МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

УЧЕБНО–МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

(Программа и задания, 2 семестр.)

Новосибирск
2012

Содержание учебно-методического комплекса «Линейная алгебра и геометрия—программа и задания, 2 семестр», соответствует программе измененного курса «Линейная алгебра и геометрия», читаемого во 2 семестре на 1-м курсе физического факультета. Комплекс включает в себя программу курса лекций, программу практических занятий, вопросы к экзамену, задачи для самостоятельной работы—3 переработанных задания по 15 вариантов.

Автор
Н. А. Кудрявцева, к.ф. м. н.

Учебно—методический комплекс «Программа и задания по линейной алгебре и геометрии, 2 семестр» подготовлен в рамках реализации «Программы развития НИУ — НГУ на 2009–2018 годы»

Линейная алгебра и геометрия

Лектор — Наталья Анатольевна Кудрявцева

2-й семестр

1. Векторные пространства

Абстрактное векторное пространство–определение, примеры. Линейная зависимость системы векторов. Теоремы о линейно зависимых системах векторов. Размерность и базис векторного пространства. Эквивалентные системы векторов. Координаты вектора. Переход к другому базису. Матрица перехода. Изменение координат вектора при переходе к другому базису. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности.

Подпространство векторного пространства. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерностей Грассмана. Прямая сумма подпространств. Критерии прямой суммы. Дополнительное подпространство.

2. Линейные отображения

Линейные отображения. Определение, примеры, свойства. Теорема о существовании линейного отображения, переводящего один базис в другой. Матрица линейного отображения. Определение, примеры. Теорема о взаимно–однозначном соответствии между линейными отображениями и матрицами. Координаты образа вектора при линейном отображении. Матрица линейного отображения в разных базисах. Ядро и образ линейного отображения, их свойства. Теорема о размерности ядра и образа. Произведение линейных отображений.

Линейное пространство операторов. Линейные формы. Двойственное пространство.Изменение коэффициентов линейной формы при смене базиса.

3. Собственные значения и собственные векторы. Диагонализация матрицы линейного оператора.

Инвариантные подпространства. Клеточно–диагональный вид матрицы линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы, собственное подпространство. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли (без доказательства). Диагонализируемость линейного оператора. Примеры недиагонализируемых линейных операторов. Алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений. Критерий диагонализируемости линейного оператора.

4. Жорданова форма линейного оператора

Корневые векторы, корневые подпространства. Теорема о расщеплении линейного оператора (без доказательства). Жорданова клетка. Собственные и присоединенные вектора. Теорема о жордановой форме (без доказательства) Функции от матриц. Матричная экспонента.

5. Геометрия евклидовых пространств

Евклидово пространство , определение скалярного произведения. Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши–Буняковского и неравенство треугольника. Ортогональные векторы, определение. Теорема Пифагора.Длины векторов и углы в евклидовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Теорема о существовании ортогонального базиса в евклидовом пространстве. Матрица Грама–определение, свойства. Выражение скалярного произведения через матрицу Грама.

Связь матриц Грама разных базисов. Определитель матрицы Грама. Изометрический изоморфизм евклидовых пространств одной размерности.

Ортогональное дополнение к подпространству.Теорема о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Расстояние от вектора до подпространства. Нахождение ортогональной проекции вектора на подпространство.

6. Линейные операторы на евклидовых пространствах

Сопряженный оператор-определение, примеры, свойства. Теорема о существовании сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения. Ядра и образы операторов A и A^*. Альтернатива Фредгольма.

Унитарные операторы, изометричные операторы. Критерии унитарности. Лемма о собственных значениях унитарного оператора. Лемма об инвариантности ортогонального дополнения. Теорема о каноническом виде матрицы унитарного оператора. Матрицы ортогонального оператора размерностей 2 и 3. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора. Геометрическая формулировка теоремы о каноническом виде матрицы ортогонального оператора. Теорема Эйлера.

Самосопряженный оператор–определение, примеры. Критерий самосопряженности. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора. Приведение квадратичных форм к главным осям. Приведение пары форм к диагональному виду.

Положительные операторы. Критерии положительности. Корень из оператора. Сингулярная пара базисов и сингулярное разложение. Полярное разложение.

7. Тензорная алгебра

Индексные обозначения. Объекты.Операции над объектами. Симметричные и антисимметричные объекты. Символы Кронекера и Леви–Чивиты.

Тензоры в линейном пространстве. Примеры–вектор и линейный функционал, линейное отображение и билинейная форма. Определение тензора. Обратный тензорный признак. Линейные операции с тензорами. Произведение тензоров, свёртка тензора. Симметризация и альтернирование. Тензоры в евклидовом пространстве. Метрический тензор. Подъем и опускание индексов. Ортогональные тензоры. Псевдотензор.

Литература

1. *Ульянов А. П.* Конспект лекций по алгебре и геометрии.

2. *Долгунцева И. А., Ульянов А. П.* Практикум по аналитической геометрии и линейной алгебре.

3. *Александрова Н. А.* Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии.

4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

5. *Курош В. Г.* Курс высшей алгебры.

6. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре.

7. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия.

8. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.

9. *Александров В. А.* Тензоры для физика–первокурсника.

10. *Коренев Г. В.* Тензорное исчисление.

11. *Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике.

12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения.

13. *Кострикин А. И.* Сборник задач по алгебре.

14. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре.

15. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.

16. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.

План семинаров

1. Абстрактное векторное пространство. (2 часа)

2. Подпространства линейного пространства. Базис суммы и пересечения подпространств. (2 часа)

3. Линейное отображение, линейный оператор. (2 часа)

4. Ядро и образ линейного отображения. (2 часа)

5. Инвариантные подпространства. Собственные числа и собственные векторы. Диагонализация линейного оператора. (2 часа)

6. Жорданова нормальная форма матрицы. Функции от матриц. (4 часа)

7. Геометрия евклидовых пространств (2 часа)

8. Ортогональное дополнение, проекция на подпространство. (2 часа)

9. Сопряжённый оператор. Самосопряжённый оператор. Канонический вид матрицы самосопряжённого оператора. (3 часа)

10. Ортогональный и унитарный операторы. Канонический вид матриц операторов. (3 часа)

11. Приведение формы к главным осям. Приведение пары форм к каноническому виду. (2 часа)

12. Сингулярное разложение. Полярное разложение. (2 часа)

11. Тензорная алгебра. (4 часа)

13. Повторение наиболее трудных тем. (2 часа)

Задания по линейной алгебре и геометрии

Задания, помеченные звёздочкой, не являются обязательными для получения допуска к экзамену, однако приносят дополнительные баллы. Вычислительные задачи являются лишь образцами, в соответствии с ними преподаватели выдадут студентам индивидуальные задания.

Задание 5 (*сдать к 18 марта*)

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,1]^\top, [0,1,2,-1]^\top, [2,-1,-1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,0,1,0]^\top, [0,1,-1,3]^\top, [4,-1,-1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,0]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,1,-1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [-1,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,3,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,-3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-2,6,8]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$,$(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,3,5]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,0,0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 6 (*сдать к 29 апреля*)

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & 9 \\ -5 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -5 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой нормальной форме матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\langle [1, 2, -1, 1]^\top, [2, -2, -1, 1]^\top \right\rangle$$

5. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{x} = [4, -1, -3, 4]^\top$ на линейную оболочку $\left\langle [1, 1, 1, 1]^\top, [1, 2, 2, -1]^\top, [1, 0, 0, 3]^\top \right\rangle$.

6. В пространстве вещественных многочленов $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах $1, x, x^2$; (b) расстояние от x^3 до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $M_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта-Шмидта

$$(A, B) = (A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех косоэрмитовых матриц;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грама обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльшего количества векторов?

Задание 7 (*сдать к 30 мая*)

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 2-i & -1+2i \\ 2+i & -1-2i \end{bmatrix}$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной матриц.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

найти сингулярное и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее пару форм f и g к диагональному виду:

$$f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3,$$
$$g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3.$$

7. Определить тип линии 2 порядка $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 9y + 7 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат.

8*. Для произвольного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа A лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(\mathsf{A}) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(\mathsf{A})\}.$$

darkredrgb0.7,0,0

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 1

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,1]^\top, [0,1,-1,0]^\top, [1,2,1,1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [0,1,2,1]^\top, [0,1,2,-1]^\top, [3,-3,0,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,-1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,1,-2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,3,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,1,3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 2

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,-1,0]^\top, [-2,0,1,0]^\top, [0,1,1,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,0,1,-1]^\top, [1,1,-3,0]^\top, [2,-1,1,0]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,2]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,2,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-1,2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 3

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,-1]^\top, [1,0,-1,2]^\top, [1,2,-1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [-1,1,0,3]^\top, [2,1,1,0]^\top, [1,3,1,3]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,2,5]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,2,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [4,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,-1,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,2,5]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,7,9]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-2,1,-3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 4

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [-1,0,1,1]^\top, [2,2,-1,0]^\top, [1,-1,0,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,1,0,0]^\top, [2,0,1,0]^\top, [1,-1,0,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,4,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,1,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,4,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,-1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,2,5]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,-1,5]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 5

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,2,0]^\top, [0,1,1,0]^\top, [1,1,0,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,2,1,1]^\top, [0,1,2,3]^\top, [1,0,1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,3,-1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,0,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,1,2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,3,-1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1,-1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-2,-3,1]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 6

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,2,0,1]^\top, [0,-1,-1,1]^\top, [1,2,1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [-1,1,1,0]^\top, [0,0,1,1]^\top, [1,1,-1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,3,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,-1,2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,4,8]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,0,4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,1,7]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 7

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,2]^\top, [1,-2,1,0]^\top, [2,-1,-1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,-1,1,0]^\top, [1,0,-1,1]^\top, [0,3,0,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,2,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,0,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,3,-3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,2,-9]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 8

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,1,1]^\top, [1,-1,2,0]^\top, [-1,0,0,1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,3,1,0]^\top, [1,0,2,-2]^\top, [0,2,1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [6,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [4,0,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,-2,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [6,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,8]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,-2,8]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 9

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,1,1]^\top, [-1,0,1,1]^\top, [1,0,1,2]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [-1,1,-1,1]^\top, [1,1,-1,1]^\top, [1,2,1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,5,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,0,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,5,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1,4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,-2,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$[\,].$$

9*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 10

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,1,1]^\top, [1,-1,1,-1]^\top, [1,3,1,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,2,0,2]^\top, [1,2,1,2]^\top, [3,1,3,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [2,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,-1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,3,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,-4,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,0,3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,7]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)

Вариант 11

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [2,-1,0,-2]^\top, [3,-2,1,0]^\top, [1,-1,1,-1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [3,-1,-1,0]^\top, [0,-1,2,3]^\top, [3,-2,-1,0]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [-1,0,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,3,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [-1,0,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,2,4]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1,-4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,2,-2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 12

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,0,0]^\top, [0,1,1,0]^\top, [0,0,1,1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,0,1,0]^\top, [0,2,1,1]^\top, [1,2,1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,-1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,-2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,-1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [3,0,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,-1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,-1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,-2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,-1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,0,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 13

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,-1,0,1]^\top, [3,1,1,1]^\top, [1,2,-1,-1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [2,1,0,1]^\top, [1,-1,3,7]^\top, [-1,1,1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,3]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [3,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,2,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,1,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,3]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [3,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3,2,-4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,5]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 14

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,-1,0,1]^\top, [1,0,0,1]^\top, [-2,0,1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,-1,1,-1]^\top, [0,2,1,1]^\top, [-1,1,1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,2,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [2,-1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,2,-1]^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = [2,1,0]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,-1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,-1,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 18 марта)
Вариант 15

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,1]^\top, [0,1,2,-1]^\top, [2,-1,-1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,0,1,0]^\top, [0,1,-1,3]^\top, [4,-1,-1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,-2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,2,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-1,0]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,2,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,2,-2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,8]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3,2,-2]^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = [2,2,8]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 1

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\{[4,3,1,2]^\mathsf{T}, [3,2,0,1]^\mathsf{T}\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,-2,6,3]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,1,1,2]^\mathsf{T},\ [1,0,1,-1]^\mathsf{T},\ [2,1,2,1]^\mathsf{T} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 2

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 6 \\ -9 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,3,5,4]^{\mathsf{T}}, [1,2,3,3]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[-4,-2,-1,8]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,1,1,5]^{\mathsf{T}}$, $[1,-2,1,-1]^{\mathsf{T}}$, $[1,0,1,3]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 3

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 5 & 12 & -19 \\ 4 & 8 & -13 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -16 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,4,-1,2]^{\mathsf{T}}, [3,7,-2,5]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,2,5,8]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,1,1,1]^{\mathsf{T}},\ [1,0,1,-1]^{\mathsf{T}},\ [1,-2,1,-5]^{\mathsf{T}} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 4

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -11 \\ 1 & 5 & -10 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2, 1, 2, 3]^\mathsf{T}, [1, 2, 2, -2]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[2, 3, 2, 4]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [2, -1, 0, 1]^\mathsf{T}, [1, -1, -2, 1]^\mathsf{T}, [1, 1, 6, -1]^\mathsf{T} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -12 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 5

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \\ -5 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -15 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2,3,1,2]^\mathsf{T}, [-1,3,-1,4]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,5,3,1]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,2,1,1]^\mathsf{T}, [1,3,0,3]^\mathsf{T}, [1,1,2,-1]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 6

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 15 & 8 & 20 \\ 1 & 1 & 2 \\ -11 & -6 & -15 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & -5 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -13 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -4 & 2 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,1,2,-1]^{\mathsf{T}}, [2,4,-1,2]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[4,5,3,1]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,1,1,1]^{\mathsf{T}},\ [1,0,2,3]^{\mathsf{T}},\ [1,3,-1,-3]^{\mathsf{T}} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 7

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & 10 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -6 & -15 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 & -1 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4,-2,5,1]^{\mathsf{T}}, [2,-1,3,-2]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,6,3,4]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[-1,1,1,1]^{\mathsf{T}},\ [1,3,0,1]^{\mathsf{T}},\ [2,2,-1,0]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -4 & 7 & 25 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 8

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 12 & 6 & 14 \\ -1 & 1 & -1 \\ -7 & -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & - \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,1,2,1]^{\mathsf{T}}, [1,2,3,1]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[-2,8,3,-1]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,-1,1,-1]^{\mathsf{T}}$, $[1,1,2,-1]^{\mathsf{T}}$, $[1,3,3,-1]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 12 & -2 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 9

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -3 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[3,-1,1,-1]^\mathsf{T}, [5,-1,0,1]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[1,-7,5,-2]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle[1,2,1,3]^\mathsf{T}$, $[1,1,2,2]^\mathsf{T}$, $[1,0,3,1]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бо́льших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 10

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 & -10 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 & -14 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,3,2,4]^{\mathsf{T}}, [2,4,3,5]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[-1,8,-6,5]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle[2,-1,0,1]^{\mathsf{T}}, [1,0,-1,-1]^{\mathsf{T}}, [1,-1,1,2]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 11

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -4 & -8 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2,1,-3,4]^\mathsf{T}, [-1,1,-4,4]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,3,4,-1]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,-2,2,-1]^\mathsf{T}, [1,-1,2,0]^\mathsf{T}, [1,0,2,1]^\mathsf{T} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 12

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 & -12 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 6 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[2,1,1,1]^\mathsf{T}, [1,3,2,2]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[2,-5,9,7]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,-1,3,2]^\mathsf{T}$, $[1,1,1,2]^\mathsf{T}$, $[1,3,-1,2]^\mathsf{T}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 13

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & -4 & 7 \\ 12 & 4 & -10 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -7 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[-2,1,-4,3]^{\mathsf{T}}, [-1,1,-3,3]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[7,-9,1,3]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,2,-1,2]^{\mathsf{T}}$, $[1,-3,1,1]^{\mathsf{T}}$, $[2,-1,0,3]^{\mathsf{T}}\rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 14

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 & 3 & -7 \\ -4 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 12 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[4, 3, -5, 3]^{\mathsf{T}}, [2, 1, -2, 1]^{\mathsf{T}}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[1, 4, 5, 2]^{\mathsf{T}}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1, 1, 1, 1]^{\mathsf{T}}, [1, 1, 2, 3]^{\mathsf{T}}, [1, 1, 0, -1]^{\mathsf{T}} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A, B) = \operatorname{tr}(A^{\dagger}B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 6 (сдать до 29 апреля)
Вариант 15

1. Если возможно, переходя к новому базису над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$, привести к диагональному виду матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Привести к жордановой форме матрицы:

$$\begin{bmatrix} -7 & 3 & -9 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

3. Найти $\exp(A)$ для матриц из предыдущей задачи.

4. Найти базис ортогонального дополнения в $\mathbb{R}^4$ к подпространству, натянутому на векторы

$$\left\{[1,2,1,1]^\mathsf{T}, [3,1,-2,-2]^\mathsf{T}\right\}$$

Ортогонализовать полученные векторы.

5. Найти ортогональную проекцию вектора $[3,8,1,5]^\mathsf{T}$ на линейную оболочку векторов $\langle [1,-1,1,1]^\mathsf{T},\ [1,2,3,1]^\mathsf{T},\ [1,-4,-1,1]^\mathsf{T} \rangle$.

6. В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ вещественных многочленов степени не более 3 со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

найти: (a) объём параллелепипеда на векторах 1, x, x^2; (b) расстояние от $x^3 - x$ до подпространства многочленов степени не более 2.

7. На комплексном пространстве матриц $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение Гильберта — Шмидта

$$(A,B) = \mathrm{tr}\,(A^\dagger B).$$

Найти ортогональное дополнение к множествам:

(a) всех верхнетреугольных матриц;

(b) всех матриц с нулевым следом;

(c) всех эрмитовых матриц.

8. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9. Исследовать разрешимость уравнения $Ax = b$ с помощью альтернативы Фредгольма.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10*. (a) Доказать, что определитель Грамма обладает свойством

$$g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \leqslant g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Указание: изучите сначала случай трёх векторов.

(b) При каких условиях это неравенство становится равенством?

(c) Пояснить геометрический смысл величины

$$\frac{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{g(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) g(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}.$$

(d) Что можно сказать для бóльших количеств векторов?

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 1

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 1-2i & -2+i \\ 1+2i & -2-i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 10x_2x_3 - 5x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 9y + 7 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 2

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+2i & 3-2i \\ -2-3i & -2+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2^2 + 24x_2x_3 + 12x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $6x^2 - 4xy + 9y^2 + 10y + 3 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 3

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3-i & -1+3i \\ 3+i & -1-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 8x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $3x^2 + 8xy - 3y^2 + 6x - 2y - 2 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 4

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -1+2i & 2-i \\ -1-2i & 2+i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 3 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 5

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3-2i & -3+2i \\ 2+3i & 2-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 10y - 5 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 6

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3+i & 1-3i \\ -3-i & 1+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $x^2 + 10xy + y^2 + 14x - 2y + 5 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 7

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i \\ -2-i & -2+i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 8

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3-2i & -2+3i \\ 3+2i & -2-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y - 1 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 9

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+i & 3-i \\ -1-3i & -1+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{7}{2}x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $5x^2 + 6xy - 3y^2 - 8x + 1 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)

Вариант 10

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -1-2i & -1+2i \\ 2+i & 2-i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{7}{2}x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2,$$
$$g = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 11

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3+2i & 2-3i \\ -3-2i & 2+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{3}{2}x_2^2 - 4x_2x_3 + 7x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 14x + 2y + 10 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 12

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -3-i & -3+i \\ 1+3i & 1-3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 5x_2^2 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 12x - 4y + 6 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 13

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} -2+i & 1-2i \\ -2-i & 1+2i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 14

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 3+i & -1-3i \\ 3-i & -1+3i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$f = \; -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 + 3x_3^2,$$
$$g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2.$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $5x^2 + 24xy - 5y^2 - 2x + 16y - 4 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$

Задание 7 (сдать до 30 мая)
Вариант 15

1. В квантовой механике используются так называемые матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что

а) эти матрицы образуют базис в пространстве 2*2 матриц с комплексными элементами;

б) имеют место равенства $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_k^2 = E$, $k = 1, 2, 3$;

в) каждая матрица σ_k, $k = 1, 2, 3$ –унитарная .

2. Доказать, что если матрица H эрмитова, то для каждого $t \in \mathbb{R}$ матрица $\exp(iHt)$ унитарна.

3. Привести к каноническому виду ортогональные операторы, заданные в стандартном ОНБ матрицами:

$$\begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}; \qquad \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Представить матрицу

$$\begin{bmatrix} 2+i & -1-2i \\ 2-i & -1+2i \end{bmatrix}.$$

в виде произведения неотрицательной эрмитовой и унитарной.

5. Для матрицы

$$\begin{bmatrix} -2 & 14 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

найти сингулярное разложение и оба полярных разложения.

6. Найти невырожденное преобразование переменных, приводящее пару квадратичных форм f и g к диагональному виду, если

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2^2 + 12x_2x_3 + 21x_3^2, \\ g &= -x_1^2 - 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2^2 - 9x_3^2. \end{aligned}$$

7. Определить тип линии 2 порядка, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $4x^2 + 6xy - 4y^2 + x + 7y - 2 = 0$

8. Доказать, что проектирование пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 является самосопряженным оператором тогда и только тогда когда V_1 и V_2 ортогональны .

9*. Для произвольного линейного оператора A доказать, что:

(a) для всех векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ отношение $\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ заключено между минимальным и максимальным сингулярными числами A;

(b) все собственные числа лежат в круговом кольце

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sigma_n(A) \leqslant |z| \leqslant \sigma_1(A)\}.$$