минимальную $l_{\min}$ длины пружины, которые достигаются при свободном движении системы.



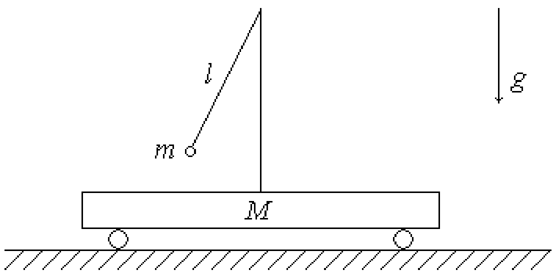
**6.34.** Два шарика массой $m_1$ и $m_2$ скреплены невесомой пружиной жесткости $k$. Пружина сжата так, что запасенная в ней энергия равна $U_0$. Длина пружины в этом состоянии зафиксирована нитью. Шарики лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Один из них касается стенки. Нить пережигают. Вычислить кинетическую энергию центра масс и энергию колебаний после отскока от стенки. Найти частоту и амплитуду колебаний.




**6.35.** На горизонтальном стержне без трения может скользить кольцо массой $m_1$. К кольцу подвешен на нерастяжимой невесомой нити длиной $l$ точечный груз массой $m_2$. Определить частоту малых гармонических колебаний системы.

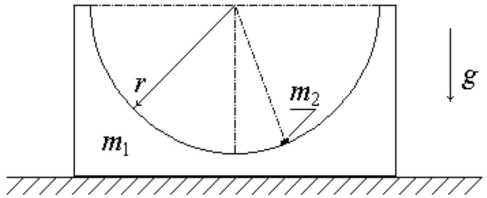



**6.36.** На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массой $M$ с установленным на ней математическим маятником длиной $l$ и массой $m$. Найти период колебаний системы.

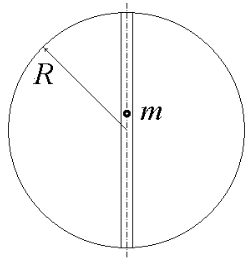




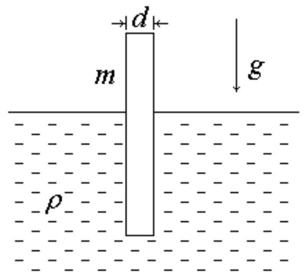

**6.37.** Чаша, внутренняя поверхность которой является полусферой с радиусом $r$, может без трения перемещаться по столу. В чаше также без трения может двигаться маленькая шайба. Рассмотреть колебательное движение этой системы. Найти частоту гармонических колебаний. Массы чаши и шайбы $m_1$ и $m_2$ соответственно.



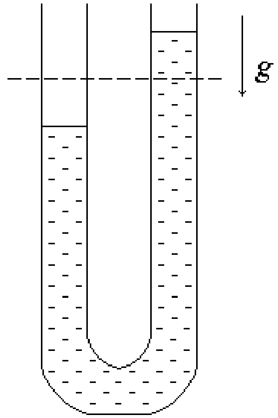

**6.38.** По диаметру Земли, моделируемой однородным шаром, просверлен желоб, в котором может двигаться материальная точка. Найти период колебаний точки в желобе около центра Земли. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли и радиус Земли равны $g$ и $R$.



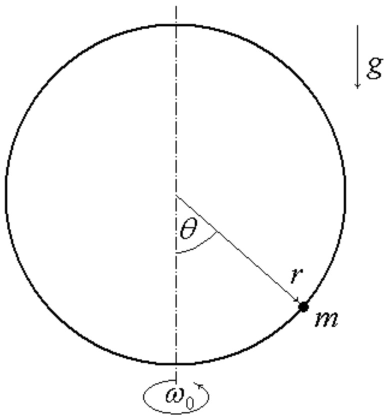

**6.39.** Ареометр массой $m$ с цилиндрической трубкой диаметром $d$ плавает в жидкости плотностью $\rho$ и приводится толчком в вертикальном направлении в движение. Найти частоту малых колебаний ареометра. Движение жидкости и ее сопротивление движению ареометра не учитывать.



**6.40.** В $U$-образную трубку налита жидкость. Полная длина столба жидкости в трубке равна $l$. Пренебрегая трением, определить частоту колебаний жидкости в трубке.

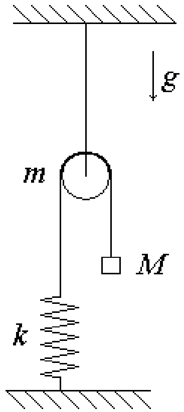



**6.41.** Кольцо радиусом $r$ вращается с угловой скоростью $\omega_0$ вокруг своего диаметра, направленного по вертикали. По кольцу может без трения скользить шарик массой $m$. Положение шарика характеризуется углом $\theta$ между направлением по вертикали вниз и направлением радиус-вектора шарика с началом в центре кольца. При каком угле $\theta$ шарик находится в устойчивом равновесии и какова частота его малых колебаний около положения равновесия?

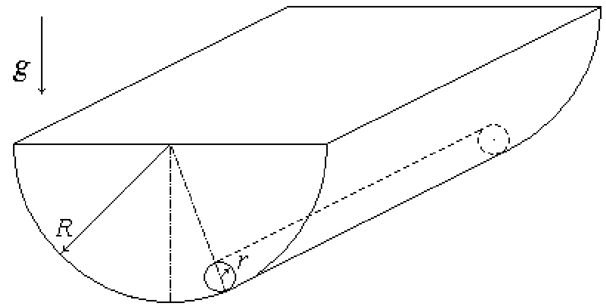




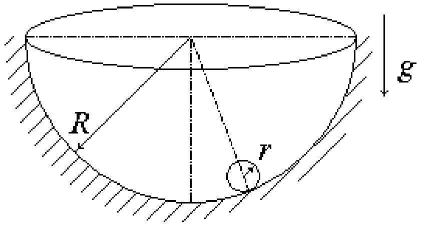

**6.42.** Определить частоту колебаний системы, показанной на рисунке. Блок считать однородным диском массы $m$, масса груза $M$, жесткость пружины $k$. Нить по блоку не проскальзывает.



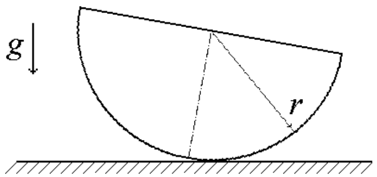

**6.43.** Однородный цилиндр радиусом $r$ катается без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиусом $R > r$. Оси цилиндров все время параллельны друг другу. Определить частоту малых колебаний внутреннего цилиндра около положения равновесия.




**6.44.** Однородный шар радиусом $r$ катается без проскальзывания по внутренней поверхности сферической чаши радиусом $R > r$, совершая малые колебания. Определить частоту этих колебаний.

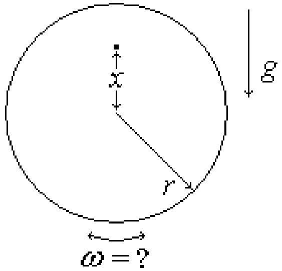



**6.45.** Однородное твердое тело в виде полусферы радиусом $r$ опирается на горизонтальную поверхность в точке своей выпуклой стороны. Найти частоту малых колебаний тела около положения равновесия в случае, когда в его контакте с горизонтальной поверхностью полностью отсутствует трение.



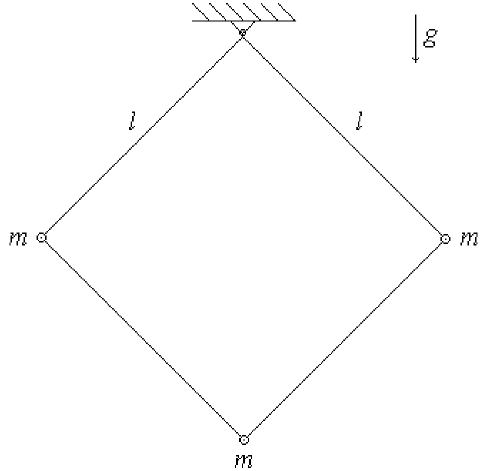

**6.46.** Однородное твердое тело в виде полусферы радиусом $r$ опирается на горизонтальную поверхность в точке своей выпуклой стороны. Найти частоту малых колебаний тела около положения равновесия в случае, когда в его контакте с горизонтальной поверхностью отсутствует скольжение.

**6.47.** В сплошном диске радиусом $r$ на расстоянии $x$ от центра пробито отверстие, и диск подвешен на гвоздике. При каком значении $x$ частота малых колебаний диска будет иметь максимальную величину? Чему она равна?

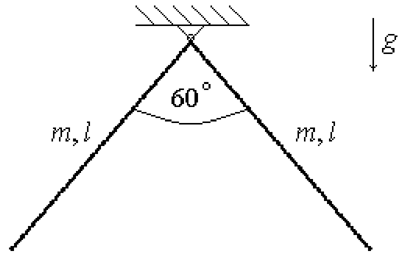




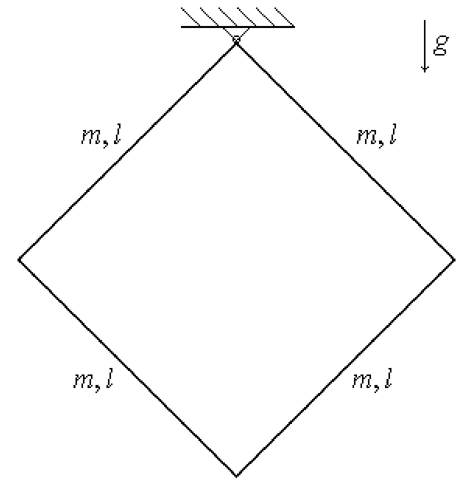

**6.48.** В трех углах квадрата, собранного из тонких невесомых спиц длиной $l$, закрепили три шарика с равными массами $m$. Квадрат подвесили за свободный угол. Найти частоту малых колебаний системы, если они происходят в плоскости квадрата.



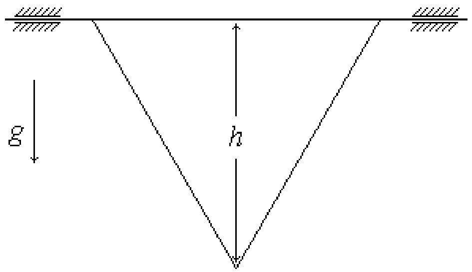

**6.49.** Два тонких однородных стержня жестко скреплены своими концами, так что угол между ними равен 60º. Масса каждого стержня равна $m$, его длина – $l$. Стержни могут свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку скрепления стержней перпендикулярно плоскости их расположения. Найти частоту малых колебаний.




**6.50.** Квадрат собран из тонких стержней массой $m$ и длиной $l$. Стержни жестко соединены между собой. Квадрат подвешен за один из углов. Найти частоту малых колебаний квадрата, если они происходят в его плоскости.

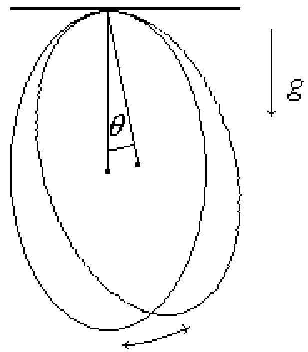



**6.51.** Тонкая пластинка из однородного материала, имеющая форму равностороннего треугольника высотой *h*, может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. Найти период малых колебаний данного физического маятника.

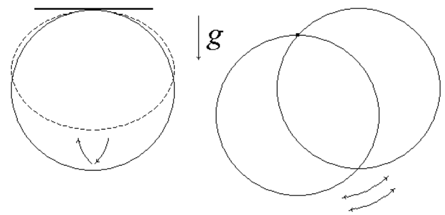



**6.52.** Сплошной однородный диск с радиусом $r = 10$ см колеблется около оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его край. Какой длины *l* должен быть математический маятник, имеющий тот же период, что и диск?

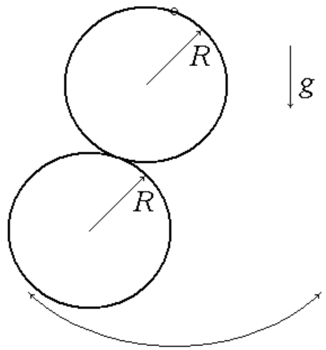




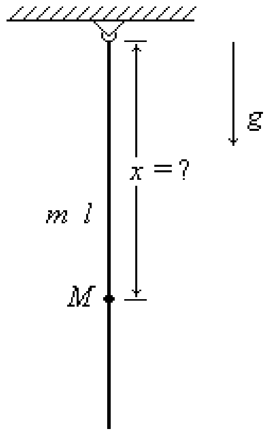

**6.53.** Кольцо из тонкой проволоки совершает малые колебания около горизонтальной оси. В одном случае ось лежит в плоскости кольца, проходя по его верхнему краю; в другом – перпендикулярна к ней и пересекает обод кольца. Определить отношение периодов малых колебаний $T_1$ и $T_2$ при этих двух видах колебательного движения кольца.



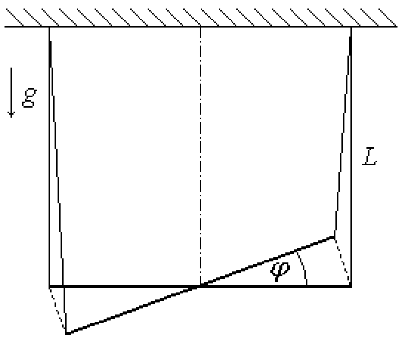

**6.54.** Найти частоту малых колебаний физического маятника, состоящего из двух одинаковых, скрепленных между собой обручей радиусом *R*. Ускорение свободного падения *g*.



**6.55.** Тонкий однородный стержень длиной $l$ качается около оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно к нему. Есть ли такое место на стержне, прикрепив к которому небольшое по размерам тело значительной массы, мы не изменим период колебаний стержня?



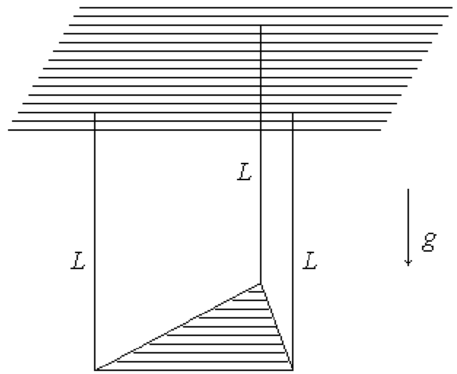

**6.56.** Однородная палочка подвешена за оба конца на двух одинаковых нитях длиной $L$. В состоянии равновесия обе нити параллельны. Найти период $T$ малых колебаний, возникающих после некоторого поворота палочки вокруг вертикальной оси, проходящей через середину палочки.



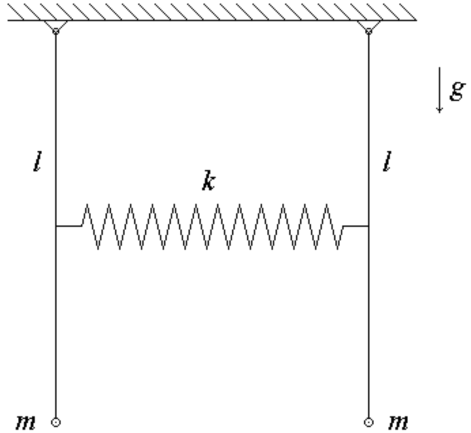

**6.57.** Однородная пластинка, имеющая форму равностороннего треугольника, подвешена за вершины тремя нитями, имеющими одинаковую длину $L$. В состоянии равновесия пластинка горизонтальна и



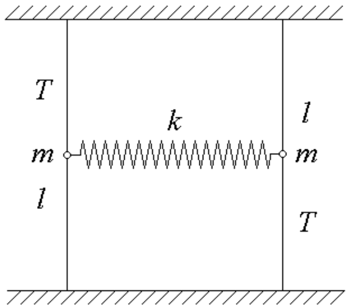
нити вертикальны. Найти период крутильных колебаний пластинки вокруг вертикальной оси (считать, что каждая нить отклоняется на малый угол от вертикали).



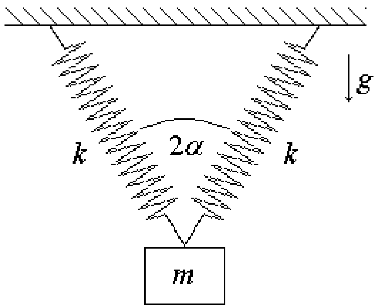

**6.58.** Система состоит из двух одинаковых маятников. Каждый маятник представляет собой шарнирно закрепленный жесткий невесомый стержень длиной $l$, к нижнему концу которого прикреплен груз малого размера массой $m$. Маятники связаны пружиной жесткостью $k$, концы которой закреплены на серединах стержней. В равновесии пружина не деформирована. Найти частоты малых колебаний системы и нормальные координаты. Колебания происходят в плоскости, проходящей через оба стержня, когда они находятся в равновесном положении.



**6.59.** Две одинаковые тонкие невесомые струны длиной $l$ расположены в одной плоскости и натянуты с силой $T$. На серединах струн закреплены грузы массой $m$ каждый. Грузы связаны недеформированной пружиной жесткости $k$. Найти частоты малых нормальных колебаний системы и нормальные координаты. Колебания происходят в плоскости, проходящей через струны.

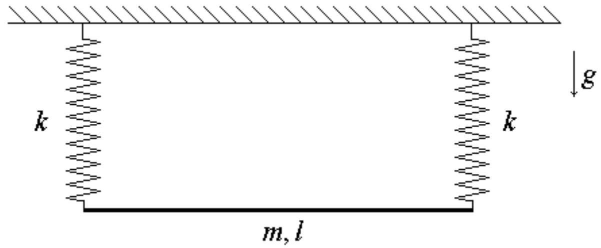



**6.60.** На двух одинаковых пружинах жесткости $k$ подвешен груз массой $m$. Угол между покоящимися пружинами равен $2\alpha$. Найти частоты нормальных колебаний груза в плоскости пружин. Весом пружин пренебречь.

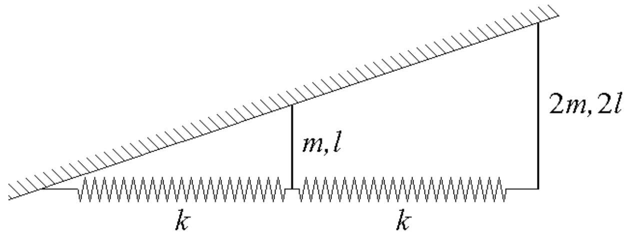



**6.61.** Однородный тонкий стержень длиной $l$ и массой $m$ подвешен горизонтально за концы на двух одинаковых пружинах жесткости $k$. Найти частоты и вид нормальных колебаний.

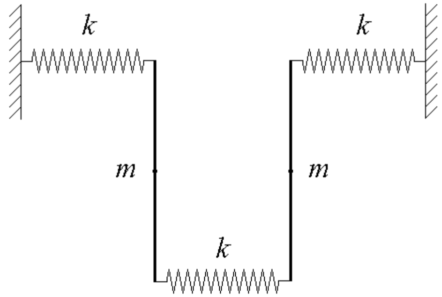




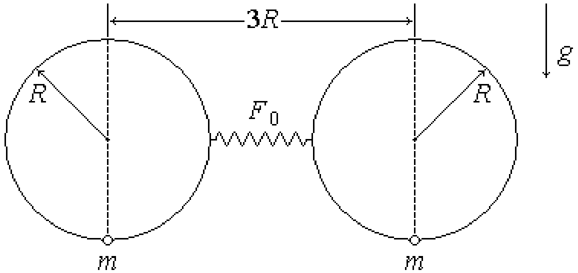

**6.62.** Найти частоты нормальных колебаний системы из двух тонких однородных стержней длиной $l$ и $2l$ с массами $m$ и $2m$, расположенных на гладкой горизонтальной поверхности. Одна пара концов стержней закреплена шарнирно на стенке. Другие концы соединены между собой пружиной жесткости $k$. Такая же пружина соединяет короткий стержень со стенкой. При недеформированных пружинах стержни между собой параллельны, а пружины перпендикулярны стержням.



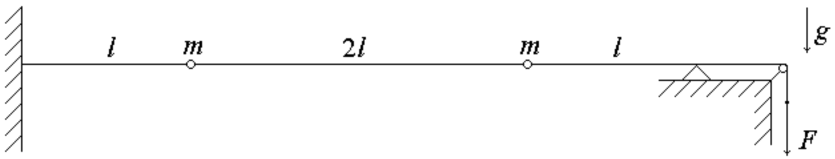

**6.63.** Два одинаковых стержня массой $m$ лежат на гладкой поверхности и могут вращаться относительно осей, проходящих через их середины. К концам стержней прикреплены одинаковые пружины жесткости $k$, как показано на рисунке. В условиях равновесия пружины не деформированы, а стержни параллельны друг другу. Найти частоты нормальных колебаний.



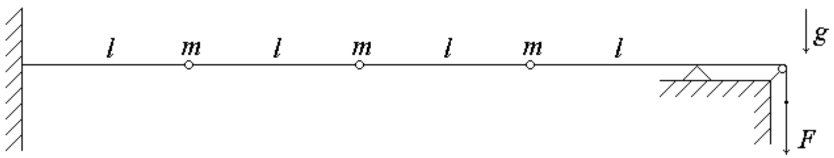
**6.64.** Два одинаковых невесомых диска, имеющих радиусы $R$, расположены в одной вертикальной плоскости и могут свободно вращаться вокруг своих осей. Оси расположены на одном уровне на расстоянии $3R$. К нижним точкам диска прикреплены одинаковые грузы с массами $m$, а ближайшие точки дисков соединены пружиной, натянутой с силой $F_0$. Найти собственные частоты малых колебаний.



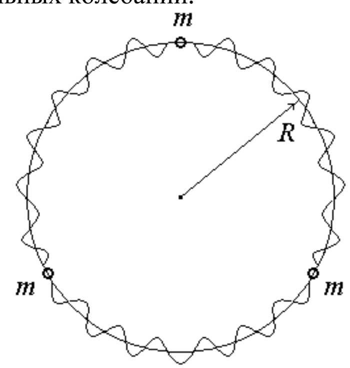

**6.65.** На струне с постоянным натяжением $F$ укреплены две массы по $m$ каждая. Вычислить нормальные частоты гармонических колебаний этой системы. Какие следует задать начальные условия грузам, чтобы они совершали колебательное движение с одной частотой? Отклонения при колебаниях считать очень малыми по сравнению с $l$.



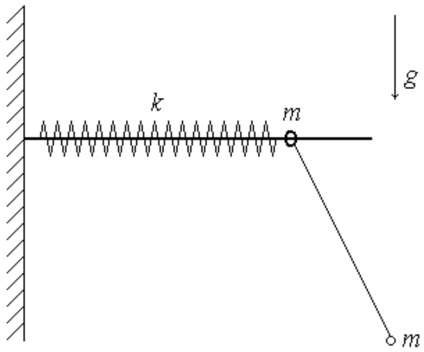

**6.66.** На струне с постоянным натяжением $F$ укреплены три массы по $m$ каждая. Найти частоты нормальных колебаний.




**6.67.** На кольцо радиусом $R$ нанизаны три бусинки массой $m$, скрепленные между собой одинаковыми пружинами жесткости $k$. Найти частоты и вид нормальных колебаний.

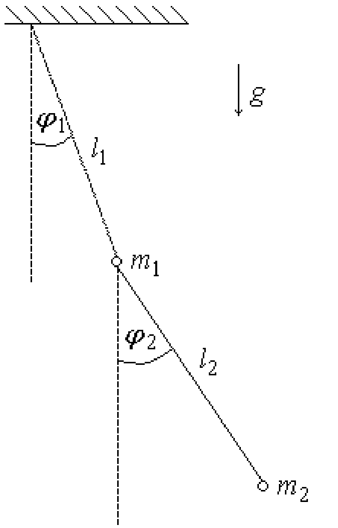



**6.68.** Горизонтальный стержень продет сквозь пружину жесткости $k$. Стержень и пружина одним концом прикреплены к стене. На другом конце пружины находится кольцо массой $m$, которое без трения может скользить по стержню. К кольцу на нерастяжимой невесомой нити длиной $l$ подвешен маленький шарик массой $m$ (такой же, как у кольца). Определить частоту нормальных колебаний системы в предположении, что маятник колеблется все время в одной плоскости, проходящей через стержень. Ускорение свободного падения $g$.

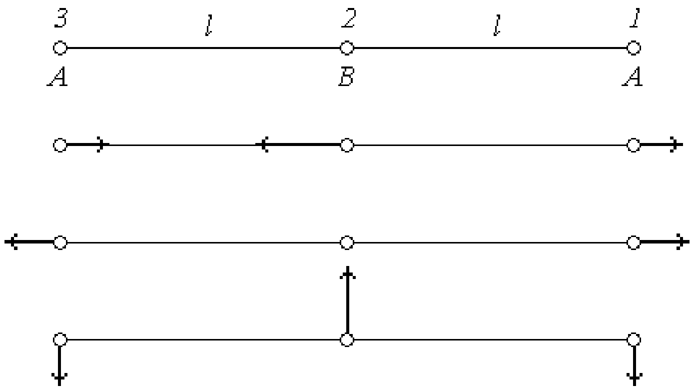


**6.69.** Определить малые колебания двойного плоского маятника: $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, функция Лагранжа которого имеет вид

$$L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) - mgl\left(\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2\right).$$

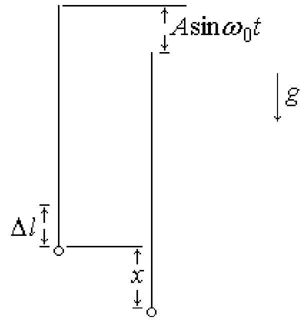



**6.70.** Определить частоты колебаний линейной трехатомной симметричной молекулы *ABA*. Предполагается, что потенциальная энергия молекулы зависит только от изменения расстояний между ближайшими атомами (между *A* и *B* и между *B* и *A*) по квадратичному закону и аналогично от изменения угла $\angle ABA$.






**6.71.** В равновесном состоянии груз, висящий на нижнем конце упругой нити, растягивает ее на $\Delta l$. Верхний конец нити колеблется по вертикали, причем его отклонение от равновесного положения описывается формулой $A\sin\omega_0 t$. Положительное значение отклонений отсчитывается вниз. Предполагая, что нить все время остается натянутой, написать уравнение движения груза, обозначив через $x$ его отклонение от равновесного положения.



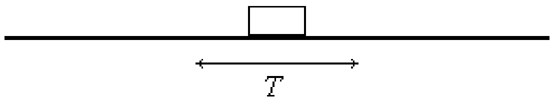

**6.72.** Амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в $e^2$ раз за 50 колебаний. Чему равны логарифмический декремент затухания $\lambda$ и добротность системы $Q$?

**6.73.** Известны собственная частота $\omega_0$ колебаний и коэффициент их затухания $\gamma$. Найти период свободных затухающих колебаний $T$ и логарифмический декремент затухания $\lambda$. Выразить $T$ через $\omega_0$ и $\lambda$. Вычислить относительную ошибку $\delta T$, вносимую в расчет, при замене $T$ на собственный период колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$, если $\lambda = 0{,}628$.

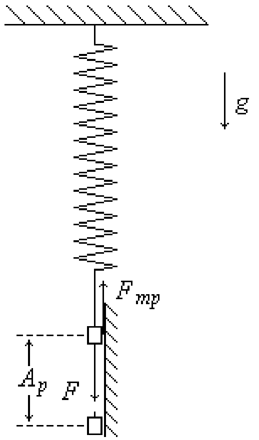
**6.74.** Два последовательных максимальных отклонения математического маятника длиной $l$ от вертикали равны $\varphi_1$ и $\varphi_2$, $\varphi_1 < \varphi_2 \ll 1$. Найти логарифмический декремент затухания $\lambda$ и период колебаний маятника $T$.

**6.75.** Кусок сыра бросили на весы. Три последовательных крайних положения стрелки весов были такие: $a_1 = 560$ г, $a_2 = 440$ г, $a_3 = 520$ г. Какова действительная масса $m$ куска сыра? Чему равен логарифмический декремент затухания $\lambda$ колебаний стрелки весов?

**6.76.** Длинная доска совершает гармоническое колебание в горизонтальном направлении вдоль своей длины с периодом $T = 5$ с. Лежащее на ней тело начинает скользить, когда амплитуда колебания достигает величины $A = 0{,}6$ м. Каков коэффициент трения покоя $\mu$ между грузом и доской?




**6.77.** Тело подвешено на пружине и имеет собственный период $T = 0{,}5$ с. На тело действует направленная вертикально синусоидальная сила $F$ с амплитудой $F_m = 100$ дин и некоторая сила трения. Определить амплитуду $F_{тр}^{(m)}$ силы трения и коэффициент трения (сила трения пропорциональна скорости движения), если амплитуда колебаний при резонансе $A_p$ составляет 5 см.






## ОТВЕТЫ

**6.3.** $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \ \frac{dE}{dt} = 0.$

**6.4.** $\omega = \sqrt{\frac{U_0}{m}\alpha}.$

**6.5.** $x_0 = a, \ \omega = \sqrt{\frac{2D}{ma^2}}.$

**6.6.** $T = \frac{2\sqrt{2mE}}{k}.$

**6.7.** $\Delta\varphi = \pi, \ \omega_T = \omega_U = 2\omega.$

**6.8.** $\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$

**6.9.** $T_c = \frac{1}{2}U_0, \ E_к = \frac{1}{2}U_0.$

**6.10.** $T = \pi(\sqrt{2} + 1)\sqrt{\frac{l}{2g}}\ .$

**6.11.** $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}.$

**6.12.** *а*) $\omega = \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}}$; *б*) $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$

**6.13.** $x(t)=\dfrac{mg}{k}\left(1-\cos(\sqrt{k/m}\,t)\right)$, $T_{\max}=2mg$, $T_{\min}=0$.

**6.14.** $\Delta x < mg/k$.

**6.15.** $x_{\max} = \dfrac{mg}{k} + v\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $t = \left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $n = 0, 1, \ldots$

**6.16.** $x(t) = mg\sin\alpha/k\cdot(1+2\cos(\sqrt{k/m}t))$.

**6.17.** $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1k_2}{(k_1+4k_2)m}}$.

**6.18.** $a = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{2kh}{(M+m)g}}$.

**6.19.** $\omega = \sqrt{k/(M+m)}$, $\Delta x_{\max} = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{2kH}{(M+m)g}}$.

**6.20.** $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}g}{(\sqrt{2}+1)l}}$.

**6.21.** $T = \pi\sqrt{\dfrac{2\mu}{k}}R$.

**6.22.** $T = \pi\sqrt{\dfrac{ml}{P}}$.

**6.23.** $P = \dfrac{4m_1m_2}{m_1+m_2}g$.



**6.24.** $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}+\dfrac{g}{l}}$.

**6.25.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4Ml}{kl+4Mg}}$.

**6.26.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{(mg+kl)l}}$.

**6.27.** $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$.

**6.28.** $\omega = \sqrt{\dfrac{6k}{m}}$.

**6.29.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ma^2}{k_1b_1^2+k_2b_2^2}}$.

**6.30.** $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}-\omega_0^2}$ при условии $m\omega_0^2 < k$.

**6.31.** $\omega = \sqrt{\dfrac{2(m_1-m_2)g}{(m_1+m_2)l}}$.

**6.32.** $\omega = \sqrt{\dfrac{m_1g\sqrt{1-(m_2/m_1)^2}}{(M/2+m_1)R}}$.

**6.33.** $l_{\max} = (x_2-x_1)_{\max} = l\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$, $l_{\min} = (x_2-x_1)_{\min} = l\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$.

**6.34.** $T_c = \dfrac{U_0}{1+m_1/m_2}$, $E_к = \dfrac{U_0}{1+m_2/m_1}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$, $q_{\max} = \sqrt{\dfrac{2U_0/k}{1+m_2/m_1}}$.

**6.35.** $\omega = \sqrt{\dfrac{(m_1+m_2)g}{m_1 l}}$.

**6.36.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M\,l}{(M+m)g}}$.

**6.37.** $\omega = \sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\dfrac{g}{r}}$.

**6.38.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

**6.39.** $\omega = \dfrac{d}{2}\sqrt{\dfrac{\rho g}{m}\pi}$ .

**6.40.** $\omega = \sqrt{2\dfrac{g}{l}}$.

**6.41.** $\cos\theta_0 = \dfrac{g}{\omega_0^2 r}$; $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{g^2}{\omega_0^4 r^2}}$.

**6.42.** $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+\dfrac{1}{2}m}}$.

**6.43.** $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{3(R-r)}}$.



**6.44.** $\omega = \sqrt{\dfrac{5g}{7(R-r)}}$.

**6.45.** $\omega = \sqrt{\dfrac{120g}{173r}}$.

**6.46.** $\omega = \sqrt{\dfrac{60g}{149r}}$.

**6.47.** $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r\sqrt{2}}}$.

**6.48.** $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}g}{2l}}$.

**6.49.** $\omega = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\dfrac{g}{l}}$.

**6.50.** $\omega = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}}{5}\dfrac{g}{l}}$.

**6.51.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$.

**6.52.** $l = \dfrac{3}{2}r = 15$ см..

**6.53.** $T_2/T_1 = 2/\sqrt{3}$.

**6.54.** $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{3R}}$.

**6.55.** $x = \dfrac{2}{3}l$.

**6.56.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{3g}}$.

**6.57.** $T = \pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.

**6.58.** $\omega_1^2 = \dfrac{g}{l}$, $\omega_2^2 = \dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{2m}$ – нормальные частоты.

$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1)$, $\psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = B_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$ – нормальные колебания ($\varphi_1$ и $\varphi_2$ – углы отклонения маятников).

**6.59.** $\omega_1 = 2\sqrt{\dfrac{T}{ml}}$, $\omega_2 = 2\sqrt{\dfrac{T}{ml} + \dfrac{k}{2m}}$ – нормальные частоты.

$y_1 = x_1 + x_2 = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t$, $y_2 = x_2 - x_1 = A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t$ – нормальные колебания ($x_1$ и $x_2$ – смещения грузов перпендикулярно струнам).

**6.60.** $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}\cos\alpha$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}\sin\alpha$.

**6.61.** $\omega_1 = \sqrt{6\dfrac{k}{m}}$ – частота колебаний значений угла поворота стержня вокруг центра масс; $\omega_2 = \sqrt{2\dfrac{k}{m}}$ – частота колебаний положения центра масс.



**6.62.** $\omega_{1,2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3(5 \pm \sqrt{17})\dfrac{k}{m}}$.

**6.63.** $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$, $\omega_2 = 3\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

**6.64.** $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{mg + F_0}{mR}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{mg + 3F_0}{mR}}$.

**6.65.** При $t = 0$ $y_1 = y_2$, $\dot{y}_1 = \dot{y}_2$ колебания происходят с частотой $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{F}{ml}}$. При $t = 0$ $y_1 - \dfrac{mgl}{F} = \dfrac{mgl}{F} - y_2$, $\dot{y}_1 = -\dot{y}_2$ колебания происходят с частотой $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2F}{ml}}$.

**6.66.** $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2F}{ml}}$, $\omega_{2,3} = \sqrt{\dfrac{F}{ml}(2 \pm \sqrt{2})}$.

**6.67.** $\omega = \sqrt{3\dfrac{k}{m}}$.

**6.68.** $\omega_{1,2} = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{2m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{g}{l}\right)^2 + \left(\dfrac{k}{2m}\right)^2}}$.

**6.69.** $\omega_{1,2} = \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})\dfrac{g}{l}}$.

**6.70.** $\omega_a = \sqrt{\dfrac{k_1 M}{m_A m_B}}$, $\omega_{s1} = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_A}}$ – для продольных колебаний; $\omega_{s2} = \sqrt{\dfrac{2k_2 M}{m_A m_B}}$ – для поперечных колебаний.

**6.71.** $\ddot{x} + \dfrac{g}{\Delta l}x = \dfrac{gA}{\Delta l}\sin\omega_0 t.$

**6.72.** $\lambda = \dfrac{1}{25}, \quad Q = 25\pi.$

**6.73.** $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad \lambda = 2\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{1 + 2(\lambda/2\pi)^2}, \quad \delta T = 1\%.$$

**6.74.** $\lambda = 2\ln\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}\left(1 + \dfrac{2}{\pi^2}\ln^2\left(\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)}.$

**6.75.** $mg = \dfrac{a_1a_3 - a_2^2}{a_1 + a_3 - 2a_2} = 488$ г, $\quad \lambda = 0{,}811.$

**6.76.** $\mu = \dfrac{A}{g}(2\pi/T)^2 = 0{,}0965.$

**6.77.** $F_{тр}^{(m)} = F_m = 100$ дин, $\quad \alpha = \dfrac{F_m T}{2\pi A_p} = \dfrac{5}{\pi}$ г/с.



## РЕШЕНИЯ

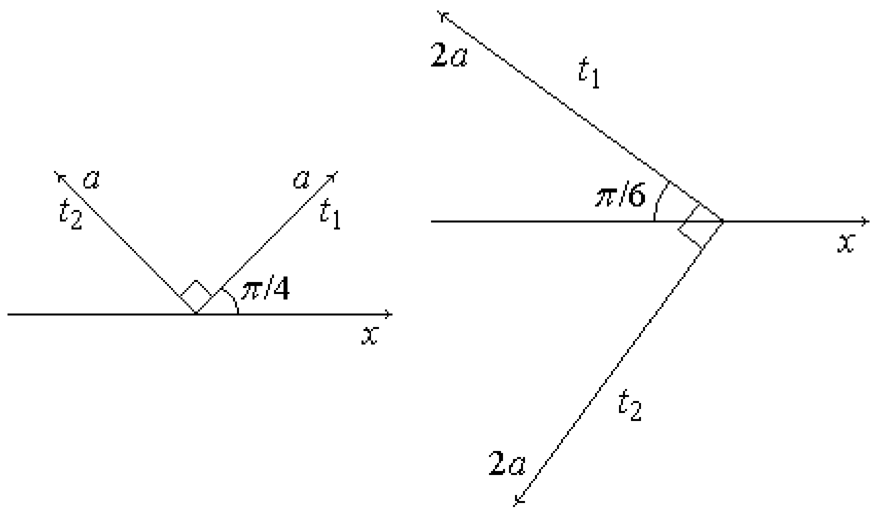
**6.1.** Векторная диаграмма – графическое изображение меняющихся по закону синуса (косинуса) величин и соотношений между ними при помощи направленных отрезков – векторов. Векторные диаграммы широко применяются в электротехнике, акустике, оптике, теории колебаний и т. д.

Гармоническое (то есть синусоидальное) колебание может быть представлено графически в виде проекции на некоторую ось (обычно берут ось координат $Ox$) вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega$. Длина вектора соответствует амплитуде, угол поворота относительно оси ($Ox$) – фазе.

На рис. *а* изображена векторная диаграмма колебания

$$x = a\cos(\omega t + \pi/4)$$

в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi/(2\omega)$.




*а* *б*

На рисунке *б* в те же моменты времени изображена векторная диаграмма колебания

$$x = -2a\cos(\omega t - \pi/6).$$

**6.2.** Для смещения

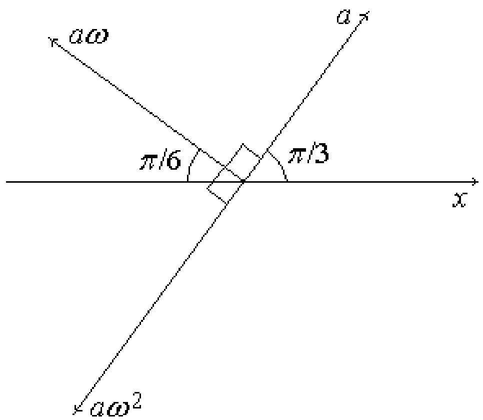
$$x = a\cos(\omega t + \pi/3)$$

скорость $\dot{x}$ и ускорения $\ddot{x}$ равны

$$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t + \pi/3) = a\omega\cos(\omega t + \pi/3 + \pi/2),$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos(\omega t + \pi/3) = a\omega^2\cos(\omega t + \pi/3 + \pi).$$

На рисунке изображена соответствующая векторная диаграмма.




**6.3.** Частица движется вдоль оси $x$ под действием силы, направленной по этой оси и равной

$$F_x = -k(x - x_0).$$

В положении равновесия частицы сила должна быть равной нулю. Из выражения для силы следует, что $x_0$ – координата равновесного положения частицы. По условию потенциальная энергия частицы в



положении равновесия равна $U_0$. В произвольной точке частица имеет потенциальную энергию:

$$U = U_0 - \int_{x_0}^{x} F_x dx = U_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

Полная энергия частицы равна сумме ее кинетической и потенциальной энергии:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

Покажем, что она не меняется со временем. С этой целью вычислим ее производную по времени:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + k(x - x_0)).$$

Другие силы, кроме $F_x$, на частицу не действуют. Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0), \text{ или } m\ddot{x} + k(x - x_0) = 0.$$

В силу этого равенства получаем:

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

Таким образом, полная энергия частицы сохраняется, и движение частицы не зависит от выбора значения $U_0$.

**6.4.** По условию известна потенциальная энергия частицы:

$$U = U_0(1 - \cos\alpha x).$$

Сила, действующая на частицу, определяется равенством

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha U_0 \sin\alpha x.$$

По 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = -\alpha U_0 \sin\alpha x.$$

Для малых колебаний уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha^2 U_0}{m} x.$$

Частота таких колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{U_0}{m}}\alpha.$$

Частоту можно было найти, пользуясь энергетическими соображениями. Для гармонических (малых) колебаний потенциальная энергия связана с их частотой равенством

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

В рассматриваемом случае потенциальная энергия для малых колебаний равна

$$U = U_0(1 - \cos\alpha x) = 2U_0 \sin^2(\alpha x/2) \cong \frac{1}{2} U_0 \alpha^2 x^2.$$

Сравнение двух выражений дает искомую частоту.



**6.5.** Частица находится в потенциальном поле

$$U = -2D\left(\frac{a}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2\right).$$

Найдем силу, которая действует на частицу в этом поле:

$$F = -\frac{dU}{dx} = 2D\left(-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3}\right).$$

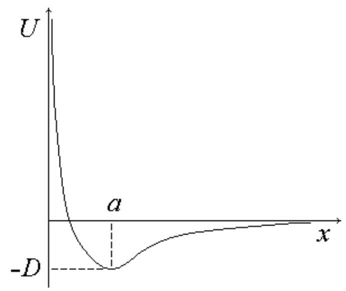
Положения равновесия частицы определяются из условия, что эта сила равна нулю:

$$F = 2D\left(-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3}\right) = 0.$$

Равенство дает два значения координаты точки равновесия: $x = a$ и $x = \infty$. Равновесным является то положение частицы, в котором вторая производная от потенциальной энергии положительна:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2D\left(2\frac{a}{x^3} - 3\frac{a^2}{x^4}\right) > 0.$$

Последовательно подставляя полученные значения координат точек равновесия, находим, что устойчивым является положение частицы с координатой $x = a$. В этой точке частица имеет минимальную потенциальную энергию, равную $-D$ (см. рисунок).



Пусть частица находится в малой окрестности своего устойчивого положения равновесия. Введем величину $q$ соответствующего отклонения координаты:

$$x = a + q.$$

Разлагая выражение для силы, действующей на частицу, в ряд по малым значениям $q$ и ограничиваясь малыми величинами первого порядка, получим:

$$F = -\frac{2D}{a^2}q.$$

Частота малых колебаний частицы вблизи точки устойчивого равновесия равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{ma^2}}.$$

**6.6.** Полная механическая энергия частицы равна сумме кинетической и потенциальной энергии:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x).$$

По условию потенциальная энергия равна

$$U(x) = k|x|,\ k > 0.$$

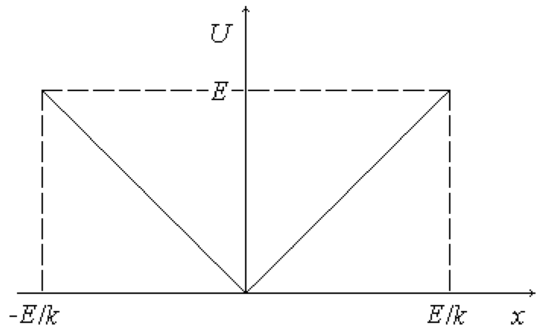
На рисунке показана зависимость потенциальной энергии от координаты частицы. Подставляя это выражение для $U(x)$ в полную энергию, найдем производную:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - k|x|)}{m}}.$$



Это обыкновенное дифференциальное уравнение решается методом разделения переменных:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2(E - k|x|)/m}}.$$




Замечаем, что в крайних положениях частицы ее скорость равна нулю. Это дает пределы изменения координаты частицы в пределах периода:

$$|x| \le \frac{E}{k}.$$

Интегрируя написанное дифференциальное уравнение по периоду, получим:

$$T = \int_{-E/k}^{E/k} \frac{dx}{\sqrt{2(E - k|x|)/m}} = 2\int_{0}^{E/k} \frac{dx}{\sqrt{2(E - kx)/m}} = \frac{2\sqrt{2mE}}{k}.$$

**6.7.** В общем случае колебательное движение гармонического осциллятора описывается функцией

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где $x_m$ – амплитуда колебаний, $\omega$ – частота, $\varphi$ – фаза.

Вычислим кинетическую энергию осциллятора:

$$T = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\mu x_m^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{4}\mu x_m^2\omega^2(1+\cos(2\omega t+2\varphi)) .$$

Здесь $\mu$ – приведенная масса.

Вычислим также потенциальную энергию осциллятора:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{4}kx_m^2(1-\cos(2\omega t+2\varphi)) =$$

$$= \frac{1}{4}kx_m^2(1+\cos(2\omega t+2\varphi+\pi)).$$

Из этих выражений для $T$ и $U$ видно, что частота изменения во времени кинетической и потенциальной энергии в два раза больше частоты осциллятора:

$$\omega_T = \omega_U = 2\omega.$$

Сравнение $T$ и $U$ показывает, что они изменяются во времени со сдвигом по фазе $\Delta\varphi = \pi$, т. е. находятся в противофазе.

Найдем выражение для полной энергии осциллятора:

$$E = T+U = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}x_m^2(\mu\omega^2+k) + \frac{1}{4}x_m^2(\mu\omega^2-k)\cos(2\omega t+2\varphi).$$

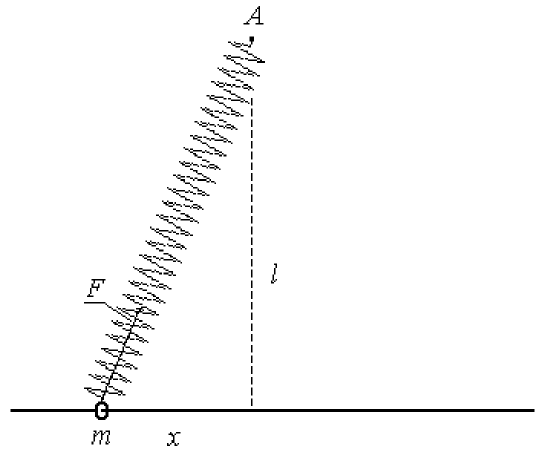
Полная энергия осциллятора остается постоянной при изменении времени. Поэтому частота осциллятора равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

**6.8.** Потенциальная энергия натянутой с силой $F$ пружины равна произведению $F$ на удлинение $\delta l$ пружины. Действительно, пусть приближенно $F(l') = F(l) + a(l'-l)$. Тогда



$$U = \int_l^{l+\delta l} F(l')dl' = F(l)\delta l + \alpha\delta l^2/2.$$




При $x \ll l$ имеем:

$$\delta l = \sqrt{l^2+x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

так что потенциальная энергия пружины равна

$$U = Fx^2/2l + O(x^4) \cong Fx^2/2l.$$

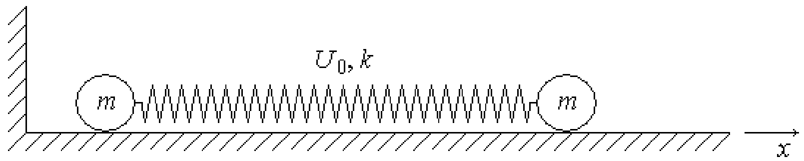
Поскольку кинетическая энергия есть

$$T = m\dot{x}^2/2,$$

то частота колебаний колечка равна

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

**6.9.** Когда нить пережгут, пружина начнет расправляться, правый шарик придет в движение от стенки вдоль горизонтальной поверхности. После того, как система шариков, скрепленных пружиной, оторвется от стенки, на нее не будут действовать никакие силы вдоль направления движения, и она будет двигаться с постоянной скоростью центра масс, а сами шарики будут совершать колебательное движение около центра.




Скорость центра масс $\dot{x}_c$ находится из закона сохранения импульса. Пусть $x_1$ и $x_2$ – координаты левого и правого шариков соответственно, их скорости $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Тогда имеем:

$$2m\dot{x}_c = m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 \rightarrow \dot{x}_c = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2).$$

В момент отрыва пружина не будет деформирована, упругая сила равна нулю, и, следовательно, воздействие левого шарика на стенку исчезнет, как исчезнет и воздействие стенки на шарик (и больше никаких сил вдоль оси $x$ не будет). Но в этот момент времени левый шарик еще не пришел в движение, его скорость равна нулю $\dot{x}_1 = 0$. Потенциальная энергия сжатой пружины полностью перешла в кинетическую энергию правого шарика:

$$U_0 = \frac{m\dot{x}_2^2}{2}.$$

Это позволяет найти скорость центра масс, кинетическую энергию центра масс $T_c$ и энергию колебаний $E_к$:

$$\dot{x}_2 = 2\dot{x}_c \rightarrow U_0 = 2m\dot{x}_c^2 \rightarrow T_c = \frac{1}{2}2m\dot{x}_c^2 = \frac{1}{2}U_0 \rightarrow E_к = \frac{1}{2}U_0.$$



Таким образом,

$$T_c = \frac{1}{2}U_0,\ E_к = \frac{1}{2}U_0.$$

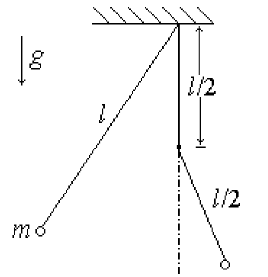
**6.10.** Движение небольшого тела, подвешенного на нити длиной $l$ и отклоненного от равновесного положения, происходит так же, как в случае математического маятника, период которого равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При достижении телом точки равновесного положения нить касается гвоздя, после чего движение тела происходит так же, как движение математического маятника с периодом

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

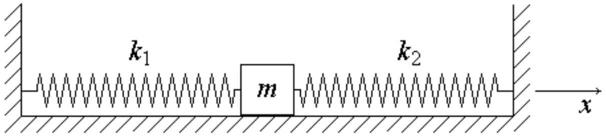
(при вдвое более короткой нити).




При движении тела в обратном направлении имеет место аналогия с математическим маятником вначале длины $l/2$, а затем длины $l$. Поэтому в рассматриваемом случае период малых колебаний тела равен

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \pi(\sqrt{2} + 1)\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

**6.11.** Пусть $x$ – смещение груза из положения равновесия. Эта же величина является растяжением одной пружины и сжатием другой (в положении равновесия груза пружины не растянуты).




По 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x.$$

Движение груза описывается уравнением колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}.$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}.$$

**6.12.** Рассмотрим случай, когда пружины соединены последовательно (случай *а*). Пусть $x_1$ и $x_2$ – растяжения первой и второй пружин соответственно. Груз опустится на расстояние

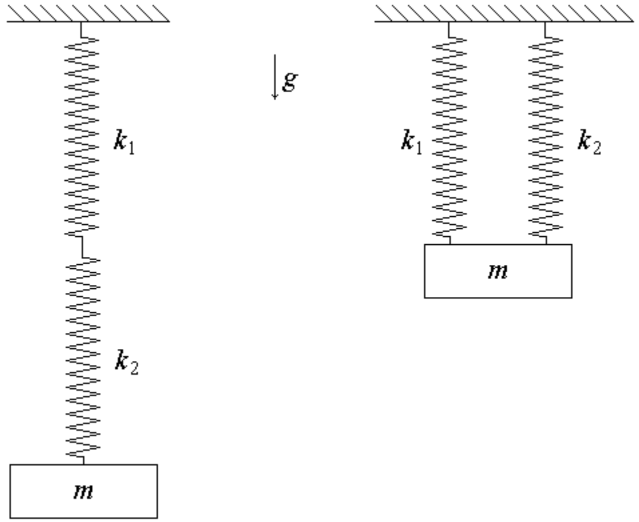
$$x = x_1 + x_2.$$

На груз действуют сила тяжести $mg$ и сила натяжения $k_2x_2$ (со стороны второй пружины). Под их действием груз совершает колебательное движение. Уравнение движения груза согласно 2-му закону Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - k_2 x_2.$$



*а*) последовательное соединение    *б*) параллельное соединение




Обе пружины взаимодействуют между собой с одинаковой силой. Это дает равенство:

$$k_1 x_1 = k_2 x_2.$$

В результате движение груза описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - k_2 x_2, \\ k_1 x_1 = k_2 x_2, \\ x = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Исключая величины $x_1$ и $x_2$, получим одно уравнение:

$$m\ddot{x} = mg - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x.$$

Груз в рассмотренном случае будет колебаться с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

При параллельном соединении пружин (случай *б*) на груз будут действовать непосредственно обе пружины с силами $k_1 x$ и $k_2 x$ соответственно. Уравнение движения груза будет иметь вид

$$m\ddot{x} = mg - (k_1 + k_2)x.$$

Для этого случая частота колебаний груза равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

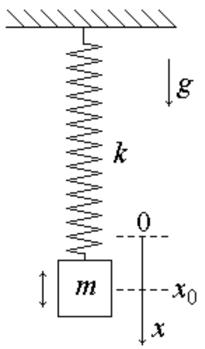
**6.13.** После того как груз без толчка отпускают, он начинает совершать колебательное движение около положения равновесия с координатой $x_0$ (координата $x$ отсчитывается от положения центра массы груза при нерастянутой пружине).

По 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = -kx + mg.$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$x = x_0 + x_m \cos(\omega t + \alpha).$$






Уравнение удовлетворяется при $x_0 = mg/k$ и частоте колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$.

Амплитуду колебаний $x_m$ и начальную фазу $\alpha$ найдем из начальных условий:

$$t = 0 \quad x = 0, \dot{x} = 0.$$

Они удовлетворяются при $\alpha = 0$ и $x_m = -x_0$. Таким образом, решение задачи имеет вид

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos(\sqrt{k/m}\, t)\right).$$

Сила натяжения пружины равна

$$T = kx(t) = mg\left(1 - \cos(\sqrt{k/m}\, t)\right).$$

Максимальное и минимальное значения силы натяжения равны

$$T_{\max} = 2mg, \; T_{\min} = 0.$$

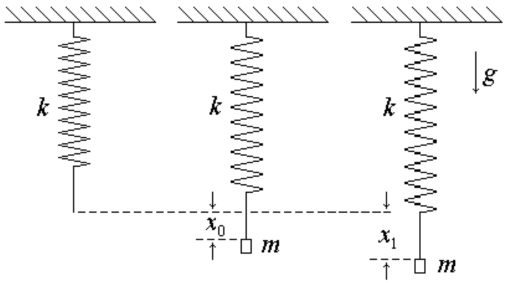
**6.14.** Задача может быть решена аналогично решению задачи 6.13. По 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = -kx + mg.$$

Здесь координата $x$ отсчитывается от свободного конца нити при отсутствии груза и, следовательно, для нерастянутой пружины (на рисунке левая пружина). После подвешивания груза пружина растянется. Обозначим ее соответствующее удлинение через $x_0$ (средняя пружина). Значение $x_0$ определяется из условия равновесия груза (при отсутствии его колебаний):

$$kx_0 = mg \quad \rightarrow \quad x_0 = mg / k.$$

Груз оттягивается вниз на некоторое расстояние $\Delta x = x_1 - x_0$ (на рисунке правая пружина). Последующее колебательное движение груза описывается приведенным выше дифференциальным уравнением.




Решение этого уравнения должно удовлетворять начальным условиям:

$$t = 0 \quad x = x_1, \dot{x} = 0.$$

Уравнению и начальным условиям удовлетворяет функция

$$x(t) = mg/k + (x_1 - mg/k)\cos\omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{k/m}.$$

Координата $x$ изменяется от значения $x_1$ в нижнем положении груза до значения $2mg/k - x_1$ в верхнем положении, если нить остается натянутой, т. е. ее натяжение отлично от нуля.

Сила натяжения нити равна

$$T = kx(t) = mg + (kx_1 - mg)\cos\omega t.$$

По условию нить все время должна быть натянутой: $T > 0$. В нижнем положении груза сила натяжения имеет максимальное значение. Она не исчезает и в верхнем положении при выполнении неравенства

$$x_1 < 2mg/k.$$

С учетом того, что вначале, до того как оттянули груз, пружина уже была растянута, находим, насколько необходимо оттянуть груз вниз:



$$\Delta x = x_1 - mg/k < mg/k.$$

Решение задачи может быть найдено значительно проще, если воспользоваться законом сохранения энергии. Физическая система, состоящая из груза и пружины, обладает кинетической энергией груза, потенциальной энергией пружины и потенциальной энергией груза в поле тяжести. Согласно закону сохранения энергии имеем:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}kx_1^2 - mgx_1.$$

В крайних положениях груза (самом низком и самом высоком) его скорость равна нулю $\dot{x} = 0$. Для этих точек уравнение энергии преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}k(x^2 - x_1^2) = mg(x - x_1).$$

Это уравнение имеет два решения: $x = x_1$ и $x = 2mg/k - x_1$. Нить будет натянута, если $x > 0$, что дает искомое значение $\Delta x < mg / k$.

**6.15.** Задачу будем решать в системе отсчета, движущейся со скоростью $v$ свободного конца пружины. Поскольку эта скорость постоянная, то введенная система отсчета инерциальная, и в ней справедливы законы Ньютона. В этой системе отсчета тело вместе со столом первоначально будет падать со скоростью $v$ (см. рисунок а). При этом тело будет оказывать давление на стол. Обозначим эту силу давления через $N$. По 3-му закону Ньютона с такой же силой стол будет воздействовать на тело, препятствуя его ускорению. Сумма этой силы и упругой силы пружины будут уравновешивать вес тела:

$$N + kx = mg.$$

Вместе с тем по мере падения тела будет происходить растяжение пружины (скорость ее свободного конца во введенной системе отсчета равна нулю) и наступит момент, когда упругая сила уравновесит силу тяжести, а сила давления тела на стол станет равной нулю:

$$N = 0, \ kx_0 = mg.$$

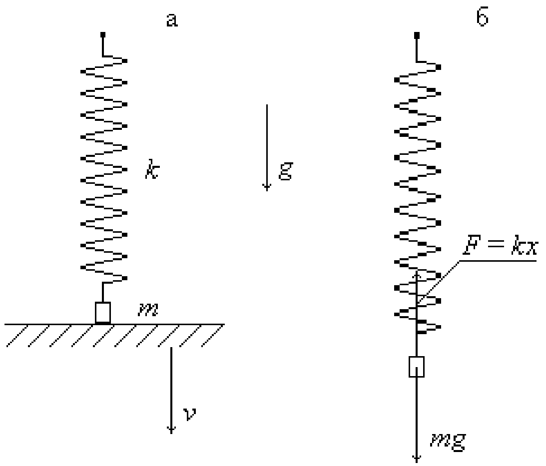
В этот момент стол оторвется от тела, а тело начнет свободно колебаться под действием силы тяжести и упругой силы пружины (см. рисунок б).

Направим ось $x$ вниз, отсчитывая координату тела от его положения при нерастянутой пружине. Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = -kx + mg.$$

Это уравнение описывает колебания тела с частотой

$$\omega = \sqrt{k/m}.$$




Начальные данные соответствуют моменту отрыва стола от тела:

$$t = 0 \;\; x = x_0 = \frac{mg}{k}, \;\; \dot{x} = v.$$

Решение уравнения движения тела согласно общей теории ищем в виде

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Из начальных данных находим:



$$A = 0, \;\; B = \frac{v}{\omega}.$$

Таким образом, растяжение пружины меняется со временем следующим образом:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Максимальное растяжение пружины наступает в моменты времени, когда синус становится равным единице:

$$x_{\max} = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}, \;\; t = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\sqrt{\frac{m}{k}}, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

Данная задача может быть решена более простым способом, если использовать энергетический подход.

Запишем закон сохранения энергии для произвольного момента времени:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx_0.$$

Когда достигается максимальное (или минимальное) растяжение пружины, скорость тела становится равной нулю. Полагая $\dot{x} = 0$, получим квадратное уравнение относительно $x$. Подставляя выражение для $x_0$, приведем его к виду

$$\left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{m}{k}v^2.$$

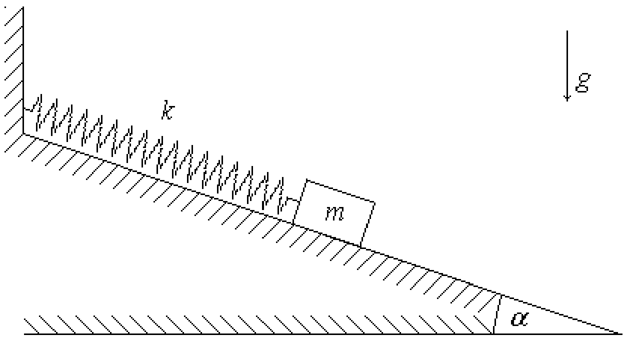
Его корни дают полученное выше максимальное и минимальное растяжение пружины.

**6.16.** На тело действуют сила тяжести, нормальная реакция со стороны плоскости и упругая сила пружины. В случае покоящегося тела равнодействующая всех этих сил равна нулю. Проектируя эти силы на наклонную плоскость, находим первоначальное растяжение пружины:

$$mg\sin\alpha - kx_0 = 0 \to x_0 = \frac{mg}{k}\sin\alpha.$$

По условию тело передвигают по наклонной плоскости, увеличивая начальное растяжение пружины в три раза, и отпускают. Это дает начальные данные, необходимые для решения задачи:

$$t = 0 \quad x = 3x_0 = 3\frac{mg}{k}\sin\alpha, \ \dot{x} = 0.$$




Положение тела в моменты $t > 0$ определим, пользуясь 2-м законом Ньютона. В проекции на наклонную плоскость имеем:

$$m\ddot{x} = -kx + mg\sin\alpha.$$

Колебания тела происходят около положения равновесия. Вводим отклонение координаты тела от его равновесного положения:

$$q = x - x_0.$$

Уравнение движения тела примет вид

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}q\,.$$

Это уравнение колебаний с частотой



$$\omega = \sqrt{k/m}$$

при начальных данных

$$t = 0 \quad q = 2x_0 = 2\frac{mg}{k}\sin\alpha, \ \dot{q} = 0.$$

По общей теории решение ищем в виде

$$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Из начальных данных находим коэффициенты $A$ и $B$:

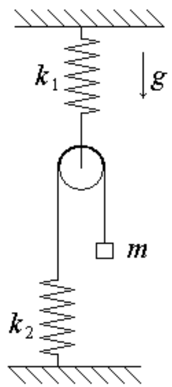
$$A = 2x_0, \quad B = 0.$$

В результате имеем:

$$x(t) = mg\sin\alpha/k\cdot(1 + 2\cos(\sqrt{k/m}t)).$$

**6.17.** На груз непосредственно действуют сила тяжести $mg$ и натяжение нити $T$. Обозначим через $z$ расстояние, на которое опускается груз. Уравнение движения груза согласно 2-му закону имеет вид

$$m\ddot{z} = mg - T.$$



Поскольку трение между нитью и блоком отсутствует и нить невесомая, то сила натяжения ее не меняется по длине и одинакова слева и справа от блока. Обозначая через $y$ растяжение пружины, к которой присоединена нить, запишем с учетом невесомости пружины равенство сил натяжения нити и пружины:

$$0 = k_2 y - T.$$

Аналогично, учитывая невесомость блока и верхней пружины, запишем:

$$0 = -k_1 x + 2T,$$

где $x$ – растяжение верхней пружины.

Смещение груза $z$ и растяжения пружин $x$ и $y$ связаны геометрическим равенством:

$$z = 2x + y.$$

В результате движение груза описывается следующей системой, включающей дифференциальное уравнение и алгебраические соотношения:

$$\begin{cases} m\ddot{z} = mg - T, \\ 0 = k_2 y - T, \\ 0 = -k_1 x + 2T, \\ z = 2x + y. \end{cases}$$

Три алгебраических соотношения системы имеют место только в случае, если нить все время остается натянутой. Исключая из них величины $x$ и $y$, найдем выражение для натяжения нити $T$ через смещение груза $z$:

$$T = \frac{k_1 k_2}{k_1 + 4k_2} z.$$



Подставляя это выражение для $T$ в дифференциальное уравнение, приведем его к виду

$$\ddot{z} = g - \frac{k_1 k_2}{(k_1 + 4k_2)m} z.$$

Частота гармонических колебаний груза равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + 4k_2)m}}.$$

Колебания с такой частотой наблюдаются только при натянутой все время нити, т. е. должно выполняться неравенство $T(t) \geq 0$, а следовательно, и неравенства $z(t) \geq 0$.

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} + A\cos(\omega t + \alpha).$$

Чтобы нить была все время натянутой, амплитуда колебаний – величина $A$ должна быть меньше некоторой величины:

$$A \leq \frac{g}{\omega^2}.$$

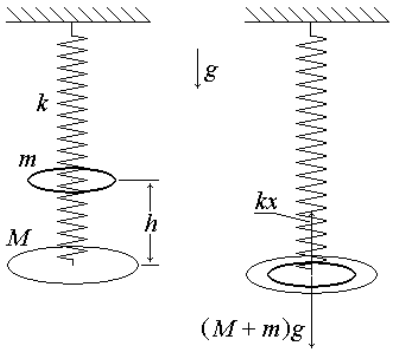
**6.18.** Пусть $x$ – растяжение пружины. На диск с кольцом действуют сила тяжести, равная $(M+m)g$, и упругая сила $-kx$ со стороны пружины.

Запишем уравнение движения диска совместно с кольцом:

$$(M + m)\ddot{x} = -kx + (M + m)g.$$

Это уравнение дополним начальными условиями: положением диска до падения на него кольца и скоростью диска в результате падения на него кольца. Начальное положение диска определяется из условия равенства действующей на него упругой силы со стороны пружины и силы тяжести:

$$kx(0) = Mg \rightarrow x(0) = Mg/k.$$




Кольцо, падая на диск с высоты *h*, приобретает скорость, равную

$$v=\sqrt{2gh}.$$

Удар кольца о диск абсолютно неупругий. Согласно закону сохранения импульса имеем равенство

$$(M+m)\dot{x}(0)=mv,$$

откуда находим начальную скорость диска с кольцом:

$$\dot{x}(0)=\frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}.$$

Таким образом, совместное движение диска с кольцом описывается следующей системой дифференциального уравнения и начальных условий:

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\omega^2x+g,\\ x(0)=Mg/k,\\ \dot{x}(0)=\dfrac{m}{M+m}\sqrt{2gh}.\end{cases}$$

Эта система описывает колебательное движение диска с частотой



$$\omega=\sqrt{k/(M+m)}.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t)=(M+m)g/k+A\sin\omega t+B\cos\omega t.$$

Постоянные *A* и *B* находятся из начальных условий:

$$A=\frac{m}{M+m}\frac{\sqrt{2gh}}{\omega},\ \ B=-\frac{mg}{k}.$$

Амплитуда колебаний находится из равенства

$$a=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Подставляя в него выражения для *A* и *B*, найдем значение амплитуды:

$$a=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(M+m)g}}.$$

**6.19.** Колебательное движение чашки с грузом описывается согласно 2-му закону Ньютона дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$(M+m)\ddot{x}=-kx+(M+m)g,$$

где *x* – сжатие пружины.

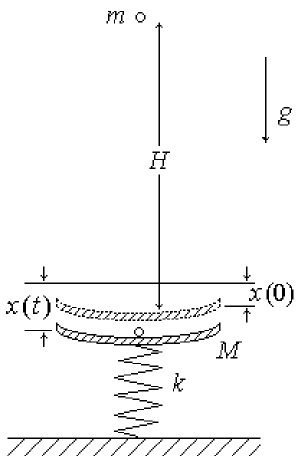
До падения на чашу груза пружина была сжата под действием веса самой чаши:

$$kx=Mg,$$

так что пружина при $t = 0$ имеет начальное сжатие, равное

$$x(0)=Mg/k.$$

Это одно начальное условие для решения уравнения движения.




Другое условие получим, воспользовавшись законами сохранения энергии и импульса. На высоте $H$ груз обладает потенциальной энергией. При падении груза эта энергия будет переходить в кинетическую энергию. Согласно закону сохранения энергии имеем:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH,$$

откуда находим скорость груза непосредственно перед попаданием его на чашу:

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Из закона сохранения импульса найдем начальную скорость чаши с грузом:

$$(M+m)\dot{x}(0)=mv \;\Rightarrow\; \dot{x}(0)=\frac{m}{M+m}\sqrt{2gH}.$$

Это второе начальное условие для решения уравнения движения.

Приведенное выше уравнение движения – линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$x=x_{част}+x_{лин}.$$



Частное решение находится из условия отсутствия колебаний:

$$x_{част}=(M+m)g/k.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x_{лин}=A\cos\omega t+B\sin\omega t,$$

где $\omega$ – частота гармонических колебаний груза на весах. Она равна

$$\omega=\sqrt{k/(M+m)}.$$

В результате общее решение принимает вид

$$x(t)=(M+m)g/k+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

Подстановка первого начального условия дает величину $A$:

$$A=-mg/k.$$

Подстановка второго начального условия позволяет найти величину $B$:

$$B=\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{2kH}{g(M+m)}}.$$

Таким образом, окончательный вид решения следующий:

$$x(t)=\frac{(M+m)g}{k}-\frac{mg}{k}\cos\omega t+\frac{mg}{k}\sqrt{\frac{2kH}{(M+m)g}}\sin\omega t.$$

Амплитуда колебаний определяется коэффициентами $A$ и $B$:

$$\Delta x_{\max}=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Подстановка выражений для этих коэффициентов дает амплитуду колебаний груза:

$$\Delta x_{\max} = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kH}{(M+m)g}}.$$

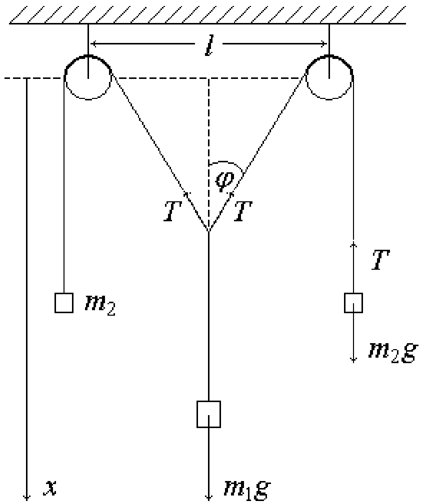
**6.20.** На груз с массой $m_1$ действуют сила тяжести $m_1g$ и вертикальные составляющие натяжения нити $T\cos\varphi$. Если этот груз опустится слишком низко, угол $\varphi$ станет небольшим, и вертикальные составляющие натяжения нити в сумме будут превосходить вес груза. Груз начнет подниматься. Если груз поднимется излишне высоко, угол $\varphi$ примет значения, близкие к $\pi/2$. Вес тела будет перевешивать, и оно начнет опускаться. Следовательно, существует равновесное положение груза. Найдем его.

Уравнения движения грузов согласно 2-му закону Ньютона имеют вид

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - 2T\cos\varphi, \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T. \end{cases}$$

Равновесное положение грузов определяется из условия равенства нулю их ускорений $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$. Из приведенной системы уравнений получаем:

$$T_0 = m_2 g,\ \cos\varphi_0 = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \varphi_0 = \frac{\pi}{4},\ x_{10} = \frac{1}{2}l.$$






Рассмотрим малые отклонения от равновесного состояния физической системы:

$$x_1 = \frac{1}{2}l + \Delta x_1,\ x_2 = x_{20} + \Delta x_2,\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \Delta\varphi,\ T = m_2 g + \Delta T.$$

Подставим эти выражения в исходную систему дифференциальных уравнений и разложим слагаемые в уравнениях по малым величинам. В результате получим в линейном приближении систему:

$$\begin{cases} m_1\Delta\ddot{x}_1 = -\sqrt{2}\Delta T + m_1 g\Delta\varphi, \\ m_2\Delta\ddot{x}_2 = -\Delta T. \end{cases}$$

В этой системе четыре неизвестные функции. Недостающие уравнения найдем из геометрических соображений.

Нить нерастяжимая, ее длина неизменна. Следовательно, имеем:

$$2x_2 + \frac{l}{\sin\varphi} = 2x_{20} + \sqrt{2}l.$$

Разложение по малым отклонениям от равновесных значений дает

$$\sqrt{2}\Delta x_2 - l\Delta\varphi = 0.$$

Из прямоугольного треугольника имеем:

$$x_1 = \frac{1}{2}l\,\mathrm{ctg}\,\varphi.$$

Разлагая по малым величинам, получим:

$$\Delta x_1 = -l\Delta\varphi.$$

В результате имеем систему четырех дифференциальных и алгебраических уравнений для четырех функций:

$$\begin{cases} m_1\Delta\ddot{x}_1 = -\sqrt{2}\Delta T + m_1 g\Delta\varphi, \\ m_2\Delta\ddot{x}_2 = -\Delta T, \\ \sqrt{2}\Delta x_2 = l\Delta\varphi, \\ \Delta x_1 = -l\Delta\varphi. \end{cases}$$

Исключая $\Delta T$, $\Delta\varphi$ и $\Delta x_2$, получим уравнение гармонических колебаний:

$$\Delta\ddot{x}_1 = -\frac{\sqrt{2}g}{(\sqrt{2}+1)l}\Delta x_1.$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{(\sqrt{2}+1)l}}.$$

**6.21.** Момент инерции диска радиусом $R$ и массой $m$ равен

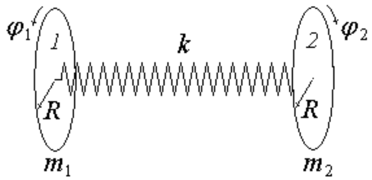
$$J = \frac{1}{2}mR^2.$$

С учетом этого выражения для $J$ уравнения моментов импульсов для системы дисков имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1R^2\ddot{\varphi}_1 = -k\varphi, \\ \frac{1}{2}m_2R^2\ddot{\varphi}_2 = -k\varphi, \end{cases}$$



где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ – текущие значения углов поворота дисков *1* и *2* соответственно (эти углы согласно рисунку отсчитываются в противоположных направлениях).




Данная система уравнений дополняется геометрическим соотношением, связывающим углы поворота дисков $\varphi_1$ и $\varphi_2$ с углом закручивания пружины:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

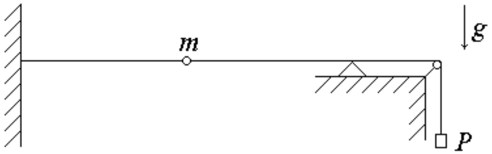
Исключая из уравнений углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$, получим уравнение, описывающее колебательное движение системы дисков:

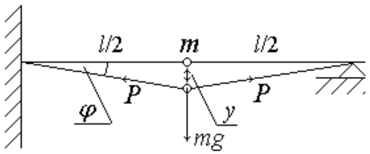
$$\ddot{\varphi} = -\frac{2k}{\mu R^2}\varphi,$$

где $\mu = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ – приведенная масса. Частота и соответственно период колебаний равны

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{\mu R^2}},\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2\mu}{k}}R.$$

**6.22.** Под действием веса груза струна слегка изогнута, и на груз помимо силы тяжести действуют в вертикальном направлении составляющие сил натяжения со стороны обеих половин струны. Будем измерять величиной $y$ малое отклонение груза от положения, соответствующего горизонтальной струне (см. правый рисунок).




Величина вертикальной составляющей силы натяжения струны равна

$$F = P\sin\varphi \cong P\varphi = 2Py/l.$$

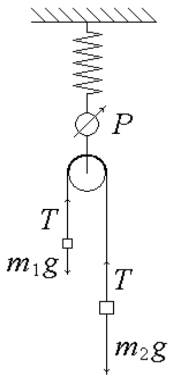
Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{y} = mg - 4Py/l.$$

Отсюда находим частоту и период колебаний груза:

$$\omega = \sqrt{\frac{4P}{ml}},\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{ml}{P}}.$$

**6.23.** Поскольку нить нерастяжимая, ускорения грузов равны по величине, будучи направленные в противоположные стороны. Пусть груз массой $m_1$ легче и, следовательно, движется вверх. (Это предположение несущественно для решения задачи.) Если трение между нитью и блоком отсутствует, то натяжение нити одинаково по обе стороны от блока.




Напишем уравнения движения грузов. Согласно 2-му закону Ньютона имеем:



$$\begin{cases} m_1a = -m_1g + T, \\ m_2a = m_2g - T. \end{cases}$$

Исключая из уравнений ускорение $a$, найдем величину силы натяжения нити:

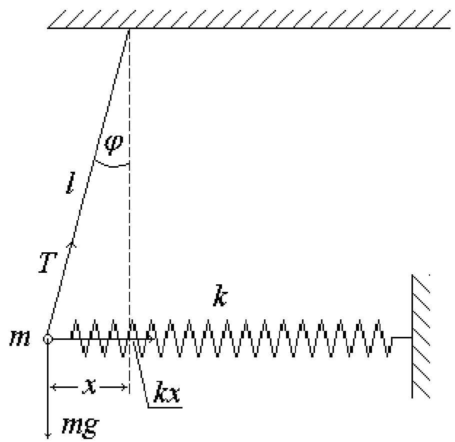
$$.T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Пружина весов растягивается силой $2T$. Поэтому весы будут показывать вес

$$P = 2T = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$$

**6.24.** Пусть в некоторый момент времени нить при колебании груза отклонена на угол $\varphi$. При этом растяжение пружины равно $x$. В этом случае на груз в горизонтальном направлении действуют упругая сила со стороны пружины, равная $-kx$, и горизонтальная составляющая натяжения нити, равная $-T\sin\varphi \approx -T\varphi$. Уравнение движения согласно 2-му закону Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - T\varphi.$$



Натяжение нити с точностью до малой величины 2-го порядка равно

$$T = mg.$$

Из прямоугольного треугольника находим соотношение между катетом $x$ и углом $\varphi$:

$$x = l\sin\varphi \approx l\varphi.$$

Итак, колебания физической системы описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - T\varphi, \\ T = mg, \\ x = l\varphi. \end{cases}$$

Исключая величины $T$ и $\varphi$, получим уравнение малых колебаний:

$$\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)x.$$

Частота колебаний равна

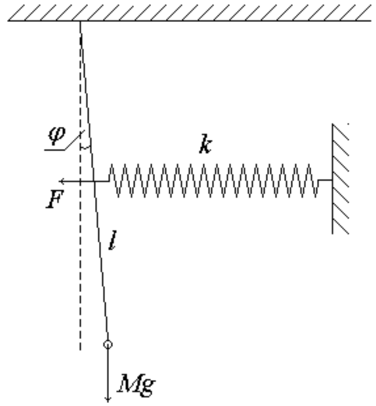
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l}}.$$

**6.25.** Пусть сжатие пружины в момент времени, когда стержень отклоняется вправо на угол $\varphi$ (см. рисунок), равно $x$. Тогда на стержень в его середине действует сила

$$F = -kx.$$

Она создает момент относительно точки подвеса стержня.






Величина $x$ связана с углом $\varphi$ соотношением

$$x = \frac{l}{2}\varphi.$$

Здесь учтено, что колебания малые. Пренебрегая изменением горизонтального положения пружины, считаем, что сила, действующая на стержень со стороны пружины, направлена по горизонтали.

Момент относительно точки подвеса стержня создает также сила тяжести груза. Соответствующий момент силы натяжения в стержне равен нулю. Записываем уравнение моментов:

$$M\,l^2\ddot{\varphi} = -kx\frac{l}{2} - Mgl\varphi.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{k}{4M} + \frac{g}{l}\right)\varphi.$$

Это уравнение колебаний. Частота колебаний груза равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{4M} + \frac{g}{l}}.$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4Ml}{kl + 4Mg}}.$$

Задачу можно решить, пользуясь энергетическими соображениями. При отклонении стержня от вертикали груз на его конце поднимается, его потенциальная энергия увеличивается и становится равной

$$U_1 = Mgl(1 - \cos\varphi) \cong \frac{1}{2}Mgl\varphi^2.$$

Кроме того, груз обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\varphi}^2.$$

При колебательном движении системы пружина сжимается и растягивается, поэтому пружина также обладает потенциальной энергией:

$$U_2 = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{8}kl^2\varphi^2.$$

Энергия системы по закону сохранения не изменяется:

$$U_1 + T + U_2 = \text{const}.$$

Подставляя сюда выражения для отдельных слагаемых, получим:

$$\frac{1}{2}Mgl\varphi^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8}kl^2\varphi^2 = \text{const},$$

или

$$\frac{1}{2}Ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{k}{4M} + \frac{g}{l}\right)l^2\varphi^2 = \text{const}.$$

Выражение в круглых скобках дает квадрат частоты колебаний.

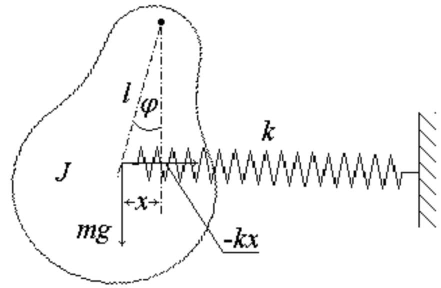


**6.26.** Будем измерять отклонение центра масс маятника от равновесного положения углом $\varphi$. Соответствующее растяжение пружины равно $x$. Обе величины связаны соотношением

$$x = l\varphi.$$

На маятник относительно точки подвеса действуют моменты силы тяжести и упругой силы пружины. Для решения задачи воспользуемся уравнением моментов:

$$J\ddot{\varphi} = -mgx - kxl.$$




Исключая величину $x$, получим:

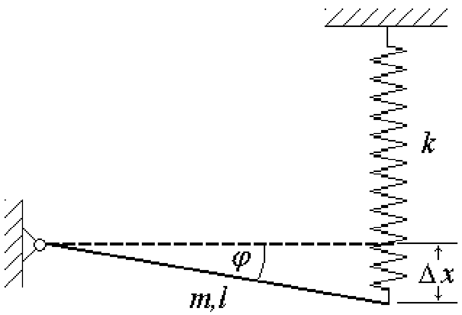
$$\ddot{\varphi} = -\frac{mg + kl}{J}l\varphi.$$

Период колебания системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{(mg + kl)l}}.$$

**6.27.** В равновесном состоянии системы пружина уже растянута. Пусть $x_0$ – соответствующее ее растяжение. Эту величину найдем из условия равенства моментов силы тяжести и упругой силы пружины относительно закрепленного конца стержня:

$$mg\frac{1}{2}l = kx_0l.$$




Из равенства находим:

$$x_0 = \frac{mg}{2k}.$$

Колебания однородного стержня описываются уравнением моментов:

$$J\ddot{\varphi} = mg\frac{1}{2}l - k(x_0 + \Delta x)l.$$

Дополнительное растяжение пружины связано с углом отклонения стержня от горизонтального положения соотношением

$$\Delta x = l\varphi.$$

Момент инерции стержня относительно его конца равен

$$J = \frac{1}{3}ml^2.$$

Исключая вспомогательные величины, получим уравнение колебания стержня:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3k}{m}\varphi.$$

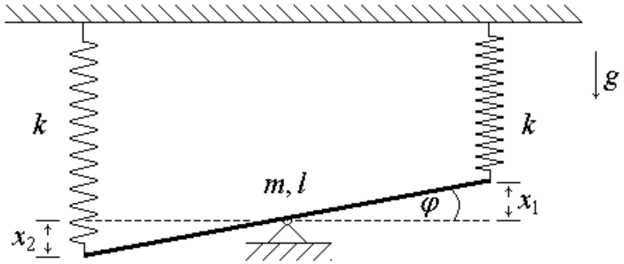
Частота колебания равна



$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

**6.28.** Будем характеризовать колебания стержня углом его поворота $\varphi$ относительно оси вращения; $x_1$ и $x_2$ – соответствующие отклонения концов стержня от горизонтального его положения. Так как ось вращения проходит через середину стержня, то имеют место равенства:

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}l\varphi.$$




Сжатие одной пружины на величину отклонения конца стержня от горизонтального положения и такое же по величине растяжение другой пружины приводят к возникновению вращательного момента, действующего на стержень. Уравнение моментов для стержня относительно его оси вращения имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -k(x_1 + x_2)\frac{l}{2}.$$

Соответствующее значение момента инерции однородного стержня равно

$$J = \frac{1}{12}ml^2.$$

Исключение из уравнения моментов величин $J$, $x_1$ и $x_2$ приводит его к виду

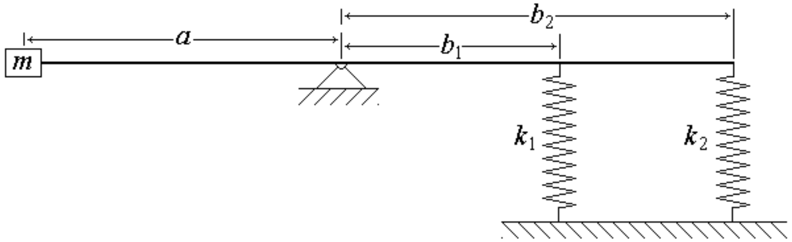
$$\ddot{\varphi} = -\frac{6k}{m}\varphi.$$

Частота колебания системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

**6.29.** Обозначим через $\varphi$ угол отклонения стержня от горизонтального положения при опускании груза. Соответствующие растяжения пружин обозначим как $y_1$ и $y_2$. Тогда закон сохранения моментов относительно шарнира имеет вид

$$ma^2\ddot{\varphi} = mga - k_1y_1b_1 - k_2y_2b_2.$$




Растяжения пружин $y_1$ и $y_2$ связаны с углом $\varphi$ геометрическими соотношениями:

$$y_1 = b_1\varphi,\ \ y_2 = b_2\varphi.$$

Эти соотношения справедливы в предположении, что значения величин $\varphi$, $y_1$ и $y_2$ малы. Размеры массы $m$ считаются малыми по сравнению с длиной $a$.

В результате дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{a} - \frac{k_1b_1^2 + k_2b_2^2}{ma^2}\varphi.$$

Частота малых колебаний груза равна

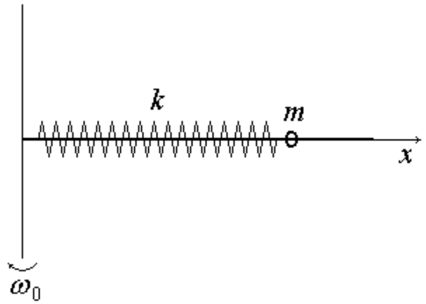
$$\omega = \sqrt{\frac{k_1b_1^2 + k_2b_2^2}{ma^2}}.$$



Период колебаний имеет значение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^2}{k_1b_1^2 + k_2b_2^2}}.$$

**6.30.** При вращении системы кольцо удерживается на стержне пружиной. Однако пружина при этом растягивается. Если $x$ – ее растяжение, то возникающая упругая сила, удерживающая кольцо, равна $-kx$, а центростремительное ускорение имеет значение $-\omega_0^2(l + x)$ ($l$ – длина нерастянутой пружины). Вместе с тем кольцо может совершать колебательное движение вдоль спицы, в результате чего растяжение $x$ (или сжатие) пружины изменяется, как изменяется и упругая сила. При этом кольцо приобретает ускорение вдоль спицы $\ddot{x}$.




Таким образом, уравнение движения кольца по спице согласно 2-му закону Ньютона имеет вид

$$m(\ddot{x} - \omega_0^2(l + x)) = -kx.$$

При отсутствии колебания кольца, но при вращательном его движении вместе со спицей уравнение принимает вид

$$-m\omega_0^2(l + x_0) = -kx_0.$$

Вводим отклонение координаты кольца от равновесного его положения:

$$q = x - x_0.$$

В результате имеем:

$$\ddot{q} + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)q = 0.$$

Это уравнение колебательного движения с частотой

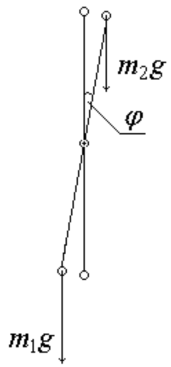
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega_0^2}$$

при условии $m\omega_0^2 < k$.

**6.31.** Колебания системы возможны, если массы шариков неравны. При их равенстве реализуется любое отклонение стержня от вертикального положения как стационарное (конечно, при равенстве расстояния от шариков до точки вращения). Пусть для определенности выполняется неравенство

$$m_1 > m_2.$$

Тогда устойчивым будет положение, когда шарик массой $m_1$ будет находиться внизу.




Для того, чтобы найти частоту малых колебаний системы, воспользуемся уравнением моментов:



$$m_1(l/2)^2\ddot{\varphi} + m_2(l/2)^2\ddot{\varphi} = m_2g(l/2)\varphi - m_1g(l/2)\varphi.$$

Приведем его к виду

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)l}\varphi.$$

Частота малых колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)l}}.$$

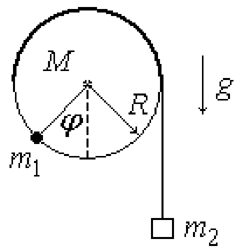
**6.32.** Пусть положение тела на краю диска определяется углом $\varphi$ между радиусом, проведенным из центра диска к телу, и вертикальным направлением. Равновесное состояние системы имеет место при равенстве моментов сил тяжести тел массой $m_1$ и $m_2$ относительно центра диска:

$$m_1gR\sin\varphi_0 = m_2gR.$$

Отсюда находим:

$$\sin\varphi_0 = m_2/m_1 < 1.$$

При нарушении данного неравенства тело массой $m_2$ опускается до тех пор, пока нить полностью не раскрутится. Колебания системы можно наблюдать только при выполнении указанного неравенства.



Для изучения колебательного движения системы воспользуемся уравнением моментов относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости:

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_1R^2\right)\ddot{\varphi} = -m_1gR\sin\varphi + m_2gR.$$

Здесь использован момент инерции диска относительно его оси, который равен

$$J_0 = \frac{1}{2}MR^2,$$

а тело массой $m_1$ – маленьких размеров и расположено на краю диска.

Введем отклонение тела массой $m_1$ от равновесного положения:

$$\theta = \varphi - \varphi_0.$$

При условии малых отклонений дифференциальное уравнение, описывающее движение системы, примет вид

$$\left(\frac{1}{2}M + m_1\right)R\ddot{\theta} = -m_1g\cos\varphi_0\theta.$$

Частота малых колебаний системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1g\sqrt{1-(m_2/m_1)^2}}{(M/2+m_1)R}}.$$

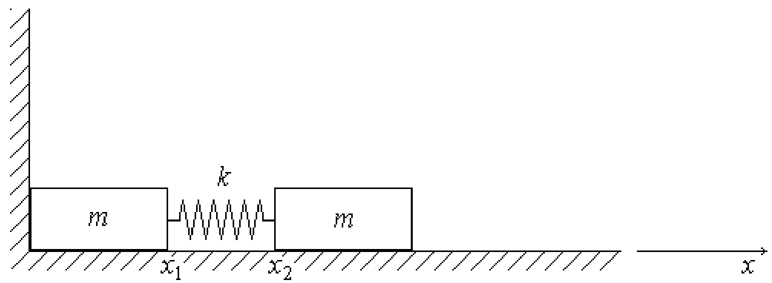
**6.33.** На первом этапе пружина разжимается, правый брусок приходит в движение и ускоряется, а левый брусок остается неподвижным до тех пор, пока длина пружины меньше ее длины в недеформированном состоянии (сжатая пружина прижимает левый брусок к стенке). Максимальная скорость правого бруска может быть получена из закона сохранения энергии. Согласно этому закону потенциальная энергия сжатой пружины переходит в кинетическую энергию бруска:



$$\frac{1}{8}kl^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

откуда следует

$$v = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$




После этого момента правый брусок по инерции продолжает двигаться, длина пружины увеличивается и упругая сила, возникающая при растяжении пружины, отрывает левый брусок от стенки. С этого момента начинается свободное движение системы. Это движение описывается системой дифференциальных уравнений. Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l), \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l). \end{cases}$$

Начальные условия имеют вид

$$t = 0 \quad x_1 = 0,\ \dot{x}_1 = 0,\ x_2 = l,\ \dot{x}_2 = v.$$

Складывая уравнения системы и вычитая из второго уравнения первое, приводим систему к виду

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -2\dfrac{k}{m}(x_2 - x_1 - l). \end{cases}$$

Однократное интегрирование первого уравнения этой системы с учетом начальных условий дает

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = v.$$

Его можно получить из закона сохранения импульса. Для решения задачи оно не представляет интереса.

Во втором уравнении величина $(x_2 - x_1 - l)$ представляет растяжение пружины. Обозначая ее через $\Delta x$, перепишем данное уравнение:

$$\Delta\ddot{x} = -2\frac{k}{m}\Delta x.$$

Это уравнение гармонических колебаний. Оно должно решаться при начальных условиях:

$$t = 0 \quad \Delta x = 0,\ \Delta\dot{x} = v.$$

Его решение имеет вид

$$\Delta x = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{2k/m}$ – частота колебаний. Постоянные коэффициенты $A$ и $B$ находятся из начальных условий. Первое условие дает $A = 0$. Из второго условия находим $B = v/\omega$. Подставляя полученное выше выражение для скорости правого бруска после первого этапа движения системы, найдем $B = l/2\sqrt{2}$. В результате решение уравнения гармонических колебаний системы имеет вид

$$\Delta x = \frac{l}{2\sqrt{2}}\sin\omega t.$$



Длина пружины зависит от времени следующим образом:

$$x_2 - x_1 = l\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\omega t\right).$$

Максимальное и минимальное значения длины пружины равны соответственно

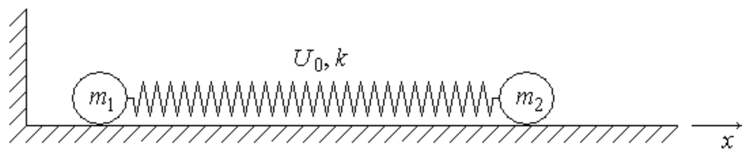
$$l_{\max} = (x_2 - x_1)_{\max} = l\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, \quad l_{\min} = (x_2 - x_1)_{\min} = l\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

**6.34.** Решение задачи аналогично 6.9. Пусть $x_1$ и $x_2$ – координаты левого и правого шариков соответственно, $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ – их скорости после отрыва от стенки. По закону сохранения импульса имеем:

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = \text{const}.$$

В соответствии с определением скорости центра масс находим ее постоянную величину $\dot{x}_c$ для системы шариков:

$$\dot{x}_c = \frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2}{m_1 + m_2}.$$




В момент отрыва, когда пружина уже не будет деформирована, скорость левого шарика равна нулю: $\dot{x}_1 = 0$. Потенциальная энергия первоначально сжатой пружины полностью перешла в кинетическую энергию правого шарика:

$$U_0 = \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}.$$

Это позволяет найти кинетическую энергию центра масс $T_c$ и энергию колебаний $E_к$:

$$T_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_c^2 = \frac{U_0}{1 + m_1/m_2}, \; E_к = U_0 - T_c = \frac{U_0}{1 + m_2/m_1}.$$

Поскольку скорость центра масс постоянная, то не меняется с течением времени и кинетическая энергия центра масс, а следовательно, и энергия колебаний.

Запишем полную энергию системы шариков, скрепленных пружиной, в лабораторной системе отсчета:

$$\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{k(x_2 - x_1 - l)^2}{2} = \text{const} = U_0.$$

Вместо независимых переменных $x_1$ и $x_2$ введем переменные: координату центра масс $x_c$ и растяжение пружины $q = x_2 - x_1 - l$. Выражение для полной энергии примет вид

$$\frac{(m_1 + m_2)\dot{x}_c^2}{2} + \frac{\mu\dot{q}_2^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = \text{const} = U_0.$$

Первое слагаемое в левой части дает кинетическую энергию центра масс, два других – энергию колебаний ($\mu$ – приведенная масса). Таким образом, имеем:

$$\frac{\mu\dot{q}_2^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = \text{const} = \frac{U_0}{1 + m_2/m_1}.$$

Второе слагаемое в левой части равенства дает потенциальную энергию осциллятора $U_к$ с массой $\mu$. Его частота определяется из сравнения двух выражений для $U_к$:



$$U_к = \frac{kq^2}{2} = \frac{\mu\omega^2 q^2}{2}.$$

Находим:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

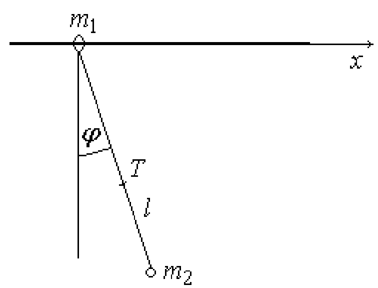
Когда скорость колебания становится равной нулю, растяжение (или сжатие) пружины становится максимальным. Амплитуду колебаний находим из равенства

$$\frac{kq_{\max}^2}{2} = \frac{U_0}{1 + m_2/m_1}.$$

Получаем:

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{2U_0/k}{1 + m_2/m_1}}.$$

**6.35.** На кольцо действуют сила тяжести, нормальная сила реакции опоры (со стороны стержня) и натяжение нити. Последняя сила вызывает движение кольца вдоль стержня, остальные силы не играют роли.




Введем ось $x$ вдоль стержня. Движение кольца по 2-му закону Ньютона описывается уравнением

$$m_1\ddot{x}_1 = T\varphi.$$

Здесь предполагается, что отклонение нити от вертикали, характеризуемое углом $\varphi$, мало.

Движение груза в горизонтальном направлении характеризуется зависимостью от времени координаты $x_2(t)$. На груз действуют сила тяжести и натяжение нити. В проекции на ось $x$ 2-й закон Ньютона дает уравнение

$$m_2\ddot{x}_2 = -T\varphi.$$

Смещение груза относительно кольца удовлетворяет соотношению

$$(x_2 - x_1)/l = \varphi.$$

Наконец, натяжение нити с точностью до малых по $\varphi$ величин равно

$$T = m_2 g.$$

В результате колебания физической системы определяются системой дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = T\varphi, \\ m_2\ddot{x}_2 = -T\varphi, \\ (x_2 - x_1)/l = \varphi, \\ T = m_2 g. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений, исключая натяжение нити и координаты груза и кольца, получим уравнение колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}\varphi = 0.$$



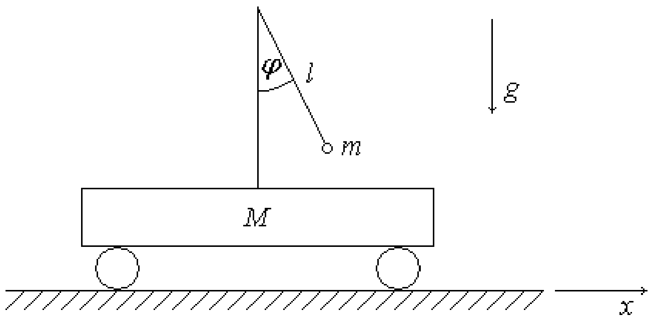
Таким образом, частота колебательного движения рассматриваемой физической системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}.$$

**6.36.** Пусть $x_1$ и $x_2$ – координаты соответственно центров масс тележки и математического маятника в горизонтальном направлении, $\varphi$ – угол отклонения маятника от вертикального положения. Для решения задачи применим законы сохранения импульса и энергии. Поскольку в горизонтальном направлении никакие силы на систему не действуют, то ее количество движения и энергия сохраняются:

$$M\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = \text{const} = E.$$




Первые два слагаемых в уравнении энергии представляют кинетическую энергию тележки и маятника соответственно, третье слагаемое является потенциальной энергией маятника. Для малых колебаний косинус угла можно разложить в ряд по малым значениям $\varphi$. Тогда уравнение энергии примет вид

$$\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 = E.$$

Угол $\varphi$ и координаты центров масс тележки и маятника связаны геометрическим соотношением:

$$x_2 - x_1 = l\varphi.$$

Из закона сохранения импульса с помощью этого соотношения получим выражения для скоростей тележки и маятника через угловую скорость $\dot{\varphi}$:

$$\dot{x}_1 = -\frac{ml}{M+m}\dot{\varphi}, \quad \dot{x}_2 = \frac{Ml}{M+m}\dot{\varphi}.$$

Подставим их в уравнение энергии. В результате уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 = E.$$

Дифференцирование уравнения энергии в таком виде по времени и сокращение на неравную нулю угловую скорость $\dot{\varphi}$ дает уравнение колебательного движения системы:

$$\frac{Mm}{M+m}l^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0.$$

Частота гармонических колебаний рассматриваемой физической системы равна

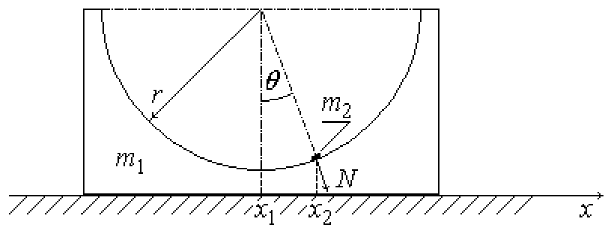
$$\omega = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}.$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ml}{(M+m)g}}.$$



**6.37.** На чашу действуют сила тяжести, реакция опоры (сила со стороны стола) и давление шайбы. Трение отсутствует. Чаша будет двигаться вдоль стола (в горизонтальном направлении), следовательно, под действием только силы давления шайбы $N$.




Пусть $x_1$ – координата вдоль стола, характеризующая положение чаши. Запишем уравнение движения чаши. По 2-му закону Ньютона имеем:

$$m_1\ddot{x}_1 = N\sin\theta \cong N\theta.$$

По 3-му закону Ньютона, с какой силой действует шайба на чашу, с такой же по величине силой в противоположном направлении чаша действует на шайбу. На шайбу действует также сила тяжести. Однако на перемещение шайбы в горизонтальном направлении она не оказывает влияния. Если $x_2$ – координата шайбы, то по 2-му закону Ньютона имеем:

$$m_2\ddot{x}_2 = -N\theta.$$

Сложение двух уравнений дает

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2\right) = 0.$$

Это ожидаемый результат: поскольку на систему никакие внешние силы в горизонтальном направлении не действуют, то ее количество движения в этом направлении не изменяется. Пусть в самом начале количество движения системы в горизонтальном направлении равнялось нулю, тогда центр массы системы не будет перемещаться по $x$.

Вектор ускорения шайбы в любой момент времени можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие: одна направлена по радиусу полусферической поверхности чаши, а другая – в касательном к поверхности направлении. Первая из них по существу центростремительное ускорение, а это малая 2-го порядка (она пропорциональна квадрату скорости). Поэтому, проектируя уравнение движения шайбы на радиус и пренебрегая малыми величинами 2-го порядка, получим:

$$N = m_2 g.$$

Координаты $x_1$, $x_2$ и угол $\theta$ связаны геометрическим соотношением:

$$x_2 - x_1 = r\theta.$$

В результате имеем систему уравнений, описывающую колебательное движение рассматриваемой системы тел:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = N\theta, \\ m_2\ddot{x}_2 = -N\theta, \\ N = m_2 g, \\ x_2 - x_1 = r\theta. \end{cases}$$

Разделим дифференциальные уравнения на $m_1$ и $m_2$ соответственно. Затем из второго уравнения вычтем первое и подставим сюда выражения для $N$ и для разности координат. В результате получим уравнение:

$$\ddot{\theta} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1}\frac{g}{r}\theta.$$

Частота колебаний физической системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}\frac{g}{r}}.$$

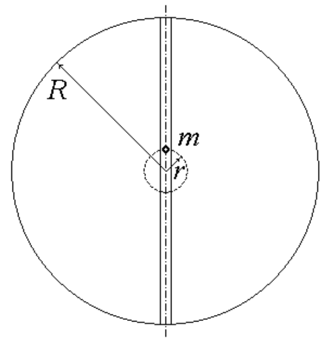


**6.38.** По закону всемирного тяготения два тела массами $m$ и $M$ притягиваются друг к другу с силой

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

где $r$ – расстояние между центрами масс тел, $G$ – постоянная закона тяготения.

Если одно из тел превосходит по массе другое тело во много раз, то, несмотря на действие силы тяготения, первое из тел практически остается неподвижным. При этом второе тело будет падать на первое с ускорением свободного падения.




Применим этот закон для решения рассматриваемой задачи. Пусть материальная точка массой $m$ находится в желобе на расстоянии $r$ от центра Земли. На нее будет действовать сила тяготения, определяемая массой вещества Земли в сфере радиуса $r$:

$$F = G\frac{m}{r^2}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi G\rho m r,$$

где $\rho$ – средняя плотность вещества Земли. Под действием этой силы материальная точка будет совершать колебательное движение около центра Земли. Это движение описывается уравнением

$$m\ddot{r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho m r.$$

Масса Земли равна

$$M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Для условий Земли имеем:

$$mg = G\frac{mM}{R^2}.$$

Исключаем из двух последних соотношений массу Земли, получаем:

$$g = G\frac{4}{3}\pi\rho R.$$

Найдем отсюда плотность вещества Земли и подставим ее в уравнение движения:

$$\ddot{r} = -\frac{g}{R}r.$$

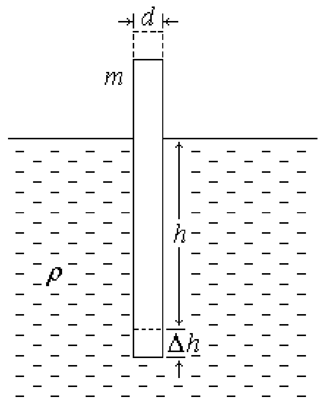
Период колебания материальной точки равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

**6.39.** На погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила. Она равна весу вытесненной жидкости, т. е. весу жидкости, которая могла бы поместиться в объеме погруженной части тела. До толчка ареометр покоился, и его вес уравновешивался выталкивающей силой:

$$mg = \rho g\frac{1}{4}\pi d^2 h.$$






Отсюда находим глубину погружения ареометра:

$$h = \frac{4m}{\rho\pi d^2}.$$

После толчка глубина погружения будет меняться. Обозначим через $\Delta h$ отклонение глубины от равновесного значения. Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\Delta\ddot{h} = mg - \rho g\frac{1}{4}\pi d^2(h + \Delta h).$$

Исключая $h$, получаем:

$$\Delta\ddot{h} = -\frac{\rho g}{4m}\pi d^2\,\Delta h.$$

Частота малых колебаний ареометра равна

$$\omega = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{m}\pi}\ .$$

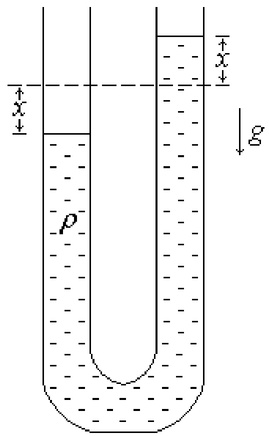
**6.40.** Диаметр $U$-образных трубок много меньше их длины. Поэтому можно считать, что жидкость в них движется только в продольном направлении. При обычных условиях жидкости – практически несжимаемые среды. Следовательно, продольная скорость жидкости в $U$-образной трубке во всех ее частях одинакова по величине и изменяется только со временем. Движение жидкости происходит из-за наличия перепада ее уровней в левом и правом коленах и вызывается весом столба жидкости между ее уровнями в коленах. Трение отсутствует. Напишем уравнение движения жидкости. Пусть $x$ – отклонение уровня жидкости от равновесного в одном из колен. Тогда в другом колене будет такое же отклонение уровня в противоположную сторону. Вес столба жидкости между неравновесными положениями уровней равен

$$P = 2\rho g S x,$$

где $\rho$ – плотность жидкости, $S$ – площадь поперечного сечения трубки.

Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$\rho S l \ddot{x} = -2\rho g S x.$$




Приведем уравнение к виду

$$\ddot{x} = -2\frac{g}{l}x.$$

Частота колебаний равна



$$\omega = \sqrt{2\frac{g}{l}}.$$

**6.41.** Шарик участвует в двух движениях: он вращается вместе с кольцом вокруг диаметра последнего и совершает колебательное движение по кольцу около некоторого устойчивого положения. Поэтому ускорение шарика имеет две взаимно перпендикулярные составляющие. Одно ускорение – это центростремительное ускорение, связанное с вращением шарика вокруг вертикального диаметра кольца и равное

$$a_1 = \omega_0^2 r \sin\theta.$$

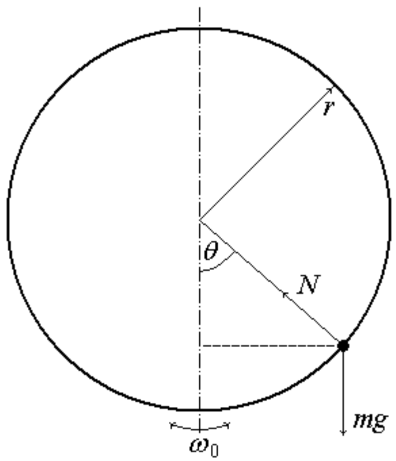
Это ускорение направлено перпендикулярно диаметру кольца.

Другое ускорение шарика связано с его колебанием по дуге кольца. Оно равно

$$a_2 = r\ddot{\theta}.$$

Это ускорение направлено по касательной к дуге.

На шарик действуют сила тяжести $mg$ и со стороны кольца по его радиусу сила $N$.



Запишем уравнение движения шарика в проекции на касательное к кольцу направление:

$$m(r\ddot{\theta} - \omega_0^2 r\sin\theta\cos\theta) = -mg\sin\theta.$$

Найдем равновесные положения шарика. Они определяются из условия

$$\ddot{\theta} = 0.$$

Два положения $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ являются неустойчивыми. При малейшей флуктуации шарик уйдет из первого из них из-за вращения; из второго положения шарик уйдет в результате действия силы тяжести.

Устойчивым является положение, которое определяется углом $\theta_0$, удовлетворяющим равенству

$$\cos\theta_0 = \frac{g}{\omega_0^2 r}.$$

Рассмотрим малые отклонения положения шарика около положения устойчивого равновесия:

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta.$$

Подставляя это выражение для $\theta$ в уравнение движения и пренебрегая малыми величинами второго порядка, получим:

$$\Delta\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin^2\theta_0 \Delta\theta = 0.$$

Частота малых колебаний шарика равна

$$\omega = \omega_0 \sin\theta_0.$$

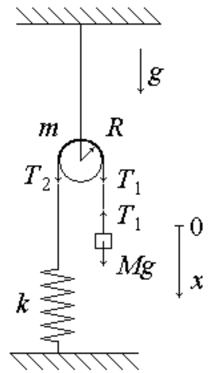
С учетом равенства для $\theta_0$ находим:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega_0^4 r^2}}.$$



**6.42.** На груз действуют сила тяжести $Mg$ и сила натяжения нити $T_1$. Обозначим через $x$ расстояние, на которое опускается груз. Изменение положения груза определяется согласно 2-му закону Ньютона уравнением

$$M\ddot{x} = Mg - T_1.$$




Сила натяжения нити по разные стороны от блока неодинакова. Это связано с трением между нитью и блоком. Обозначим через $\varphi$ угол поворота блока по часовой стрелке. Согласно уравнению моментов имеем:

$$J\ddot{\varphi} = (T_1 - T_2)R,$$

где $J$ – момент инерции блока. Так как блок представляет собой однородный диск, то его момент инерции относительно оси равен

$$J = \frac{1}{2}mR^2.$$

Подставляя это выражение для $J$ в уравнение моментов, получим:

$$\frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} = T_1 - T_2.$$

Сила натяжения нити, присоединенной к пружине, равна силе растяжения пружины:

$$T_2 = kx.$$

Здесь предполагается, что нить нерастяжимая.

По условию нить по блоку не проскальзывает. Поэтому выполняется кинематическое соотношение, связывающее величину расстояния $x$ с углом поворота диска:

$$R\varphi = x.$$

В результате движение физической системы описывается системой дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg - T_1, \\ \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} = T_1 - T_2, \\ T_2 = kx, \\ R\varphi = x. \end{cases}$$

Исключение угловой координаты и сил натяжения даст уравнение относительно величины $x$:

$$(M + \frac{1}{2}m)\ddot{x} = Mg - kx.$$

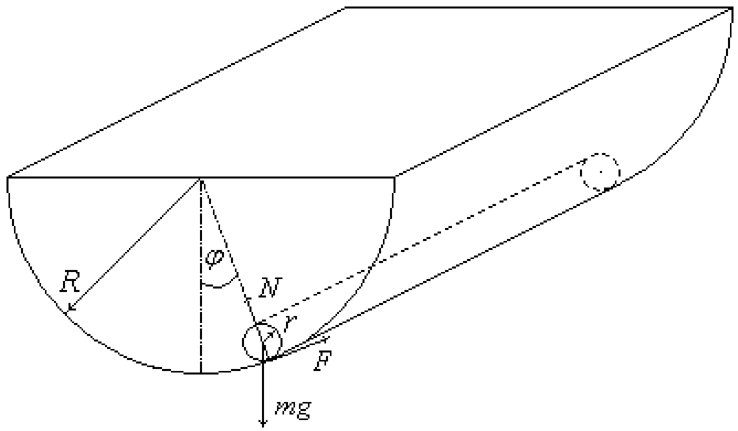
Частота колебаний физической системы равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{1}{2}m}}.$$

**6.43.** Внутренний цилиндр занимает равновесное положение, когда он находится в самой нижней части внешнего цилиндра. Отклонение внутреннего цилиндра от равновесного положения будем описывать



углом $\varphi$. Колебательное движение этого цилиндра определяется его весом $mg$, силой трения $F$ и нормальной реакцией $N$ со стороны поверхности внешнего цилиндра.




Отсутствие проскальзывания означает, что скорость на образующей цилиндра, по которой он соприкасается с поверхностью внешнего цилиндра, равна нулю. Эта образующая является мгновенной осью вращения внутреннего цилиндра. Запишем для него уравнение моментов относительно этой оси:

$$J\dot{\omega}_0 = -mgr\varphi.$$

Напоминаем, что рассматриваются малые колебания. Поэтому здесь $|\varphi| << 1$ и $\sin\varphi \approx \varphi$.

Момент инерции $J$ однородного цилиндра вычисляем, пользуясь теоремой Гюйгенса - Штейнера. Если $J_0$ – момент инерции относительно оси цилиндра, то имеем:

$$J_0 = \frac{1}{2}mr^2, \; J = J_0 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Поскольку проскальзывание цилиндра отсутствует, то линейная скорость на его оси связана со скоростью вращения соотношением

$$v_0 = r\omega_0.$$

В свою очередь линейная скорость $v_0$ связана с угловой скоростью $\dot{\varphi}$:

$$v_0 = (R - r)\dot{\varphi}.$$

Исключая из уравнения моментов вспомогательные величины, приведем его к виду

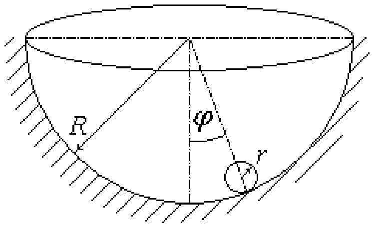
$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{3(R - r)}\varphi.$$

Частота малых колебаний внутреннего цилиндра равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R - r)}}.$$

**6.44.** Для решения задачи воспользуемся уравнением моментов. При качении шара без проскальзывания его скорость в точке соприкосновения с поверхностью равна нулю. Происходит вращение шара вокруг мгновенной оси. Запишем уравнение моментов относительно этой оси:

$$J\dot{\omega}_0 = -mgr\varphi.$$




Здесь $\varphi$ – малый угол отклонения шара от равновесного положения в самой нижней точке сферической чаши, $\omega_0$ – угловая скорость вращательного движения шара вокруг мгновенной оси, $J$ – его момент инерции относительно этой оси.

Отсутствие проскальзывания при качении позволяет связать угловую скорость вращения и скорость центра шара:



$$v_0 = r\omega_0.$$

С другой стороны, центр шара движется по дуге окружности радиусом $R - r$ с центром, совпадающим с центром шара. Это дает связь линейной скорости центра шара со скоростью изменения угла отклонения от равновесного положения:

$$v_0 = (R - r)\dot{\varphi}.$$

Исключая величину $v_0$ и дифференцируя по времени, получим:

$$r\dot{\omega}_0 = (R - r)\ddot{\varphi}.$$

Подстановка угловой скорости вращения шара в уравнение моментов дает

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgr^2}{J(R - r)}\varphi.$$

Частота колебания шара равна

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr^2}{J(R - r)}}.$$

По теореме Гюйгенса - Штейнера момент инерции шара $J$ относительно мгновенной оси вращения связан с моментом инерции $J_0$ относительно диаметра шара соотношением

$$J = J_0 + mr^2.$$

Момент инерции $J_0$ не зависит от выбора диаметра. Вычислим $J_0$. Для этого направим ось $z$ по диаметру. Тогда имеем:

$$J_0 = \int (x^2 + y^2)dm.$$

Введем сферические координаты:

$$J_0 = \int (r\sin\theta)^2 dm = 2\pi\rho\int_0^r r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{8}{15}\pi\rho r^5.$$

Масса однородной сферы вычисляется аналогично:

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3.$$

Исключаем плотность $\rho$ из выражения для $J_0$:

$$J_0 = \frac{2}{5}mr^2.$$

В результате находим момент инерции $J$ и частоту колебания шара:

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$

**6.45.** Согласно общей теории движение твердого тела можно рассматривать как движение центра масс тела и вращение его вокруг центра масс. На рассматриваемое тело полусферической формы действуют силы только в вертикальном направлении. Это сила тяжести $mg$ и нормальная реакция опоры $N$. В горизонтальном направлении могла бы действовать сила трения. Но трение отсутствует. Поэтому центр масс в горизонтальном направлении не перемещается. Соответствующая координата остается постоянной:

$$x_c = \text{const} = 0.$$

В проекции на вертикальное направление по 2-му закону Ньютона имеем:

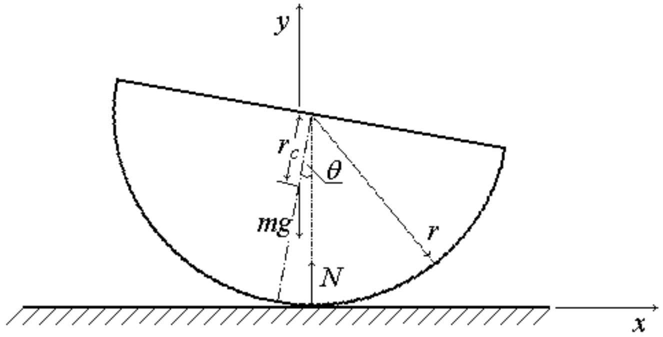
$$m\dot{y}_c = N - mg.$$

Уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, имеет вид

$$J_c\ddot{\theta} = -Nr_c\sin\theta \approx -Nr_c\theta.$$



Здесь учитывается, что колебания малые $\theta << 1$; $r_c$ – радиус центра масс полусферического тела, $J_c$ – его момент инерции.




Координата $y_c$ центра масс и ее производные равны

$$y_c = r - r_c\cos\theta,\ \dot{y}_c = r_c\sin\theta\dot{\theta},\ \ddot{y}_c = r_c(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2).$$

При малых колебаниях и угловая координата, и ее производные являются малыми величинами одного порядка. Отсюда следует, что

$$\ddot{y}_c = O(\theta^2).$$

Следовательно, можно считать, что имеет место равенство

$$N = mg.$$

В результате уравнение моментов принимает вид

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgr_c}{J_c}\theta.$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_c}{J_c}}.$$

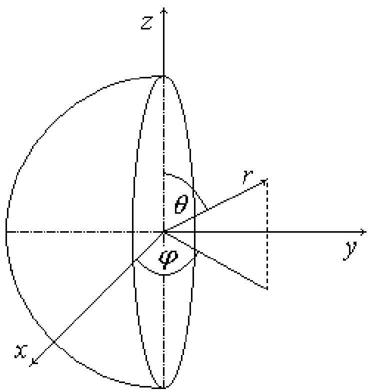
Радиус-вектор центра масс тела определяется по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,dm,$$

где $dm$ – элементарная масса, имеющая радиус-вектор $\vec{r}$ , $m$ – масса всего тела. Для однородного тела, имеющего форму полусферы радиусом $r$, масса равна $m = \frac{2}{3}\pi\rho r^3$ ($\rho$ – плотность вещества). Для вычисления $\vec{r}_c$ рассматриваемого тела воспользуемся сферическими координатами. Для удобства перенесем начало координат в центр большого круга, ограничивающего тело, и развернем его, как показано на рисунке ниже. Имеем:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{r} r(\vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta)\rho r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= -\frac{3}{\pi r^3}\vec{j}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int\limits_{0}^{r} r^3 dr = -\frac{3}{8}\vec{j}r.$$




Таким образом, величина радиус-вектора центра масс однородного полусферического тела равна

$$r_c = \frac{3}{8}r.$$



Пользуясь тем же рисунком, найдем момент инерции однородной полусферы относительно оси $z$:

$$J_0 = J_{zz} = \int(x^2 + y^2)dm = \rho\int\limits_0^r r^4 dr\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{15}\pi\rho r^5 = \frac{2}{5}mr^2.$$

Момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс полусферического тела параллельно оси $z$, по теореме Гюйгенса – Штейнера равен

$$J_c = J_0 + mr_c^2 = \frac{173}{320}mr^2.$$

Подставляя $r_c$ и $J_c$ в выражение для частоты колебаний полусферы, получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{120g}{173r}}.$$

**6.46.** Отсутствие проскальзывания между полусферическим телом и горизонтальной поверхностью означает, что существует сила трения, действующая на полусферу в точке ее соприкосновения с поверхностью и направленная горизонтально. Положение центра масс на горизонтали уже не остается неизменным, как в задаче 6.45, а сила трения определяется по уравнению

$$m\ddot{x}_c = F_{\text{тр}}.$$

Наличие силы трения приводит к тому, что изменяется вид уравнения сохранения моментов:

$$J_c\ddot{\theta} = -Nr_c\sin\theta - F_{тр}y_c.$$

Из геометрического соотношения

$$y_c = r - r_c\cos\theta$$

следует, что при малых колебаниях координата $y_c$ практически не изменяется и равна

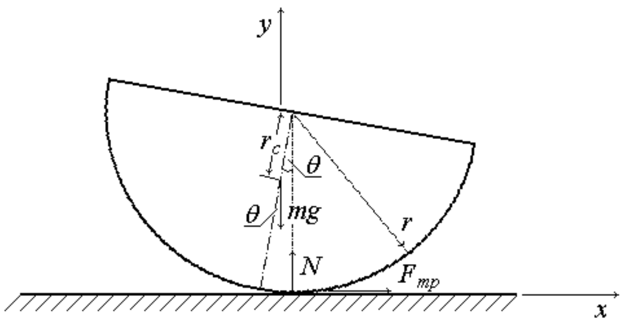
$$y_c = r - r_c,$$

а вертикальная составляющая ускорения центра масс – малая величина второго порядка

$$\ddot{y}_c = O(\theta^2),$$

так что

$$N = mg.$$




При чистом качении, которое имеет место при отсутствии проскальзывания, скорость полусферического тела в точке соприкосновения с поверхностью равна нулю, что дает зависимость координаты центра масс от угловой координаты:

$$x_c - x_{c0} = (r - r_c\cos\theta)\mathrm{tg}\theta,$$

где $x_{c0}$ – координата центра масс при отсутствии колебаний. Дифференцируя эту зависимость по времени, получаем с точностью до малых величин второго порядка следующее соотношение между скоростью центра масс и угловой скоростью:



$$\dot{x}_c = (r - r_c)\dot{\theta}.$$

Если его продифференцировать по времени еще один раз, получим:

$$\ddot{x}_c = (r - r_c)\ddot{\theta}.$$

Находим силу трения:

$$F_{\text{тр}} = m(r - r_c)\ddot{\theta}.$$

Исключая силу трения и силу нормальной реакции опоры из уравнения моментов, приведем его к виду

$$(J_c + m(r - r_c)^2)\ddot{\theta} = -mgr_c\theta\,.$$

Частота колебаний полусферического тела равна

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_c}{J_c + m(r - r_c)^2}}.$$

Подставив сюда $r_c$ и $J_c$, получим:

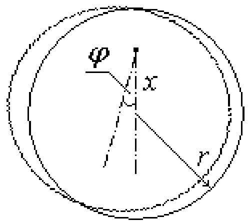
$$\omega = \sqrt{\frac{60g}{149r}}.$$

**6.47.** Момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, равен

$$J_0 = \frac{1}{2}mr^2.$$

При параллельном переносе оси вращения на расстояние $x$ момент инерции вычисляется в соответствии с теоремой Гюйгенса - Штейнера по формуле

$$J = J_0 + mx^2 = m\left(\frac{1}{2}r^2 + x^2\right).$$




Пусть $\varphi$ – угол отклонения диска от равновесного положения, причем $\varphi$ << 1. Напишем уравнение моментов относительно гвоздика:

$$m\left(\frac{1}{2}r^2 + x^2\right)\ddot{\varphi} = -mgx\varphi.$$

Отсюда находим квадрат частоты малых колебаний:

$$\omega^2 = \frac{gx}{\frac{1}{2}r^2 + x^2}.$$

Ищем значение координаты точки подвеса диска, при котором частота колебаний имеет максимальное значение. Условия максимума имеют вид

$$\frac{d\omega}{dx} = 0,\ \frac{d^2\omega}{dx^2} \le 0.$$

Им удовлетворяет значение координаты

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

В этом случае частота малых колебаний имеет максимальное значение, равное



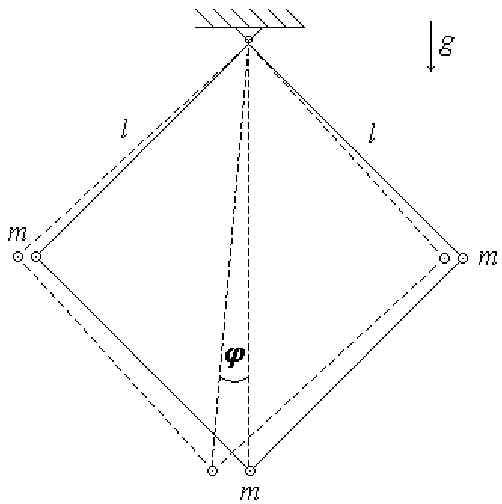
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r\sqrt{2}}}.$$

**6.48.** Вращательное движение системы будем описывать угловой координатой $\varphi$ в плоскости квадрата, отсчитываемой от вертикали. Для решения задачи используем закон сохранения момента:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M.$$

Момент инерции $J$ системы относительно точки ее подвеса равен

$$J = ml^2 + m2l^2 + ml^2 = 4ml^2.$$




Момент сил тяжести $M$ относительно точки подвеса при отклонении системы материальных точек от вертикали на угол $\varphi$ равен

$$M = -mgl\sin(\pi/4 + \varphi) - mg\sqrt{2}l\sin\varphi + mgl\sin(\pi/4 - \varphi).$$

При малых колебаниях значения угла $\varphi$ малы: $|\varphi| << 1$. Поэтому

$$M = -mgl(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2\varphi) - mg\sqrt{2}l\varphi + mgl(\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2\varphi) = -2\sqrt{2}mgl\varphi\,.$$

Подстановка выражений для момента инерции $J$ и момента сил $M$ в исходное уравнение дает

$$4ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2\sqrt{2}mgl\varphi.$$

После деления на коэффициент при производной уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\sqrt{2}g}{2l}\varphi.$$

Это уравнение гармонических колебаний. Величина коэффициента в правой части уравнения дает квадрат частоты этих колебаний. Таким образом, имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{2l}}.$$

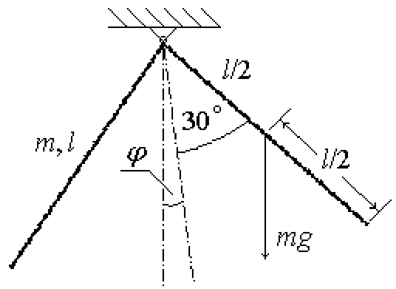
**6.49.** Вращение системы стержней будем описывать угловой координатой $\varphi$, отсчитываемой от вертикали. Для решения задачи используем закон сохранения момента:

$$J\ddot{\varphi} = M.$$

Момент инерции $J$ системы относительно точки ее подвеса равен

$$J = \frac{2}{3}ml^2.$$






Центр тяжести однородных стержней находится в их середине. Поэтому момент сил тяжести $M$ относительно точки подвеса при отклонении системы стержней от вертикали на угол $\varphi$ равен

$$M = -mg\frac{l}{2}(\sin(\pi/6 + \varphi) - \sin(\pi/6 - \varphi)) = -mg\frac{l}{2}2\cos(\pi/6)\sin\varphi =$$

$$= -mg\frac{l}{2}\sqrt{3}\sin\varphi.$$

При малых колебаниях значения угла $\varphi$ малы: $|\varphi| << 1$. Поэтому

$$M = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgl\varphi\,.$$

Подстановка выражений для момента инерции $J$ и момента сил $M$ в исходное уравнение дает

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{l}\varphi.$$

Частота малых колебаний системы стержней равна

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{l}}.$$

**6.50.** Решение задачи аналогично 6.48. Пусть $\varphi$ – текущее значение угла отклонения квадратной рамки от симметричного относительно вертикали положения. При этом вес каждой стороны рамки (каждого стержня) создает вращательный момент относительно точки подвеса рамки. Суммарный момент сил тяжести двух верхних стержней равен

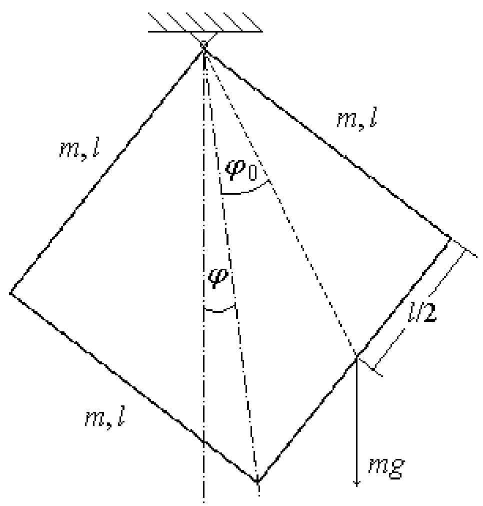
$$M_1 = -mg\frac{l}{2}(\sin(\pi/4+\varphi) - \sin(\pi/4-\varphi)) = -mg\frac{l}{2}2\cos(\pi/4)\sin\varphi =$$

$$= -mg\frac{l}{2}\sqrt{2}\sin\varphi.$$

Аналогично для нижней пары стержней суммарный момент сил тяжести равен

$$M_2 = -mg\frac{\sqrt{5}}{2}l(\sin(\varphi_0+\varphi) - \sin(\varphi_0-\varphi)) = -mg\frac{\sqrt{5}}{2}l2\cos\varphi_0\sin\varphi,$$

где $\cos\varphi_0 = 3/\sqrt{10}$.






Суммарный вращательный момент для всей рамки с учетом малых значений угла $\varphi$ равен

$$M = -mgl\cos(\pi/4)\sin\varphi - mg\sqrt{5}l\cos(\varphi_0)\sin\varphi = -2\sqrt{2}mgl\varphi.$$

Вращательный момент, действующий на рамку из стержней, создает ее угловое ускорение $\ddot{\varphi}$, которое определяется по уравнению моментов:

$$J\ddot{\varphi} = M.$$

Момент инерции $J_1$ двух верхних стержней относительно точки подвеса рамки равен

$$J_1 = \frac{2}{3}ml^2.$$

Момент инерции пары нижних стержней относительно той же точки вычислим, используя теорему Гюйгенса - Штейнера:

$$J_2 = 2\left(\frac{1}{3}ml^2 + ml^2\right) = \frac{8}{3}ml^2.$$

Полный момент инерции рамки равен

$$J = \frac{10}{3}ml^2.$$

В результате получаем уравнение колебаний квадратной рамки из стержней:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{g}{l}\varphi.$$

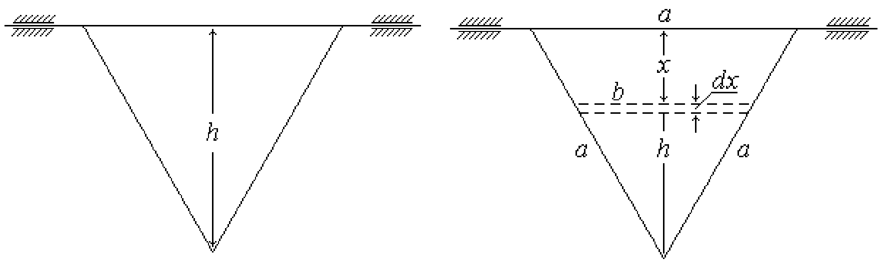
Частота малых колебаний рамки из стержней равна

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{g}{l}}.$$

**6.51.** Рассматриваемая тонкая пластинка в виде треугольника, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из сторон пластинки, представляет собой физический маятник (рис. *а*). При отклонении маятника на малый угол $\varphi$ возникает вращательный момент, создаваемый весом пластинки. Он равен $mgh/3\cdot\varphi$. Здесь учтено, что центр масс данной однородной пластинки находится в точке на высоте $h$ на расстоянии одной ее трети от основания треугольника. Запишем уравнение моментов:

$$J\ddot{\varphi} = -mg\varphi\frac{1}{3}h,$$

где $J$ – момент инерции пластинки. Для вычисления его значения разобьем площадь треугольника на бесконечно тонкие полоски и рассмотрим одну такую полоску на расстоянии $x$ от оси вращения (рис. *б*).




*а* *б*

Ширина полоски равна $dx$. Длину найдем из подобия треугольников:

$$b = a(1 - x/h).$$

Тогда площадь полоски и соответственно ее масса равны

$$dS = bdx = a(1 - x/h)dx, \;\; dm = \rho dS = \rho a(1 - x/h)dx.$$



Здесь $\rho$ – масса единицы площади пластинки.

Вычислим момент инерции пластинки относительно оси вращения. По определению имеем:

$$J = \int_0^h x^2 dm = \rho a\int_0^h x^2(1 - x/h)dx = \frac{1}{12}\rho a h^3.$$

Масса пластинки равна

$$m = \frac{1}{2}\rho a h.$$

Таким образом, момент инерции пластинки равен

$$J = \frac{1}{6}mh^2.$$

После подстановки этого выражения для $J$ уравнение моментов принимает вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{h}\varphi.$$

Период колебательного движения пластинки равен

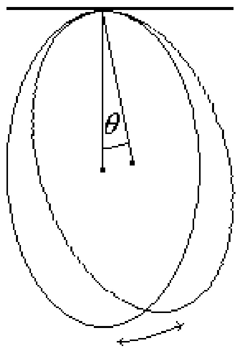
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

**6.52.** Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска, равен

$$J_0 = \frac{1}{2}mr^2.$$

При колебаниях около оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его край, соответствующий момент инерции по теореме Гюйгенса - Штейнера равен

$$J = J_0 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$




Записываем уравнение моментов для диска:

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} = -mgr\theta,$$

откуда находим период колебательного движения диска:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

Для математического маятника длины $l$ период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

По условию периоды равны. Из этого равенства находим длину математического маятника:

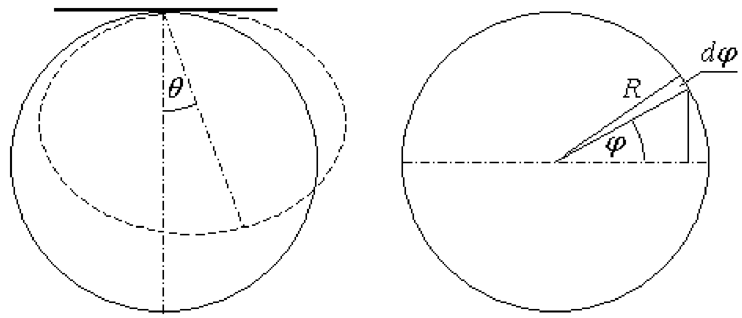
$$l = \frac{3}{2}r = 15 \text{ см.}$$

**6.53.** Рассмотрим первый случай, когда кольцо может совершать колебания около горизонтальной оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей по его верхнему краю (рис. *а*). Пусть кольцо отклонилось от вертикального положения на малый угол $\theta$ (см. рис. *а*, слева). На кольцо будет действовать момент силы тяжести, равный $mgR\theta$. Под действием момента кольцо будет совершать колебания. Запишем уравнение моментов



$$J\ddot{\theta} = -mgR\theta.$$

Здесь $J$ – момент инерции кольца относительно оси вращения.




*а*

Вычислим вначале момент инерции $J_0$ кольца относительно его диаметра. С этой целью выделим на кольце элемент между углами $\varphi$ и $d\varphi$ (см. рис. *а*, справа). Его масса равна

$$dm = \rho R d\varphi,$$

где $\rho$ – линейная плотность кольца. Расстояние выделенного элемента до диаметра – штрихпунктирной линии равно $R\sin\varphi$. Тогда имеем:

$$J_0 = \int_0^{2\pi}(R\sin\varphi)^2\rho R d\varphi = \rho R^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \rho\pi R^3.$$

Масса кольца равна

$$m = 2\pi\rho R.$$

Поэтому момент инерции кольца относительно его диаметра равен

$$J_0 = \frac{1}{2}mR^2.$$

Пользуясь теоремой Гюйгенса - Штейнера, найдем момент инерции $J$ кольца относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей по его верхнему краю:

$$J = J_0 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Подставляя это выражение для $J$, приведем уравнение моментов к виду

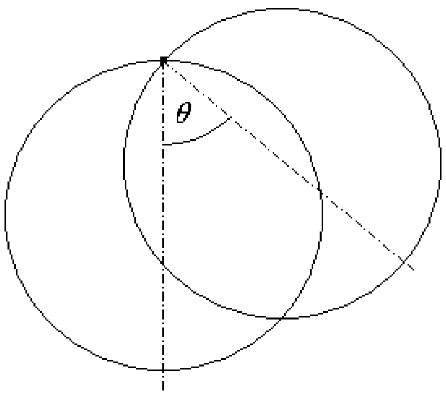
$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3R}\theta.$$

Таким образом, в первом случае период колебаний проволочного кольца равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}.$$

Для второго случая (рис. *б*) момент инерции кольца относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости кольца, равен

$$J_0 = mR^2.$$




*б*



Относительно параллельной оси, пересекающей обод кольца, момент инерции по теореме Гюйгенса - Штейнера равен

$$J = J_0 + mR^2 = 2mR^2.$$

В этом случае уравнение моментов принимает вид

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2R}\theta.$$

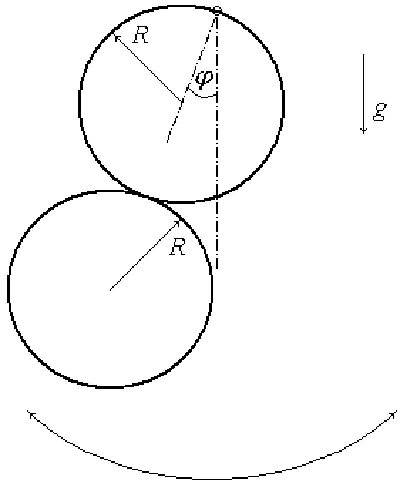
Соответственно период колебаний проволочного кольца равен

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Отношение периодов для двух рассмотренных случаев равно

$$T_2/T_1 = 2/\sqrt{3}.$$

**6.54.** Найдем частоту колебаний физического маятника, используя энергетический подход. Пусть $\varphi$ – угол отклонения маятника от положения устойчивого равновесия.



При колебании маятника положение его центра масс меняется по высоте, изменяется потенциальная энергия маятника. Центр масс однородного обруча совпадает с его геометрическим центром. Изменение потенциальной энергии системы одинаковых скрепленных обручей зависит от угла поворота $\varphi$ следующим образом:

$$\Delta U = mgR(1-\cos\varphi) + 3mgR(1-\cos\varphi).$$

Первое слагаемое – изменение потенциальной энергии верхнего обруча, второе – нижнего ($m$ – масса одного обруча). Для малых углов поворота это выражение преобразуется к виду

$$\Delta U = 4mgR(1-\cos\varphi) = 8mgR\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cong 2mgR\varphi^2.$$

Помимо потенциальной энергии, маятник обладает кинетической энергией вращательного движения:

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2.$$

Момент инерции обруча относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча и проходящей через его центр, равен

$$J_0 = mR^2.$$

При параллельном переносе оси вращения в точку подвеса маятника момент инерции верхнего обруча согласно теореме Гюйгенса – Штейнера равен

$$J_1 = J_0 + mR^2 = 2mR^2.$$

Аналогично для нижнего обруча имеем:

$$J_2 = 10mR^2.$$

Таким образом, момент инерции маятника в целом относительно точки его подвеса равен



$$J = J_1 + J_2 = 12mR^2.$$

Кинетическая энергия маятника равна

$$T = 6mR^2\dot{\varphi}^2.$$

Полная механическая энергия маятника равна сумме его кинетической и потенциальной энергии и при колебательном движении согласно закону сохранения не меняется:

$$E = T + \Delta U = 6mR^2\dot{\varphi}^2 + 2mgR\varphi^2 = \text{const}.$$

Сравниваем энергию $E$ с ее выражением через частоту колебаний:

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\varphi^2 = 6mR^2\dot{\varphi}^2 + 6mR^2\omega^2\varphi^2.$$

Находим:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{3R}}.$$

Как следует из общей теории колебательных движений и, в частности, из решения данной задачи, для того, чтобы найти частоту колебаний, достаточно рассмотреть только потенциальную энергию осциллятора.

**6.55.** Стержень длиной $l$ и массой $m$ имеет момент инерции относительно его конца, равный

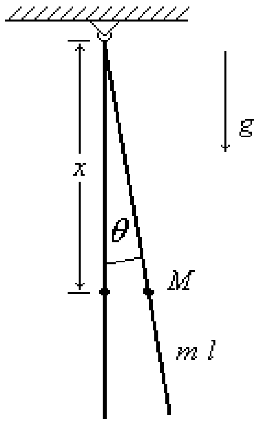
$$J_1 = \frac{1}{3}ml^2.$$

При отклонении от положения равновесия на малый угол $\theta$ на стержень будет действовать момент силы тяжести $mg\theta l/2$. Запишем уравнение моментов:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} = -mg\frac{1}{2}l\theta,$$

откуда находим частоту колебаний стержня:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$




Рассмотрим случай, когда тело с массой $M$ прикреплено на стержне на некотором расстоянии $x$ от точки его подвеса. Аналогичный момент инерции системы «стержень – тело» равен

$$J_2 = \frac{1}{3}ml^2 + Mx^2.$$

Помимо момента силы тяжести стержня, на систему будет действовать момент силы тяжести тела, и уравнение моментов для системы будет иметь вид

$$\left(\frac{1}{3}ml^2 + Mx^2\right)\ddot{\theta} = -\left(mg\frac{1}{2}l + Mgx\right)\theta.$$

Отсюда находим частоту колебаний системы:



$$\omega_2 = \sqrt{\frac{ml/2 + Mx}{ml^2/3 + Mx^2}g}.$$

По условию значение периода колебаний остается прежним, т. е. частоты равны:

$$\omega_2 = \omega_1.$$

Это дает равенство для того, чтобы найти место прикрепления тела на стержне:

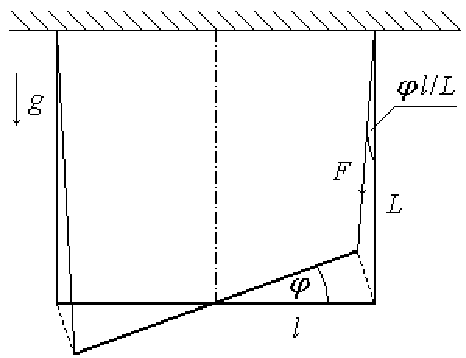
$$\frac{ml/2 + Mx}{ml^2/3 + Mx^2} = \frac{3}{2l}.$$

Решая его, получим:

$$x = \frac{2}{3}l.$$

**6.56.** После поворота палочки вокруг вертикальной оси, проходящей через середину палочки (ось поворота), становятся отличными от нуля проекции сил натяжения нитей на горизонтальное направление. Эти составляющие сил создают моменты, определяющие крутильные колебания.

Конец палочки описывает при повороте дугу, равную $l\varphi$ (длина палочки полагается равной $2l$). При этом каждая нить отклоняется от вертикали на малый угол $\varphi l/L$. Если сила натяжения нити равна $F$, то ее горизонтальная составляющая равна (с учетом малости углов) $F\varphi l/L$, ее момент относительно оси поворота – $F\varphi l^2/L$.



Записываем уравнение моментов для вращательного движения палочки вокруг оси поворота:

$$J\ddot{\varphi} = -2F\frac{l^2}{L}\varphi.$$

Момент инерции палочки относительно ее середины равен

$$J = \frac{1}{3}ml^2.$$

Сила натяжения нитей определяется из равенства

$$2F = mg,$$

которое выполняется при малых углах поворота.

В результате получаем:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{L}\varphi.$$

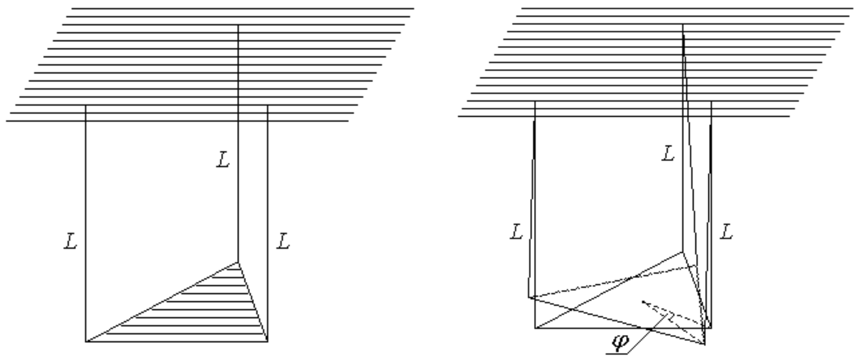
Частота и период крутильных колебаний в рассматриваемом случае равны

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}.$$

**6.57.** Исследуем крутильные колебания системы, показанной на рис. *а*. При повороте треугольной пластинки вокруг вертикальной оси, проходящей через центр треугольника, на малый угол $\varphi$ (см. рис. *б*) вершины перемещаются по дугам описной окружности, равным $r\varphi$ ($r$ – радиус описанной окружности, или расстояние от центра треугольника до его вершины). При этом нити отклонятся на малый угол, равный $r\varphi/L$. Появляющаяся горизонтальная составляющая силы натяжения нити $F$ равна $F\,r\varphi/L$. Она создает вращательный момент:

$$M = -F\frac{r^2}{L}\varphi.$$






*а* *б*

Уравнение моментов для рассматриваемой системы имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = 3M = -3F\frac{r^2}{L}\varphi.$$

Сила натяжения нитей определяется из равенства

$$3F = mg.$$

Оно выполняется при малых углах поворота.

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен

$$r = \frac{2}{3}h,$$

где $h$ – высота треугольника.

Момент инерции треугольной пластинки вокруг вертикальной оси, проходящей через центр треугольника, равен

$$J = 2\rho\int_{-h/3}^{2h/3} dy \int_{0}^{(2h/3-y)\mathrm{tg}\,\pi/6} (x^2 + y^2)dx = \frac{1}{9}mh^2.$$

При вычислении момента инерции $J$ в плоскости треугольника введена декартова система координат с началом в центре. Ось $y$ проходит через вершину. Масса пластинки в виде правильного треугольника равна

$$m = \frac{1}{2}\rho a h = \frac{1}{2}\rho h^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

Здесь $\rho$ – масса единицы площади пластинки.

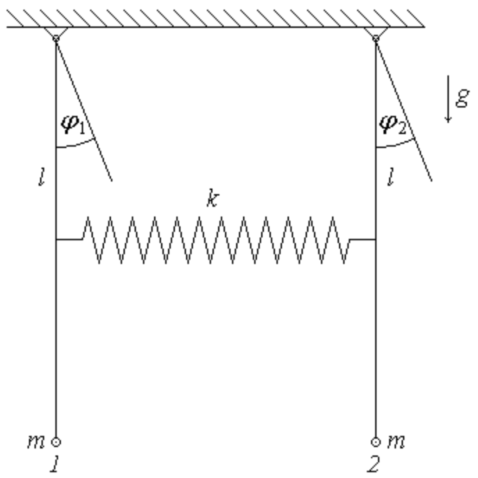
В результате уравнение моментов принимает вид

$$\ddot{\varphi} = -4\frac{g}{L}\varphi.$$

Период крутильных колебаний пластинки вокруг вертикальной оси равен

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

**6.58.** Колебания маятников будем описывать с помощью угловых координат: маятника *1* – с помощью угла $\varphi_1$, маятника 2 – с помощью угла $\varphi_2$.






Запишем уравнения моментов для маятников:

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 = -mgl\varphi_1 + kx\frac{l}{2},$$

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 = -mgl\varphi_2 - kx\frac{l}{2}.$$

Угловые координаты связаны с изменением длины пружины соотношением

$$(\varphi_2 - \varphi_1)\frac{l}{2} = x.$$

Исключая величину $x$, получим для угловых координат систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -\dfrac{g}{l}\varphi_1 + \dfrac{k}{4m}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 = -\dfrac{g}{l}\varphi_2 - \dfrac{k}{4m}(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases}$$

По общим правилам решения таких уравнений ищем две неизвестных функции $\varphi_k(t)$ в виде

$$\varphi_k = A_k e^{i\omega t},$$

где $A_k$ – некоторые, пока не определенные постоянные. Подставляя эти функции в систему, после сокращении на экспоненциальный множитель получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные $A_k$:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \dfrac{g}{l} - \dfrac{k}{4m}\right)A_1 + \dfrac{k}{4m}A_2 = 0, \\ \dfrac{k}{4m}A_1 + \left(\omega^2 - \dfrac{g}{l} - \dfrac{k}{4m}\right)A_2 = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы эта система имела отличные от нуля решения, должен обращаться в нуль ее определитель:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \dfrac{g}{l} - \dfrac{k}{4m} & \dfrac{k}{4m} \\ \dfrac{k}{4m} & \omega^2 - \dfrac{g}{l} - \dfrac{k}{4m} \end{vmatrix} = 0.$$

Это характеристическое уравнение. Его корни определяют собственные частоты системы $\omega_1$ и $\omega_2$:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l},\ \ \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{2m}.$$

Общее решение исходной системы есть суперпозиция нормальных колебаний с собственными частотами системы $\omega_1$ и $\omega_2$:

$$\varphi_1 = \mathrm{Re}\left\{\sum_{s=1}^{2} A_{1s} e^{i\omega_s t}\right\},\quad \varphi_2 = \mathrm{Re}\left\{\sum_{s=1}^{2} A_{2s} e^{i\omega_s t}\right\}.$$

Постоянные $A_{ks}$ можно найти, если заданы начальные значения угловых координат и их первых производных (угловых скоростей). Слагаемые с определенным значением частоты соответствуют нормальным колебаниям.

Здесь применен общий способ решения исходной системы дифференциальных уравнений. Однако, учитывая вид этих уравнений, легко получить собственные частоты системы и найти нормальные



колебания следующим образом. Сложим уравнения почленно и вычтем их друг из друга. Система уравнений примет вид уравнений нормальных колебаний:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = -\dfrac{g}{l}(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = -\left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{2m}\right)(\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases}$$

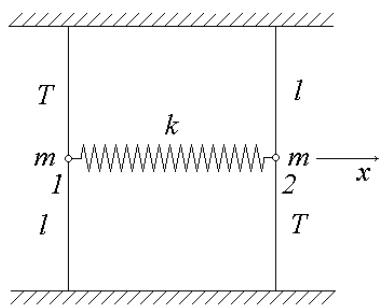
Коэффициенты в правой части дают квадраты полученных выше собственных частот системы. Соответствующие им решения (нормальные колебания) имеют вид

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1),\quad \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = B_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Амплитуды $B_m$ и начальные фазы $\alpha_m$ можно найти, если заданы начальные значения угловых координат и угловых скоростей. Величины $B_m$ и $\alpha_m$ выражаются через $A_{ks}$.

**6.59.** Пусть $x_1$ и $x_2$ – смещения первого и второго грузов вдоль оси $x$. Тогда на грузы действуют по оси $x$ силы со стороны струн, равные

$$F_i = -2T\frac{x_i}{l/2},\ \ i = 1, 2.$$



Кроме того, на грузы действует сила сжатой или растянутой пружины. В соответствии со 2-ым законом Ньютона движение системы грузов описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2T\dfrac{x_1}{l/2} + k(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 = -2T\dfrac{x_2}{l/2} - k(x_2 - x_1). \end{cases}$$

Если вместо $x_i$ ($i$ = 1, 2) ввести переменные

$$y_1 = x_1 + x_2 \text{ и } y_2 = x_2 - x_1,$$

то уравнения примут вид

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -4\dfrac{T}{l}y_1, \\ m\ddot{y}_2 = -(4\dfrac{T}{l} + 2k)y_2. \end{cases}$$

Эти уравнения описывают нормальные колебания системы грузов, $y_i$ ($i$ = 1, 2) – нормальные координаты. Частоты нормальных колебаний равны

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{T}{ml}}, \quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{T}{ml} + \frac{k}{2m}}.$$

Решение системы уравнений для $y_i$ имеет вид



$$y_1 = x_1 + x_2 = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t,$$

$$y_2 = x_2 - x_1 = A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t.$$

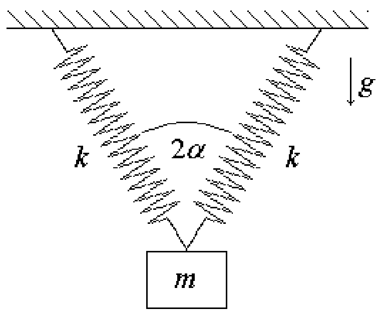
Сложение и вычитание этих равенств дает решение исходной системы уравнений:

$$x_1 = \frac{1}{2}(A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t - A_2\cos\omega_2 t - B_2\sin\omega_2 t),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t).$$

Постоянные $A_i$ и $B_i$ ($i$ = 1, 2) можно найти, если заданы начальные данные – значения начальных координат и скоростей грузов.

**6.60.** Пусть $x_1$ и $x_2$ – растяжения пружин, для определенности левой и правой соответственно. При их растяжении (или сжатии) возникают упругие силы, которые вызывают колебательное движение груза.




Спроектируем уравнение движения груза на направления вдоль пружин:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + kx_2\cos(\pi - 2\alpha) + mg\cos\alpha, \\ m\ddot{x}_2 = kx_1\cos(\pi - 2\alpha) - kx_2 + mg\cos\alpha. \end{cases}$$

После деления на $m$ уравнения системы принимают вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2\cos 2\alpha + g\cos\alpha, \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1\cos 2\alpha - \frac{k}{m}x_2 + g\cos\alpha. \end{cases}$$

Это система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. По правилам решения таких уравнений ищем неизвестные функции $x_k(t)$, где $k = 1, 2$, в виде суперпозиции частного решения и общего решения соответствующей системы однородных уравнений. Частное решение ищется из решения системы алгебраических уравнений, получающейся из исходной системы при отсутствии колебаний груза:

$$\begin{cases} x_1 + x_2\cos 2\alpha = \frac{mg}{k}\cos\alpha, \\ x_1\cos 2\alpha + x_2 = \frac{mg}{k}\cos\alpha. \end{cases}$$

Общее решение системы однородных уравнений ищется в виде

$$x_k = A_k\exp(i\omega t), \quad k = 1, 2.$$

Подставляя $x_k$ в систему однородных уравнений и сокращая на экспоненту, получаем линейную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_k$:



$$\begin{cases} \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)A_1 + \frac{k}{m}\cos 2\alpha\, A_2 = 0, \\ \frac{k}{m}\cos 2\alpha A_1 + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, ее определитель должен равняться нулю:

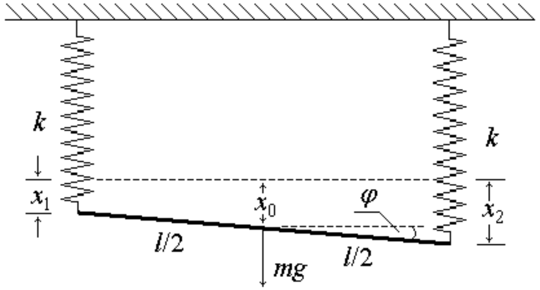
$$\begin{vmatrix} \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) & \frac{k}{m}\cos 2\alpha \\ \frac{k}{m}\cos 2\alpha & \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Это – характеристическое уравнение. Его корни дают собственные (нормальные) частоты системы:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}\cos\alpha, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\alpha.$$

**6.61.** Пусть $x_0$, $x_1$ и $x_2$ – перемещения центра масс стержня и левого и правого его концов соответственно (эти перемещения возникают как при подвешивании стержня к пружинам, так и при его колебаниях), $\varphi$ – угол поворота стержня относительно его центра масс. Эти величины связаны геометрическими соотношениями:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \; x_2 - x_0 = \frac{l}{2}\varphi.$$




По общей теории движение стержня можно рассматривать как движение его центра масс и вращение вокруг центра масс. На стержень действуют сила тяжести $mg$ и упругие силы $-kx_1$ и $-kx_2$ со стороны левой и правой пружин соответственно. По 2-му закону Ньютона движение центра масс стержня описывается уравнением

$$m\ddot{x}_0 = mg - k(x_1 + x_2).$$

Вращение стержня описывается уравнением моментов:

$$J_0\ddot{\varphi} = kx_1\frac{l}{2} - kx_2\frac{l}{2}.$$

Момент инерции стержня длиной $l$ относительно его центра равен

$$J_0 = \frac{1}{12}ml^2.$$

Подставляя выражение для $J_0$ и исключая перемещения концов стержня, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = -6\dfrac{k}{m}\varphi, \\ \ddot{x}_0 = g - 2\dfrac{k}{m}x_0. \end{cases}$$



Уравнения системы не зависят одно от другого и представляют собой нормальные колебания. Первое уравнение описывает колебание значений угловой координаты $\varphi$ с частотой

$$\omega_1 = \sqrt{6\frac{k}{m}}.$$

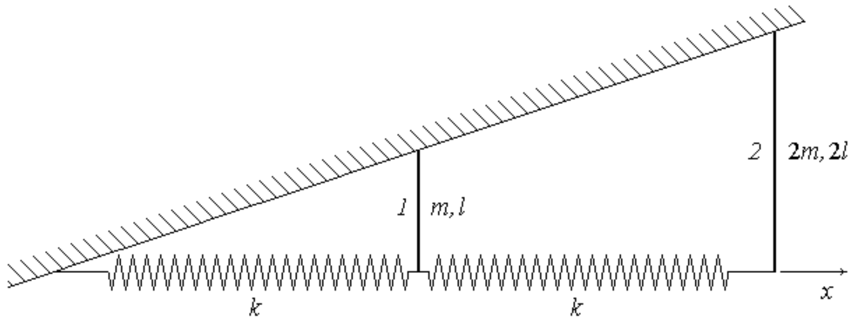
Второе уравнение описывает колебания центра масс с частотой

$$\omega_2 = \sqrt{2\frac{k}{m}}$$

около его равновесного положения.

**6.62.** Пусть $\varphi_1$ и $\varphi_2$ – углы отклонения стержней от равновесного положения. Соответствующие смещения концов стержней, соединенных с пружинами, равны

$$x_1 = l\varphi_1, \;\; x_2 = 2l\varphi_2.$$




Уравнения моментов для стержней относительно шарниров имеют вид

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = -kx_1 l + k(x_2 - x_1)l,$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 = -k(x_2 - x_1)2l.$$

Моменты инерции стержней равны

$$J_1 = \frac{1}{3}ml^2, \ \ J_2 = \frac{1}{3}2m(2l)^2 = \frac{8}{3}ml^2.$$

Подставляя выражения для моментов инерции и растяжений пружин в уравнения моментов, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -6\dfrac{k}{m}\varphi_1 + 6\dfrac{k}{m}\varphi_2, \\ \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{3k}{4m}\varphi_1 - \dfrac{3k}{2m}\varphi_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 6\dfrac{k}{m} - \omega^2 & -6\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{3k}{4m} & \dfrac{3k}{2m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение:

$$\omega^4 - \frac{15k}{2m}\omega^2 + \frac{9}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0.$$

Нормальные частоты колебаний равны

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{3(5 \pm \sqrt{17})\frac{k}{m}}.$$

Этим частотам соответствуют нормальные колебания:



$$q_i = A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t, \ \ i = 1, 2.$$

Общее решение имеет вид

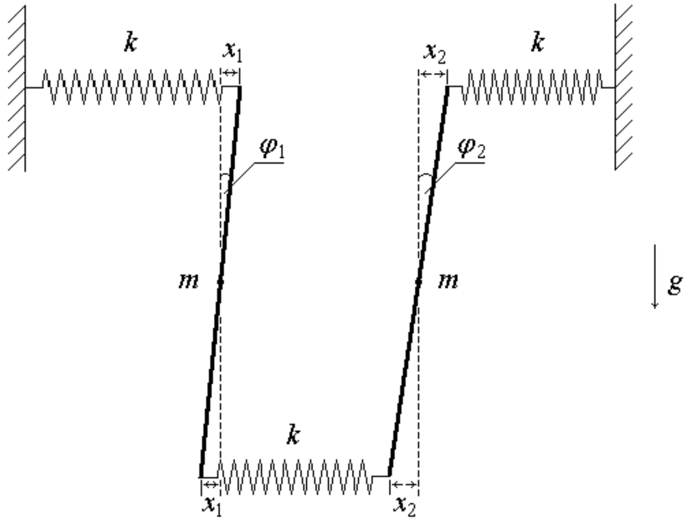
$$\varphi_1 = q_1 + q_2, \ \ \varphi_2 = \frac{1}{8}(3 - \sqrt{17})q_1 + \frac{1}{8}(3 + \sqrt{17})q_2.$$

Постоянные $A_i$ и $B_i$ находятся из начальных данных.

**6.63.** Пусть стержень *1* повернут по часовой стрелке на угол $\varphi_1$, а стержень *2* в то же время аналогично повернут на угол $\varphi_2$, каждый вокруг своей оси вращения. Тогда одна из верхних на рисунке пружин растянута на длину $x_1$, а другая пружина сжата на $x_2$. Между углами поворота стержней и изменениями длин пружин выполняются соотношения

$$x_1 = \frac{l}{2}\varphi_1, \ \ x_2 = \frac{l}{2}\varphi_2.$$

Здесь $l$ – длина стержня.




Стержни при повороте сохраняют свою прямолинейную форму. Поэтому растяжение нижней пружины равно

$$x_3 = x_1 - x_2\,.$$

Силы упругости пружин создают вращательные моменты. Уравнения моментов относительно осей вращения имеют вид

$$\begin{cases} J\ddot{\varphi}_1 = -kx_1\dfrac{l}{2} - kx_3\dfrac{l}{2}, \\ J\ddot{\varphi}_2 = -kx_2\dfrac{l}{2} + kx_3\dfrac{l}{2}. \end{cases}$$

Момент инерции стержня $J$ относительно его середины равен

$$J = \frac{1}{12}ml^2.$$

Подставляя в уравнения моментов значения $J$, $x_1$, $x_2$ и $x_3$, получим:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -3\dfrac{k}{m}\varphi_1 - 3\dfrac{k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \ddot{\varphi}_2 = -3\dfrac{k}{m}\varphi_2 + 3\dfrac{k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2). \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 6\dfrac{k}{m} - \omega^2 & -3\dfrac{k}{m} \\ -3\dfrac{k}{m} & 6\dfrac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение характеристического уравнения дает нормальные частоты:

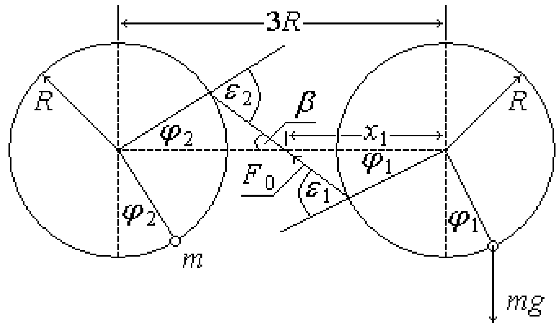


$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = 3\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

**6.64.** Колебательное движение точечных масс, прикрепленных в нижней части дисков, будем описывать с помощью углов $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Рассматриваем малые колебания, т. е. считаем, что выполняются соотношения типа

$$|\varphi_1| << 1, \ \sin\varphi_2 \approx \varphi_1.$$

При отклонении масс от положения равновесия на углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ соответственно возникнут моменты сил тяжести $mg$ и упругой силы $F_0$ (на рисунке пружина условно заменена прямой линией вдоль упругой силы).




Система уравнений моментов для этих масс, описывающая их колебания, имеет вид

$$\begin{cases} mR^2\ddot{\varphi}_1 = -mgR\varphi_1 - F_0R\varepsilon_1, \\ mR^2\ddot{\varphi}_2 = -mgR\varphi_2 - F_0R\varepsilon_2. \end{cases}$$

Из геометрии известно, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним несмежных. Поэтому имеем:

$$\varepsilon_1 = \beta + \varphi_1,\ \ \varepsilon_2 = \beta + \varphi_2.$$

Исключая $\beta$, получим равенство

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Расстояние между центрами дисков задано равным трем радиусам. С другой, стороны оно равно сумме двух отрезков:

$$3R = x_1 + x_2.$$

Длина этих отрезков может быть найдена из треугольников по теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin\beta} = \frac{x_1}{\sin(\pi - \varepsilon_1)} = \frac{x_2}{\sin(\pi - \varepsilon_2)}.$$

С учетом малости углов эти равенства принимают вид

$$\frac{R}{\beta} = \frac{x_1}{\varepsilon_1} = \frac{x_2}{\varepsilon_2}.$$

Исключение угла $\beta$ и отрезков $x_1$ и $x_2$ дает равенство

$$3 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varphi_1}.$$

Итак, для того чтобы найти углы $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, имеем два равенства:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varphi_1 - \varphi_2, \\ 3 = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varphi_1}. \end{cases}$$



Из них находим:

$$\varepsilon_1 = 2\varphi_1 + \varphi_2, \qquad \varepsilon_2 = \varphi_1 + 2\varphi_2.$$

Подстановка полученных выражений для $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ в систему уравнений моментов приводит эту систему к виду

$$\begin{cases} mR\ddot{\varphi}_1 = -mg\varphi_1 - F_0(2\varphi_1 + \varphi_2), \\ mR\ddot{\varphi}_2 = -mg\varphi_2 - F_0(\varphi_1 + 2\varphi_2). \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{mg + 2F_0}{mR} - \omega^2 & \dfrac{F_0}{mR} \\ \dfrac{F_0}{mR} & \dfrac{mg + 2F_0}{mR} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение характеристического уравнения дает нормальные частоты:

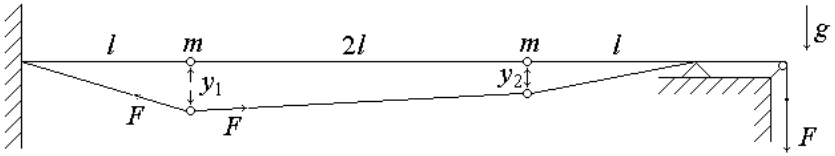
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mg + F_0}{mR}},\ \ \omega_2 = \sqrt{\frac{mg + 3F_0}{mR}}.$$

**6.65.** Введем ось $y$ по вертикали вниз, отсчитывая координату от горизонтального положения струны. Под действием веса грузов, укрепленных на струне, последняя слегка изогнута, и на грузы, помимо силы тяжести, действуют в вертикальном направлении составляющие сил натяжения со стороны струны. Пусть $y_1$ – малое отклонение левой массы от положения, соответствующего горизонтальной струне, соответственно $y_2$ – малое отклонение правой массы. На первую массу со стороны левой части струны действует сила натяжения, вертикальная составляющая которой равна

$$T_{11} \cong -F y_1/l.$$

С правой стороны на эту массу действует вертикальная составляющая силы натяжения струны, равная

$$T_{12} \cong -F(y_1 - y_2)/2l.$$




Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{y}_1 = mg + T_{11} + T_{12} = mg - F y_1/l - F(y_1 - y_2)/2l.$$

Аналогично для второй массы записываем:

$$m\ddot{y}_2 = mg - F y_2/l - F(y_2 - y_1)/2l.$$

В результате колебательное движение физической системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = g - \dfrac{F}{ml} y_1 - \dfrac{F}{2ml}(y_1 - y_2), \\ \ddot{y}_2 = g - \dfrac{F}{ml} y_2 - \dfrac{F}{2ml}(y_2 - y_1). \end{cases}$$



Из свойств симметрии данной системы уравнений видно, что если ввести новые искомые функции по уравнениям

$$q_1 = y_1 + y_2 - \frac{2mgl}{F}, \quad q_2 = y_2 - y_1,$$

то система дифференциальных уравнений распадется на два независимых уравнения, соответствующих нормальным колебаниям:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{F}{ml} q_1, \\ \ddot{q}_2 = -\dfrac{2F}{ml} q_2. \end{cases}$$

Частоты нормальных колебаний равны

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{F}{ml}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2F}{ml}}.$$

Решение системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} q_1 = y_1 + y_2 - \dfrac{2mgl}{F} = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t, \\ q_2 = y_2 - y_1 = A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t. \end{cases}$$

В начальный момент времени имеем:

$$t = 0 \quad \begin{cases} y_1 + y_2 - 2mgl/F = A_1, \\ y_2 - y_1 = A_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 + \dot{y}_2 = \omega_1 B_1, \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 = \omega_2 B_2. \end{cases}$$

Если начальные условия заданы таким образом, что выполняются равенства

$$t = 0 \qquad y_1 = y_2, \qquad \dot{y}_1 = \dot{y}_2,$$

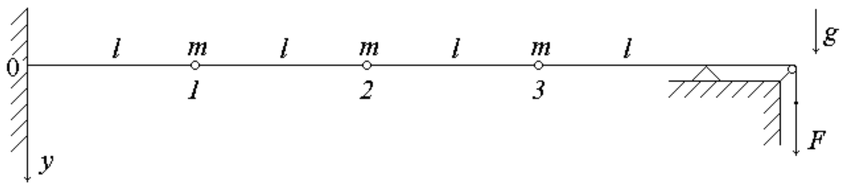
то будут происходить колебания только с частотой $\omega_1$. При этом часть струны между массами всегда будет горизонтальна, и ускорения массам будут сообщать натяжения только крайних отрезков струны. Следовательно, массы будут двигаться так же, как вдвое большая масса, находящаяся на середине укороченной в два раза струны при том же натяжении.

Если начальные условия заданы таким образом, что выполняются равенства

$$t = 0 \qquad y_1 - \frac{mgl}{F} = \frac{mgl}{F} - y_2, \qquad \dot{y}_1 = -\dot{y}_2,$$

то будут происходить колебания только с частотой $\omega_2$. Средняя точка струны будет все время находиться в покое. Каждая масса колеблется так, как если бы она находилась в середине струны, укороченной в два раза.

**6.66.** Решение задачи аналогично 6.65. Вводим ось $y$ по вертикали вниз, отсчитывая координату от горизонтального положения струны. Нумеруем массы слева направо.




Пусть $y_i$ ($I = 1, 2, 3$) – малое отклонение соответствующей массы от горизонтального положения струны. Согласно 2-му закону Ньютона имеем:



$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = mg - F y_1/l + F(y_2 - y_1)/l, \\ m\ddot{y}_2 = mg - F(y_2 - y_1)/l + F(y_3 - y_2)/l, \\ m\ddot{y}_3 = mg - F(y_3 - y_2)/l - F y_3/l. \end{cases}$$

В равновесном состоянии системы выполняются равенства

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = \ddot{y}_3 = 0.$$

Соответствующие равновесные координаты масс находятся из системы

$$\begin{cases} mg - F y_{10}/l + F(y_{20} - y_{10})/l = 0, \\ mg - F(y_{20} - y_{10})/l + F(y_{30} - y_{20})/l = 0, \\ mg - F(y_{30} - y_{20})/l - F y_{30}/l = 0. \end{cases}$$

Несложные вычисления дают

$$y_{10} = \frac{3mgl}{2F}, \quad y_{20} = 2\frac{mgl}{F}, \quad y_{30} = \frac{3mgl}{2F}.$$

Вместо $y_i$ вводим новые искомые величины $x_i = y_i - y_{i0}$, $i = 1, 2, 3$. Система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -F x_1/l + F(x_2 - x_1)/l, \\ m\ddot{x}_2 = -F(x_2 - x_1)/l + F(x_3 - x_2)/l, \\ m\ddot{x}_3 = -F(x_3 - x_2)/l - F x_3/l. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \left(2\frac{F}{ml} - \omega^2\right) & -\frac{F}{ml} & 0 \\ -\frac{F}{ml} & \left(2\frac{F}{ml} - \omega^2\right) & -\frac{F}{ml} \\ 0 & -\frac{F}{ml} & \left(2\frac{F}{ml} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни дают нормальные частоты колебания системы:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2F}{ml}}, \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{F}{ml}(2 \pm \sqrt{2})}.$$

С частотой $\omega_1$ колеблются две крайние массы в противоположных направлениях, а масса, расположенная на середине струны, остается неподвижной.

**6.67.** Пронумеруем бусинки, начиная с верхней, по часовой стрелке. Пусть $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$ – отклонения угловых координат соответствующих бусинок от равновесных значений. Тогда растяжения пружин между бусинками равны $\Delta l_{1\text{-}2} = R(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\Delta l_{2\text{-}3} = R(\varphi_3 - \varphi_2)$ и $\Delta l_{3\text{-}1} = R(\varphi_1 - \varphi_3)$. На бусинки со стороны пружин действуют упругие силы. Напишем уравнения моментов для каждой бусинки:



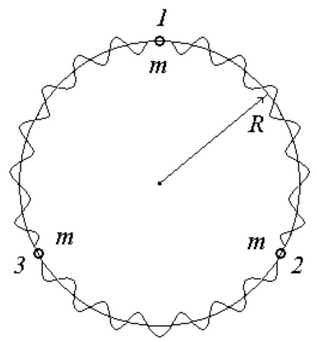
$$\begin{cases} mR^2\ddot{\varphi}_1 = kR(\varphi_2 - \varphi_1)R - kR(\varphi_1 - \varphi_3)R, \\ mR^2\ddot{\varphi}_2 = kR(\varphi_3 - \varphi_2)R - kR(\varphi_2 - \varphi_1)R, \\ mR^2\ddot{\varphi}_3 = kR(\varphi_1 - \varphi_3)R - kR(\varphi_3 - \varphi_2)R. \end{cases}$$

Приведем эту систему к виду

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -\frac{k}{m}(2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3), \\ \ddot{\varphi}_2 = -\frac{k}{m}(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3), \\ \ddot{\varphi}_3 = -\frac{k}{m}(-\varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_3). \end{cases}$$

Это линейная система однородных уравнений с постоянными коэффициентами. По общей теории решение ищем в виде

$$\varphi_s = A_s \exp(i\omega t), \quad s = 1, 2, 3.$$



Подстановка дает систему линейных уравнений относительно величин $A_s$, $s$ = 1, 2, 3:

$$\begin{cases} (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 - \omega_0^2 A_3 = 0, \\ -\omega_0^2 A_1 + (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_2 - \omega_0^2 A_3 = 0, \\ -\omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 + (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_3 = 0, \end{cases}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$. Эта система однородных уравнений имеет отличные от нуля решения, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (-\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (-\omega^2 + 2\omega_0^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & (-\omega^2 + 2\omega_0^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приводим данное характеристическое уравнение к виду

$$\omega^2(\omega^2 - 3\omega_0^2)^2 = 0.$$

Корню этого уравнения $\omega = 0$ отвечает отсутствие колебательного движения, но при этом возможно вращательное движение системы бусинок. Если все три дифференциальных уравнения для угловых координат сложить, получим:

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_3 = 0,$$

откуда следует соотношение



$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = a + bt.$$

Оно указывает на возможность вращательного движения бусинок (при $b \neq 0$). Нас интересует только чисто колебательное движение.

Два других корня совпадающие

$$\omega = \sqrt{3}\omega_0 = \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

Это говорит о возможности одновременного существования вращательного и колебательного движений (см., например, [Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. 1965]). Мы также не рассматриваем такие решения.

Остается единственное решение, когда одна из бусинок неподвижная, а две другие колеблются с найденной частотой в противоположные стороны.

Действительно, пусть $a = b = 0$. Тогда имеем:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Для определенности считаем, что неподвижна третья бусинка $\varphi_3 = 0$. Из первого дифференциального уравнения исключаем $\varphi_2$, а из второго – $\varphi_1$. Получаем:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -3\dfrac{k}{m}\varphi_1, \\ \ddot{\varphi}_2 = -3\dfrac{k}{m}\varphi_2 . \end{cases}$$

Это уравнения вырожденных нормальных колебаний системы с частотой

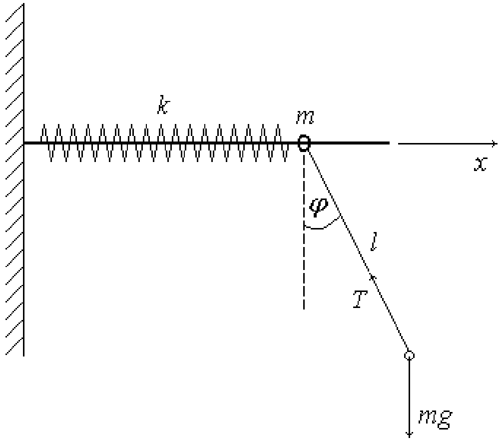
$$\omega = \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

**6.68.** Пусть $x_1$ и $x_2$ – координаты соответственно кольца и шарика в горизонтальном направлении, отсчитываемые от равновесного положения кольца ($x_1$ равно растяжению пружины).

В результате растяжения (или сжатия) пружины на кольцо действует упругая сила, равная $kx_1$. Кроме того, на кольцо действуют натяжение нити $T$, сила тяжести $mg$ и нормальное давление спицы. В результате кольцо приобретает ускорение вдоль спицы, равное $\ddot{x}_1$. Согласно 2-му закону Ньютона уравнение движения кольца имеет вид

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + T\varphi,$$

где $\varphi$ – угол отклонения нити от вертикали.




Шарик под действием натяжения нити и силы тяжести также находится в движении. По 2-му закону Ньютона имеем в проекции на горизонтальное направление:

$$m\ddot{x}_2 = -T\varphi.$$

Проекция сил на вертикальное направление дает с точностью до малых величин равенство

$$T = mg.$$

Угол отклонения нити от вертикали связан с координатами кольца и шарика соотношением

$$x_2 - x_1 = l\varphi.$$



Исключая из этих уравнений угол  и натяжение нити, получим систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{g}{l}(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}(x_2 - x_1). \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{k}{m} + \dfrac{g}{l} - \omega^2 & -\dfrac{g}{l} \\ -\dfrac{g}{l} & \dfrac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель и получаем биквадратное уравнение для нормальных частот:

$$\omega^4 - \left(2\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{k}{m}\frac{g}{l} = 0.$$

Частоты нормальных колебаний равны

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{l}\right)^2 + \left(\frac{k}{2m}\right)^2}}.$$

Обе частоты – действительные числа.

**6.69.** Согласно принципу наименьшего действия механическая система в обобщенных координатах $q_i$ ($i = 1, 2, \ldots q_s$) характеризуется функцией Лагранжа

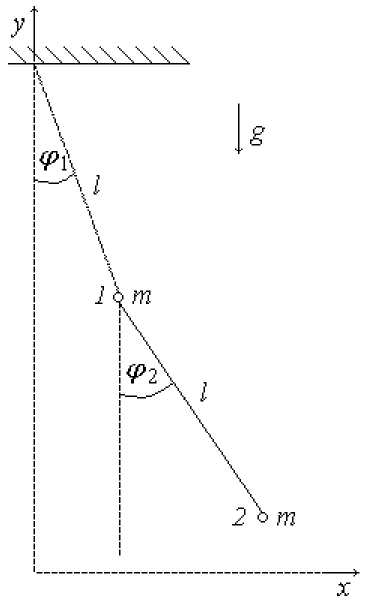
$$L(q_1, q_2, \dots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_s, t).$$

Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то можно получить уравнения движения системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ (i = 1, 2, \dots s).$$

В решаемой задаче рассматривается система из двух материальных точек массой $m$ каждая (двойной плоский маятник), $\varphi_1$ и $\varphi_2$ – угловые координаты. По условию функция Лагранжа имеет вид

$$L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) - mgl\left(\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2\right).$$




Впрочем, функцию Лагранжа можно было бы и не задавать. Выражение для нее несложно получить. Введем декартову систему



координат с началом на расстоянии $2l$ ниже точки подвеса маятника. В этих координатах радиус-вектор частицы *1* равен

$$\vec{r}_1 = \vec{i}\, l\sin\varphi_1 + \vec{j}\, l(2 - \cos\varphi_1).$$

Соответственно ее скорость при малых колебаниях равна

$$\dot{\vec{r}}_1 = (\vec{i}\, l\cos\varphi_1 + \vec{j}\, l\sin\varphi_1)\dot{\varphi}_1 \cong \vec{i}\, l\dot{\varphi}_1.$$

Кинетическая энергия частицы имеет значение

$$T_1 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1^2.$$

Потенциальная энергия, точнее, ее изменение при колебаниях (только оно имеет значение) обладает величиной

$$U_1 = mgl(1 - \cos\varphi_1) = mgl2\sin^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cong \frac{1}{2}mgl\varphi_1^2.$$

Аналогично для частицы *2* имеем:

$$\vec{r}_2 = \vec{i}\,(l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2) + \vec{j}\,(l(1 - \cos\varphi_1) + l(1 - \cos\varphi_2)),$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \vec{i}\,(l\cos\varphi_1\dot{\varphi}_1 + l\cos\varphi_2\dot{\varphi}_2) + \vec{j}\,(l\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 + l\sin\varphi_2\dot{\varphi}_2) \cong \vec{i}\, l(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2).$$

Кинетическая энергия этой частицы и ее потенциальная энергия имеют значения:

$$T_2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2\right),\ U_2 = \frac{1}{2}mgl\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right).$$

Функция Лагранжа рассматриваемой системы материальных точек равна

$$L = T_1 + T_2 - (U_1 + U_2).$$

Подставляя сюда выражения для кинетической и потенциальной энергии обеих частиц, получим заданную по условию функцию Лагранжа.

По известной функции Лагранжа найдем уравнения, описывающие колебания двойного плоского маятника:

$$\begin{cases} 2l\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_2 + 2g\varphi_1 = 0, \\ l\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для этой системы уравнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2(g - l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & (g - l\omega^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение

$$2(g - l\omega^2)^2 - l^2\omega^4 = 0.$$

Нормальные частоты колебаний равны

$$\omega_{1,2} = \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l}}.$$

Этим частотам соответствуют нормальные колебания

$$q_i = A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t, \quad i = 1, 2.$$

Общее решение имеет вид

$$\varphi_1 = q_1 + q_2, \quad \varphi_2 = \sqrt{2}(-q_1 + q_2).$$



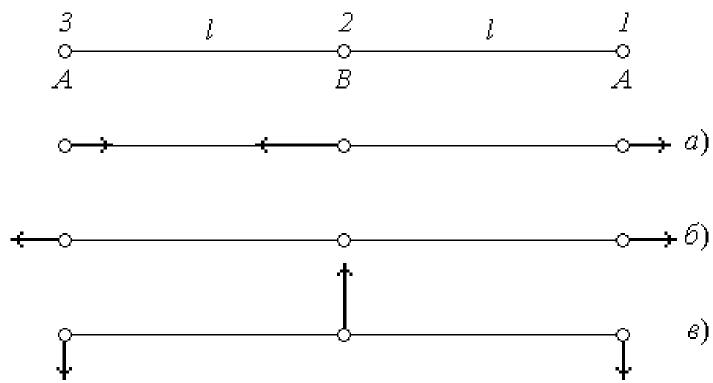
Постоянные $A_i$ и $B_i$ находятся из начальных данных.

**6.70.** Трехатомная молекула имеет девять степеней свободы. Три из низ отвечают поступательному движению молекулы как целого, две связаны с вращательным движением линейной молекулы. Остальные четыре степени свободы имеют колебательный характер. Нас интересуют только колебания атомов в молекуле. Поэтому задачу решаем в системе отсчета, связанной с центром масс, при равенстве нулю момента импульса.

Так как в рассматриваемом случае все атомы лежат на одной прямой, то можно различать нормальные колебания, оставляющие атомы на этой прямой, и нормальные колебания, при которых атомы выводятся с прямой. Легко определить число тех и других. Для движения вдоль прямой молекула имеет три степени свободы. Одна из них связана с движением центра масс. Две степени свободы отвечают колебаниям вдоль прямой. Следовательно, две степени свободы относятся к колебаниям, выводящим атомы с прямой.

Пусть $x_1$, $x_2$ и $x_3$ – продольные смещения атомов (рис. *а* и *б*). В системе центра масс они связаны соотношением

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0.$$




Потенциальная энергия молекулы по условию является квадратичной функцией изменения расстояний между соседними атомами:

$$U_1 = \frac{k_1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2].$$

В силу симметрии молекулы коэффициент пропорциональности в обоих слагаемых один и тот же.

В результате функция Лагранжа молекулы имеет вид

$$L = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2].$$

Если исключить $x_2$ и ввести затем новые независимые переменные по соотношениям

$$q_a = x_1 + x_3,\ \ q_s = x_1 - x_3,$$

то функция Лагранжа молекулы примет вид

$$L = \frac{m_A M}{4m_B}\dot{q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{q}_s^2 - \frac{k_1 M^2}{4m_B^2}q_a^2 - \frac{k_1}{4}q_s^2$$

($M = 2m_A + m_B$ – масса молекулы). Отсюда видно, что $q_a$ и $q_s$ являются (с точностью до нормировки) нормальными координатами. Координата $q_a$ отвечает антисимметричному относительно середины молекулы колебанию ($x_1 = x_3$; рис. *а*) с частотой

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1 M}{m_A m_B}}.$$

Координата $q_s$ соответствует симметричному ($x_1 = -x_3$; рис. *б*) колебанию с частотой

$$\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$



Поперечные смещения атомов $y_1$, $y_2$ и $y_3$ в системе отсчета, связанной с центром масс, и в силу равенства нулю момента импульса связаны соотношениями:

$$m_A(y_1 + y_3) + m_B y_2 = 0,\ \ y_1 = y_3$$

(симметричное колебание изгиба; рис. *в*). Потенциальную энергию молекулы при изгибе запишем в виде

$$U_2 = \frac{k_2}{2}l^2\delta^2,$$

где $\delta$ – отклонение угла $\angle ABA$ от значения $\pi$; оно выражается через смещение согласно

$$\delta = \frac{1}{l}[(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)].$$

Выражая все смещения $y_1$, $y_2$ и $y_3$ через $\delta$, получим функцию Лагранжа для поперечного колебания в виде

$$L = \frac{m_A}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2 - \frac{k_2}{2}l^2\delta^2 = \frac{m_A m_B}{4M}l^2\dot{\delta}^2 - \frac{k_2}{2}l^2\delta^2,$$

откуда частота

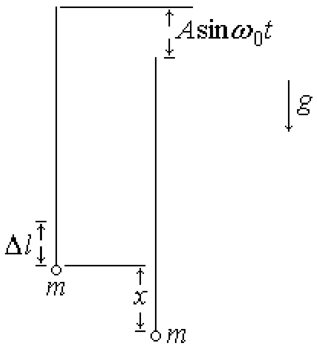
$$\omega_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2 M}{m_A m_B}}.$$

**6.71.** На груз, висящий на нижнем конце упругой нити, действуют сила тяжести $mg$ и сила натяжения $T$. При отсутствии колебаний обе эти силы уравновешивают друг друга:

$$T = mg.$$

Предполагая, что в данном случае справедлив закон Гука, т. е. сила натяжения пропорциональна растяжению нити, запишем приведенное равенство в виде

$$k\Delta l = mg.$$




При наличии колебательного движения груз перемещается вместе с нитью на расстояние $A\sin\omega_0 t$ и в результате дополнительного растяжения нити. Если $x$ – отклонение груза от его равновесного положения, то растяжение нити равно $\Delta l + x - A\sin\omega_0 t$. Соответственно сила натяжения нити равна

$$T = k(\Delta l + x - A\sin\omega_0 t).$$

Под действием этой силы и веса груз получает ускорение. Согласно 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = mg - k(\Delta l + x - A\sin\omega_0 t).$$

Исключая коэффициент жесткости нити, получим дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемое колебательное движение:

$$\ddot{x} + \frac{g}{\Delta l}x = \frac{gA}{\Delta l}\sin\omega_0 t.$$

**6.72.** Общее решение уравнения затухающих колебаний имеет вид



$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi).$$

Затухающие колебания можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. По условию амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в $e^2$ раз за 50 колебаний. Это можно записать следующим образом:

$$e^{-\gamma 50T} = e^{-2},$$

откуда находим:

$$\lambda = \gamma T = \frac{1}{25}.$$

Добротность механической системы $Q$ при $\gamma << \omega$ равна

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = 25\pi.$$

**6.73.** При известных собственной частоте $\omega_0$ и коэффициенте затухания $\gamma$ резонансная частота колебаний вычисляется по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Соответственно определяется период колебаний:

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Тогда логарифмический декремент затухания $\lambda$ равен

$$\lambda = \gamma T = 2\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Отсюда выразим коэффициент затухания $\gamma$ через $\omega_0$ и $\lambda$:

$$\gamma = \omega_0/\sqrt{2 + (2\pi/\lambda)^2}.$$

Подставляя $\gamma$ в выражение для периода $T$, получим:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{1 + 2(\lambda/2\pi)^2}.$$

Вычислим относительную ошибку $\delta T$, вносимую в расчет при замене $T$ на собственный период колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$, для $\lambda = 0{,}628$:

$$\delta T = \frac{T - T_0}{T_0} = \sqrt{1 + 2(\lambda/2\pi)^2} - 1 \approx \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 = 0{,}01 = 1\%.$$

**6.74.** Временная зависимость отклонения математического маятника от вертикали определяется решением однородного уравнения затухающих колебаний:

$$\varphi = \varphi_m \exp(-\gamma t)\cos(\omega t + \alpha).$$

Здесь $\varphi_m$ – амплитуда колебаний, $\omega$ – частота, $\gamma$ – коэффициент затухания колебаний, $\alpha$ – фаза.

Логарифмический декремент затухания $\lambda$ и период колебаний маятника $T$ вычисляются по формулам:

$$\lambda = \gamma T,\ T = 2\pi/\omega.$$

Два последовательных максимальных отклонения математического маятника от вертикали удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_m \exp(-\gamma t_1)\left|\cos(\omega t_1 + \alpha)\right|, \\ \varphi_2 = \varphi_m \exp(-\gamma t_2)\left|\cos(\omega t_2 + \alpha)\right|, \\ t_2 = t_1 + T/2. \end{cases}$$



Если поделим первое уравнение на второе, то с учетом третьего уравнения получим:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \exp(\gamma T/2).$$

(Величина косинуса через полпериода остается прежней.)
Отсюда находим логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = 2\ln\frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Период колебаний вычисляем по формуле, полученной в задаче 6.73:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{1 + 2(\lambda/2\pi)^2} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\ln^2\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\right)}.$$

**6.75.** Стрелка весов будет колебаться около равновесного положения, определяющего массу куска сыра. Отклонение стрелки весов изменяется с течением времени по закону:

$$a = mg + a_m \exp(-\gamma t)\cos(\omega t + \varphi).$$

Первое слагаемое представляет собой частное решение уравнения колебаний, определяющее равновесное показание весов. Второе слагаемое – общее решение однородного уравнения затухающих колебаний.

Пользуясь приведенным законом изменения величины $a$, напишем систему уравнений, описывающих показания весов:

$$\begin{cases} a_1 - mg = a_m \exp(-\gamma t_1)\cos(\omega t_1 + \varphi), \\ a_2 - mg = a_m \exp(-\gamma t_2)\cos(\omega t_2 + \varphi), \\ a_3 - mg = a_m \exp(-\gamma t_3)\cos(\omega t_3 + \varphi), \\ t_2 = t_1 + T/2, \\ t_3 = t_1 + T. \end{cases}$$

.

Поделим второе и третье уравнения на первое, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{a_2 - mg}{a_1 - mg} = -\exp(-\gamma T/2), \\ \dfrac{a_3 - mg}{a_1 - mg} = \exp(-\gamma T). \end{cases}$$

Величина косинуса через полпериода сохраняется, меняется знак, а через период сохраняется и величина, и знак.

Исключив из этих уравнений период $T$, получим квадратное уравнение для определения массы куска сыра:

$$(a_2 - mg)^2 = (a_3 - mg)(a_1 - mg).$$

Вес куска сыра равен

$$mg = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_1 + a_3 - 2a_2} = 488 \text{ г.}$$

Вычислим логарифмический декремент затухания $\lambda$ колебаний стрелки весов:



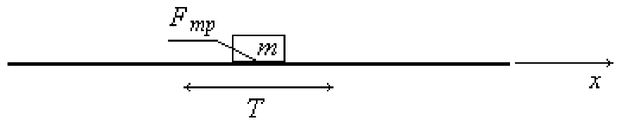
$$\lambda = \gamma T = \ln\frac{a_1 - mg}{a_3 - mg} = \ln\frac{9}{4} = 0{,}811.$$

**6.76.** Наличие трения между телом и доской приводит к тому, что тело увлекается доской при ее движении. По 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = F_{тр}.$$

Сила трения $F_{тр}$, действующая на тело, направлена в ту сторону, в которую движется доска. Величина силы трения ограничена неравенством

$$\left|F_{тр}\right| \le \mu mg.$$




Гармоническое колебание доски, а с ней и тела описывается следующей зависимостью координаты $x$ от времени:

$$x(t) = A\cos(2\pi t/T).$$

Дважды дифференцируя по $t$, получим:

$$\ddot{x}(t) = -A(2\pi/T)^2\cos(2\pi t/T).$$

Подставим это выражение для второй производной в исходное уравнение движения тела и возьмем по модулю левую и правую части, в результате получим:

$$mA(2\pi/T)^2\left|\cos(2\pi t/T)\right| = \left|F_{тр}\right| \le \mu mg.$$

Неравенство должно выполняться в любой момент времени. Отсюда находим:

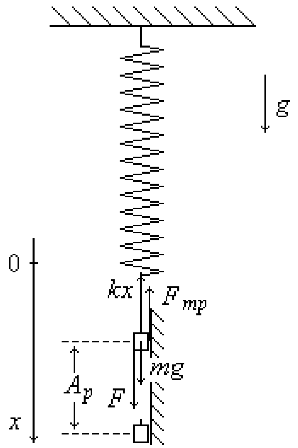
$$\mu = \frac{A}{g}(2\pi/T)^2.$$

Подставим численные значения. В результате найдем:

$$\mu = \frac{0{,}6}{9{,}81}(2\pi/5)^2 = 0{,}0965.$$

**6.77.** Пусть синусоидальная сила $F$, действующая на тело, равна

$$F = F_m\cos(\omega t).$$




По условию сила трения пропорциональна скорости движения тела:

$$F_{mp} = -\alpha\dot{x}.$$

Помимо этих сил на тело действуют сила тяжести $mg$ и упругая сила пружины $-kx$ ($x$ – растяжение пружины). По 2-му закону Ньютона имеем:

$$m\ddot{x} = mg - \alpha\dot{x} - kx + F_m\cos\omega t.$$

Приведем это уравнение к стандартному виду:



$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m}\cos\omega t.$$

Здесь координата $x$ отсчитывается от равновесного положения тела, т. е. начало координат смещено на величину равновесного растяжения пружины, равного $mg/k$; $2\gamma = \alpha/m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

По общей теории вынужденных колебаний с трением решение уравнения имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где $A$ – амплитуда колебаний, $\varphi$ – фаза. Они равны

$$A = \frac{F_m/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Амплитуда колебания максимальна при

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0.$$

Итак, при резонансе имеем:

$$\omega \approx \omega_0, \quad A_p = \frac{F_m}{2\gamma\omega m} \approx \frac{F_m}{\alpha\omega_0}.$$

Отсюда находим коэффициент трения:

$$\alpha \approx \frac{F_m}{A_p\omega_0} = \frac{F_m T}{2\pi A_p}.$$

Найдем силу трения:

$$F_{mp} = -\alpha\dot{x} = A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда силы трения равна

$$F_{тр}^{(m)} = A\omega.$$

При резонансе ускорение тела создается упругой силой, а внешняя сила и сила трения компенсируют друг друга. Поэтому при резонансе имеем:

$$F_{тр}^{(m)} = F_m = 100 \text{ дн.}$$

Найдем численное значение коэффициента трения:

$$\alpha \approx \frac{100 \cdot 0{,}5}{2\pi 5} = \frac{5}{\pi} \; г/\text{с}.$$

При резонансе фаза близка к $-\pi/2$.

## Список литературы

1. Бабаджан Е. И., Гервидс В. И., Дубовик В. М., Нерсесов Э. А. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. М.: Наука, 1990.
2. Бородин В. П. Курс лекций по физике для слушателей подготовительного отделения. Новосибирск: НГУ, 1973.
2. Взоров Н. Н., Замша О. И., Иродов И. Е., Савельев И. В. Сборник задач по общей физике. М.: Наука, 1968.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1965.
4. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. М.: Высш. шк., 1986.
5. Меледин Г. В. Физика в задачах (экзаменационные задачи с решениями). М.: Наука, 1989.
6. Стрелков С. П., Эльцин И. А., Яковлев И. А. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. Ч. I. Механика. Электричество. Магнетизм.
7. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения. М.: Мир, 1967.



**ОГЛАВЛЕНИЕ**



Учебное издание

**Замураев** Владимир Павлович,
**Калинина** Анна Павловна

**ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ ПО МЕХАНИКЕ**

**Часть 6**
**Колебания**

Учебное пособие

Редактор *Е. П. Войтенко*

Подписано в печать 13.08.2012 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 10,6.Усл. печ. л. 10. Тираж 150 экз.

Заказ №
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090. Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.