

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра высшей математики

Е. П. Волокитин

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ДАРБУ

Учебно-методическое пособие

Новосибирск  
2012

**Волокитин Е. П.** Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Дарбу / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 56 с.

В пособии рассматриваются некоторые вопросы и приёмы качественного исследования плоских автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется проблеме интегрирования полиномиальных систем с использованием метода Дарбу, который позволяет найти общее решение системы, располагая достаточным количеством её частных решений (иногда даже чисто алгебраическими методами, не прибегая к квадратурам). Рассмотрение сопровождается большим количеством содержательных примеров. Во всех рассмотренных примерах построены фазовые портреты. Затрагиваемые вопросы дополняют тематику, рассматриваемую в лекциях и на семинарах при изучении стандартного курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено для студентов (бакалавров и магистрантов), изучающих дифференциальные уравнения и применяющих их в своих исследованиях, а также для преподавателей математики физических и математических факультетов.

Рецензент

д. ф.-м. н, профессор, ведущий научный сотрудник ИМ СО РАН  
М. В. Коробков

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации  
Программы развития НИИ-НГУ на 2009–2018 г.г.

© Новосибирский государственный  
университет, 2012

© Е. П. Волокитин, 2012

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть в каждой точке некоторой области на плоскости назначена проходящая через эту точку прямая. В таком случае говорят, что в этой области задано поле направлений.

Линия, которая в каждой своей точке касается заданного в этой точке направления поля, называется интегральной кривой поля направлений (рис. 1).

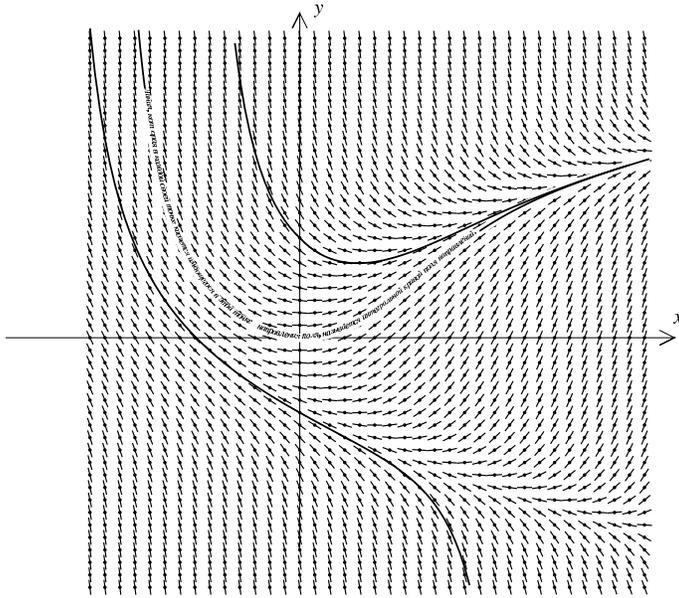


Рис. 1. Поле направлений и интегральные кривые уравнения  $y' = x - y^2$

Если на плоскости задана прямоугольная система координат  $(x, y)$ , то один из способов задать поле направлений: задать угол  $\alpha(x, y)$ , который образует прямая поля, проходящая через точку  $(x, y)$ , с положительным направлением оси абсцисс. В том случае, если поле не содержит вертикальных направлений, прямая однозначно определяется тангенсом этого угла. Итак, пусть задана функция  $f(x, y) = \operatorname{tg} \alpha(x, y)$ .

Имея в виду геометрический смысл производной, легко согласиться с тем, что график функции  $y = \varphi(x)$ , определённой на интервале  $I \subset \mathbb{R}$ , будет интегральной кривой поля направлений, заданного функцией

$f(x, y)$ , в том и только в том случае, когда для всех  $x \in I$  имеет место равенство

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x)).$$

Функция  $y = \varphi(x)$  в этом случае называется решением уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

которое называется обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка<sup>1</sup>.

Дифференциальное уравнение в общем случае имеет бесконечно много решений.

Если решение удовлетворяет начальному условию  $\varphi(x_0) = y_0$ , где  $x_0, y_0$  — заданные числа, то такая функция  $y = \varphi(x)$  называется решением задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Теорема Пикара (в простейшем своём варианте) утверждает, что в том случае, когда функция  $f(x, y)$  в уравнении (1) непрерывно дифференцируема по обоим своим аргументам в окрестности начальной точки  $(x_0, y_0)$ , то задача Коши имеет единственное решение  $y = \varphi(x)$ , определённое в некоторой окрестности точки  $x_0$ . В примерах, которые нам встретятся, условия этой теоремы, как правило, выполняются.

Процесс отыскания решений дифференциального уравнения иногда называют интегрированием дифференциального уравнения.

Наряду с понятием решения дифференциального уравнения (1) вводят понятие интеграла этого уравнения.

Скалярная функция  $H(x, y)$  называется интегралом (иногда первым интегралом) уравнения (1) в области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , если она не равна тождественно постоянной в области  $D$ , но сохраняет постоянное значение вдоль любой интегральной кривой этого уравнения.

<sup>1</sup>Из книги: Аносов Д. В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. Москва: Изд-во МЦНМО. 2008.

Лет 20–30 назад в Екатеринбурге (тогда — Свердловск) местная газета опубликовала статью о работавшем и по сей день работающем в этом городе математике — академике Н. Н. Красовском. Помимо общих слов, какой он замечательный (что, кстати, правда, но без дальнейших пояснений звучит голословно), там была и конкретика, о которой Николай Николаевич поведал своим сотрудникам, а они рассказали мне. Вот как они пересказали слова Красовского.

— Приходит корреспондент одной из местных газет ко мне в кабинет. На доске написаны уравнения. Корреспондент спрашивает: «Чем Вы занимаетесь?» Я отвечаю — мы занимаемся изучением обыкновенных дифференциальных уравнений. На другой день в газете появилась статья, в которой, в частности, говорилось: «На доске были написаны сложнейшие уравнения, которые академик по своей скромности с легкостью называет обыкновенными».

Таким образом, множество интегральных кривых уравнения (1) задается множеством линий уровня интеграла  $H(x, y)$ . Решения, в принципе, могут быть найдены из соотношения  $H(x, y) = C$  на основе теоремы о неявной функции.

Если функция  $H(x, y)$  — гладкая, то она удовлетворяет условию

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} f(x, y) \equiv 0,$$

которое можно рассматривать как уравнение, позволяющее найти функцию  $H(x, y)$ .

Дифференциальное уравнение имеет бесконечно много интегралов. Все они функционально зависимы: две функции  $H_1(x, y)$ ,  $H_2(x, y)$  являются первыми интегралами одного и того же уравнения, тогда и только тогда, когда найдется гладкая функция  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $H_2(x, y) = \Psi(H_1(x, y))$ .

Следует отметить, что существует много обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для которых решения или интеграл не могут быть найдены как явные выражения, содержащие только элементарные функции. Таким, например, является уравнение  $y' = x - y^2$ , интегральные кривые которого, полученные методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, приведены на рис. 1. Для интереса отметим, что очень «похожее» на него дифференциальное уравнение  $y' = y - x^2$  является линейным неоднородным уравнением и легко решается: его общее решение даётся формулой  $y = Ce^x - x^2 + 2x - 2$ , а функция  $H(x, y) = (y + x^2 - 2x + 2)e^{-x}$  является первым интегралом.

Существуют различные приёмы, позволяющие в явном виде проинтегрировать дифференциальное уравнение.

Пусть, например, дифференциальное уравнение имеет вид.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (\text{I})$$

Перепишем его в виде

$$Pdy - Qdx = 0. \quad (\text{I}')$$

Если выражение в левой части является дифференциалом некоторой функции  $H(x, y)$  двух переменных<sup>2</sup>, то вдоль каждой интегральной кривой функция  $H(x, y)$  постоянна, то есть является первым интегралом, и

<sup>2</sup>В таком случае уравнение называется уравнением в полных (точных) дифференциалах. Следует особо подчеркнуть, что уравнение (I') ни в коем случае не сле-

по её линиям уровня можно восстановить интегральные кривые. Достаточно даже, чтобы форма  $Pdy - Qdx$  становилась полным дифференциалом после умножения на некоторую не равную нулю функцию (такое одновременное умножение  $P, Q$  на одну и ту же функцию не меняет исходного поля направлений). Такая функция  $\mu(x, y)$  называется интегрирующим множителем. В настоящем пособии, в частности, уделяется большое внимание специальным приёмам отыскания интегрирующего множителя либо интеграла уравнения (I), восходящим к работам Ж. Г. Дарбу.

Наряду с уравнением (I) рассматривают плоскую автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (\text{S})$$

где  $P(x, y), Q(x, y)$  — достаточно гладкие функции, определённые в некоторой плоской области, точка обозначает дифференцирование по независимой переменной  $t$ .

Система (S) ассоциируется с векторным полем  $\mathcal{X} = (P(x, y), Q(x, y))^T$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которая называется фазовым пространством этой системы.

Решением системы (S) является вектор-функция  $(x(t), y(t))$ , кривая  $(x(t), y(t))$  называется траекторией (орбитой) системы (S).

Векторное поле  $\mathcal{X}$  очевидным образом определяет поле направлений (I) или (I'). Дифференциальные уравнения (I), (I') определяют орбиты системы (S).

Функция  $H(x, y)$  является интегралом (первым интегралом) системы (S), если она постоянна вдоль траекторий системы.

Мы имеем

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \equiv 0.$$

Геометрически это условие означает ортогональность градиента  $\nabla H$  функции  $H(x, y)$  и векторного поля  $\mathcal{X}$ .

---

дуге рассматривать как условие  $dH=0$  — это означало бы, что  $H \equiv \text{const}$ . Речь по-прежнему идёт о том, что уравнения (I), (I') определяют множество кривых, обладающих тем свойством, что вектор  $(dx, dy)^T$ , коллинеарный вектору  $(P(x, y), Q(x, y))^T$  и приложенный в точке  $(x, y)$ , направлен вдоль касательной к кривой из этого множества, проходящей через точку  $(x, y)$ . Просто заданные функции  $P(x, y), Q(x, y)$  в данном случае обременены дополнительным условием:  $P = H_y, Q = -H_x$  для одной и той же функции  $H(x, y)$ . Это условие может быть записано в виде  $P_x = -Q_y$  или  $P_x + Q_y = 0$ . Оказывается, в этом случае, кривые задаются соотношением  $H(x, y) = C$ .

Функция  $\mu(x, y) \neq 0$  будет интегрирующим множителем системы (S), если выражение

$$\mu(x, y)P(x, y)dy - \mu(x, y)Q(x, y)dx$$

является дифференциалом некоторой функции  $H(x, y)$ . В таком случае

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)P(x, y)) = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)Q(x, y)).$$

Последнее условие можно записать в виде

$$\operatorname{div}(\mu\mathcal{X}) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu P) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu Q) = 0.$$

Система

$$\dot{x} = \mu(x, y)P(x, y), \quad \dot{y} = \mu(x, y)Q(x, y), \quad (\text{H})$$

является гамильтоновой. Множество её орбит совпадает с множеством орбит системы (S). Интеграл  $H(x, y)$  системы (H) может быть восстановлен на основании соотношений

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \mu(x, y)Q(x, y), \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = -\mu(x, y)P(x, y).$$

Очевидно, что можно использовать также соотношения  $H_x = -\mu Q$ ,  $H_y = \mu P$ .

Далее мы будем говорить в основном о полиномиальных системах вида (S), то есть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  являются многочленами от двух переменных  $x, y$  степени  $n$  с действительными коэффициентами.

#### ТЕОРИЯ ДАРБУ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть имеется непрерывно дифференцируемая функция  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Будем говорить, что функция  $f(x, y)$  — инвариант системы (S), если найдется многочлен  $k(x, y)$  степени не выше  $n - 1$  такой, что

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}Q(x, y) = k(x, y)f(x, y).$$

Многочлен  $k(x, y)$  называется кофактором инварианта  $f(x, y)$ .

Заметим, что если кофактор  $k(x, y) = 0$ , то инвариант  $f(x, y)$  будет первым интегралом системы.

Нетрудно показать, что если  $f_1(x, y), f_2(x, y)$  являются инвариантами системы (S) с кофакторами  $k_1(x, y), k_2(x, y)$ , то инвариантом будет также функция  $f(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y)$  с кофактором  $k(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y)$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned} & f_x(x, y)P(x, y) + f_y(x, y)Q(x, y) = \\ & = (f_1f_2)_xP + (f_1f_2)_yQ = (f_{1x}f_2 + f_1f_{2x})P + (f_{1y}f_2 + f_1f_{2y})Q = \\ & = (f_{1x}P + f_{1y}Q)f_2 + (f_{2x}P + f_{2y}Q)f_1 = k_1f_1f_2 + k_2f_2f_1 = (k_1 + k_2)f_1f_2 = \\ & = k(x, y)f(x, y), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказанное утверждение справедливо для любого числа сомножителей.

Аналогично можно показать, что если  $f_1(x, y)$  является инвариантом системы (S) с кофактором  $k_1(x, y)$ , то инвариантом будет также функция  $f(x, y) = f_1^\alpha(x, y)$  с кофактором  $k(x, y) = \alpha k_1(x, y)$ .

Это свойство даёт нам возможность в случае необходимости считать, что мы имеем дело с положительными инвариантами: заменяем инвариант  $f(x, y)$  на инвариант  $g(x, y) = f^2(x, y)$ .

Пусть  $f(x, y) = f_1^{\gamma_1}(x, y)f_2^{\gamma_2}(x, y) \dots f_k^{\gamma_k}(x, y)$ , где  $f_i(x, y)$  — инварианты системы (S) с кофакторами  $k_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Тогда с учётом вышесказанного имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu\mathcal{X}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)P(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)Q(x, y)) = \\ &= \mu(x, y)(P_x(x, y) + Q_y(x, y) + \gamma_1k_1(x, y) + \gamma_2k_2(x, y) + \dots + \gamma_pk_p(x, y)). \end{aligned}$$

Если  $f(x, y)$  — инвариант, то кривая  $\Gamma$ , задаваемая равенством  $f(x, y) = 0$  будет инвариантна относительно движений системы (S): траектории, начавшиеся на ней, её не покинут, поскольку вектор скорости  $(P(x, y), Q(x, y))^\top$ , вычисленный в точках кривой  $\Gamma$ , направлен вдоль неё. В данном случае равенство

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}Q(x, y) = 0.$$

выполняется не во всех точках рассматриваемой области, а только в точках кривой  $\Gamma$ . В связи с этим функцию  $f(x, y)$  или равенство  $f(x, y) = 0$  называют частным интегралом (частным решением) системы (S) или уравнения (I). О первом интеграле в таких случаях иногда говорят, что

он является общим интегралом (общим решением)<sup>3</sup>.

Метод интегрирования Дарбу позволяет найти общее решение при условии, что мы располагаем достаточным количеством частных решений, иногда даже не прибегая к квадратурам.

В основе этого метода лежат следующие утверждения, справедливость которых вытекает из перечисленных свойств инвариантов.

Теорема (G. Darboux. Mémoire sur les'equations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges). Bull. Sci. Math. (1878), 60–96, 123–144, 151–200).

(D) Если система (S) имеет  $p$  инвариантов  $f_1(x, y), \dots, f_p(x, y)$  с кофакторами  $k_1(x, y), \dots, k_p(x, y)$  соответственно и найдутся  $\alpha_i, i = 1, \dots, p$ , не все равные нулю, такие что

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i k_i(x, y) = 0,$$

то система (S) имеет первый интеграл Дарбу вида

$$H(x, y) = \prod_{i=1}^p f_i^{\alpha_i}$$

при условии, что  $H(x, y) \neq \text{const}$ .

(DD) Если система (S) имеет  $p$  инвариантов  $f_1(x, y), \dots, f_p(x, y)$  с кофакторами  $k_1(x, y), \dots, k_p(x, y)$  соответственно и найдутся  $\gamma_i, i = 1, \dots, p$ , не все равные нулю, такие что

$$\text{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \sum_{i=1}^p \gamma_i k_i(x, y),$$

то

$$\mu(x, y) = \prod_{i=1}^p f_i^{-\gamma_i}$$

будет интегрирующим множителем, то есть

$$\text{div}(\mu P, \mu Q) = 0.$$

---

<sup>3</sup>Отметим, что если множество, заданное условием  $f(x, y) = 0$ , является инвариантным для системы (S), то функция  $f(x, y)$  необязательно является инвариантом. Например, для системы  $\dot{x} = x + 2y, \dot{y} = x + 2y$  начало координат является точкой покоя, но функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$  не является инвариантом.

Сделаем следующее замечание.

Мы можем определить инварианты и кофакторы как функции, принимающие комплексные значения. Видно, что все проведённые выкладки останутся верными. В таком случае мы получим интеграл или интегрирующий множитель Дарбу в виде комплексно-значной функции. Поскольку система (S) действительная и нас интересуют её действительные решения, мы можем взять в качестве интеграла или интегрирующего множителя, например, действительную или мнимую часть полученной комплексно-значной функции.

Рассмотрим различные примеры использования метода Дарбу.

Через  $Df(x, y)$  будем обозначать оператор дифференцирования функции  $f(x, y)$  в силу системы (S):

$$Df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} Q(x, y).$$

#### СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

Пусть дана линейная система

$$\dot{x} = ax + by \equiv p(x, y), \quad \dot{y} = cx + dy \equiv q(x, y). \quad (\text{L})$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Будем искать *линейные* алгебраические инварианты  $l(x, y) = \alpha x + \beta y$ . В случае линейных систем кофакторы являются многочленами степени 0, то есть будут числами  $k \in \mathbb{R}$ . Имеем

$$Dl(x, y) = D(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y), \\ \alpha(ax + by) + \beta(cx + dy) = k(\alpha x + \beta y)$$

и получаем

$$a\alpha + c\beta = k\alpha, \quad b\alpha + d\beta = k\beta$$

Таким образом, число  $k$  является собственным числом матрицы  $A^\top$  (а значит, и матрицы  $A$ ), а вектор  $(\alpha, \beta)^\top$  — собственным вектором матрицы  $A^\top$ . При этом линейное подпространство  $\alpha x + \beta y = 0$  будет собственным подпространством матрицы  $A$ .

Рассмотрим случай, когда собственные числа матрицы  $A$  вещественные.

Если хотя бы одно из собственных чисел равно 0, это значит, что равен нулю кофактор, а тогда соответствующая линейная функция (инвариант) будет интегралом системы.

Предположим, что оба собственных числа матрицы  $A$  отличны от 0.

В случае, если матрица  $A^T$  имеет два линейно независимых собственных вектора  $(\alpha_1, \beta_1)^T, (\alpha_2, \beta_2)^T$ , отвечающих собственным числам<sup>4</sup>  $\lambda_1, \lambda_2$ , то ввиду очевидного равенства  $(-\lambda_2)\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = 0$  согласно утверждению части (D) Теоремы заключаем, что функция

$$H(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y)^{-\lambda_2} (\alpha_2 x + \beta_2 y)^{\lambda_1}$$

будет первым интегралом системы (L).

Далее, поскольку  $\operatorname{div}(p(x, y), q(x, y)) = a + d$ , имеем

$$\operatorname{div}(p(x, y), q(x, y)) = \frac{a + d}{\lambda_i} \lambda_i, \quad i = 1, 2,$$

откуда на основании части (DD) Теоремы заключаем, что каждая из функций

$$\mu_i(x, y) = (\alpha_i x + \beta_i y)^{-\frac{a+d}{\lambda_i}}, \quad i = 1, 2$$

будет интегрирующим множителем для системы (L), что также позволяет найти её интеграл (двумя способами, используя множители  $\mu_1, \mu_2$ ).

В случае, когда матрица  $A$  имеет только один собственный вектор (тем самым неизбежно  $\lambda_1 = \lambda_2$ ), на основании части (DD) Теоремы находим интегрирующий множитель подобно тому, как мы это сделали выше, и с помощью него интегрируем систему.

Полученные интегралы могут быть использованы для исследования системы (L), в частности, для построения её фазовых портретов<sup>5</sup>.

Например, при наличии двух линейно независимых векторов замена переменных  $u_1 = l_1(x, y) = \alpha_1 x + \beta_1 y$ ,  $u_2 = l_2(x, y) = \alpha_2 x + \beta_2 y$  превращает систему (L) в простую систему из двух независимых уравнений

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2,$$

которая поддаётся исчерпывающему анализу.

С геометрической точки зрения для системы (L) учёт рассмотрения найденных инвариантов означает, что прямые  $\alpha_1 x + \beta_1 y = 0, \alpha_2 x + \beta_2 y = 0$  будут инвариантными, составляющие их траектории будут лучами или точками покоя. Изображающая точка  $(x(t), y(t))$ , не принадлежащая этим прямым, при увеличении  $t$  пересекает прямую  $\alpha_i x + \beta_i y = C$  в

<sup>4</sup>Возможно, что при этом  $\lambda_1 = \lambda_2$ . В таком случае  $A = \lambda E$ .

<sup>5</sup>Наличие интегралов позволяет, например, при построении фазовых портретов эффективно использовать команду `ContourPlot` в системе *Mathematica*.

сторону увеличения  $|C|$ , если  $\lambda_i > 0$ , и в сторону уменьшения  $|C|$ , если  $\lambda_i < 0$ . При этом расстояние от этой точки до инвариантной прямой растёт до бесконечности при возрастании  $t$  и убывает до 0 при  $t \rightarrow -\infty$ , если  $\lambda_i > 0$ , и наоборот, если  $\lambda_i < 0$ .

Пример 1.

$$\dot{x} = x + 2y, \quad \dot{y} = 2y.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и векторы матрицы  $A^\top$  суть

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = (1, -2)^\top, \quad \lambda_2 = 2, \quad v_2 = (0, 1)^\top.$$

В таком случае  $l_1 = x - 2y$  есть инвариант с кофактором  $k_1 = 1$ ,  $l_2 = y$  есть инвариант с кофактором  $k_2 = 2$ :

$$Dl_1 = l_1, \quad Dl_2 = 2l_2.$$

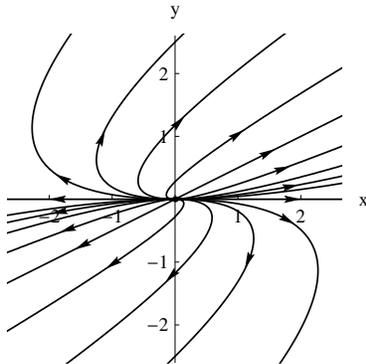


Рис. 2.  $\dot{x} = x + 2y, \dot{y} = 2y$ . Узел

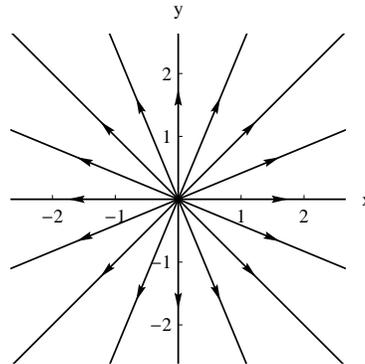


Рис. 3.  $\dot{x} = 2x, \dot{y} = 2y$ . Дикритический узел

Мы имеем  $-2k_1 + k_2 = 0$ . В таком случае функция

$$H(x, y) = l_1^{-2} l_2 = \frac{y}{(x - 2y)^2}$$

будет первым интегралом системы.

Кроме того имеем

$$\operatorname{div} = 3.$$

Тогда, например,

$$\operatorname{div} = 3k_1,$$

откуда следует, что функция

$$\mu_1(x, y) = \frac{1}{(x - 2y)^3}$$

является интегрирующим множителем системы.

Это обстоятельство также позволяет найти интеграл  $H_1(x, y)$  системы, воспользовавшись равенствами

$$H_{1x} = \frac{2y}{(x - 2y)^3}, \quad H_{1y} = -\frac{x + 2y}{(x - 2y)^3}.$$

Получим

$$H_1(x, y) = -\frac{y}{(x - 2y)^2} = -H(x, y).$$

Фазовый портрет системы приведён на рис. 2. Такой тип поведения траекторий называется узлом. (В данном случае узел является неустойчивым.)

Пример 2.

$$\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = 2y.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае собственное подпространство каждой из матриц  $A$ ,  $A^\top$  двумерно и совпадает со всей плоскостью  $\mathbb{R}^2$ .

Собственные числа и векторы матрицы  $A^\top$  суть

$$\lambda_1 = 2, \quad v_1 = (1, 0)^\top, \quad \lambda_2 = 2, \quad v_2 = (0, 1)^\top.$$

Имеем два инварианта:  $f_1 = x$  с кофактором  $k_1 = 1$  и  $f_2 = y$  с кофактором  $k_2 = 1$ . Поскольку  $k_1 - k_2 = 0$ , в качестве интеграла можно взять функцию

$$H(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Фазовый портрет приведён на рис. 3 (дикритический (звёздный) узел).

Пример 3.

$$\dot{x} = 2x - y, \quad \dot{y} = 4x - 3y.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и векторы матрицы  $A^\top$  суть

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = (4, -1)^\top, \quad \lambda_2 = -2, \quad v_2 = (1, -1)^\top.$$

В таком случае  $l_1 = 4x - y$  есть инвариант с кофактором  $k_1 = 1$ ,  $l_2 = x - y$  есть инвариант с кофактором  $k_2 = -2$ :

$$Dl_1 = l_1, \quad Dl_2 = -2l_2.$$

Функция

$$H(x, y) = l_1^2 l_2 = (4x - y)^2 (x - y)$$

будет первым интегралом системы.

Аналогично тому, как это имело место в Примере 1, можно показать, что, например, функция

$$\mu(x, y) = 4x - y$$

является интегрирующим множителем системы.

Используя его, получим интеграл

$$H_1(x, y) = -\frac{(x - y)(4x - y)^2}{3}.$$

Отметим, что  $-3H_1(x, y) = H(x, y)$ .

Фазовый портрет приведён на рис. 4. Такой тип поведения траекторий называется седлом.

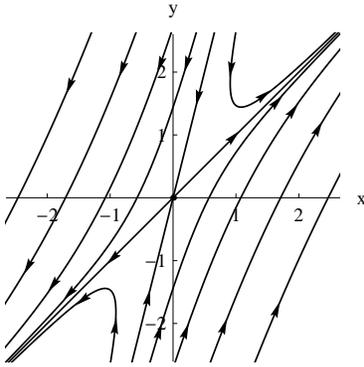
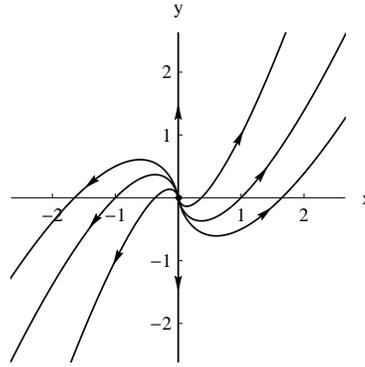
Пример 4.

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = x + y.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и векторы матрицы  $A^\top$  суть

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad v_1 = (0, 1)^\top,$$

Рис. 4.  $\dot{x} = 2x - y$ ,  $\dot{y} = 4x - 3y$ . СедлоРис. 5.  $\dot{x} = x$ ,  $\dot{y} = x + y$ . Вырожденный узел

единственное собственное подпространство матрицы  $A^T$  одномерно, имеется только одна инвариантная прямая  $x = 0$ .

В таком случае  $l_1 = x$  есть инвариант с кофактором  $k_1 = 1$ ,  $\text{div} = 2$ , и на основании части (DD) Теоремы получаем, что функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$$

будет интегрирующим множителем. Используя его, находим интеграл системы

$$H(x, y) = \frac{x}{y} - \ln|x|.$$

Фазовый портрет приведён на рис. 5 (вырожденный (неустойчивый) узел).

В том случае, когда матрица  $A$  имеет комплексные (сопряжённые) собственные числа, как отмечалось выше, мы получаем комплекснозначный интеграл рассматриваемой линейной системы. В случае необходимости мы можем выделить из него действительную или мнимую часть, каждая из которых будет вещественно-значным интегралом системы. Можно взять в качестве интеграла модуль, или квадрат модуля, или аргумент получившейся функции.

Если собственные числа матрицы  $A$  чисто мнимые ( $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ), то собственные векторы матрицы  $A^T$ , определяющие инварианты, будут комплексно сопряжёнными:  $v_1 = (\alpha_1, \beta_1)^T$ ,  $v_2 = \bar{v}_1 = (\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1)^T$ , а произведение комплексно сопряжённых линейных инвариантов будет

действительно-значным инвариантом с кофактором  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , то есть имеем интеграл системы

$$H(x, y) = |\alpha_1 x + \beta_1 y|^2.$$

Собственный вектор матрицы  $A^\top$ , отвечающий  $\lambda = \omega i$  будет  $v = (c, \omega i - a)^\top$ . Тогда инварианты  $l_1 = cx + (\omega i - a)y$ ,  $l_2 = cx + (-\omega i - a)y$ , и

$$H(x, y) = (cx - ay)^2 + \omega^2 y^2$$

соответствующий интеграл типа Дарбу.

Видно, что это будет положительно определенная квадратичная форма, откуда, в частности, следует, что траекториями системы в данном случае будут эллипсы.

Пример 5.

$$\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = x + y.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и векторы матрицы  $A^\top$  суть

$$\lambda_1 = i, \quad v_1 = (1, 1 + i)^\top, \quad \lambda_2 = -i, \quad v_2 = (1, 1 - i)^\top.$$

В таком случае  $l_1 = x + (1 + i)y$  есть инвариант с кофактором  $k_1 = i$ ,  $l_2 = x + (1 - i)y$  — инвариант с кофактором  $k_2 = -i$ , тогда  $l = l_1 l_2 = |l_1|^2$  — инвариант с кофактором  $k = 0$ :

$$Dl_1 = il_1, \quad Dl_2 = -il_2, \quad Dl = 0.$$

Интеграл системы имеет вид

$$H(x, y) = (x + (1 + i)y)(x + (1 - i)y) = (x + y)^2 + y^2 = x^2 + 2xy + 2y^2.$$

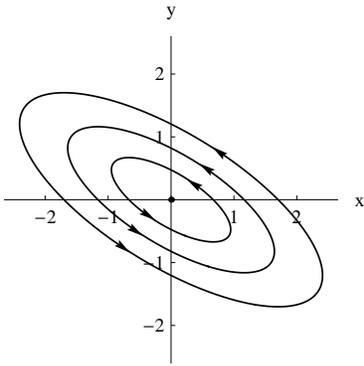
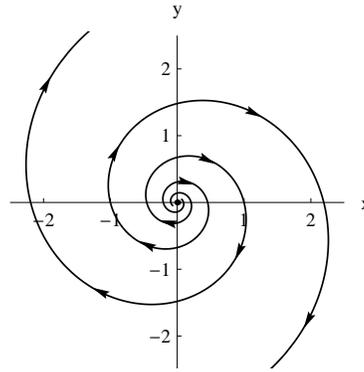
Формула, приведенная выше, дает тот же интеграл

$$H(x, y) = (cx - ay)^2 + \omega^2 y^2 = (x + y)^2 + y^2.$$

Фазовый портрет приведён на рис. 6 (центр).

Пример 6.

$$\dot{x} = x + 4y, \quad \dot{y} = -4x + y.$$

Рис. 6.  $\dot{x} = -x - 2y$ ,  $\dot{y} = x + y$ . ЦентрРис. 7.  $\dot{x} = x + 4y$ ,  $\dot{y} = -4x + y$ . Фокус

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и векторы матрицы  $A^T$  суть

$$\lambda_1 = 1 + 4i, \quad v_1 = (1, -i)^T, \quad \lambda_2 = 1 - 4i, \quad v_2 = (1, i)^T.$$

В таком случае  $l_1 = x - iy$  есть инвариант с кофактором  $k_1 = 1 + 4i$ ,  $l_2 = x + iy$  — инвариант с кофактором  $k_2 = 1 - 4i$ ,

$$(1 - 4i)k_1 + (-1 - 4i)k_2 = 0,$$

и комплексно-значный интеграл системы имеет вид

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (x - iy)^{1-4i}(x + iy)^{-1-4i} = \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} ((x^2 - y^2) \cos 4 \ln(x^2 + y^2) - 2xy \sin 4 \ln(x^2 + y^2)) + \\ &+ i \frac{1}{x^2 + y^2} (-2xy \cos 4 \ln(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) \sin 4 \ln(x^2 + y^2)). \end{aligned}$$

Выделяя действительную и мнимую части, получим два функционально независимых действительных интеграла  $H_1(x, y), H_2(x, y)$ .

Далее

$$\operatorname{div} = k_1 + k_2,$$

а тогда функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{l_1 l_2} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

согласно части (DD) Теоремы будет интегрирующим множителем системы. С его помощью находим еще один интеграл системы

$$H_3(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2 \ln(x^2 + y^2)$$

Полученные выражения для первых интегралов громоздки и мало пригодны для практического использования.

На рис. 7 приведён фазовый портрет системы, полученный с использованием выражения для общего решения системы

$$x = e^t(C_1(-\cos t + \sin t) + C_2(-\cos t - \sin t)), \quad y = 2e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Такой тип поведения траекторий называется фокус (в данном случае неустойчивый).

Пример 7.

$$\dot{x} = 2x + 4y, \quad \dot{y} = 2x + 4y.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и векторы матрицы  $A^\top$  суть

$$\lambda_1 = 0, \quad v_1 = (1, -1)^\top, \quad \lambda_2 = 6, \quad v_2 = (1, 2)^\top.$$

В таком случае  $l_1 = x - y$  есть инвариант с кофактором  $k_1 = 0$ ,  $l_2 = x + 2y$  есть инвариант с кофактором  $k_2 = 6$ :

$$Dl_1 = 0, \quad Dl_2 = 6l_2.$$

Интеграл системы

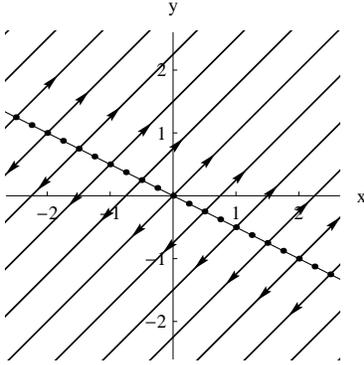
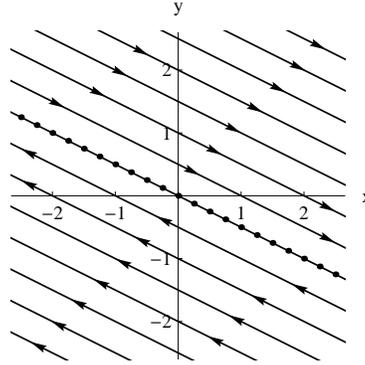
$$H(x, y) = x - y.$$

Прямая  $x + 2y = 0$  будет инвариантным множеством системы, состоящим из точек покоя. Таким образом, движение будет происходить вдоль прямых  $x - y = C$ , удаляясь от прямой  $x + 2y = 0$  (рис. 8).

Пример 8.

$$\dot{x} = 2x + 4y, \quad \dot{y} = -x - 2y.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Рис. 8.  $\dot{x} = 2x + 4y$ ,  $\dot{y} = 2x + 4y$ Рис. 9.  $\dot{x} = 2x + 4y$ ,  $\dot{y} = -x - 2y$ 

Собственные числа матрицы  $A^T$  суть  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , и имеется только один линейно независимый собственный вектор  $v_1 = (1, 2)^T$ .

В таком случае  $l_1 = x + 2y$  есть инвариант с кофактором  $k_1 = 0$ :  $Dl_1 = 0$ .

Интеграл системы

$$H(x, y) = x + 2y.$$

Прямая  $x + 2y = 0$  будет инвариантным множеством системы, состоящим из точек покоя. Движение будет происходить вдоль прямых  $x + 2y = C$ , параллельных прямой  $x + 2y = 0$ . Направление и величина скорости движения зависят от координат движущейся точки. Фазовый портрет приведён на рис. 9.

Для полноты картины отметим, что в том случае, когда матрица  $A^T$  (а значит, и  $A$ ) имеет два независимых собственных вектора, отвечающих нулевому собственному числу, то матрица  $A$  — нулевая; тогда любая функция  $H(x, y)$  формально будет интегралом линейной системы. Каждая траектория представляет собой точку покоя, и эти точки целиком заполняют фазовую плоскость.

Рассмотренные примеры дают полное представление о поведении траекторий линейной системы (L) на всей фазовой плоскости и, в частности, в окрестности начала координат, которое является точкой покоя этой системы.

Если начало координат является точкой покоя нелинейной системы (S) и матрица линейного приближения (матрица Якоби правых частей этой системы, вычисленная в точке  $O(0, 0)$ ) невырожденная, такая точка покоя называется простой. Простая точка покоя является изолиро-

ванном состоянии равновесия.

Поведение траекторий нелинейной системы в окрестности простой точки покоя  $O(0, 0)$  определяется характером этой точки покоя для системы линейного приближения: в том случае, если в линейной системе имеет место узел, седло или фокус, такая же особая точка будет и в нелинейной системе, если линейная система имеет центр, то в нелинейной системе будет центр или фокус.

#### ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ВЫРОЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Изолированное состояние равновесия  $O(0, 0)$  системы (S) с вырожденной матрицей линейной части называется сложным (вырожденным). В этом случае окрестность точки покоя, действительно, может быть устроена довольно сложным образом.

Ниже приведены примеры сложных состояний равновесия, у которых матрица линейного приближения не является нулевой.

Пример 9.

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y^2.$$

Система легко интегрируется, её интеграл

$$H(x, y) = xe^{\frac{1}{y}}.$$

Поведение траекторий изображено на рис. 10. Такое состояние равновесия называется седло-узел.

Пример 10.

$$\dot{x} = 2y, \quad \dot{y} = 3x^2.$$

Интеграл системы имеет вид

$$H(x, y) = x^3 - y^2.$$

Поведение траекторий<sup>6</sup> изображено на рис. 11. Такой тип равновесия называется вырожденный седло-узел.

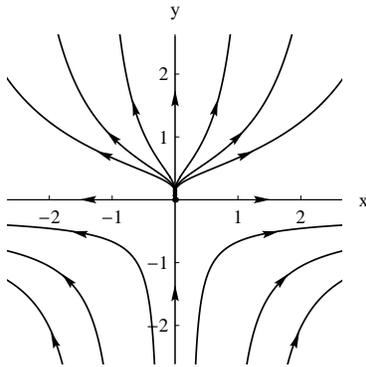
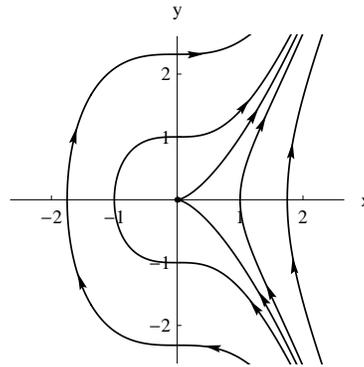
Пример 11.

$$\dot{x} = y + x^2, \quad \dot{y} = 2xy + y^2.$$

Система имеет инвариант  $f_1 = y$  с кофактором  $k_1 = 2x + y$ .

---

<sup>6</sup>Кривая  $x^3 - y^2 = 0$  называется полукубическая парабола.

Рис. 10.  $\dot{x} = x, \dot{y} = y^2$ . Седло-узелРис. 11.  $\dot{x} = 2y, \dot{y} = 3x^2$ . Вырожденный седло-узел

Кроме того  $\operatorname{div} = 4x + 2y = 2(2x + y)$ . Поэтому функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

будет интегрирующим множителем системы. Соотношения

$$H_x = \frac{2x}{y} + 1, \quad H_y = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y}$$

дают возможность найти интеграл системы

$$H(x, y) = \frac{x^2}{y} + x - \ln|y|.$$

Расположение траекторий изображено на рис. 12.

При построении фазового портрета мы воспользовались тем, что равенство  $H(x, y) = C$  является квадратным уравнением относительно переменной  $x$ .

Ось  $Ox$  инвариантна относительно движений системы. Эта ось отвечает «значению»  $C = \infty$ . Все траектории, проходящие в нижней полуплоскости являются двоякоасимптотическими к состоянию равновесия, и все вместе они образуют так называемую эллиптическую область, траектории, расположенные в верхней полуплоскости, образуют одну седловую область. В этом случае говорят о состоянии равновесия с эллиптической областью.

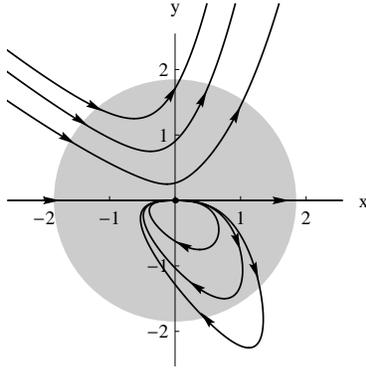


Рис. 12.  $\dot{x} = y + x^2$ ,  $\dot{y} = 2xy + y^2$ .  
Состояние равновесия с эллиптической областью

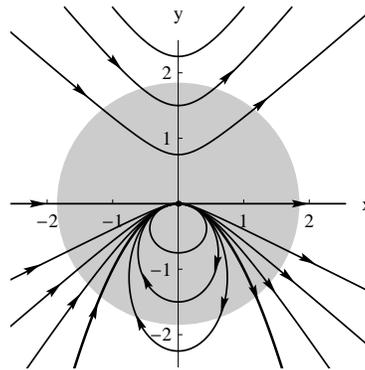


Рис. 13.  $\dot{x} = y + 2x^2$ ,  $\dot{y} = 2xy$   
Состояние равновесия с эллиптической областью

Пример 12.

$$\dot{x} = y + 2x^2, \quad \dot{y} = 2xy.$$

Инварианты и кофакторы суть

$$f_1 = y, \quad k_1 = 2x, \quad f_2 = y + x^2, \quad k_2 = 4x, \quad -2k_1 + k_2 = 0.$$

В таком случае имеем интеграл

$$H(x, y) = \frac{y + x^2}{y^2}.$$

Траектории задаются соотношением

$$\frac{y + x^2}{y^2} = C$$

При  $C < 0$  это будут эллипсы, при  $C > 0$  это будут гиперболы, при  $C = 0$  получается парабола  $y = -x^2$  (рис. 13).

Мы по-прежнему имеем состояние равновесия с эллиптической областью.

Отличие полученного фазового портрета от фазового портрета в предыдущем случае состоит в том, что теперь имеется бесконечно много неограниченных траекторий, для которых состояние равновесия  $O(0, 0)$  будет  $\alpha$ - или  $\omega$ -предельным множеством. Это будут траектории, образованные ветвями гипербол  $y + x^2 = Cy^2$ ,  $C > 0$ , лежащими ниже оси

$Ox$ , а также траектории, образующие параболу  $y = -x^2$ . В предыдущем случае таких неограниченных траекторий было только две: полуоси оси абсцисс, а все остальные траектории, расположенные в нижней полуплоскости, были «замкнутыми»: для них начало координат служило одновременно и  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельным множеством.

Рассмотренные системы топологически эквивалентны в любой ограниченной области фазовой плоскости (см. рис. 12, 13). Упомянутое различие проявляется лишь тогда, когда мы рассматриваем глобальный фазовый портрет.

Известно, что если матрица линейного приближения не является нулевой, то изолированное сложное состояние равновесия аналитической системы кроме случаев, перечисленных в примерах 9–12 (седло-узел, вырожденный седло-узел, состояние равновесия с эллиптической областью), может иметь только характер узла, седла, центра или фокуса, то есть в случае ненулевой матрицы линейного приближения имеет место семь возможных типов изолированного сложного состояния равновесия.

#### НАПРАВЛЕНИЯ, В КОТОРЫХ ТРАЕКТОРИИ СТРЕМЯТСЯ К СЛОЖНОМУ СОСТОЯНИЮ РАВНОВЕСИЯ

Приведём утверждение, которое регламентирует некоторые существенные черты поведения траекторий аналитических систем в окрестности изолированной точки покоя.

Теорема 64 (Из книги: Андронов А. А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966).

*Всякая полутраектория<sup>7</sup> аналитической системы*

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + \varphi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_m(x, y) + \psi(x, y),$$

*стремящаяся к состоянию равновесия  $O(0, 0)$ , либо является спиралью, либо стремится к  $O$  в определенном направлении  $\theta^*$ .*

*Если хоть одна из траекторий системы является спиралью, стремящейся к  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$  (или при  $t \rightarrow -\infty$ ), то все траектории, проходящие через точки некоторой окрестности состояния равновесия  $O$ , являются такими же спиральями (т. е. точка  $O$  есть устойчивый или неустойчивый фокус).*

*В случае, когда  $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) \neq 0$ , все направления  $\theta^*$ , в которых полутраектории системы стремятся к состоянию равновесия*

<sup>7</sup>Если  $M_0$  — точка траектории, которая при выбранном движении соответствует значению  $t=t_0$ , то множество точек, соответствующих значениям  $t \geq t_0$  ( $t \leq t_0$ ), называется положительной (отрицательной) полутраекторией.

$O$ , удовлетворяют уравнению

$$xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) = 0$$

(т. е. уравнению  $\cos \theta^* Q_m(\cos \theta^*, \sin \theta^*) - \sin \theta^* P_m(\cos \theta^*, \sin \theta^*) = 0$ ).

Если  $xQ_m(x, y) - yP_m(x, y) \equiv 0$ , то система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = xQ_{m-1}(x, y) + \varphi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = yQ_{m-1}(x, y) + \psi(x, y), \quad (Q_{m-1}(x, y) \not\equiv 0).$$

В этом случае для каждого неособого направления  $\theta$  (т. е. направления, не удовлетворяющего уравнению  $Q_{m-1}(x, y) = 0$ ) существует в точности одна полутраектория, стремящаяся к  $O$  в направлении  $\theta$ . Для особого же направления  $\theta^*$  может оказаться, что не существует ни одной полутраектории, стремящейся к  $O$  в направлении  $\theta^*$ , либо есть конечное число таких траекторий, либо, наконец, таких полутраекторий существует бесчисленное множество.

Здесь предполагается, что аналитические функции  $P(x, y), Q(x, y)$ , стоящие в правых частях системы (S), раскладываются в ряд Тейлора в окрестности состояния равновесия  $O(0, 0)$ :

$$P(x, y) = P_m(x, y) + \varphi(x, y), \quad Q(x, y) = Q_m(x, y) + \psi(x, y),$$

где  $m \geq 1$ ,  $P_m(x, y)$  и  $Q_m(x, y)$  — однородные многочлены, состоящие из всех членов  $m$ -го порядка соответствующих разложений, а функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  — ряды, состоящие из членов более высоких порядков.

Разобранные выше примеры исчерпывающим образом описывают случай, когда  $m=1$ , то есть матрица линейного приближения в окрестности нулевого равновесия не является нулевой.

Отметим, что в этом случае направления, по которым траектории стремятся к состоянию равновесия, совпадают с собственными векторами матрицы линейного приближения

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

В самом деле, эти направления определяются уравнением  $xQ_1(x, y) - yP_1(x, y) = 0$ , где  $P_1(x, y) = ax + by$ ,  $Q_1(x, y) = cx + dy$ , а собственный вектор  $v = (\alpha, \beta)^T$  матрицы  $A$ , отвечающий собственному числу  $\lambda$ , находится как решение системы

$$a\alpha + b\beta = \lambda\alpha, \quad c\alpha + d\beta = \lambda\beta,$$

сводящейся к соотношению  $\alpha(c\alpha + d\beta) - \beta(a\alpha + b\beta) \equiv \alpha Q_1(\alpha, \beta) - \beta P_1(\alpha, \beta) = 0$ .

В частности, если  $xQ_1(x, y) - yP_1(x, y) \equiv 0$ , имеем  $a = d$ ,  $b = c = 0$ ,  $Q_0 = a$ , и состояние равновесия в линейном приближении является дикритическим узлом: все направления в данном случае являются неособыми, и для каждого имеется траектория, стремящаяся к началу координат в этом направлении.

Пусть матрица линейного приближения в окрестности изолированного состояния равновесия  $O(0, 0)$  нулевая. В таком случае точка покоя называется линейным нулём. В условии Теоремы 64 имеем  $m \geq 2$ .

Ниже рассмотрены несколько примеров, иллюстрирующих эту теорему.

Пример 13.

$$\dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = xy.$$

Здесь  $P_2(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $Q_2(x, y) = xy$ ,  $xQ_2(x, y) - yP_2(x, y) = -y^3 \neq 0$ ,  $\theta^* = 0, \pi$ .

Имеется инвариант  $f_1 = y$  с кофактором  $k_1 = x$ , и кроме того имеем  $\operatorname{div} = 3x$ . Поэтому  $\mu = 1/y^3$  будет интегрирующим множителем.

Из соотношений

$$H_x = -\frac{x}{y^2}, \quad H_y = \frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3}$$

находим интеграл системы

$$H(x, y) = \frac{x^2}{y^2} - \ln y^2.$$

С помощью найденного интеграла легко получаем фазовый портрет (рис. 14). Видно, что траектории, входящие в состояние равновесия, представляют собой полуоси оси абсцисс; они, очевидно, имеют горизонтальную касательную.

Пример 14.

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^4 + y^2.$$

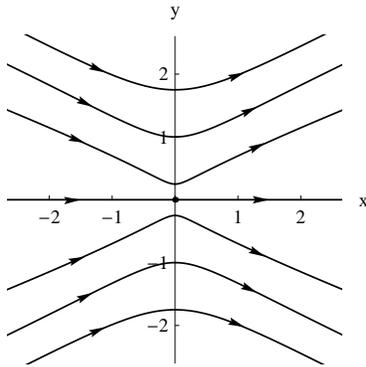
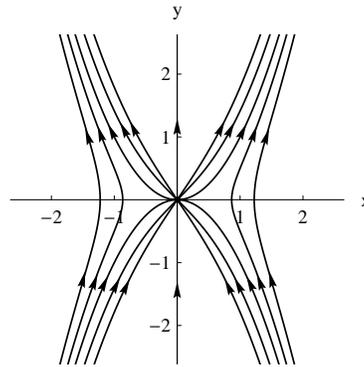
Здесь  $P_2(x, y) = xy$ ,  $Q_2(x, y) = y^2$ ,  $xQ_2(x, y) - yP_2(x, y) \equiv 0$ ,  $Q_1(x, y) = y$ ,  $\theta^* = 0, \pi$ .

Система имеет очевидный инвариант  $f_1 = x$ :

$$Df_1 = xy = yf_1, \quad k_1 = y, \quad \operatorname{div} = 3y = 3k_1$$

В таком случае имеем интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{x^3}.$$

Рис. 14.  $\dot{x} = x^2 + y^2, \dot{y} = xy$ Рис. 15.  $\dot{x} = xy, \dot{y} = x^4 + y^2$ 

Находим интеграл системы из соотношений

$$H_x = \frac{y^2}{x^3} + x, \quad H_y = -\frac{y}{x^2}.$$

Получаем

$$H(x, y) = -\frac{y^2 - x^4}{x^2}.$$

Кроме указанного система имеет инварианты  $f_2 = y - x^2$ ,  $f_3 = y + x^2$  с кофакторами  $k_2 = y - x^2$ ,  $k_3 = y + x^2$ , причём  $-2k_1 + k_2 + k_3 = 0$ , откуда также следует, что функция

$$H(x, y) = \frac{y^2 - x^4}{x^2}$$

будет интегралом системы.

Особыми направлениями являются  $\theta^* = 0$ ,  $\theta^* = \pi$ , причём каждому из особых направлений соответствуют две полутраектории, входящие в  $O$  в этих направлениях: это инвариантные кривые  $y = \pm x^2$ , которые будут сепаратрисами. Расположение траекторий изображено на рис. 15.

Пример 15.

$$\frac{dx}{dt} = xy, \quad \frac{dy}{dt} = y^2 - x^4.$$

Здесь  $P_2(x, y) = xy$ ,  $Q_2(x, y) = y^2$ ,  $xQ_2(x, y) - yP_2(x, y) \equiv 0$ ,  $Q_1(x, y) = y$ ,  $\theta^* = 0, \pi$ .

Инварианты и кофакторы суть

$$f_1 = x, \quad k_1 = y, \quad f_2 = y^2 + x^4, \quad k_2 = 2y, \quad \text{div} = 3y = 3k_1.$$

В таком случае имеется интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{x^3},$$

то есть

$$H_x = \frac{y^2}{x^3} - x, \quad H_y = -\frac{y}{x^2}, \quad H(x, y) = -\frac{y^2 + x^4}{x^2}.$$

В силу соотношения  $-2k_1 + k_2 = 0$  имеем интеграл системы

$$H(x, y) = \frac{y^2 + x^4}{x^2}.$$

Траекториями системы являются кривые  $y^2 + x^4 = Cx^2$  ( $C > 0$ ) и, кроме того, полуоси  $x = 0, y > 0$  и  $x = 0, y < 0$  ( $C = \infty$ ). При значении  $C = 0$  получаем точку покоя. Особыми направлениями являются  $\theta^* = 0$  и  $\theta^* = \pi$ . При этом не существует ни одной траектории, стремящейся к началу координат в особом направлении. Все траектории выходят из начала координат по всевозможным направлениям кроме горизонтального (рис. 16).

Пример 16.

$$\frac{dx}{dt} = xy - 3x^3, \quad \frac{dy}{dt} = y^2 - 6x^2y + x^4.$$

Здесь  $P_2(x, y) = xy$ ,  $Q_2(x, y) = y^2$ ,  $xQ_2(x, y) - yP_2(x, y) \equiv 0$ ,  $Q_1(x, y) = y$ ,  $\theta^* = 0, \pi$ .

Инварианты и соответствующие кофакторы в данном случае имеют вид

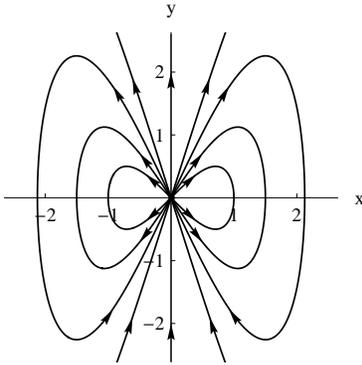
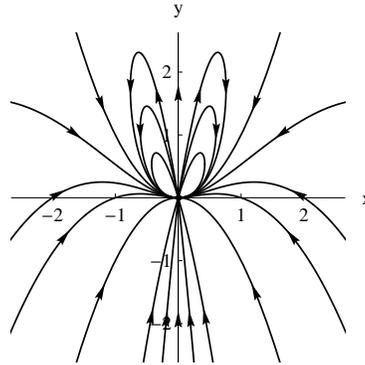
$$f_1 = x, \quad k_1 = y - 3x^2, \quad f_2 = y - x^2, \quad k_2 = y - 7x^2, \quad f_3 = x + y^2, \quad k_3 = y - 5x^2,$$

причём  $k_1 + k_2 - 2k_3 = 0$ .

В таком случае имеем интеграл

$$H(x, y) = \frac{f_1 f_2}{f_3^2} = \frac{x(y - x^2)}{(y + x^2)^2}.$$

Выразив  $y$  как функцию от  $x$  из равенства  $H(x, y) = C$ , мы можем построить фазовый портрет исследуемой системы. В данном случае имеется два особых направления:  $\theta^* = 0$ ,  $\theta^* = \pi$ , и каждому особому направлению соответствует бесконечное множество траекторий, входящих в состояние равновесия в этом направлении (рис. 17).

Рис. 16.  $\dot{x} = xy, \dot{y} = y^2 - x^4$ Рис. 17.  $\dot{x} = xy - 3x^3, \dot{y} = y^2 - 6x^2y + x^4$ 

### ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пример 17 (№ 907  $\Phi^8$ ). Исследовать на устойчивость при различных значениях параметра  $a$  нулевое решение системы

$$\dot{x} = ax - 2y + x^2, \quad \dot{y} = x + y + xy. \quad (907)$$

Система линейного приближения в окрестности начала координат имеет вид

$$\dot{x} = ax - 2y, \quad \dot{y} = x + y,$$

её матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Tr } A = a + 1, \quad \text{Det } A = a + 2.$$

Собственные числа этой матрицы лежат в левой полуплоскости в том и только в том случае, когда  $a + 1 < 0$ ,  $a + 2 > 0$ .

На основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению мы заключаем, что нулевое решение будет асимптотически устойчиво, если  $-2 < a < -1$ , и неустойчиво, если  $a < -2$  или  $a > -1$ .

Значения  $a = -1$ ,  $a = -2$  отвечают так называемым критическим случаям теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Рассмотрим эти случаи.

1)  $a = -1$ .

<sup>8</sup>Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: 2000.

Система принимает вид

$$\dot{x} = -x - 2y + x^2, \quad \dot{y} = x + y + xy. \quad (907_1)$$

Системе линейного приближения в окрестности начала координат

$$\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = x + y$$

отвечает матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

собственные числа которой  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

Начало координат будет для линейной системы особой точкой типа центр. В таком случае для выяснения характера особой точки в полной системе (центр или фокус) требуется провести дополнительное исследование (здесь мы сталкиваемся с так называемой проблемой различения центра и фокуса).

Представляется вполне естественным сравнить поведение траекторий полной системы (907<sub>1</sub>) и траекторий линеаризованной системы.

Функция  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$  является интегралом линейной системы (см. Пример 5):

$$f_x(-x - 2y) + f_y(x + y) \equiv 0.$$

Кроме того эта функция будет инвариантом полной системы (907<sub>1</sub>) с кофактором  $k = 2x$ :

$$f_x(-x - 2y + x^2) + f_y(x + y + xy) = 2x(x^2 + 2xy + 2y^2).$$

Далее  $\operatorname{div} = 3x$ , то есть  $\operatorname{div} = \frac{3}{2}k$ . В таком случае функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{f^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + 2xy + 2y^2)^{3/2}}$$

будет интегрирующим множителем.

Интеграл  $H(x, y)$  системы (907<sub>1</sub>) определяется соотношениями

$$H_x = \frac{x + y + xy}{(x^2 + 2xy + 2y^2)^{3/2}}, \quad H_y = \frac{x + 2y - x^2}{(x^2 + 2xy + 2y^2)^{3/2}}.$$

Для восстановления интеграла на основе этих соотношений воспользуемся формулами

$$\int \frac{dp}{(\alpha p^2 + \beta)^{3/2}} = \frac{1}{\beta} \frac{p}{\sqrt{\alpha p^2 + \beta}}, \quad \int \frac{p dp}{(\alpha p^2 + \beta)^{3/2}} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha p^2 + \beta}},$$

справедливость которых может быть проверена непосредственно (см. также Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. Гл. 8. §3. П. 281).

Используя эти формулы, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int \frac{(x+y)dx}{(x^2+2xy+2y^2)^{3/2}} = \langle p=x+y \rangle = \\ & = \int \frac{pdp}{(p^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{p^2+y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+2xy+2y^2}}, \\ & \int \frac{xydx}{(x^2+2xy+2y^2)^{3/2}} = \langle x=uy \rangle = \\ & = \int \frac{udu}{(u^2+2u+2)^{3/2}} = \langle p=u+1 \rangle \int \frac{pdp}{(p^2+1)^{3/2}} - \int \frac{dp}{(p^2+1)^{3/2}} = \\ & = -\frac{1}{\sqrt{p^2+y^2}} - \frac{p}{\sqrt{p^2+y^2}} = -\frac{x+2y}{\sqrt{x^2+2xy+2y^2}}. \end{aligned}$$

Теперь имеем

$$H(x, y) = \int \frac{(x+y+xy)dx}{(x^2+2xy+2y^2)^{3/2}} = -\frac{1+x+2y}{\sqrt{x^2+2xy+2y^2}} + h(y).$$

Продолжая рассуждения стандартным образом, получим, что функция

$$V(x, y) = \frac{x^2+2xy+2y^2}{(1+x+2y)^2}$$

будет интегралом системы (907<sub>1</sub>).

Вообще-то, складывая первое и удвоенное второе уравнения системы, можно угадать инвариант  $f_2 = 1+x+2y$  с кофактором  $k_2 = x$ . Поскольку  $k - 2k_2 = 0$ , немедленно получаем тот же интеграл

$$V(x, y) = \frac{x^2+2xy+2y^2}{(1+x+2y)^2}.$$

Функция  $V(x, y)$  может рассматриваться и как функция Ляпунова для системы (907<sub>1</sub>): она имеет строгий минимум в начале координат, равный 0, и её производная в силу системы неотрицательна (тождественно равна 0). Таким образом, нулевое решение системы в данном случае устойчиво по Ляпунову (не асимптотически).

Состояние равновесия является центром: все траектории в его окрестности представляют собой замкнутые кривые (циклы). Область, заполненная циклами, называется областью центра<sup>9</sup>.

Фазовый портрет приведён на рис. 18. Траекториями являются линии уровня  $V(x, y) = C$ , ( $C > 0$ ), которые будут кривыми второго порядка. Матрица квадратичных членов в выражении, определяющем эти кривые, имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 - C & 1 - 2C \\ 1 - 2C & 2 - 4C \end{pmatrix}.$$

Тип кривой зависит от собственных чисел этой матрицы: если они одного знака, будет кривая эллиптического типа, если разных — гиперболического, если одно из них равно нулю — парабола.

Произведение собственных чисел равно определителю матрицы  $M$ . Поскольку  $\text{Det}M = 1 - 2C$ , то мы видим, что при  $0 < C < 1/2$  получаются эллипсы, при  $C = 1/2$  — парабола, при  $C > 1/2$  — гиперболы; при  $C = 0$  получается точка покоя. Инвариантная прямая  $x + 2y + 1 = 0$  получается при  $C = \infty$ . Эта прямая является границей области центра.

Можно углядеть некоторое сходство между фазовыми портретами, изображенными на рисунках 13 и 18. Однако это сходство является чисто внешним: поведение систем в этих двух случаях совершенно различное. В частности, состояния равновесия имеют разный тип устойчивости.

$$2) a = -2.$$

Имеем систему

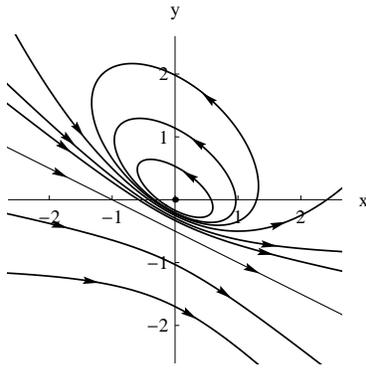
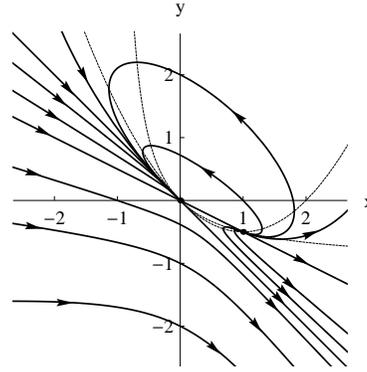
$$\dot{x} = -2x - 2y + x^2, \quad \dot{y} = x + y + xy. \quad (907_2)$$

Что касается вопроса об устойчивости нулевого решения, он решается сравнительно просто. Рассматривая векторное поле системы, легко обнаружить инвариантную прямую  $x + y = 0$  и получить решения системы вида

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad y = -x = -\frac{x_0}{1 - x_0 t},$$

которые, начинаясь сколь угодно близко к началу координат (при подходящем выборе  $x_0$ ), удаляются от него бесконечно далеко (к тому же за конечное время). Это означает, что нулевое решение неустойчиво.

<sup>9</sup>Задача определения условий, при которых состояние равновесия плоской автономной системы является центром, носит название проблемы центра. Конструирование интегралов — один из инструментов изучения этой проблемы. Наличие центра в системах, зависящих от параметра в общем случае является хрупкой ситуацией в том смысле, что центр наблюдается лишь при определённых значениях параметра и исчезает при сколь угодно малых отклонениях от этих значений. Так система (907) имеет центр при единственном значении параметра  $a = -1$ .

Рис. 18.  $\dot{x} = -x - 2y + x^2, \dot{y} = x + y + xy$ Рис. 19.  $\dot{x} = -2x - 2y + x^2, \dot{y} = x + y + xy$ 

Выясним тип нулевого состояния равновесия, которое в данном случае является сложным.

Отыскиваем линейные инварианты  $f_1 = x + y$ ,  $f_2 = x + 2y$  с кофакторами  $k_1 = x - 1$ ,  $k_2 = x$ .

Имеем  $\text{div} = 3x - 1 = k_1 + 2k_2$ , откуда получаем интегрирующий множитель  $\mu = 1/(x + y)(x + 2y)^2$ .

Из равенств

$$H_x = \frac{x + y + xy}{(x + y)(x + 2y)^2}, \quad H_y = \frac{2x + 2y - x^2}{(x + y)(x + 2y)^2}$$

восстанавливаем интеграл системы (907<sub>2</sub>)

$$H(x, y) = -\frac{1 + 2y}{x + 2y} + \ln \left| \frac{x + 2y}{x + y} \right|.$$

Интеграл  $H(x, y)$  является довольно сложной функцией и не позволяет легко получить фазовый портрет как набор его линий уровня. Затруднительным представляется даже исследование строения окрестности начала координат.

Такая ситуация, на самом деле, является довольно распространённой: хотя интеграл системы в принципе содержит исчерпывающую информацию, из-за возникающих сложностей этот интеграл является лишь одним из учитываемых при построении фазового портрета факторов, позволяющим получить точные аналитические или даже численные выводы. Большая часть информации обычно получается из других соображений, использующих приёмы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сделаем в системе (907<sub>2</sub>) замену переменных  $u = -(x + 2y)$ ,  $v = -2(x + y)$ , которая превращает инвариантные прямые в оси координат. Получим систему

$$\dot{u} = u^2 - uv, \quad \dot{v} = -v - v^2 + uv.$$

Инварианты этой системы  $f_1 = u$ ,  $f_2 = v$ , а найденный с их помощью интеграл Дарбу имеет вид

$$H(u, v) = \frac{1+v}{u} - \ln \frac{v}{u}.$$

Вид этого интеграла подсказывает целесообразность введения в качестве новой переменной величины  $w = v/u$ .

Траектории системы определяются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dv}{du} = -\frac{v + v^2 - uv}{u^2 - uv}.$$

В полученном уравнении перейдём от координат  $(u, v)$  к координатам  $(u, w = v/u)$ . Такой переход называется раздутием точки  $O$ . Название оправдано, например, тем фактом, что это преобразование переводит (раздувает) малую разрезанную вдоль оси  $Ov$  окрестность начала координат в плоскости  $(u, v)$  в бесконечно большую разрезанную окрестность оси  $Ow$  в плоскости  $(u, w)$ , см. рис. 20.

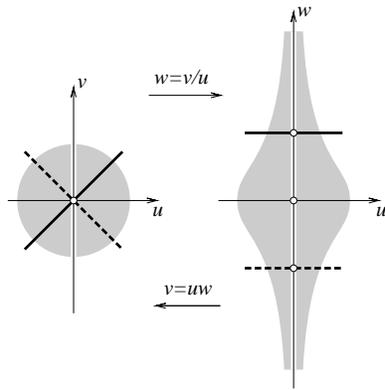
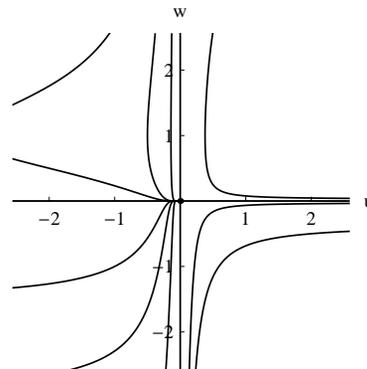


Рис. 20.

Рис. 21.  $wdu + u^2(1-w)dw = 0$ 

В переменных  $u, w$  получим уравнение с разделяющимися переменными

ными<sup>10</sup>

$$\frac{dw}{du} = -\frac{w}{u^2(1-w)}.$$

Интегральная кривая, проходящая через точку  $(u_0, w_0)$  задаётся соотношением

$$\ln \frac{w}{w_0} - w + w_0 = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}.$$

Разрешив это равенство относительно переменной  $u$ , мы получим явное задание интегральных линий. Используя этот факт, даём общую картину поведения интегральных кривых, рис. 21.

Отметим, в частности, то обстоятельство, что интегральные кривые входят в начало координат, касаясь оси  $Ou$ . В самом деле, имеем

$$\frac{1}{u} = \ln \frac{w}{w_0} - w + w_0 + \frac{1}{u_0} = \ln |w| - w + C,$$

а тогда из уравнения получим

$$\frac{dw}{du} = -\frac{w}{u^2(1-w)} = -\frac{w(\ln |w| - w + C)^2}{1-w}.$$

Отсюда следует, что  $\lim_{w \rightarrow 0} w'(u) = 0$ .

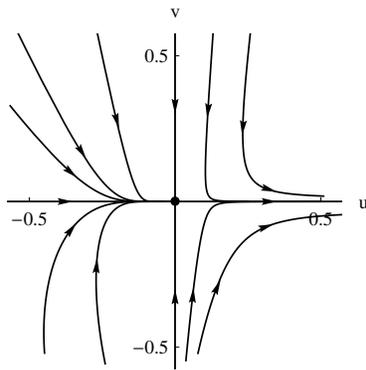


Рис. 22.  $\dot{u} = u^2 - uv$ ,  $\dot{v} = v - v^2 + uv$

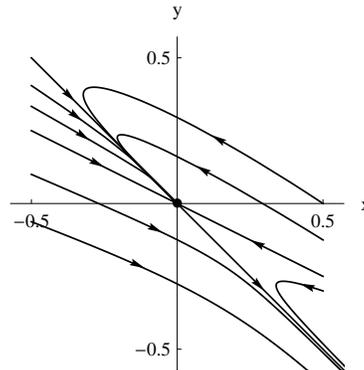


Рис. 23.  $\dot{x} = -2x - 2y + x^2$ ,  $\dot{y} = x + y + xy$

<sup>10</sup>Известно, что однородное уравнение  $dv/du = F(u, v)$  приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой  $v = wu$  (раздутием). Эта же замена переменных разделила переменные и в нашем случае, хотя уравнение не является однородным

Возвращаясь к переменным  $u, v = uw$ , заключаем, что начало координат является седло-узлом, рис. 22. На основании предыдущего замечания траектории, стремящиеся к началу координат (кроме совпадающих с вертикальными полуосями), входят в него под нулевым углом.

Замена переменных  $u, v$  на  $x, y$  является линейной и не меняет тип особой точки.

Окончательно заключаем, что начало координат будет особой точкой системы (907<sub>2</sub>) типа седло-узел. Направления входа и выхода траекторий в точку покоя определяется найденными линейными инвариантами  $x + y = 0$ ,  $x + 2y = 0$  (напомним Теорему 64). Расположение траекторий в окрестности начала координат приведено на рис. 23.

При построении глобального фазового портрета системы (907<sub>2</sub>) следует учесть, что у системы имеется ещё один стационар<sup>11</sup>: простая особая точка  $(1, -1/2)$ . Матрица линейного приближения в окрестности этой точки будет

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix},$$

её собственные числа  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , отвечающее им одномерное собственное подпространство совпадает с инвариантной прямой  $x + 2y = 0$ . Поэтому рассматриваемый стационар является неустойчивым вырожденным узлом.

Среди траекторий системы (907<sub>2</sub>) отсутствуют циклы. Это следует из того, что внутри цикла обязательно должна находиться хотя бы одна из исследованных нами точек покоя, а тогда цикл пересекался бы с прямолинейными траекториями, примыкающими к этим точкам и составляющими инвариантные прямые, что невозможно.

Как обычно, некоторую информацию о поведении траекторий доставляет рассмотрение изоклин горизонтального и вертикального наклонов поля.

Учитывая все эти соображения, а также результаты численного моделирования, получаем фазовый портрет системы (907<sub>2</sub>) в относительно небольшой области фазовой плоскости, содержащей оба стационара (рис. 19). Построение глобального фазового портрета требует дополнительных исследований.

Пример 18.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + Q_n(x, y),$$

<sup>11</sup>Эта особая точка в переменных  $u, v$  имеет координаты  $(0, -1)$ , то есть лежит на оси  $Ov$ , поэтому она «пропала (удалилась на бесконечность)» при переходе от переменных  $u, v$  к переменным  $x, y$ .

где  $Q_n(x, y)$  — однородный многочлен степени  $n$  от переменных  $x, y$ :

$$Q_n(x, y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0,n}y^n$$

Инварианты этой системы  $f_1 = x$ ,  $f_2 = Q_n(x, y)$ :

$$\begin{aligned} Df_1 &= x = f_1, \quad k_1 = 1, \\ Df_2 &= xQ_{nx}(x, y) + Q_{ny}(x, y)(y + Q_n(x, y)) = \\ &= Q_{ny}(x, y)Q_n(x, y) + (xQ_{nx}(x, y) + yQ_{ny}(x, y)) = \\ Q_{ny}(x, y)Q_n(x, y) + nQ_n(x, y) &= (n + Q_{ny}(x, y))f_2, \quad k_2 = n + Q_{ny}(x, y). \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой Эйлера для однородной функции  $Q_n(x, y)$  степени  $n$ :  $xQ_{nx}(x, y) + yQ_{ny}(x, y) = nQ_n(x, y)$ .

Далее

$$\text{div} = 2 + Q_{ny}.$$

Имеем  $\text{div} = (2 - n)k_1 + k_2$  и получаем интегрирующий множитель

$$\mu = f_1^{n-2} f_2^{-1} = \frac{x^{n-2}}{Q_n(x, y)}.$$

Отметим, что начало координат будет неустойчивым критическим узлом. Траектории покидают его под всевозможными углами.

Пример 19 (№ 200  $\Phi$ ).

Решить уравнение

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0.$$

После очевидных преобразований получим эквивалентную систему

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y - xy^2.$$

На основе Примера 18 получаем для этой системы интегрирующий множитель  $\mu = 1/y^2$ .

Интеграл системы  $H(x, y)$  удовлетворяет условиям

$$H_x = \frac{1}{y} - x, \quad H_y = -\frac{x}{y^2}.$$

Получим

$$H(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2}.$$

Выражая  $y$  из равенства  $H(x, y) = C$ , получим общее решение данного уравнения:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 2C}.$$

Фазовый портрет в таком случае получается как набор графиков функций при различных значениях  $C$ . К этому набору следует присоединить состояние равновесия и траектории, совпадающие с полуосями координат. Портрет приведён на рис. 24. Отметим, что некоторые характерные свойства этого портрета мы могли указать до проведения аналитических выкладок. Так например, фазовый портрет симметричен относительно начала координат, поскольку центрально-симметрично поле направлений исследуемой системы. Этот факт согласуется с тем, что каждое решение уравнения является нечётной функцией. Начало координат является неустойчивым дикритическим узлом: траектории выходят из него по всем направлениям. В точках, лежащих на гиперболе  $xy = 1$ , которая является изоклиной  $\dot{y} = 0$  (на рисунке она изображена пунктирной линией), траектории имеют локальный экстремум. Все эти и другие подобные соображения позволили бы нам схематично представить фазовый портрет. Однако установить, например, наличие вертикальных асимптот у траекторий, не располагая аналитическим выражением, было бы затруднительно. Такие траектории являются линиями уровня интеграла  $H(x, y) = C$  при значениях  $C \leq 0$ . Они являются графиками монотонных убывающих функций и заполняют области, точки которых удовлетворяют одному из неравенств:  $xy > 2$  или  $xy < 0$ . Области, заполненные кривыми, имеющими экстремум, задаются условиями  $0 < xy < 2$ . Кривая  $xy = 2$  отвечает значению  $C = 0$  и является траекторией-сепаратрисой. Укажем, что направления движения на сепаратрисе и на оси  $Oy$  «противоположны», хотя эти траектории неограниченно сближаются.

Система может быть решена в явном виде: если добавить начальные данные  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , то решение задачи Коши имеет вид<sup>12</sup>

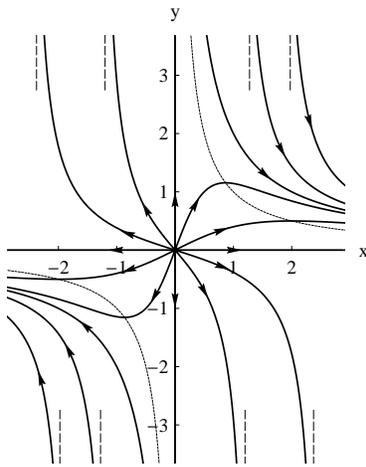
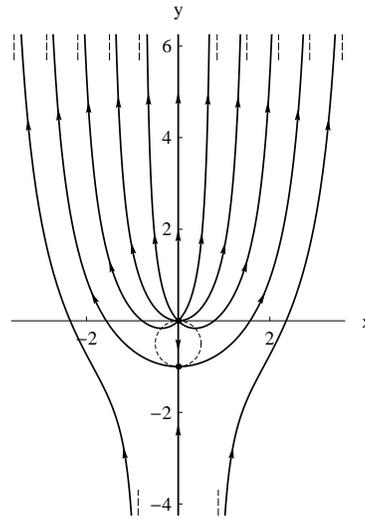
$$x = x_0 e^t, \quad y = \frac{2y_0 e^t}{2 - x_0 y_0 + x_0 y_0 e^t}.$$

Отсюда видно, что траектории, имеющие вертикальные асимптоты, уходят на бесконечность или приходят из неё за конечное время.

Пример 20.

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y + x^2 + y^2.$$

<sup>12</sup>Например, берём из первого уравнения  $x = x_0 e^t$  и подставляем в  $H(x, y) = H(x_0, y_0)$ .

Рис. 24.  $\dot{x} = x, \dot{y} = y - xy^2$ Рис. 25.  $\dot{x} = x, \dot{y} = y + x^2 + y^2$ 

Имеем

$$\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$H(x, y) = x - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

является интегралом системы.

Фазовый портрет приведён на рис. 25.

Сделаем несколько замечаний. Отметим, что фазовый портрет симметричен относительно оси  $Oy$ . Сама ось  $Oy$  является инвариантным множеством системы. Поэтому мы будем проводить все рассуждения для случая  $x > 0$ .

Система имеет два положения равновесия: начало координат  $O(0, 0)$  и точку  $O_1(0, -1)$ .

Начало координат — неустойчивый дикритический узел.

Матрица Якоби правых частей системы в точке  $O_1$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому стационар  $O_1$  будет седлом. Входящие устойчивые сепаратрисы направлены вдоль оси  $Oy$ , неустойчивые сепаратрисы выходят из седла в горизонтальном направлении.

Изоклина горизонтальных наклонов задается уравнением  $y + x^2 + y^2 = 0$  и представляет собой окружность радиуса  $1/2$  с центром в точке  $(0, -1/2)$ . Внутри этой окружности траектории двигаются вниз по мере возрастания  $x$  (напомним, что мы говорим о правой полуплоскости), снаружи — поднимаются вверх, имея на окружности минимум. Неустойчивая сепаратриса седла будет «последней» из таких траекторий. Траектории, расположенные ниже неё, не попадают в начало координат.

Изложенные простые соображения дают нам схематический набросок фазового портрета. Уточним его детали, используя найденный интеграл.

Имеем  $x = C + \arctg y/x$ . Поскольку  $-\pi/2 < \arctg y/x < \pi/2$ , то любая траектория  $(x(t), y(t))$  заключена в вертикальной полосе  $C - \pi/2 < x < C + \pi/2$ . В таком случае заключаем, что каждая траектория имеет правую вертикальную асимптоту  $x = C + \pi/2$ , а если  $C > \pi/2$ , то и левую вертикальную асимптоту  $x = C - \pi/2$ .

Неустойчивая сепаратриса седла  $O_1$  определяется условием

$$x(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow -1 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty.$$

Значит, она удовлетворяет соотношению

$$x - \arctg \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что вертикальная прямая  $x = \pi$  будет вертикальной асимптотой для этой сепаратрисы.

Соотношение

$$x - \arctg \frac{y}{x} = C$$

при  $-\pi/2 < C < \pi/2$  задает траектории, исходящие из начала координат под углом  $\vartheta = -\arctg C$ . В частности, при  $C = 0$  получаем траекторию, выходящую из начала координат под нулевым углом. Каждая такая траектория пересекает ось  $Ox$  в точке  $x = C$  (если  $C > 0$ ) и имеет правую вертикальную асимптоту  $x = C + \pi/2$ .

При  $C > \pi/2$  соотношение

$$x - \arctg \frac{y}{x} = C$$

задает траектории, лежащие ниже сепаратрисы. Каждая такая траектория по-прежнему пересекает ось  $Ox$  в точке  $x = C$  и имеет правую вертикальную асимптоту  $x = C + \pi/2$  и левую вертикальную асимптоту  $x = C - \pi/2$ .

Пример 21. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x + ax^{m_1}y^{n-m_1}, \quad \dot{y} = y + bx^{n-m_2}y^{m_2}.$$

Найдем инварианты и кофакторы.

$$\begin{aligned} f_1 = x, \quad Df_1 &= (1 + ax^{m_1-1}y^{n-m_1})f_1, \quad k_1 = 1 + ax^{m_1-1}y^{n-m_1}, \\ f_2 = y, \quad Df_2 &= (1 + bx^{n-m_2}y^{m_2-1})f_2, \quad k_2 = 1 + bx^{n-m_2}y^{m_2-1}, \\ f_3 = bx^{n-m_1-m_2+1} - ay^{n-m_1-m_2+1}, \quad Df_3 &= (n - m_1 - m_2 + 1)f_3, \\ k_3 &= n - m_1 - m_2 + 1. \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} = 1 + am_1x^{m_1-1}y^{n-m_1} + 1 + bm_2x^{n-m_2}y^{m_2-1}.$$

Если  $n - m_1 - m_2 + 1 \neq 0$ ,

$$\operatorname{div} = m_1k_1 + m_2k_2 - \frac{m_1 + m_2 - 2}{n - m_1 - m_2 + 1}k_3,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \mu &= f_1^{-m_1} f_2^{-m_2} f_3^{\frac{m_1+m_2-2}{n-m_1-m_2+1}} = \\ &= (bx^{n-m_1-m_2+1} - ay^{n-m_1-m_2+1})^{\frac{m_1+m_2-2}{n-m_1-m_2+1}} x^{-m_1} y^{-m_2} \end{aligned}$$

будет интегрирующим множителем.

Заметим, что в том случае, когда  $n - m_1 - m_2 + 1 < 0$ , инвариант  $f_3$  будет рациональной функцией, а не многочленом.

Рассмотрим случай, когда  $n - m_1 - m_2 + 1 = 0$ , то есть у нас отсутствует инвариант  $f_3$ .

Если  $a = b$ , имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + ax^{m_1}y^{m_2-1} = x(1 + ax^{m_1-1}y^{m_2-1}), \\ \dot{y} &= y + ax^{m_1-1}y^n = y(1 + ax^{m_1-1}y^{m_2-1}), \end{aligned}$$

для которой функция

$$H(x, y) = \frac{y}{x}$$

является интегралом.

Пусть  $a \neq b$ .

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + ax^{m_1}y^{m_2-1} = x(1 + ax^{m_1-1}y^{m_2-1}), \\ \dot{y} &= y + bx^{m_1-1}y^{m_2} = y(1 + bx^{m_1-1}y^{m_2-1}). \\ f_1 &= x, \quad Df_1 = (1 + ax^{m_1-1}y^{m_2-1})f_1, \quad f_2 = y, \quad Df_2 = (1 + bx^{m_1-1}y^{m_2-1})f_2. \\ \operatorname{div} &= 1 + am_1x^{m_1-1}y^{m_2-1} + 1 + bm_2x^{m_1-1}y^{m_2-1} = \\ &= \frac{am_1 + bm_2 - 2b}{a - b}k_1 - \frac{am_1 + bm_2 - 2a}{a - b}k_2. \\ \mu &= f_1^{-\frac{am_1 + bm_2 - 2b}{a - b}} f_2^{\frac{am_1 + bm_2 - 2a}{a - b}} = x^{-\frac{am_1 + bm_2 - 2b}{a - b}} y^{\frac{am_1 + bm_2 - 2a}{a - b}}\end{aligned}$$

интегрирующий множитель.

Следующие примеры решены с использованием результатов Примера 21.

Пример 22 (№ **211**  $\Phi$ ).

Решить уравнение

$$(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0.$$

Перейдем к системе

$$\dot{x} = x - x^3y, \quad \dot{y} = y + 2x^2y^2.$$

Здесь  $a = -1, b = 2, n = 4, m_1 = 3, m_2 = 2, n - m_1 - m_2 + 1 = 0$ .  
Поэтому

$$\mu = \frac{1}{xy}$$

будет интегрирующим множителем.

В таком случае

$$H_x(x, y) = \frac{1 + 2x^2y}{x}, \quad H_y(x, y) = -\frac{1 - x^2y}{y},$$

откуда получаем интеграл

$$H(x, y) = \ln \left| \frac{x}{y} \right| + x^2y.$$

Фазовый портрет симметричен относительно оси  $Oy$ , которая является инвариантным множеством и составлена из траекторий. Мы полагаем  $x > 0$ . Ось  $Ox$  также образована траекториями системы. Начало координат — неустойчивый дикритический узел. Изоклина горизонтальных наклонов — кривая  $y = -1/(2x^2)$ , на ней траектории имеют

локальный минимум. Кривую  $y = 1/x^2$  ( $\dot{x} = 0$ ) траектории пересекают вертикально в направлении снизу вверх. Выше этой кривой траектории двигаются влево вверх, приближаясь к оси  $Oy$ , но не достигая её. Отсюда заключаем, что каждая такая траектория имеет левую вертикальную асимптоту.

Если  $y(x)$  — решение уравнения, то

$$y'' = \frac{3y^2(2x^4y^2 - x^2y - 4)}{(x^2y - 1)^3}.$$

Область между изоклинами вертикальных и горизонтальных наклонов описывается неравенствами  $-1/2 \leq x^2y \leq 1$ . Если рассмотреть вспомогательную функцию

$$F(u) = \frac{2u^2 - u - 4}{(u - 1)^3},$$

нетрудно видеть, что она положительна на отрезке  $-1/2 \leq u < 1$ . Это означает что  $y'' > 0$  в точках интересующей нас области. В таком случае очевидно, что каждая траектория, выходящая внутрь положительного квадранта обязательно пересечёт кривую вертикальных наклонов и начнёт подниматься влево вверх. Отметим, что второй раз траектория не сможет пересечь эту кривую, то есть кривая  $y = 1/x^2$  «отжимает» траектории от вертикальной оси. Тем не менее эта ось служит вертикальной асимптотой для всех рассматриваемых траекторий. В самом деле, рассмотрим произвольную такую траекторию. Она описывается соотношением

$$\ln \frac{x}{y} + x^2y = C.$$

Траектория имеет вертикальную асимптоту, то есть мы имеем  $x \rightarrow x_C^* \geq 0$  при  $y \rightarrow +\infty$ .

Если бы мы имели, что  $x_C^* > 0$  при некотором  $C$  это означало бы, что при больших  $y$  выполняется соотношение  $\ln x_C^* - \ln y + (x_C^*)^2y \approx C$ , что невозможно.

Таким образом,  $x_C^* = 0$  при всех  $C$ .

Аналогичными рассуждениями можно показать, что каждая траектория, выходящая из начала координат внутрь четвёртого квадранта, пересекает изоклину горизонтальных наклонов, имеет в точке пересечения минимум и затем асимптотически стремится к оси  $Ox$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Фазовый портрет приведён на рис. 26.

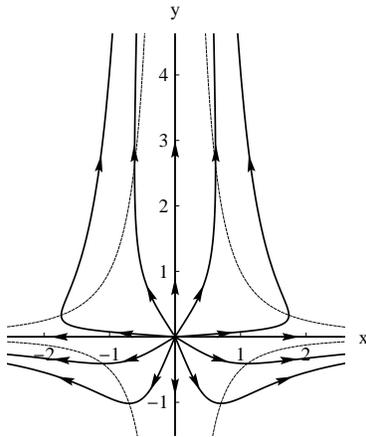


Рис. 26.  $\dot{x} = x - x^3y, \dot{y} = y + 2x^2y^2$

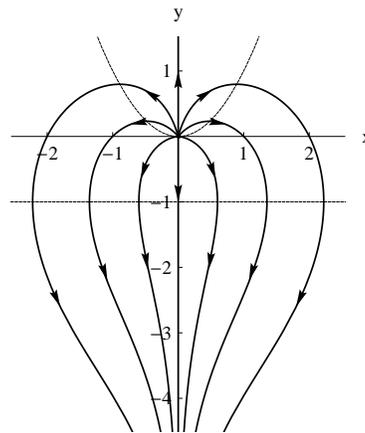


Рис. 27.  $\dot{x} = x + xy, \dot{y} = y - x^2$

Пример 23 (№ 219  $\Phi$ ).

Решить уравнение

$$(x^2 - y)dx + x(y + 1)dy = 0.$$

Перейдем к системе

$$\dot{x} = x + xy, \quad \dot{y} = y - x^2.$$

Здесь  $a = 1, b = -1, n = 2, m_1 = 1, m_2 = 0, n - m_1 - m_2 + 1 = 2$ .

Поэтому

$$\mu = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

будет интегрирующим множителем.

В таком случае

$$H_x(x, y) = \frac{y - x^2}{x\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad H_y(x, y) = -\frac{1 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

На основании второго условия имеем

$$H(x, y) = -\ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) - \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi(x).$$

Используя первое условие, находим  $\varphi'(x) = 1/x$ , то есть  $\varphi(x) = \ln|x|$ , и получаем интеграл

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{|x|}.$$

Фазовый портрет симметричен относительно оси  $Oy$ , которая является инвариантным множеством. Поэтому мы будем рассуждать, полагая  $x > 0$ . Начало координат — неустойчивый критический узел. В точках параболы  $y = x^2$  наклон траекторий горизонтальный, в этих точках имеет место локальный максимум. Прямую  $y = -1$  траектории пересекают вертикально в направлении сверху вниз. Выше параболы траектории движутся вправо вверх, после пересечения параболы — вправо вниз, после пересечения прямой  $y = -1$  траектории движутся вниз, приближаясь к оси  $Ox$ .

Если  $y(x)$  — решение уравнения, то

$$y'' = -\frac{x^4 + y^2(2 + y) + x^2(2 + y + y^2)}{x^2(1 + y)^3}.$$

Мы видим, что  $y'' < 0$ , если  $y > -1$ . Поэтому все интегральные кривые, лежащие в полуплоскости  $y > -1$ , будут выпуклыми вверх. В свою очередь, это означает, что любая такая кривая обязательно пересечёт прямую  $y = -1$ .

После пересечения с прямой  $y = -1$  траектория будет двигаться влево, приближаясь к оси  $Ox$ , но не достигая её; при этом  $y \rightarrow -\infty$ . В таком случае траектория должна иметь левую вертикальную асимптоту.

Покажем, что такой общей для всех траекторий асимптотой является ось  $x = 0$ .

Каждая траектория определяется равенством

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}\right) = C$$

при подходящем выборе  $C$ .

Из этого равенства имеем

$$x = \frac{C - \ln(v + \sqrt{v^2 + 1})}{\sqrt{v^2 + 1}},$$

если  $v = y/x$ .

Имеем  $v \rightarrow -\infty$ , и при каждом  $C$  существует конечный предел  $x_C^*$  выражения, стоящего в правой части, определяющий положение вертикальной асимптоты.

По правилу Лопитала находим

$$x_C^* = \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{C - \ln(v + \sqrt{v^2 + 1})}{\sqrt{v^2 + 1}} = \lim_{v \rightarrow -\infty} -\frac{1/\sqrt{v^2 + 1}}{v/\sqrt{v^2 + 1}} = 0.$$

Замечание. Тот факт, что  $x_C^* = 0$ , мы могли бы обосновать на основе следующих рассуждений.

Мы знаем, что этот предел существует. Вместе с тем видно, что он не зависит от  $C$ , поскольку

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{C}{\sqrt{v^2 + 1}} = 0.$$

В таком случае остаётся единственная возможность:  $x_C^* = 0$ .

Фазовый портрет приведён на рис. 27.

Пример 24.

$$\dot{x} = x + xy, \quad \dot{y} = y + x^2.$$

Как мы увидим ниже, несмотря на очевидное внешнее сходство этого примера с предыдущим, поведение рассматриваемых систем существенно различается.

Здесь  $a = 1, b = 1, n = 2, m_1 = 1, m_2 = 0, n - m_1 - m_2 + 1 = 2$ . Поэтому

$$\mu = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$$

будет интегрирующим множителем.

В таком случае

$$H_x(x, y) = \frac{y + x^2}{x\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad H_y(x, y) = -\frac{1 + y}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

откуда получаем интеграл

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Найденный интегрирующий множитель и полученный с его помощью интеграл системы определены в области, где  $x^2 - y^2 > 0$ . Границами области являются инвариантные прямые  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$ .

Воспользуемся тем фактом, что вместе с инвариантом  $f_3 = x^2 - y^2$  (в обозначениях Примера 21) инвариантом является также функция  $\tilde{f}_3 = y^2 - x^2$  с кофактором  $\tilde{k}_3 = 2$ ,  $f_1 = x$  по-прежнему является инвариантом с кофактором  $k_1 = 1 + y$ . Далее

$$\operatorname{div} = 2 + y = k_1 + \frac{1}{2}\tilde{k}_3.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mu = \frac{1}{x\sqrt{y^2 - x^2}}$$

является интегрирующим множителем в области  $x^2 - y^2 < 0$ .

Интеграл системы в этой области находится из соотношений

$$H_x(x, y) = \frac{y + x^2}{x\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad H_y(x, y) = -\frac{1 + y}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Получаем

$$H(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} + \ln \frac{|y + \sqrt{y^2 - x^2}|}{|x|},$$

(сравните с предыдущим примером).

На рис. 28 изображена фазовая плоскость, которая разбита инвариантными прямыми  $x = 0$ ,  $x + y = 0$ ,  $x - y = 0$  на инвариантные области, внутри каждой из которых мы имеем соответствующее выражение для интегрирующего множителя и интеграла системы.

На этом же рисунке изображены изоклина горизонтальных наклонов ( $y = -x^2$ ) и изоклина вертикальных наклонов ( $y = -1$ ). Точки пересечения этих изоклин определяют положения равновесия:  $O(0, 0)$ ,  $O_1(1, -1)$ ,  $O_2(-1, -1)$ . Кроме того на рисунке схематично изображены направления векторного поля системы.

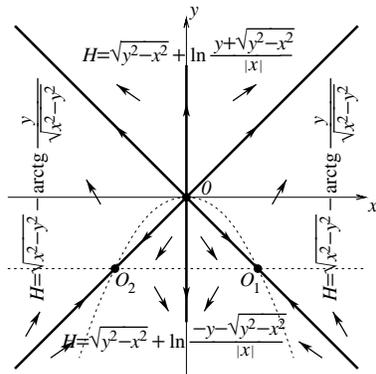


Рис. 28.  $\dot{x} = x + xy$ ,  $\dot{y} = y + x^2$

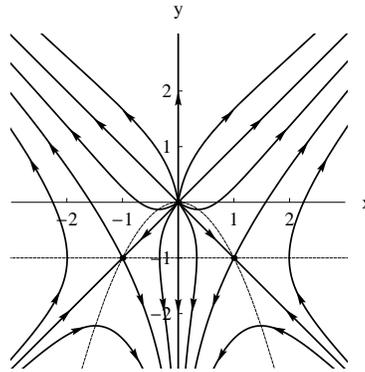


Рис. 29.  $\dot{x} = x + xy$ ,  $\dot{y} = y + x^2$

Как уже отмечалось, система имеет три стационара. Начало координат — неустойчивый дикритический узел. Матрица линейного приближения в окрестности каждого из оставшихся стационаров  $O_{1,2}$  имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа каждой из этих матриц  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Поэтому стационары  $O_1$ ,  $O_2$  будут седлами.

Поскольку фазовый портрет симметричен относительно оси  $Oy$ , которая является инвариантным множеством и составлена из траекторий, достаточно провести рассуждения для  $x > 0$ .

Сепаратриса седла  $O_1$ , выходящая влево вниз направлена вдоль вектора  $v_2 = (-1, -2)^T$ , который есть собственный вектор матрицы  $A_1$  для положительного собственного числа  $\lambda_2 = 2$ .

Эта сепаратриса уходит влево вниз, имеет левую вертикальную асимптоту и подчиняется соотношению

$$\sqrt{y^2 - x^2} + \ln \frac{-y - \sqrt{y^2 - x^2}}{x} = 0 = \sqrt{y^2 - x^2} + \ln \frac{-y - \sqrt{y^2 - x^2}}{x} \Big|_{x=1, y=-1}.$$

Аналогично тому, как это было получено в предыдущем примере, заключаем, что вертикальной асимптотой сепаратрисы служит ось  $Oy$ . Более того, на основе тех же соображений, можно заключить, что эта же ось  $x = 0$  служит левой вертикальной асимптотой при возрастании  $t$  для всех траекторий, лежащих внутри угла между этой осью и инвариантной прямой  $y = -x$ .

Седло  $O_1$  имеет входящими (устойчивыми) сепаратрисами прямолинейные лучи, идущие вдоль инвариантной прямой  $y = -x$  (соответствующий собственный вектор матрицы  $A_1$   $v_1 = (1, -1)^T$ ). Сепаратрисы, удовлетворяют системе

$$\dot{x} = x - x^2, \quad \dot{y} = -y + y^2,$$

решения которой задаются выражениями

$$x = \frac{x_0 e^t}{1 - x_0 + x_0 e^t}, \quad y = -x = \frac{y_0 e^t}{1 + y_0 - y_0 e^t}, \quad y_0 = -x_0.$$

Сепаратриса, приходящая из бесконечности (снизу справа), задается начальными условиями  $x_0 > 1$ ,  $y_0 < -1$ . Видно, что изображающая точка попадает из бесконечности в точку  $(x_0, y_0)$  за конечное время ( $\alpha > -\infty$ ) и затем в течение бесконечного времени стремится к седлу  $O_1(\omega = +\infty)$ .

Как уже отмечалось, имеем

$$\frac{d}{dt}(x^2 - y^2) = Df_3 = 2f_3.$$

В таком случае  $f_3 = Ce^{2t}$ .

Отсюда следует, что величина  $x^2 - y^2$  остаётся ограниченной при движении вдоль любой отрицательной полутраектории в обратном времени. Вместе с тем при таком движении  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow -\infty$  для траекторий, приходящих из бесконечности справа снизу. Значит,  $x - y \rightarrow +\infty$ . Поскольку величина  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$  ограничена, отсюда следует, что при движении по этим траекториям в обратном времени  $x + y \rightarrow 0$ . Это означает, что каждая из траекторий имеет прямую  $y = -x$  своей асимптотой.

Сепаратриса седла  $O_1$ , выходящая вправо вверх направлена вдоль вектора  $v_2 = (1, 2)^T$ , который есть собственный вектор матрицы  $A_1$  для положительного собственного числа  $\lambda_2 = 2$ .

Эта сепаратриса подчиняется соотношению

$$\sqrt{x^2 - y^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2} = \sqrt{x^2 - y^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \Big|_{x=1, y=-1}.$$

Так как функция  $\operatorname{arctg} u$  — ограниченная, то величина  $x^2 - y^2$  ограничена при движении вдоль сепаратрисы. Но при движении в положительном направлении по времени имеем  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow +\infty$ , значит,  $x + y \rightarrow +\infty$ , а в таком случае  $x - y \rightarrow 0$ . Это означает, что сепаратриса при возрастании  $t$  асимптотически стремится к прямой  $y = x$ . То же самое из аналогичных соображений справедливо для любой траектории, лежащей между прямыми  $y = x$ ,  $y = -x$ .

Траектории, расположенные над сепаратрисой, имеют своим источником начало координат.

Для траекторий, лежащих в положительном квадранте, выше биссектрисы, выполняется соотношение  $y > x$ . Тогда вдоль любой такой траектории  $\dot{x} > x + x^2$ . Отсюда следует, что компонента  $x$ , а вместе с ней и компонента  $y$  достигают бесконечных значений за конечное время ( $\omega < +\infty$ ). В таком случае величина  $f_3 = x^2 - y^2 = Ce^{2t}$  ограничена вдоль траектории. Отсюда на основе рассуждений, аналогичных приведённым выше, вытекает, что прямая  $y = x$  будет общей асимптотой для всех таких траекторий.

Фазовый портрет, изображённый на рис. 29, построен с учётом приведённых замечаний.

Отметим следующий факт, который может оказаться полезным при рассмотрении различных примеров.

Пусть дана система

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Если каждая из функций  $\mu_1(x, y)$ ,  $\mu_2(x, y)$  является интегрирующим множителем системы, то их отношение  $H(x, y) = \mu_1(x, y)/\mu_2(x, y)$  будет интегралом этой системы (если  $H(x, y) \neq const$ ).

В самом деле, имеем

$$(\mu_1 P)_x + (\mu_1 Q)_y = 0, \quad (\mu_2 P)_x + (\mu_2 Q)_y = 0,$$

то есть

$$\mu_{1x}P + \mu_{1y}Q = -\mu_1(P_x + Q_y), \quad \mu_{2x}P + \mu_{2y}Q = -\mu_2(P_x + Q_y).$$

В таком случае, имеем

$$\begin{aligned} H_x P + H_y Q &= \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)_x P + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)_y Q = \\ &= \frac{1}{\mu_2}((\mu_{1x}\mu_2 - \mu_{2x}\mu_1)P + (\mu_{1y}\mu_2 - \mu_{2y}\mu_1)Q) = \\ &= \frac{1}{\mu_2}(\mu_2(\mu_{1x}P + \mu_{1y}Q) - \mu_1(\mu_{2x}P + \mu_{2y}Q)) = \\ &= \frac{1}{\mu_2}(-\mu_2\mu_1(P_x + Q_y) + \mu_1\mu_2(P_x + Q_y)) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что функция  $H(x, y) = \mu_1(x, y)/\mu_2(x, y)$  является интегралом системы, что и требовалось доказать

В курсе лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям, читаемом на физическом факультете НГУ, доказывается

Предложение. Система

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y),$$

в которой  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  — однородные функции степени  $n$  от переменных  $x, y$ , имеет интегрирующий множитель вида  $\mu(x, y) = \nu(y/x)$ .

В самом деле, условие того, что функция  $\mu(x, y)$  является интегрирующим множителем, имеет вид

$$(\mu(x, y)P_n(x, y))_x + (\mu(x, y)Q_n(x, y))_y = 0.$$

В нашем случае это означает, что функция  $\nu$  должна быть решением уравнения

$$(\nu(y/x)P_n(x, y))_x + (\nu(y/x)Q_n(x, y))_y = 0.$$

Если обозначить  $v = y/x$ , то получим уравнение

$$\frac{1}{\nu(v)} \frac{d\nu}{dv} = -\frac{P_{nx}(x, y) + Q_{ny}(x, y)}{v_x P_n(x, y) + v_y Q_n(x, y)} = -\frac{x^2(P_{nx}(x, y) + Q_{ny}(x, y))}{-yP_n(x, y) + xQ_n(x, y)}.$$

Последнее выражение является однородной функцией  $F(x, y)$  степени 0:  $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$ .

Полагая  $\lambda = 1/x$ , получим  $F(x, y) = F(1, y/x) = \Phi(v)$ .

В таком случае мы можем найти функцию  $\nu(v)$  из равенства

$$\frac{1}{\nu(v)} \frac{d\nu}{dv} = \Phi(v).$$

Функция  $\mu(x, y) = \nu(y/x)$  будет интегрирующим множителем.

Пример 13а.

Найти интегрирующий множитель вида  $\mu = \nu(y/x)$  для системы

$$\dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = xy.$$

На основе предыдущих рассуждений имеем

$$\frac{1}{\nu(v)} \frac{d\nu}{dv} = -\frac{x^2(2x + x)}{-y(x^2 + y^2) + xxy} = \frac{3x^3}{y^3} = \frac{3}{v^3}.$$

В таком случае

$$\ln \nu(v) = -\frac{3}{2v^2}, \quad \mu(x, y) = \nu\left(\frac{y}{x}\right) = e^{-3x^2/2y^2}.$$

Принимая во внимание найденный ранее в Примере 13 интегрирующий множитель этой системы  $\mu = 1/y^3$ , получаем интеграл системы

$$\tilde{H}(x, y) = y^3 e^{-3x^2/2y^2}.$$

Нетрудно убедиться, что между найденным в примере 13 интегралом  $H(x, y)$  и полученным интегралом  $\tilde{H}(x, y)$  имеется соотношение  $H = -(2 \ln \tilde{H})/3$ .

Укажем ещё один способ отыскания интегрирующего множителя в рассматриваемом случае: докажем, что функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{yP_n(x, y) - xQ_n(x, y)}$$

будет интегрирующим множителем однородной системы

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y).$$

В самом деле, обозначив  $P_n(x, y) = P$ ,  $Q_n(x, y) = Q$ ,  $yP - xQ = R$ , имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{P}{yP - xQ}\right)_x + \left(\frac{Q}{yP - xQ}\right)_y = \\ &= \frac{1}{R^2} (P_x(yP - xQ) - P(yP_x - Q - xQ_x) + Q_y(yP - xQ) - Q(P + yP_y - xQ_y)) = \\ &= \frac{1}{R^2} (-Q(xP_x + yP_y) + P(xQ_x + yQ_y)) = \frac{1}{R^2} (-QnP + PnQ) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать<sup>13</sup>.

Отметим, что если искать таким способом интегрирующий множитель для системы Примера 13, то получим  $\mu = -1/y^3$ .

Пример 25.

$$\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy.$$

Поскольку рассматриваемая система однородная, мы можем найти её интегрирующий множитель двумя предложенными способами.

Первый способ. Пусть  $\mu_1 = \nu(y/x)$ . Тогда функция  $\nu(v)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\nu(v)} \frac{d\nu}{dv} = -\frac{4x^3}{y^3 + x^2} = -\frac{4}{v + v^3}.$$

Решая его и проводя очевидные преобразования, получим

$$\mu_1(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{y^4}.$$

Второй способ даёт нам интегрирующий множитель

$$\mu_2(x, y) = \frac{1}{y(x^2 + y^2)}.$$

Отсюда получаем интеграл системы

$$H(x, y) = \frac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = \frac{(x^2 + y^2)^3}{y^3},$$

который очевидно может быть заменён интегралом

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

<sup>13</sup>В последнем переходе мы воспользовались формулой Эйлера для однородных функций  $P = P_n(x, y)$ ,  $Q = Q_n(x, y)$ .

Отметим, что, воспользовавшись тем фактом, что  $f_1 = y$  является инвариантом системы с кофактором  $k_1 = 2x$ , мы можем найти интегрирующий множитель типа Дарбу:

$$\operatorname{div} = 4x = 2k_1, \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Тогда отношение

$$H(x, y) = \frac{\mu}{\mu_2} = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

даёт тот же интеграл системы.

Отметим, что в этом случае нам не понадобилось прибегать к нахождению первообразных.

Фазовый портрет приведён на рис. 30. Траектории задаются выражением  $H(x, y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  и представляют собой окружности, которые имеют начало координат общей точкой и центры которых заполняют ось  $Oy$ . Кроме того имеются две прямолинейные траектории, образующие полуоси оси  $Ox$ . Здесь имеется два эллиптических сектора.

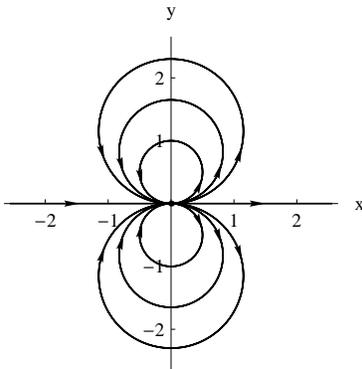


Рис. 30.  $\dot{x} = x^2 - y^2$ ,  $\dot{y} = 2xy$

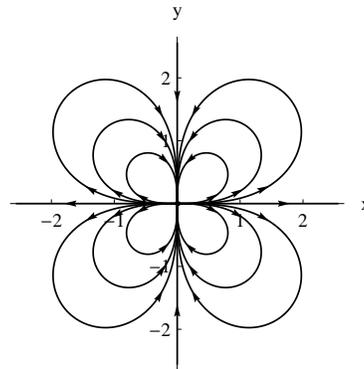


Рис. 31.  $\dot{x} = x^3 - 3xy^2$ ,  $\dot{y} = 3x^2y - y^3$

Пример 26.

$$\dot{x} = x^3 - 3xy^2, \quad \dot{y} = 3x^2y - y^3.$$

Найдём интегрирующий множитель вторым способом:

$$\mu_1 = -\frac{1}{2xy(x^2 + y^2)}.$$

Найдём также интегрирующий множитель типа Дарбу.  
Выпишем инварианты и кофакторы

$$f_1 = x, \quad k_1 = x^2 - 3y^2, \quad f_2 = y, \quad k_2 = y^2 - 3x^2, \quad \text{div} = 6x^2 - 6y^2 = \frac{3}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2.$$

Имеем интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{x^{3/2}y^{3/2}}.$$

Получим интеграл

$$\tilde{H}(x, y) = \frac{\mu_1}{\mu} = -\frac{x^{1/2}y^{1/2}}{2(x^2 + y^2)},$$

который заменим интегралом

$$H(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Фазовый портрет приведён на рис. 31. Его построение не вызывает затруднений, если учесть, что в полярных координатах  $x = \rho \cos \vartheta$ ,  $y = \rho \sin \vartheta$  орбиты, не совпадающие с инвариантными прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ , задаются соотношением  $\rho^2 = C \sin 2\varphi$ .

Здесь имеется четыре эллиптических сектора.

Отметим, что переход к полярным координатам был бы целесообразным и в предыдущем примере.

Приведём пример, показывающий, что методика Дарбу может оказаться применимой и в том случае, когда рассматриваемая система не является полиномиальной.

Пример 27 (Самойленко А. М. и др. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высшая школа, 1989. С. 81).

Решить уравнение

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0.$$

Перейдём к эквивалентной системе.

$$\dot{x} = x \sin 2y, \quad \dot{y} = -x^2 + \sin^2 y.$$

Есть очевидная инвариантная прямая  $x = 0$ :

$$f_1 = x, \quad Df_1 = (\sin 2y)f_1, \quad k_1 = \sin 2y.$$

Далее

$$\operatorname{div} = 2 \sin 2y.$$

Таким образом,

$$\operatorname{div} = -2k_1, \quad \mu = \frac{1}{x^2}.$$

С помощью интегрирующего множителя находим интеграл.

$$H(x, y) = \frac{x^2 + \sin^2 y}{x}.$$

Этот же интеграл мог бы быть найден, если заметить, что система имеет инвариант  $f_2 = x^2 + \sin^2 y$  с кофактором  $k_2 = \sin 2y = k_1$ .

Укажем очевидные факты, которые помогают построить глобальный фазовый портрет.

Имеют место симметрии соответствующего поля направлений относительно обеих координатных осей, а тогда и картина поведения траекторий симметрична относительно осей.

Кроме того векторное поле периодическое по  $y$  с периодом  $\pi$ . Поэтому достаточно построить траектории в полосе  $\{0 < x < +\infty, 0 < y < \pi\}$ , а затем воссоздать глобальный фазовый портрет.

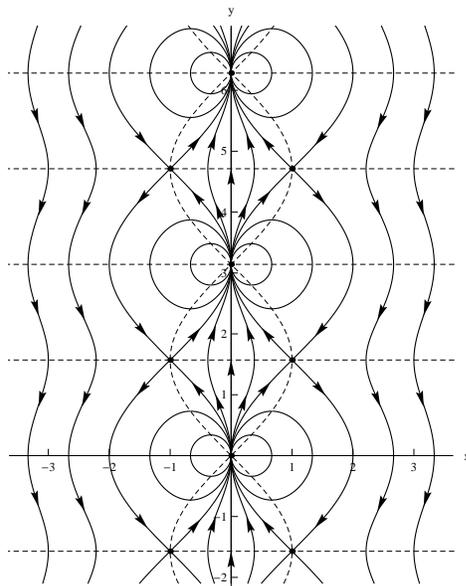


Рис. 32.  $\dot{x} = x \sin 2y, \dot{y} = -x^2 + \sin^2 y$

Изоклины вертикальных наклонов являются прямыми  $x = 0$  или  $y = k\pi/2$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Изоклины горизонтальных наклонов — кривые  $x = \pm \sin y$ . Пересечение этих изоклин образует бесконечное число точек покоя. В качестве «типичных» рассмотрим две из них:  $O(0, 0)$ ,  $O_1(1, \pi/2)$ .

Начало координат является линейным нулём, исследование его окрестности можно провести, используя найденный интеграл (см. также Пример 25).

Для состояние равновесия  $O_1$  матрица линейного приближения

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы  $\lambda_{1,2} = \pm 2$ , соответствующие собственные векторы  $v_{1,2} = (1, \mp 1)^\top$ , состояние равновесия  $O_1$  будет седлом. Сепаратрисы этого седла отвечают значению  $C = 2$  интеграла системы и определяются равенством  $x^2 + \sin^2 y = 2x$ .

Построение орбит облегчается тем фактом, что равенство  $H(x, y) = C$  может быть разрешено относительно переменной  $x$  либо относительно переменной  $y$ .

Фазовый портрет приведён на рисунке 32.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
Теория Дарбу интегрирования плоских автономных систем дифференциальных уравнений .....	7
Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами ..	10
Простейшие типы вырожденных состояний равновесия .....	19
Направления, в которых траектории стремятся к сложному состоянию равновесия .....	23
Фазовые портреты нелинейных динамических систем .....	28