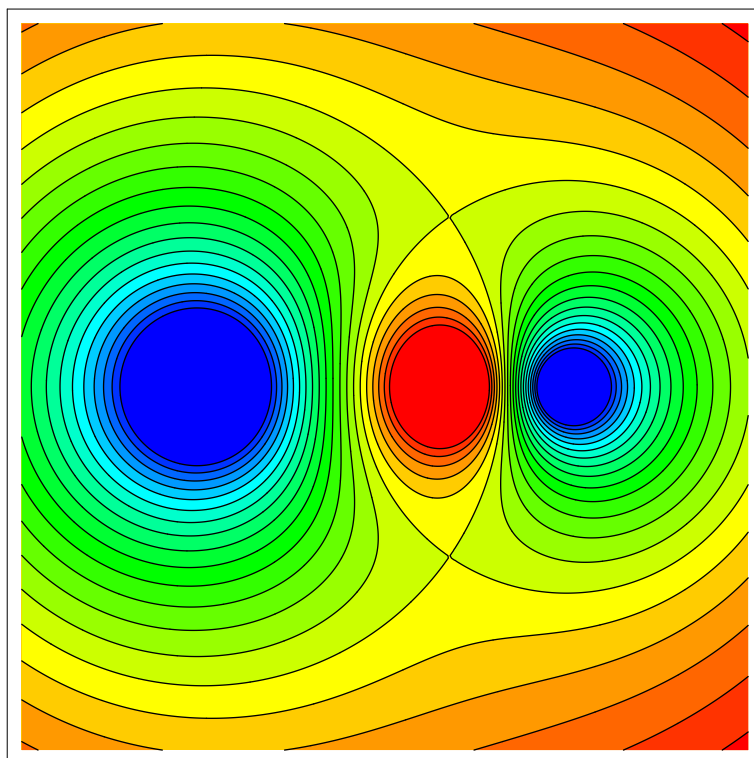


Е. А. Кузнецов, Д. А. Шапиро

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть I



Новосибирск, 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра теоретической физики

Е. А. Кузнецов, Д. А. Шапиро

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Часть I

курс лекций

Новосибирск
2011

УДК
ББК
К-

Кузнецов Е.А., Шапиро Д.А. Методы математической физики: курс лекций // Новосибирский государственный университет, 2011. Ч. I. 131 стр.

Представлен курс лекций по математическим методам физики для студентов 3-го курса физического факультетов НГУ. Авторы читают лекции по данному курсу с 1985 года. Курс охватывает следующие разделы: уравнения в частных производных первого порядка, системы линейных уравнений, линейные уравнения второго порядка, автомодельные решения и бегущие волны, разделение переменных в ортогональных координатах и метод Фурье, специальные функции: полиномы Лежандра, Эрмита и Лагерра, функции Бесселя и Неймана, гипергеометрические функции Гаусса и Куммера, методы перевала и усреднения. В приложение вынесены основные формулы по специальным функциям.

Рецензент
член-корр. РАН И. Б. Хриплович

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

ISBN

© Новосибирский государственный университет, 2011
© Кузнецов Е. А., Шапиро Д. А., 2011

Оглавление

1. Уравнения в частных производных	6
1.1. Основные понятия	6
1.2. Примеры из физики	7
Колебания струны	7
Гидродинамика идеальной жидкости	8
Уравнения Максвелла	10
Уравнение Шредингера	10
Уравнение теплопроводности	11
1.3. Методы решения	12
1.4. Рекомендуемая литература	13
2. Уравнения первого порядка	15
2.1. Линейные уравнения	15
Однородное уравнение	15
Задача Коши	17
Неоднородное уравнение	19
2.2. Квазилинейные уравнения	20
Уравнение Хопфа	22
2.3. Нелинейные уравнения	24
Уравнение Гамильтона — Якоби	25
3. Системы линейных уравнений	27
3.1. Характеристики	27
3.2. Канонический вид гиперболической системы	29
3.3. Формула Даламбера	30
3.4. Инварианты Римана	31
Дополнение: Неоднородное волновое уравнение	33
4. Метод годографа	35
4.1. Преобразование годографа	35
4.2. Потенциал χ	36
4.3. Политропный газ	37

5. Канонический вид уравнений 2-го порядка	39
5.1. Случай двух переменных	39
5.2. Случай многих переменных	42
6. Автомодельность и бегущие волны	46
6.1. Понятие автомодельности	46
6.2. Примеры	47
Линейное уравнение теплопроводности	49
Нелинейное уравнение теплопроводности	51
Уравнение Бюргерса	52
Уравнение Кортевега — де Вриза	53
7. Разделение переменных	55
7.1. Полное разделение переменных	55
7.2. Метод Фурье	59
8. Разделение переменных в цилиндрических координатах	63
8.1. Задача о круглой мембране	63
8.2. Функции Бесселя	65
Разложение в ряд	65
Рекуррентное соотношение	66
Интегральные представления и производящие функции	66
Соотношение ортогональности	69
9. Разделение переменных в сферических координатах	71
9.1. Частица в центральном поле	71
9.2. Угловое уравнение. Функции Лежандра	72
9.3. Радиальное уравнение. Сферические функции Бесселя	76
10. Аналитическая теория дифференциальных уравнений	78
10.1. Канонический вид	78
10.2. Разложение вблизи обыкновенной точки	79
10.3. Разложение вблизи особой точки	81
10.4. Критерий Фукса	83
10.5. Уравнения класса Фукса	84
11. Гипергеометрические функции	86
11.1. Функция Гаусса	86
11.2. Вырожденная гипергеометрическая функция	87
11.3. Примеры	88
Функции Лежандра	88
Функции Бесселя	88
Полиномы Лагерра	89
Функции параболического цилиндра. Полиномы Эрмита	90

Дополнение: Свойства полиномов Лагерра	91
12. Асимптотические методы	93
12.1. Асимптотическое разложение	93
12.2. Метод Лапласа	94
12.3. Метод стационарной фазы	97
13. Метод перевала	100
13.1. Седловая точка	100
13.2. Топологический и аналитический этапы	101
13.3. Примеры	103
14. Метод усреднения	109
14.1. Усредненное уравнение. Преобразование Боголюбова — Крылова	110
14.2. Примеры	114
Приложение: Сводка формул по специальным функциям	118
1. Гамма-функция Эйлера	118
2. Гипергеометрические функции	118
Функция Гаусса ${}_2F_1$	118
Функция Куммера ${}_1F_1$	119
3. Цилиндрические функции	119
Функции Бесселя J_ν и Неймана Y_ν	119
Функции Бесселя целого порядка J_n	121
Модифицированная функция Бесселя I_ν и функция Макдональда K_ν	121
Функции Ганкеля $H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$	122
4. Ортогональные полиномы	123
Полиномы Лежандра P_l и присоединенные функции Лежандра P_l^m	123
Сферические гармоники Y_{lm}	124
Полиномы Эрмита H_n	124
Полиномы Лагерра L_n^ν	125
Список литературы	127
Предметный указатель	131

ЛЕКЦИЯ 1.

Уравнения в частных производных

1.1. Основные понятия

Определение 1.1. Уравнением в частных производных называется уравнение

$$\mathcal{F} \left(x; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) = 0, \quad (1.1)$$

где \mathcal{F} — произвольная функция многих переменных, которую мы будем полагать гладкой, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — действительный вектор из n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n , $u = u(x)$ — неизвестная функция¹, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.

Мы не будем обсуждать степень гладкости функции \mathcal{F} , полагая ее дифференцируемой столько раз, сколько нам потребуется. *Порядком* уравнения называется порядок m старшей производной, входящей в (1.1).

Если функция \mathcal{F} является линейной относительно u и ее производных, то такое уравнение называется *линейным*. Линейное уравнение можно записать в виде

$$\hat{L}u = b(x), \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L} = a_0(x) + \sum_{i=1}^n a_1^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2}} a_2^{k_1 k_2 \dots k_n}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \dots \\ + \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = m}} a_m^{k_1 k_2 \dots k_n}(x) \frac{\partial^m}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} - \end{aligned}$$

линейный оператор. Если $b \neq 0$, то решение уравнения (1.2) может быть записано с помощью обратного оператора \hat{L}^{-1} :

$$u = u_0 + \hat{L}^{-1}b,$$

¹В примерах для координат мы будем использовать обозначения x, y, z вместо x_1, x_2, x_3 .

где u_0 подчиняется линейному *однородному* уравнению $\hat{L}u_0 = 0$. Решение однородного уравнения в силу линейности оператора, $\hat{L}(u_1 + u_2) = \hat{L}u_1 + \hat{L}u_2$, представимо в виде суммы решений. Поскольку оператор \hat{L} является дифференциальным, то обратный к нему оператор \hat{L}^{-1} уже является интегральным.

В большинстве стандартных курсов по уравнениям математической физики обычно ограничиваются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. В данном курсе помимо линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков мы рассмотрим также нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Гамильтона — Якоби, уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега — де Вриза (КДВ) и др.

Общим решением называется решение, зависящее от произвольной функции. Здесь проявляется отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых общее решение зависит от произвольных постоянных. Количество произвольных функций в наиболее общем решении совпадает с порядком уравнения m , а количество переменных каждой функции равно $n - 1$. Фиксация произвольных функций (возможно и неполная) происходит за счет граничных условий. Уравнение вместе с граничными условиями называется *задачей*.

Если одна из координат, скажем x_1 , имеет смысл времени t , то уравнение (1.1) называют эволюционным. Для того чтобы найти решение эволюционных уравнений, требуется помимо граничных условий задавать также начальные условия (такую задачу называют задачей Коши).

Приведем несколько примеров уравнений в частных производных.

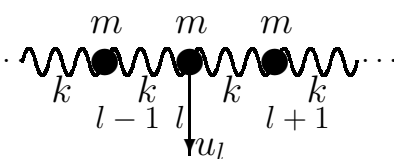
Пример 1.1. Простейшее линейное однородное уравнение первого порядка в плоскости (x, y)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

имеет общее решение $u(x, y) = f(y)$, где f — произвольная функция. Обыкновенное уравнение имело бы общее решение, равное константе. В данном примере $m = 1, n = 2$, поэтому наиболее общее решение дается одной функцией одной переменной. Если к уравнению добавлено начальное условие $u(0, y) = \sin y$, то функцию $f(y) = \sin y$ легко найти, и мы получим частное решение.

1.2. Примеры из физики

Колебания струны



Цепочка с одинаковыми грузиками массы m , соединенными одинаковыми пружинками жесткости k , описывается в классической механике системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [26, § 7]). Пусть u_l — малое вертикальное отклонение l -го грузика от положения равновесия.

ния равновесия. Тогда уравнение движения l -го грузика записывается в виде

$$m \frac{d^2}{dt^2} u_l = -k u_{l-1} + 2k u_l - k u_{l+1}. \quad (1.3)$$

Возвращающую силу удобно представить в виде $F_l = -T u_l / a$, где введены a — расстояние между соседними грузиками и натяжение T (откуда жесткость равна $k = T/a$). Чтобы перейти к пределу непрерывной однородной струны, надо вместо массы поставить $m \rightarrow \rho a$, где ρ — линейная плотность. Если вместо номера грузика ввести его координату вдоль цепочки $x = la$, то тогда, разлагая смещение $u_{l\pm 1} \equiv u(x \pm a)$ в ряд Тейлора вблизи l -го грузика и устремляя затем $a \rightarrow 0$ при фиксированных T, ρ , найдем в пределе

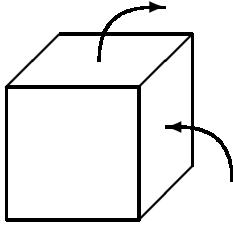
$$u_{l\pm 1} = u_l \pm \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} + \dots$$

Подстановка этого разложения в уравнения движения (1.3) дает

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.4)$$

где $c = \sqrt{T/\rho}$ — скорость распространения возмущения вдоль струны. Полученное линейное уравнение второго порядка называется *одномерным волновым* (или *телеграфным*) уравнением.

Гидродинамика идеальной жидкости



Для описания движения идеальной жидкости («идеальной» — значит без затухания) введем плотность жидкости $\rho(\mathbf{r}, t)$ и ее скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ как функцию точки наблюдения \mathbf{r} и времени t (координаты Эйлера). Рассмотрим некоторый произвольный объем V внутри жидкости. Очевидно, что полная масса внутри этого объема может изменяться только за счет потоков извне. Плотность потока равна $\rho \mathbf{v}$, поэтому изменение массы в данном объеме равно потоку через его поверхность:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{S}.$$

Здесь \mathbf{S} — элемент поверхности, ориентированный вдоль внешней нормали. Используя теорему Гаусса, это равенство переписывается в виде

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0.$$

Данное соотношение справедливо для произвольного объема V , поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.5)$$

Это есть *уравнение непрерывности*. Аналогично можно рассмотреть поток импульса, втекающий в тот же объем с учетом внешнего давления p в пренебрежении вязкостью, и вывести *уравнение Эйлера* [30, § 2]

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p. \quad (1.6)$$

В левой части этого уравнения член в скобках представляет собой ускорение жидкой частицы, записанное в переменных Эйлера, в чем можно убедиться непосредственно, производя дифференцирование в выражении для ускорения, помня, что $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \nabla) \mathbf{v}.$$

Таким образом, слева в (1.6) стоит произведение плотности — массы на единицу объема и ускорения. Левая часть в виде $-\nabla p$ есть сила со стороны давления. Поэтому уравнение Эйлера суть уравнение Ньютона. При наличии других сил в правой части (1.6) дополнительно дописываются соответствующие слагаемые, например, за счет силы тяжести имеем $\rho \mathbf{g}$, где \mathbf{g} — ускорение свободного падения.

В уравнении Эйлера (1.6) давление p считается функцией плотности ρ и энтропии на единицу массы S : $p = p(\rho, S)$ (*уравнение состояния*). Отсутствие диссипации означает, что S сохраняется вместе с движущимся элементом жидкости:

$$\frac{dS}{dt} \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) S = 0. \quad (1.7)$$

Получилась система нелинейных уравнений в частных производных, на этот раз первого порядка. Когда движение идеальной жидкости изэнтропическое ($S = \text{const}$), то давление можно рассматривать как функцию только плотности и соответственно правую часть уравнения (1.6) можно записать как $-\rho \nabla w$, где w — тепловая функция (энтальпия) единицы массы жидкости [30].

Система уравнений гидродинамики имеет стационарное решение $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $p = p_0 = \text{const}$, $\mathbf{v} = 0$. Предполагая течение жидкости изэнтропическим, представим решение в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = p_0 + p_1(\mathbf{r}, t).$$

Будем считать скорость и поправки к плотности и давлению малыми величинами. Тогда в первом порядке малости получаются линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0}. \quad (1.8)$$

Если теперь продифференцировать первое из уравнений по времени, переставив затем порядок дифференцирования во втором слагаемом, то получится одно линейное уравнение второго порядка — уравнение акустики:

$$\square \rho_1 = 0, \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (1.9)$$

Относительно пространственных координат это трехмерное волновое уравнение, в котором для краткости используют обозначение \square — оператор *Даламбера*. Скорость распространения возмущений c определяется из уравнения состояния $c^2 = \partial p / \partial \rho$.

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в пустоте [34]

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (1.11)$$

представляют собой систему линейных уравнений первого порядка для 6 компонент векторов электрического и магнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Чтобы свести (1.10) и (1.11) к уравнениям второго порядка, введем скалярный и векторный потенциалы $\phi(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, через которые \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются стандартным образом [34, § 18]:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.12)$$

Подстановка этих соотношений в уравнения (1.10) превращают их в тождества.

Как известно, в выборе потенциалов имеется свобода, связанная с калибровочной инвариантностью [34, § 18]. Для $\phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ выберем лоренцеву калибровку:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Легко проверяется, что подстановка (1.12) в (1.11) с учетом калибровки приводит для скалярного и векторного потенциалов к четырем волновым уравнениям (на ϕ и три компонента \mathbf{A}):

$$\square\phi = 0, \quad \square\mathbf{A} = 0.$$

В присутствии токов плотности \mathbf{j} или зарядов с плотностью ρ эти уравнения становятся *неоднородными*:

$$\square\phi = 4\pi\rho, \quad \square\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Уравнение Шредингера

В квантовой механике состояние частицы описывается волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, квадрат модуля которой имеет смысл плотности вероятности найти частицу в данной точке \mathbf{r} в момент времени t [31]. Волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi,$$

где \hbar — постоянная Планка. Оператор Гамильтона \hat{H} для движения частицы в поле $U(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla.$$

Данное уравнение является уравнением в частных производных второго порядка по координатам и первого порядка по времени. Оно должно быть дополнено граничными и начальными условиями. В отличие от волнового уравнения, чтобы выделить частное решение из общего, надо задавать при $t = 0$ одно начальное условие, а не два.

Для стационарных состояний $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\mathbf{r})$, имеющих определенную энергию E , временная зависимость исключается и амплитуда $\psi(\mathbf{r})$ определяется из решения стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}\psi = E\psi. \quad (1.13)$$

В этом уравнении E представляет собой собственное значение (спектр) оператора \hat{H} , а $\psi(\mathbf{r})$ есть его собственная функция. Определение E и $\psi(\mathbf{r})$ называется *спектральной задачей*.

Уравнение теплопроводности

Плотность внутренней энергии сплошной среды $c_p T$ (c_p — теплоемкость при постоянном давлении, T — температура) проинтегрируем по объему V . Получится полная энергия, которая при отсутствии химических реакций с выделением или поглощением тепла может меняться только за счет потока тепла через поверхность

$$\frac{\partial}{\partial t} \int c_p T dV = - \oint \mathbf{Q} d\mathbf{S}.$$

Плотность потока тепла, если градиенты температуры малы, дается законом Фурье $\mathbf{Q} = -\kappa\nabla T$. Преобразуя уравнение к дифференциальному и считая теплоемкость c_p и теплопроводность κ не зависящими ни от температуры, ни от координат и времени, получим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad (1.14)$$

где $\chi = \kappa/c_p$ — коэффициент температуропроводности.

Так же, как и в предыдущем примере, полученное уравнение является уравнением второго порядка по пространственным переменным и первого порядка по времени. Такое уравнение называют уравнением *параболического* типа, в отличие от волнового, которое относится к *гиперболическому* типу. Более точные определения типов линейных уравнений второго порядка мы дадим позже, а здесь приведем пример последнего типа — *эллиптического*. К эллиптическому типу относится уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, которое получается из (1.14) в стационарном случае, когда температура не зависит от времени. Уравнение Лапласа для скалярного потенциала получается

Таблица 1.1. Основные методы решения уравнений в частных производных

№	Метод	Применение
1	Метод характеристик	Уравнения первого порядка
3	Автомодельность	Симметрия
2	Разделение переменных	Симметрия
4	Метод Фурье, интегральные преобразования	Линейное уравнение, постоянные коэффициенты
5	Функции Грина	Линейные неоднородные уравнения
6	Численные методы	Низкая размерность

в стационарном случае также из уравнений Максвелла (электростатика). Уравнения разных типов требуют разных постановок задачи. Ниже мы рассмотрим методы решения уравнений и будем обсуждать постановки задач по мере изучения разных типов уравнений.

1.3. Методы решения

В таблице 1.1 перечислены основные методы решения уравнений в частных производных. Аналитические методы обычно основаны на сведении уравнения в частных производных к обыкновенному или системе обыкновенных уравнений. Хотя последние имеют явное решение достаточно редко, но справедливо считаются более простыми. Сама возможность свести к обыкновенным уравнениям встречается очень редко. Счастливым исключением являются уравнения первого порядка, которые решаются (в том смысле, что сводятся к обыкновенным) методом характеристик. Методом характеристик решаются иногда и линейные уравнения второго порядка гиперболического типа и некоторые системы. Метод характеристик рассмотрен в лекциях 2–5.

Для применимости автомодельных подстановок требуется симметрия уравнения относительно масштабных преобразований независимых переменных (см. лекцию 6). Для того, чтобы в уравнении разделялись переменные, необходима высокая геометрическая симметрия самого уравнения и граничных условий. Разделению переменных посвящена лекция 7.

Для линейных уравнений имеются и другие аналитические методы. Прежде всего, это метод Фурье, рассмотренный в лекции 7 с многими примерами (лекции 8 и 9), а также метод интегральных преобразований, который применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Фактически возможность использования метода интегральных преобразований также связана с симметрией уравнений, в данном случае с трансляционной инвариантностью. Иногда уравнение удается решить, если коэффициенты не постоянны, а линейны по пространственным переменным. Тогда интегральное преобразование понижает порядок уравнения. Линейные неоднородные уравнения часто удается решить с помощью метода функций Грина.

Если симметрии нет, применяются численные методы. Для численного решения

не слишком важно: линейное уравнение или нелинейное, какого оно порядка, есть ли симметрия. На первый план выходит вопрос о размерности, не слишком существенный для аналитических методов. Если для решения с необходимой точностью на компьютере нам нужно 10^4 точек вдоль каждой оси, то двумерная задача требует 10^8 точек, трехмерная — 10^{12} , а четырехмерную невозможно решить даже на самом современном суперкомпьютере. Численные методы разнообразны и хорошо развиты. Они не рассматриваются в данном курсе, но их знание — необходимый элемент современного образования. Наилучшие результаты в науке и технике получаются при удачном сочетании применения аналитических и численных методов.

После разделения переменных в линейных уравнениях математической физики получаются обыкновенные дифференциальные уравнения того же порядка. Коэффициенты последних зависят от независимой переменной и их решение часто сводится не к элементарным, а к специальным функциям. Лекции 8, 9 посвящены обыкновенным уравнениям, возникающим при разделении переменных в цилиндрических либо сферических координатах. Там же выводятся простейшие свойства цилиндрических и сферических функций: разложение в ряды, рекуррентные соотношения, интегральные представления, соотношения ортогональности. Лекции 10, 11 посвящены теории более общих специальных функций — гипергеометрических, которые в частных случаях сводятся к цилиндрическим, сферическим и многим другим специальным и элементарным функциям. Излагать теорию гипергеометрических рядов можно по-разному, мы выбрали подход Фукса на основе аналитической теории обыкновенных уравнений.

Последний раздел — простейшие асимптотические методы — состоит из 12-й лекции, где изложены простейшие методы оценки интегралов (оценка интеграла типа Лапласа и метод стационарной фазы), 13-й лекции, в которой рассмотрен более сложный и общий метод перевала, и 14-й лекции, посвященной методу усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.4. Рекомендуемая литература

Главная цель обучения студентов-физиков математическим методам — научить их решать разнообразные задачи. Задачи по уравнениям в частных производных, многие из которых снабжены подробными решениями, можно найти в сборнике [24]. Его содержание примерно соответствует настоящим лекциям. Для более детального усвоения материала, в том числе разделов, не включенных в нашу программу, можно дополнительно решать задачи из других сборников, например из [11, 13, 15, 16, 35, 51]. Решения некоторых линейных уравнений в частных производных можно найти в справочниках [7, 21, 48]. Однако без знания основ теории невозможно читать физическую литературу и даже в справочнике бывает трудно разобраться.

Подробное теории уравнений в частных производных можно найти во многих книгах, среди которых учебник Годунова [17], выделяющийся строгостью и доступностью изложения. Наиболее полная теория уравнений в частных производных представлена в классических монографиях [28, 29, 40, 55]. Учебники [12, 39, 45, 49, 52–54] предназна-

чены для студентов-математиков, поэтому содержат более общие утверждения. В качестве введения в предмет можно также рекомендовать зарубежные университетские учебники [6, 36, 61] для физиков, в которых изложение не такое общее и начинается с более простых вопросов, чем в данном курсе: с правил вычисления производных и определителей. Мы предполагаем, что студент уже знаком с курсами линейной алгебры, математического анализа, теории функций комплексной переменной, обыкновенными дифференциальными уравнениями и основами функционального анализа. Можно порекомендовать книгу [41], в основном соответствующую программе нашего курса, где приведено много простых разнообразных примеров. Дополнительные ссылки на литературу по отдельным разделам приведены в соответствующих лекциях.

ЛЕКЦИЯ 2.

Уравнения первого порядка

2.1. Линейные уравнения

Однородное уравнение

Уравнение вида

$$a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

где $a(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -мерные векторы, является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка, если компоненты вектора коэффициентов a не зависят от неизвестной функции u .

Определение 2.1. Уравнением характеристик называется система обыкновенных уравнений

$$\dot{x} = a(x), \quad (2.2)$$

где точкой обозначена производная по параметру τ , который для динамической системы (2.2) играет роль времени.

Система (2.2) содержит n уравнений, поэтому она имеет n первых интегралов (функций от x и τ , которые сохраняются при изменении τ). Все множество первых интегралов называют *полным интегралом*. Поскольку данная система является автономной (т. е. ее правая часть не содержит явной зависимости от τ), то она имеет $n - 1$ первых интегралов, не зависящих явно от параметра τ :

$$F_1(x) = \text{const}, \dots, F_{n-1}(x) = \text{const}.$$

Фиксация функций $F_i = C_i$ (где C_i — константы) задает кривую в пространстве \mathbb{R}^n . Эти кривые называются *характеристиками*. Очевидно, что характеристики представляют собой траектории для динамической системы (2.2).

Через первые интегралы F_i выражается *общее решение* или общий интеграл уравнения (2.1):

$$u(x) = g(F_1(x), \dots, F_{n-1}(x)), \quad (2.3)$$

где g — произвольная гладкая функция своих аргументов. Важно при этом, что решение (2.3) сохраняется несмотря на изменение параметра τ вдоль характеристики. Это означает, в частности, что определение характеристики не зависит от выбора самого параметра — здесь имеется определенная свобода, о чем мы ещё будем говорить.

Убедиться в том, что данная формула есть решение, можно подставив функцию (2.3) в уравнение (2.1), затем заменить $a(x)$ согласно (2.2) и воспользоваться постоянством первых интегралов F_i вдоль характеристик:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \dot{x}_i \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{dF_j}{d\tau} = 0.$$

Формулы (2.3) имеют наглядный геометрический смысл, что отражено, например, в книгах Арнольда [2, 5]. Уравнение (2.1) означает, что производная функции $u(x)$ вдоль направления вектора a равна нулю. Следовательно, решение уравнения (2.1) постоянно вдоль «силовых линий» этого поля — характеристик. Чтобы решить уравнение (2.1) методом характеристик, надо восстановить интегральные кривые по полю направлений. В каждой точке имеется одно направление вдоль характеристик (координата τ , параметризующая данную кривую) и $n - 1$ направление в ортогональном дополнении (F_1, \dots, F_{n-1}) . Уравнение сводится к виду

$$\frac{du}{d\tau} = 0, \quad (2.4)$$

а решение дается формулой (2.3).

Пример 2.1. Рассмотрим простейший пример — уравнение $u_t + cu_x = 0$, где t — время, x — координата, а $c = \text{const}$, имеющая размерность скорости. Уравнения характеристик

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = c$$

имеют решение $t = \tau + C_1$, $x = ct + C_2$. Отсюда видно, что время t совпадает с τ точно до сдвига C_1 (общее свойство автономной системы (2.2)). Эта константа не имеет никакого отношения к интегралам F , без ограничения общности ее можно считать равной нулю, так что $t = \tau$. Константа C_2 представляет собой искомый интеграл. Очевидно, что C_2 есть значение x при $t = 0$, которое будем обозначать через x_0 , т. е. $x_0 = x - ct$. Соответственно общее решение уравнения имеет вид $u = u_0(x_0) \equiv u_0(x - ct)$, где $u_0(x)$ есть значение u при $t = 0$. Данное решение описывает распространение волны вправо со скоростью c без изменения своего профиля. По этой причине данное уравнение также называют волновым уравнением.

Общий интеграл уравнений характеристик

$$x_0 = x - ct, \quad \tau = t$$

можно (и нужно!) понимать как замену переменных от x, t к x_0, τ . В результате такой замены переменных частные производные по x, t выражаются через производные по

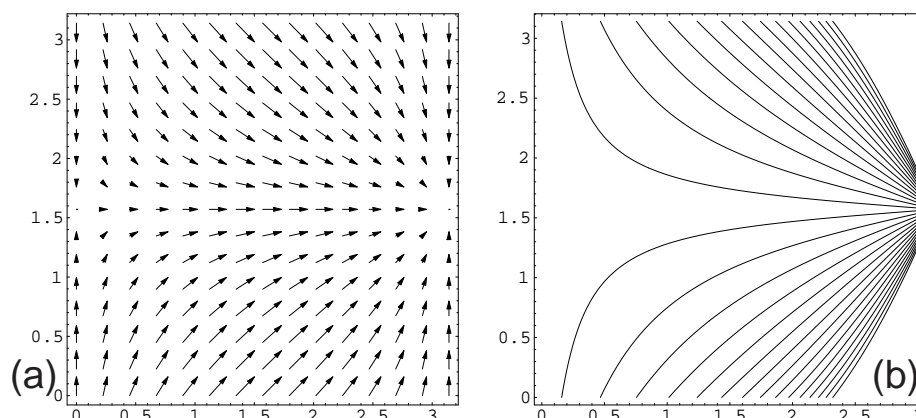


Рис. 2.1. Поле направлений (а) и интегральные кривые (b) для примера 2.2

x_0, τ с помощью формул

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - c \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

Подставляя эти формулы в уравнение $u_t + cu_x = 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0,$$

совпадающее с уравнением на характеристике (2.4). Здесь стоит частная производная при постоянном значении x_0 . Каждое значение x_0 задает свою характеристику. Можно сказать, что x_0 «нумерует» каждую характеристику.

Пример 2.2. Вектор $a = (\sin x, \cos y)$ уравнения $\sin x \cdot u_x + \cos y \cdot u_y = 0$ задает векторное поле в плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, показанное на рис. 2.1, а. Уравнения характеристик $\dot{x} = \sin x, \dot{y} = \cos y$ можно проинтегрировать. Однако удобнее сразу найти не зависящий от параметра первый интеграл, разделив для этого одно уравнение на другое. В результате разделения переменных и интегрирования найдем: $F(x, y) = \operatorname{tg}(x/2)[1 - \operatorname{tg}(y/2)]/[1 + \operatorname{tg}(y/2)]$. Тогда общее решение дается произвольной функцией g одной переменной $u(x, y) = g(F)$, которая постоянна вдоль характеристик — интегральных кривых (рис. 2.1, б).

Задача Коши

Чтобы из общего решения выбрать частное, надо добавить к уравнению (2.1) *начальное условие*, которое задается на *начальной гиперповерхности* S :

$$u|_S = f(x). \quad (2.5)$$

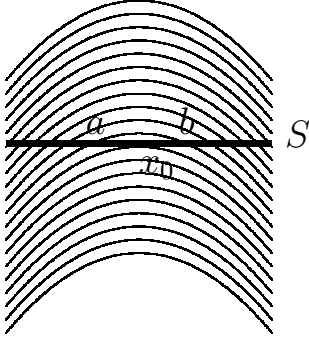
Гиперповерхность — это многообразие, размерность которого на единицу меньше, чем у всего пространства ($\dim S = n - 1$). Мы будем вместо гиперповерхности говорить

просто «поверхность». Уравнение (2.1) вместе с начальным условием (2.5) составляют задачу Коши.

Если в общее решение (2.3) подставить начальное условие (2.5), получится функциональное уравнение, которое дает частное решение. Очень трудно, а в общем случае и невозможно сформулировать условие, при котором это функциональное уравнение глобально разрешимо во всем пространстве. Однако если ограничиться локальной задачей, т. е. о продолжении решения в малую окрестность некоторой точки x_0 начальной гиперповерхности, то в этом случае можно сформулировать сравнительно простое правило.

Определение 2.2. Говорят, что кривая *трансверсальна* поверхности, если она пересекает поверхность под ненулевым углом.

Теорема 2.1. Решение задачи Коши (2.1), (2.5) в окрестности точки $x_0 \in S$ существует и единственно, если проходящая через точку x_0 характеристика трансверсальна поверхности S .



За доказательством теоремы мы отсылаем к математической литературе, например, книге [2]. Идея доказательства состоит в том, чтобы рассматривать не одну характеристику, а все семейство характеристик. Пусть характеристика в точке x_0 касается начальной поверхности S . Тогда соседняя характеристика пересекает S в двух точках a и b . Значит возникает конфликт между значением, заданным в точке b , и другим значением, которое приносит характеристика из точки a . Такой конфликт делает задачу, вообще говоря, неразрешимой.

Для эволюционных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla)u = 0, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — заданная n -мерная вектор-функция, зависящая от n компонент вектора \mathbf{x} и времени t ; естественной постановкой задачи Коши является задание $u = u_0(x)$ при $t = 0$. Уравнение (2.6) может быть получено из (2.1), если какой-либо компонент вектора a , скажем a_1 , отличен от нуля в области, где ищется решение. Тогда, поделив уравнение (2.1) на a_1 , мы приходим к уравнению (2.6), если координату x_1 отождествить t .

Для (2.1) уравнения характеристик записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \text{при } \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0. \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения при известной функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ задает отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ — замену переменных, в результате применения которой к уравнению (2.6) последнее записывается в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_0} = 0.$$

При этом вектор x_0 задает каждую характеристику (2.6). Очевидно, что n компонент вектора x_0 являются теми самыми интегралами F_l ($l = 1, \dots, n$) для уравнений характеристик (2.7).

Следует отметить, что для данной задачи Коши уравнения (2.6) условие трансверсальности выполнено, если при $t = 0$ вектор «скорости» \mathbf{v} ни в одной точке \mathbf{x} не обращается в нуль.

В гидродинамике переменные \mathbf{x} и t называют эйлеровыми, а \mathbf{x}_0 и t – лагранжевыми переменными. При эйлеровом описании все гидродинамические характеристики (плотность, скорость, энтропия) в заданный момент времени t являются функциями координат \mathbf{x} . При лагранжевом описании следят за (лагранжевым) движением каждой жидкой частицы, нумеруемой своим маркером \mathbf{x}_0 , в результате чего находится отображение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, зная которое можно определить все гидродинамические характеристики течения. При переходе от лагранжевого описания к эйлеровому временная производная удлиняется:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla).$$

Здесь производная d/dt берется при фиксированном \mathbf{x}_0 . Эту производную часто называют материальной производной.

Упражнение 2.1. Решить уравнение примера 2.2 с начальным условием $u(\pi/2, y) = y$. Почему не удастся решить задачу Коши $u(0, y) = y$?

Неоднородное уравнение

Неоднородное уравнение

$$a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x) \tag{2.8}$$

отличается от однородного (2.1) функцией $b(x)$ в правой части. Уравнение характеристик (2.2),

$$\dot{x} = a(x),$$

дополняется уравнением *на характеристике* для функции u :

$$\dot{u} = b(x). \tag{2.9}$$

Теперь это система $n + 1$ обыкновенных уравнений в $n + 1$ -мерном *расширенном* пространстве. К координатам x_1, x_2, \dots, x_n добавилась координата u . Если мы решим систему (2.2), то решение $x(\tau)$ можно подставить в уравнение (2.9) и проинтегрировать вдоль характеристики. Появится еще одна константа интегрирования $u(\tau) = \int b(x(\tau)) d\tau + \text{const}$. Если эту последнюю константу записать как произвольную функцию первых интегралов F_i , а параметр τ выразить через переменные x , то получится общее решение уравнения (2.8) в виде суммы общего решения (2.3) однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$u(x) = g(F_1, \dots, F_{n-1}) + \int_{\tau_0}^{\tau} b(x(\tau')) d\tau'.$$

Пример 2.3. Чтобы решить неоднородное уравнение

$$\frac{1}{x}u_x - yu_y = y,$$

выпишем уравнения характеристик $\dot{x} = x^{-1}, \dot{y} = -y, \dot{u} = y$. Решение системы трех уравнений содержит 3 произвольные константы C, C_1, C_2 :

$$\frac{x^2}{2} = \tau + C_1, \quad y = C_2 e^{-\tau}, \quad u = -C_2 e^{-\tau} + C.$$

Не зависящий от τ первый интеграл есть $F = y \exp(x^2/2) = \text{const}$, тогда общее решение дается произвольной функциональной связью константы C и интеграла F :

$$u(x, y) = -y + g\left(ye^{x^2/2}\right).$$

Упражнение 2.2. Нарисуйте характеристики уравнения из примера 2.3 и решите задачу Коши $u(0, y) = y^2$. Что мешает поставить задачу Коши при $y = 0$?

Решение неоднородного уравнения не равно константе вдоль характеристики, но необходимость трансверсальности характеристики к начальной гиперповерхности для разрешимости задачи Коши остается в силе. Иногда этим требованием пользуются в качестве определения характеристики. Можно называть характеристикой кривую, на которой нельзя поставить задачу Коши. Другими словами, решение, заданное вдоль характеристики, нельзя продолжить даже в малую окрестность начальной точки. Такое определение, как будет показано ниже, годится не только для уравнений первого порядка, но и в общем случае.

Другое важное и общее свойство характеристики — инвариантность относительно преобразований пространства \mathbb{R}^n . После такого преобразования уравнение первого порядка примет вид $a(\partial y/\partial x)u_y = b$, тогда уравнение характеристик будет $\dot{y} = a(\partial y/\partial x)$. С другой стороны, можно преобразовать к новым переменным само уравнение характеристики: $(\partial x/\partial y)\dot{y} = a$. Уравнения получатся одинаковыми, если преобразование невырожденное, т. е. его якобиан $J = \det(\partial y_i/\partial x_j)$ не обращается в нуль или бесконечность.

2.2. Квазилинейные уравнения

Квазилинейное уравнение

$$a(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x, u) \tag{2.10}$$

отличается от линейного неоднородного тем, что его коэффициенты могут зависеть от u . Термин “квазилинейное” означает, что уравнение по виду похоже на линейное, хотя и является нелинейным (линейная комбинация решений не удовлетворяет уравнению).

Уравнение характеристик (2.2),

$$\dot{x} = a(x),$$

дополняется уравнением на характеристике для функции u :

$$\dot{u} = b(x). \quad (2.11)$$

Для квазилинейного уравнения (2.10) уравнения характеристики и уравнение на характеристике имеют тот же вид, что и для линейных неоднородных уравнений:

$$\dot{x} = a(x, u), \quad \dot{u} = b(x, u). \quad (2.12)$$

Отличие от (2.9) состоит в том, что теперь u выступает в качестве новой независимой и надо рассматривать всю систему уравнений в расширенном пространстве (x, u) . Важно, что система $n + 1$ уравнений (2.12) остается автономной и по этой причине имеет n первых интегралов, не зависящих от параметра τ :

$$F_1(x, u) = \text{const}, \dots, F_n(x, u) = \text{const}.$$

Каждый интеграл задает одно условие, а значит при фиксированном значении константы определяет поверхность в пространстве \mathbb{R}^{n+1} . Общее решение уравнения (2.10) дается произвольной функцией n переменных:

$$G(F_1(x, u), \dots, F_n(x, u)) = 0. \quad (2.13)$$

Как правило, решение квазилинейного уравнения получается в неявном виде, т. е. последнее соотношение не удается разрешить относительно u .

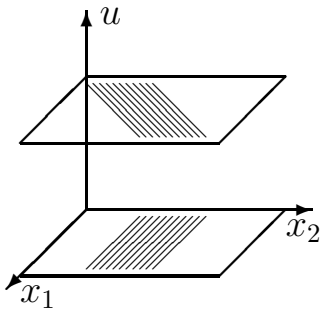
Покажем теперь, что (2.13) действительно является решением квазилинейного уравнения (2.10). Для этого продифференцируем (2.13) по x_i и найдем

$$\frac{\partial G}{\partial F_k} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (2.14)$$

где по повторяющемуся индексу здесь и далее подразумевается суммирование, в данном случае от $k = 1$ до $k = n$. Из (2.14) мы найдем частные производные u_{x_i} и подставим их в уравнение (2.10). Представив числитель в виде разности $\dot{x}_i \partial F_k / \partial x_i = dF_k / d\tau - \dot{u} \partial F_k / \partial u$, получим:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{x}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\partial G}{\partial F_k} \cdot \frac{\frac{dF_k}{d\tau} - b \frac{\partial F_k}{\partial u}}{\frac{\partial G}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial u}} = b,$$

так как полная производная $dF_k / d\tau$ равна нулю по определению первого интеграла.



Уравнение (2.12) является самым общим уравнением характеристик. В простейшем случае линейного однородного уравнения дополнительное уравнение характеристик $\dot{u} = 0$ имеет простое решение $u = \text{const}$ и описывает семейство плоскостей, ортогональных оси u расширенного пространства. В каждой плоскости характеристики — решения уравнений $\dot{x} = a$ — выглядят одинаково, поэтому мы рассматривали их только в одной плоскости $u = 0$. Характеристики квазилинейного уравнения могут не быть плоскими кривыми. В частном случае однородного квазилинейного уравнения характеристики плоские, но имеют различный наклон в разных “горизонтальных” плоскостях. Рассмотрим одно важное квазилинейное уравнение.

Уравнение Хопфа

Квазилинейное уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

описывает, например, одномерный газ невзаимодействующих частиц (пыль), иными словами, это одномерное уравнение Эйлера (1.6) для газа с нулевым давлением, u есть скорость газа.

Это эволюционное квазилинейное уравнение, разрешенное относительно временной производной. Задача Коши для него ставится стандартным образом: $u|_{t=0} = u_0(x)$.

Соответствующие уравнения характеристики и на характеристике

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = u, \quad \dot{u} = 0 \quad (2.16)$$

имеют следующие первые интегралы:

$$x - ut = F_1(x, t, u) = \text{const}, \quad u = F_2(x, t, u) = \text{const}.$$

Для задачи Коши интеграл F_1 есть начальное положение жидкой частицы x_0 , F_2 выражается через $u_0(x)$:

$$x = x_0 + u_0(x_0)t, \quad u = u_0(x_0). \quad (2.17)$$

Это есть решение уравнения Хопфа, записанное в параметрическом виде. Чтобы отсюда найти явную зависимость $u = u(x, t)$, необходимо обратить отображение $x = x_0 + u_0(x_0)t$ относительно x_0 и подставить затем в выражение для u .

Решение в виде (2.17) может быть легко проанализировано. В соответствии с (2.17) каждая точка профиля скорости двигается со своей (постоянной) скоростью $u_0(x_0)$. При этом сам профиль скорости будет деформироваться, поскольку более быстрые частицы будут догонять более медленные. В результате профиль будет становиться

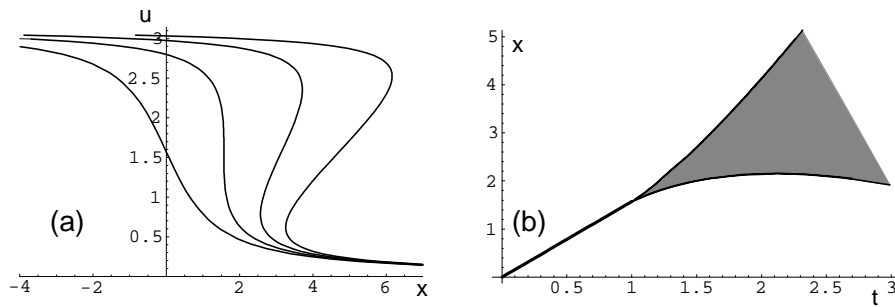


Рис. 2.2. Опрокидывание котангенсоиды (а): слева направо $t = 0, 1, 2, 3$. Расширение области неоднозначности (б)

более крутым и наконец в некоторый момент времени $t = t^*$ его градиент по x станет бесконечным. Это явление называется *опрокидыванием*, или *градиентной катастрофой*. Чтобы найти время опрокидывания t^* , необходимо, используя (2.17), вычислить производную $\partial u / \partial x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u'_0(x_0)}{J},$$

где $J = \partial x / \partial x_0 \equiv 1 + u'_0(x_0)t$ — якобиан отображения $x = x_0 + u_0(x_0)t$. Из этого выражения видно, что впервые производная становится бесконечной, когда якобиан J первый раз обращается в нуль:

$$t^* = \min \left(-\frac{1}{u'_0(x_0)} \right).$$

Этому минимуму отвечает точка x^* — точка опрокидывания. Отсюда видно также, что опрокидывание возникает для начальных профилей с отрицательной производной $u_x < 0$. При $t > t^*$ у уравнения $J = 0$ имеются два корня, соответственно производная обращается в бесконечность в двух точках. Между этими точками находится область неоднозначности. С точки зрения отображения это означает, что отображение $x = x(x_0, t)$ является однозначным — у уравнения $x = x(x_0, t)$ при всех x имеется только один (действительный) корень $x_0 = x_0(x, t)$. При $t > t^*$ у уравнения $x = x(x_0, t)$ для x из области неоднозначности существуют три корня x_0 . Изменение количества корней у отображения называется *бифуркацией*. В данном случае точка бифуркации (x^*, t^*, u^*) , где происходит переход от одного корня к трем, называется *точкой сборки*.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для $u(x, 0) = \operatorname{arctg} x$. Из графика решения, приведенного на рис. 2.2, видно, как происходит опрокидывание (рис. 2.2, а) и расширение области неоднозначности (рис. 2.2, б).

Для данной задачи знаменатель J впервые обращается в нуль при $t = t^* = 1$, происходит это при $u^* = \pi/2$ в точке $x^* = \pi/2$. При $t > t^*$ производная обращается в бесконечность в двух точках (см. верхнюю кривую на рис. 2.2, а. Между этими точками находится область неоднозначности. Закон расширения области неоднозначности в окрестности точки опрокидывания можно найти, разлагая в ряд решение уравнений $u = \operatorname{arctg} x_0, 1 + x_0^2 - t = 0$ при $x_0 \ll 1$. Получается $|x - \pi t/2| \leq (t - 1)^{3/2}, t > 1$.

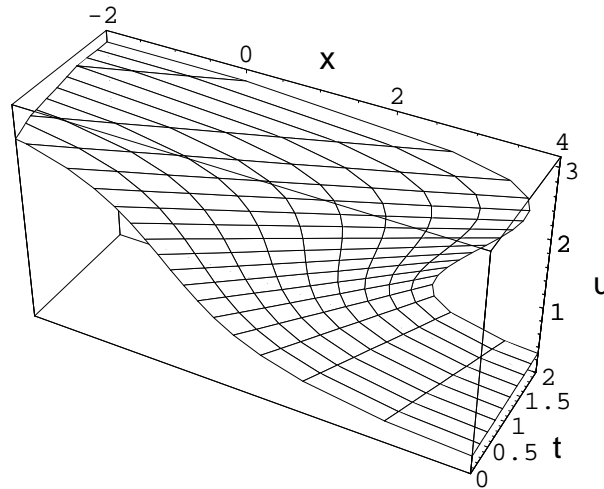


Рис. 2.3. Интегральная поверхность уравнения Хопфа

Область неоднозначности ограничена полукубической параболой. При $t < t^*$ решение однозначно, а при $t > t^*$ имеется расширяющаяся область, указанная на рис. 2.2(b) серым цветом.

С геометрической точки зрения в расширенном пространстве (x, t, u) для уравнения Хопфа имеется поле направлений $(u, 1, 0)$, которое задается уравнениями (2.16). В каждой горизонтальной плоскости векторы имеют свой наклон. Найти решение задачи Коши для уравнения Хопфа означает провести через данные векторы интегральную поверхность, которая при $t = 0$ проходит через заданную кривую $u(x, 0)$. Интегральная поверхность для рассмотренного выше примера с $u(x, 0) = \operatorname{arctg} x$ изображена на рис. 2.3. Вертикальная прямая при $t < 1$ пересекает интегральную поверхность в одной точке, а при $t > 1$ может пересекать в трех точках.

В физике опрокидывание является причиной формирования ударных волн. В реальном газе при приближении к точке опрокидывания уравнения идеальной гидродинамики теряют свою применимость: при больших градиентах становятся существенны диссипативные процессы. Подробности можно найти в книге [56].

2.3. Нелинейные уравнения

Определение 2.3. *Нелинейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$f(x, p, u) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \quad (2.18)$$

Нелинейное уравнение задает поверхность в $2n + 1$ -мерном расширенном фазовом пространстве (n координат x_i , n импульсов p_i и функция u).

Сравнивая с определением 1.1, видим, что нелинейное уравнение — это общее уравнение первого порядка. Квазилинейное уравнение (2.10) представляет собой частный

случай нелинейного (2.18) с линейной по p функцией $f = a(x, u)p - b(x, u)$.

Уравнение (2.18) также допускает применение метода характеристик. Чтобы ввести характеристики, продифференцируем (2.18) по x_k :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u} p_k = 0. \quad (2.19)$$

Здесь мы воспользовались равенством перекрестных производных во втором слагаемом и определением импульсов в третьем. В результате для компонент вектора импульса p_i получается систему квазилинейных уравнений (2.10), для каждого из которых уравнения характеристик и на характеристике известны:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial u} p_i, \quad \dot{u} = \frac{\partial f}{\partial p_i} p_i. \quad (2.20)$$

Последнее уравнение получилось из первого, с учетом определения p_i , а именно $\dot{u} = u_x \dot{x}$. Эти уравнения можно переписать в компактном векторном виде:

$$\dot{x} = f_p, \quad \dot{p} = -f_x - p f_u, \quad \dot{u} = p f_p.$$

Общее решение выписывается в виде произвольной связи $2n$ первых интегралов уравнений (2.20) $F_1(x, p, u), F_2(x, p, u), \dots, F_{2n}(x, p, u)$, не зависящих от параметра τ :

$$G(F_1, \dots, F_{2n}) = 0. \quad (2.21)$$

К равенству (2.21) надо добавить n условий $p_i = \partial u / \partial x_i$ и с их помощью исключить p_i . Для этого необходимо из уравнений (2.19) найти производные $\partial p_i / \partial x_k$ как функции x, p, u (заметим, что (2.19) линейны относительно производных p по x) и затем подставить $\partial p_i / \partial x_k$ в условие совместности:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}.$$

С помощью этих соотношений находятся p_i , после подстановки которых в (2.21) получается решение $u = u(x)$. Как правило, полученное таким образом решение записывается в неявном виде.

Уравнение Гамильтона — Якоби

Решим одномерное уравнение Гамильтона — Якоби [32] для свободной частицы с начальным условием:

$$S_t + \frac{1}{2} S_x^2 = 0, \quad S(x, 0) = x^2. \quad (2.22)$$

В общем случае (2.18) называется *уравнением Гамильтона — Якоби*, если F не зависит от u . Введем импульсы $p_0 = S_t, p_1 = S_x$. Функция здесь $F = p_0 + p_1^2/2 = 0$, откуда находятся уравнения характеристик:

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = p_1, \quad \dot{p}_0 = \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{S} = p_0 + p_1^2 \equiv p_1^2/2.$$

Исключая параметр τ и константу p_0 , найдем общее решение:

$$S - \frac{p^2}{2}t = g(x - pt), \quad p = g'(x - pt); \quad p \equiv p_1.$$

Ответ получился в параметрическом виде, из него еще надо исключить постоянную p . Функцию $g = x^2$ найдем из начальных условий, тогда

$$S - \frac{p^2 t}{2} = (x - pt)^2, \quad p = 2(x - pt) \text{ или } p = \frac{2x}{1 + 2t},$$

откуда $S = x^2/(1 + 2t)$.

Отметим, что если продифференцировать уравнение (2.22) по x , то полученное уравнение совпадает с уравнением Хопфа (2.15). Найденное нами решение $u \equiv p = 2x/(1 + 2t)$ представляет собой автомодельное решение уравнения Хопфа.

Теория нелинейных уравнений первого порядка изложена в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям, например, в книгах Арнольда [2, 46] или в его лекциях [3] по уравнениям в частных производных.

ЛЕКЦИЯ 3.

Системы линейных уравнений

В данной лекции мы рассмотрим, каким образом метод характеристик может быть распространен на системы линейных (или квазилинейных) уравнений первого порядка. Для простоты в этой лекции мы ограничимся двумерными системами, зависящими от двух переменных x и t . Особенности многомерного случая мы коротко рассмотрим позже, в лекции 5, в связи с уравнениями второго порядка.

3.1. Характеристики

Определение 3.1. Системой линейных уравнений первого порядка на действительную вектор-столбец $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)^\top$ (значок $^\top$ обозначает транспонирование), зависящую от двух переменных x и t , называют систему

$$A \frac{\partial \psi}{\partial t} + B \frac{\partial \psi}{\partial x} = b, \quad (3.1)$$

где $m \times m$ -матрицы A, B и вектор-функция $b = (b_1, \dots, b_m)^\top$ являются заданными действительными функциями от x, t . Если A, B, b зависят не только x, t , а также от ψ , то система (3.1) называется квазилинейной.

В дальнейшем матрицу A мы будем считать невырожденной, т. е. обратимой при всех значениях аргументов x, t и ψ .

Как мы видели в предыдущей лекции, характеристика для линейных (а также квазилинейных) уравнений первого порядка может быть определена как кривая, с которой невозможно продолжить решение. Для систем уравнений это есть определение характеристик. Для системы (3.1) характеристика лежит в плоскости (x, t) , решение с этой кривой не может быть продолжено.

Пусть начальное условие задано на кривой γ , тогда вдоль этой кривой

$$d\psi = \psi_t dt + \psi_x dx. \quad (3.2)$$

Это соотношение вместе с исходной системой (3.1) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений на $2m$ неизвестных производных ψ_t, ψ_x . Для этой

Таблица 3.1. Классификация систем уравнений по типам

Матрица	Собственные значения	Тип системы
приводится к диагональному виду	вещественные различные	гиперболический
не приводится к диагональному виду	вещественные вырожденные	параболический
приводится к диагональному виду	невещественные	эллиптический

системы расширенная матрица $2m \times (2m + 1)$ записывается в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{cc|c} A & B & b \\ E dt & E dx & d\psi \end{array} \right), \quad (3.3)$$

где вертикальная черта отделяет матрицу системы от столбца правых частей, а E — единичная матрица.

Можно ли продолжить решение системы (3.1, 3.2) с кривой γ , хотя бы в ее малую окрестность? Пусть $(x_0, t_0) \in \gamma$, тогда ψ в малой окрестности этой точки может быть определена, если, по крайней мере, в этой точке известны производные ψ_x, ψ_t : $\psi(x, t) \approx \psi(x_0, t_0) + \psi_x(x - x_0) + \psi_t(t - t_0)$. Решение $\psi(x, t)$ нельзя продолжить с кривой γ , если определитель системы (3.1, 3.2) равен нулю, т. е. когда нельзя найти производные. Значит, уравнением характеристик служит условие равенства нулю определителя системы (матрица системы выписана в (3.3) слева от черты):

$$\begin{vmatrix} A & B \\ E dt & E dx \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left| A \frac{dx}{dt} - B \right| = 0.$$

Здесь мы воспользовались формулой для определителя блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|,$$

справедливой для квадратных матриц A, B, C, D при условии перестановочности матриц A и C .

Равенство можно еще более упростить в случае невырожденных матриц A , если ввести матрицу $C = A^{-1}B$. В этом случае

$$|\lambda E - C| = 0, \quad \lambda = \frac{dx}{dt}. \quad (3.4)$$

Таким образом, характеристики определяются из решения задачи на собственные значения для матрицы C . В зависимости от матрицы C системы классифицируются по типам, как показано в табл. 3.1.

Рассмотрим три простых примера.

Пример 3.1. Для уравнений линейной акустики (1.8) в случае одномерных колебаний

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

матрица A является единичной, а матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_0^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения B равны $\lambda_{1,2} = \pm c_0$, т. е. уравнения линейной акустики относятся к гиперболическому типу, к которому также принадлежит и само волновое уравнение (1.9), следующее из (3.5) (об этом см. лекцию 5).

Пример 3.2. В качестве второго примера рассмотрим уравнения (условия) Коши — Римана для действительной u и мнимой v частей аналитической функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Для этой системы матрица A является также единичной, а собственные значения B чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Таким образом, эта система относится к эллиптическому виду. Соответственно следующие из условий Коши — Римана двумерные уравнения Лапласа для u и v ,

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0,$$

являются эллиптическими уравнениями второго порядка.

Пример 3.3. Система

$$u_x = v_t, \quad v_x = u$$

с матрицей $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет совпадающие собственные значения $\lambda_{1,2} = 0$, но не приводится к диагональному виду. Матрица C представляет собой жорданову клетку, а значит система имеет параболический тип. Действительно, если искать функции u, v как частные производные потенциала Φ : $u = \Phi_t, v = \Phi_x$, то первое уравнение выполнится автоматически, а из второго получится $\Phi_t = \Phi_{xx}$, т. е. уравнение теплопроводности.

Замечание 3.1. Если вместо дифференциальных операторов в главную дифференциальную часть системы (3.1) подставить параметры $\partial/\partial t \rightarrow \tau, \partial/\partial x \rightarrow \xi$, то вместо системы можно исследовать определитель $Q(\tau, \xi) = |A\tau + B\xi|$. В случае $m = 2$ уравнений функция $Q(\tau, \xi)$ является квадратичной формой. Названия типов произошли от названий кривых — линий уровня данной квадратичной формы. Если форма положительно определена и сводится к сумме квадратов $Q = \tilde{\tau}^2 + \tilde{\xi}^2$, то тип эллиптический. Если одна из переменных исключается после преобразования, а $Q = \tilde{\xi}^2$, то тип параболический. Если же форма сводится к разности квадратов $Q = \tilde{\tau}^2 - \tilde{\xi}^2$, то система гиперболическая.

3.2. Канонический вид гиперболической системы

Продолжим общую теорию систем уравнений первого порядка, предполагая ниже матрицу C симметричной и зависящей только от x и t . Симметричность матрицы C

гарантирует гиперболичность системы

$$\psi_t + C\psi_x = f, \quad (3.6)$$

где $f(x, t)$ — новый столбец правых частей, получившийся из b после умножения системы (3.1) слева на матрицу A^{-1} . Приведем C к диагональному виду:

$$C = T\Lambda T^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix},$$

где T — матрица поворота, составленная из нормированных собственных векторов матрицы C .

Перейдем далее к новой неизвестной вектор-функции $\psi = T\phi$. Уравнение для новой функции ϕ получается из уравнения (3.6) после дифференцирования $T\phi$ по t и x и умножения слева на T^{-1} . В результате уравнение приводится к так называемому каноническому виду:

$$\phi_t + \Lambda\phi_x = \tilde{f}. \quad (3.7)$$

Здесь новая правая часть получается из старой посредством соотношения $\tilde{f} = T^{-1}f - T^{-1}T_t\phi - T^{-1}CT_x\phi$, которое зависит линейно от ϕ .

Левая часть уравнений (3.7) в каноническом базисе имеет диагональный вид:

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial\phi_i}{\partial x} = \tilde{f}_i.$$

(Здесь нет суммирования по i !) Левая часть i -го уравнения содержит только одну неизвестную функцию ϕ_i . Только правая часть \tilde{f}_i может содержать $\phi_j, j \neq i$. Может случиться, что уравнения станут однородными с $\tilde{f}_i = 0$, тогда для каждой компоненты ϕ_i получается автономное уравнение, решение которого может быть найдено с помощью стандартного метода характеристик, рассмотренного в предыдущей лекции.

3.3. Формула Даламбера

Применим теперь эту общую теорию к одномерному однородному волновому уравнению

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad (3.8)$$

которое, как мы видели из примера (3.1), можно свести к системе линейных уравнений. Если обозначить $w_t \equiv u, w_x \equiv v$, то первое уравнение получается из волнового, а второе из равенства перекрестных производных:

$$u_t - v_x = 0, \quad v_t - u_x = 0.$$

Матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ приводится к диагональному виду с помощью матрицы поворота $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, откуда канонический вид системы будет $\alpha_t - \alpha_x = 0$, $\beta_t + \beta_x = 0$, где $\alpha = (u + v)/2$, $\beta = (u - v)/2$. Каноническая система распалась на два волновых уравнения первого порядка (2.1). В соответствии с этим общее решение волнового уравнения дается суммой решения в виде двух волн,

$$w(x, t) = f(x - t) + g(x + t), \quad (3.9)$$

распространяющихся со скоростью ± 1 вправо и влево. Это общее решение. Как и положено для уравнения второго порядка, его общее решение содержит две произвольные функции. Переменных в уравнении две, поэтому каждая функция зависит от одной переменной.

Для постановки задачи Коши для одномерного волнового уравнения (3.8), как уравнения второго порядка, необходимо задать два начальных условия на функцию w и ее производную:

$$w(x, 0) = q(x), \quad w_t(x, 0) = h(x). \quad (3.10)$$

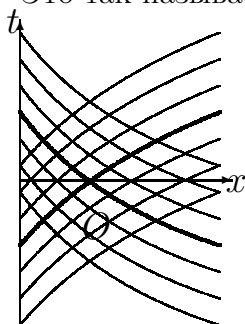
Подставляя начальное условие в общее решение (3.9), получаем два уравнения на f, g :

$$f(x) + g(x) = q(x), \quad -f'(x) + g'(x) = h(x).$$

Если первое уравнение продифференцировать, то система функциональных уравнений решается просто: $g' = \frac{1}{2}(q' + h)$, $f' = \frac{1}{2}(q' - h)$. Отсюда решение задачи Коши записывается в виде

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [q(x - t) + q(x + t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(x') dx'. \quad (3.11)$$

Это так называемая *формула Даламбера*.



Для систем линейных уравнений общего вида характеристики не являются прямыми, в общем случае это кривые, заданные на плоскости x, t . Если выбрать какую-нибудь точку O , то проходящие через нее характеристики будут ограничивать на плоскости две области. При $t > 0$ характеристики ограничивают *область влияния* точки O , т. е. те точки, в которых сказываются условия, заданные в точке O . При $t < 0$ характеристики ограничивают *область зависимости*, т. е. множество точек, от которых зависит решение в точке O .

3.4. Инварианты Римана

На характеристике, где определитель (3.4) обращается в нуль, система уравнений (3.3) разрешима при условии совпадения рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ Edt & Edx \end{pmatrix} = \text{rank} \left(\begin{array}{cc|c} A & B & b \\ Edt & Edx & d\psi \end{array} \right). \quad (3.12)$$

Напомним, что рангом матрицы называется максимальный порядок отличного от нуля ее минора. В данном случае ранг расширенной матрицы должен быть меньше $2m$, поскольку определитель (3.4) обращается в нуль, т. е. все миноры порядка $2m$ расширенной матрицы должны быть равны нулю. Полученная таким образом система дифференциальных уравнений называется *соотношением на характеристиках*. Само название подсказывает, что dx/dt надо подставлять из уравнения характеристик (3.4). Иногда эти соотношения удается проинтегрировать. Полученные интегралы называются *инвариантами Римана*.

Рассмотрим уравнения гидродинамики (1.5), (1.6) для изэнтропических течений, когда давление можно считать функцией плотности: $p = p(\rho)$. Эти уравнения представляют собой систему квазилинейных уравнений для плотности и трех компонент скорости \mathbf{v} . В одномерной геометрии, когда скорость имеет одну компоненту $u = u(x, t)$, эти уравнения имеют вид:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad u_t + \frac{c^2}{\rho}\rho_x + uu_x = 0, \quad (3.13)$$

где $c^2 = \partial p / \partial \rho$ – квадрат скорости звука.

Для этой системы вектор-функция ψ имеет две компоненты: $\psi = (\rho, u)^T$, матрица A единичная, а

$$B = \begin{pmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B легко находятся, они равны $\lambda_{1,2} = u \pm c(\rho)$. Для дозвуковых течений ($|u| < c$) мы имеем два семейства характеристик с положительным и отрицательным наклоном.

Чтобы получить соотношение на характеристиках, надо вычеркнуть в расширенной матрице один из столбцов, например третий, и вычислить: определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \rho & 0 \\ 0 & 1 & c^2/\rho & u & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & d\rho \\ 0 & dt & 0 & dx & du \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho dt & d\rho \\ dx - u dt & du \end{vmatrix}_{x=u \pm c} = 0,$$

откуда

$$\rho du = \pm c d\rho.$$

При нахождении этих соотношений мы снова воспользовались формулой для определителя блочной матрицы.

Проинтегрируем эти соотношения, в результате мы придем к двум инвариантам Римана:

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{c(\rho) d\rho}{\rho}. \quad (3.14)$$

К этим же соотношениям можно прийти, если умножить первое уравнение системы (3.13) на c/ρ и сложить со вторым или вычесть из второго: возникает система уравнений на инварианты Римана J_{\pm} :

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial J_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J_-}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial J_-}{\partial x} = 0. \quad (3.15)$$

Впечатление о том, что два отдельных уравнения, обманчиво. Чтобы полностью перейти к новым переменным, надо выразить $u, c(\rho)$ через инварианты J_{\pm} . Например, $u = (J_+ + J_-)/2$. Для баротропного уравнения состояния $p \sim \rho^\gamma$ скорость звука $c(\rho)$ выражается через разность инвариантов J_{\pm} . Таким образом, уравнения в переменных J_{\pm} являются связанными.

У этой системы существует одно, весьма важное с физической точки зрения, решение — так называемая *простая волна Римана*. Пусть при $t = 0$ какой-либо из инвариантов, скажем J_- , не зависит от координаты. В силу второго уравнения движения (3.15) J_- будет постоянной величиной при $t > 0$, т. е. $dJ_- = 0$. Это эквивалентно соотношению $du = \frac{c}{\rho} d\rho$ или наличию функциональной зависимости между u и c : $c = c(u)$. В этом случае уравнение (3.15) для инварианта J_+ , равного $2u$, приводится к одному (квазилинейному) уравнению:

$$u_t + (u + c(u))u_x = 0, \quad (3.16)$$

которое после замены переменных $U = u + c(u)$ превращается в уравнение Хопфа (2.15)

$$U_t + UU_x = 0.$$

Решение уравнения Хопфа подробно рассмотрено нами в предыдущей лекции. Напомним, что уравнение Хопфа описывает явление опрокидывания. Очевидно, что этим же свойством обладают как уравнение (3.16), так и сами уравнения гидродинамики (3.13). Подчеркнем, что простая волна Римана является частным интегралом уравнений (3.13). В дальнейшем мы покажем, как с помощью метода годографа может быть построен общий интеграл уравнения гидродинамики (3.13) (лекция 4.).

Дополнение: Неоднородное волновое уравнение

Покажем теперь, как решение неоднородного одномерного волнового уравнения с начальными условиями

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} = p(x, t), \quad \psi(x, 0) = q(x), \quad \psi_t(x, 0) = h(x) \quad (3.17)$$

можно свести к уже рассмотренным задачам в два этапа. Разобьем сначала неоднородную задачу на две задачи Коши, называемые полуоднородными:

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad w(x, 0) = q(x), \quad w_t(x, 0) = h(x) \quad (3.18)$$

$$v_{tt} - v_{xx} = p(x, t), \quad v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0. \quad (3.19)$$

Первая задача представляет собой задачу Коши для однородного волнового уравнения, решение которой нам уже известно, и задается с помощью формулы Даламбера (3.11). Второе уравнение — неоднородное, с правой частью $p(x, t)$ и нулевыми начальными условиями. Очевидно, что в силу линейности сумма решений задач (3.18) и

(3.19) $\psi = w(x, t) + v(x, t)$ удовлетворяет исходному уравнению (3.17). Таким образом, остается найти решение задачи (3.19). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, t, \tau)|_{t=\tau} = 0, \quad u_t(x, t, \tau)|_{t=\tau} = p(x, \tau). \quad (3.20)$$

Здесь τ — параметр, задающий однопараметрическое семейство вспомогательных задач, начальные условия которых ставятся при $t = \tau$. Вспомогательную задачу можно решить с помощью формулы Даламбера (3.11), если заметить, что решение уравнения с постоянными коэффициентами может зависеть только от разности $t - \tau$:

$$u(x, t, \tau) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} p(x', \tau) dx'.$$

Теперь покажем, что интеграл вспомогательной функции u по параметру τ

$$v(x, t) = \int_0^t u(x, t, \tau) d\tau$$

дает решение задачи (3.19). Для этого, дифференцируя, найдем $v_t = u(x, t, \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t u_t(x, t, \tau) d\tau$. Первое слагаемое обращается в нуль в силу первого начального условия (3.20). Можно продифференцировать еще раз и найти $v_{tt} = u_t(x, t, \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t u_{tt} d\tau$. Первое слагаемое обращается в $p(x, t)$ в силу второго начального условия (3.20). Остается дифференцирование по x как по параметру. Применяя одномерный оператор Даламбера, получим

$$\square v \equiv v_{tt} - v_{xx} = \int_0^t \square u(x, t, \tau) d\tau = p(x, t).$$

Утверждение доказано. Таким образом, решение исходной неоднородной задачи (3.17) выписывается в виде

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [q(x-t) + q(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(x', t) dx' + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} p(x', \tau) dx'.$$

ЛЕКЦИЯ 4.

Метод годографа

4.1. Преобразование годографа

В данной лекции мы покажем, как с помощью преобразования годографа [30] может быть найден общий интеграл квазилинейных уравнений одномерной газовой динамики (3.13):

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0. \quad (4.1)$$

Суть этого метода состоит в замене местами неизвестных функций и независимых переменных. Для уравнений (4.1) вместо $u = u(x, t)$, $\rho = \rho(x, t)$ ищутся обратные зависимости $x = x(u, \rho)$, $t = t(u, \rho)$. Такого рода преобразования хорошо известны в курсах классической механики и термодинамики [33], они называются преобразованиями Лежандра. Особенность преобразования годографа применительно к одномерным уравнениям гидродинамики состоит в том, что обратные функции $x = x(u, \rho)$, $t = t(u, \rho)$ подчиняются линейным уравнениям первого порядка, а производящая функция этого преобразования — линейному уравнению второго порядка.

Итак, первая задача применения этого метода состоит в пересчете всех производных, входящих в (4.1), через производные

$$\frac{\partial t}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Наиболее простой способ такого пересчета основан на применении якобианов и их свойств. В качестве примера рассмотрим производную ρ_t . Это частная производная, взятая при постоянном x ; она преобразуется через якобианы следующим образом:

$$\rho_t \equiv \frac{\partial(\rho, x)}{\partial(t, x)} = \frac{\partial(\rho, x)}{\partial(\rho, u)} \frac{\partial(\rho, u)}{\partial(t, x)} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u},$$

где

$$J = \frac{\partial(t, x)}{\partial(\rho, u)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

якобиан преобразования годографа. Аналогичным образом вычисляются остальные производные:

$$\rho_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial u}, \quad u_t = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \rho}, \quad u_x = \frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial \rho}.$$

Подставляя эти выражения в систему (4.1), видим, что множитель J^{-1} сокращается, для t и x получается система линейных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial x}{\partial u} - u \frac{\partial t}{\partial u} + \rho \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0, \quad -\frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial t}{\partial u} + u \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0. \quad (4.2)$$

Второе уравнение этой системы может быть переписано в виде

$$-\frac{\partial}{\partial \rho}(x - ut) = \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial t}{\partial u} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial}{\partial w}(x - ut) = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad (4.3)$$

где w – энтальпия, для изэнтропических течений зависящая только от плотности. Для нее $dw = c^2(\rho) d\rho/\rho$.

Теперь от системы линейных уравнений мы перейдем к одному уравнению второго порядка для нового потенциала χ – производящей функции преобразования годографа.

4.2. Потенциал χ

Вначале для скорости введем потенциал ϕ : $u = \phi_x$. Тогда уравнение Эйлера удастся один раз проинтегрировать:

$$\phi_t + \frac{\phi_x^2}{2} + w = 0. \quad (4.4)$$

Константа интегрирования определяет начало отсчета энтальпии, поэтому несущественна. Отсюда можно записать дифференциал потенциала скорости:

$$d\phi \equiv \phi_t dt + \phi_x dx = -\left(\frac{u^2}{2} + w\right) dt + u dx.$$

Здесь потенциал ϕ зависит от старых переменных t, x . Чтобы перейти к новым переменным ρ, u , вместо потенциала ϕ нужно ввести новый потенциал χ , собственными переменными которого будут переменные ρ, u (удобно в дальнейшем вместо ρ использовать функцию $w(\rho)$). Переход к новым переменным в потенциале осуществляется с помощью преобразования Лежандра, как это делается в термодинамике [33]:

$$\chi(w, u) = \phi + \left(\frac{u^2}{2} + w\right) t - ux, \quad d\chi = t dw - (x - ut) du$$

откуда

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial w}, \quad x - ut = -\frac{\partial \chi}{\partial u}. \quad (4.5)$$

Эти соотношения задают искомую замену переменных $x = x(u, \rho)$, $t = t(u, \rho)$ посредством потенциала $\chi(w, u)$ – производящей функции преобразования.

Подстановка выражений (4.5) в уравнение Эйлера (4.3) дает тождество. Иными словами, функция $\chi(w, u)$ является интегратором уравнения (4.3). Она имеет тот же смысл, что скалярный и векторные потенциалы для уравнений Максвелла. Нахождение интегратора для (4.3) можно рассматривать как другой способ введения потенциала $\chi(w, u)$.

Уравнение для $\chi(w, u)$ получается из уравнения непрерывности (первое уравнение системы (4.2)) при подстановке соотношений (4.5):

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0. \quad (4.6)$$

Полученное уравнение отличается от одномерного волнового только последним слагаемым с первой производной и зависимостью скорости c от плотности. Но и этих небольших различий хватает, чтобы оно не решалось в общем виде. Рассмотрим частный случай политропного газа, где иногда удается выписать решение.

4.3. Политропный газ

Для политропного газа уравнение состояния $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$. Для такого газа энтальпия и скорость звука явно выражаются через энтальпию w :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad w = \int \frac{c^2 d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \Rightarrow c^2 = (\gamma - 1)w.$$

Рассмотрим частный случай, когда показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{2n + 3}{2n + 1} = 3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots,$$

где n — целое положительное число. Значение γ при $n = 0$ соответствует показателю адиабаты газа с одной степенью свободы. Такая ситуация реализуется для газа заряженных частиц в сильном магнитном поле, когда движение поперек магнитного поля сильно заморожено, остается движение только вдоль поля. Два следующих значения γ при $n = 1, 2$ отвечают показателю адиабаты для одноатомного и двухатомного молекулярного газа.

Оказывается, что при таких дискретных значениях γ можно найти общий интеграл для уравнения на потенциал $\chi(w, u)$. Мы получим эти решения по индукции, начав с $n = 0$, а затем выполнив переход $n \rightarrow n + 1$.

При $n = 0$ уравнение (4.6) для $\chi = \chi_0$ имеет вид

$$2w \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} + \frac{\partial \chi_0}{\partial w} = 0. \quad (4.7)$$

С помощью замены переменной $\xi = \sqrt{2w}$ это уравнение сводится к одномерному волновому

$$\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} = 0,$$

общее решение (3.9) которого известно. Отсюда

$$\chi_0(w, u) = f(\sqrt{2w} - u) + g(\sqrt{2w} + u).$$

Отметим, что переход к переменной ξ в уравнении (4.7) есть частный случай приведения линейного уравнения второго порядка к каноническому виду, которое будет рассмотрено в лекции 5..

Уравнение для χ_n

$$\frac{2w}{2n+1} \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial u^2} + \frac{\partial \chi_n}{\partial w} = 0$$

продифференцируем по w . Умножая его на $(2n+1)/(2n+3)$, находим:

$$\frac{2w}{2n+3} \frac{\partial^3 \chi_n}{\partial w^3} - \frac{2n+1}{2n+3} \frac{\partial^3 \chi_n}{\partial w \partial u^2} + \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial w^2} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что для первой производной потенциала $\partial \chi_n / \partial w$ почти получилось $(n+1)$ -е уравнение. Чтобы убрать лишний множитель во втором слагаемом и тем самым завершить второй шаг индукции, изменим масштаб переменной $u \rightarrow u' = u\sqrt{(2n+3)/(2n+1)}$. В итоге получаем рекуррентную формулу:

$$\chi_{n+1} \left(\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} u, w \right) = \frac{\partial}{\partial w} \chi_n(u, w).$$

По известному χ_0 мы теперь можем построить решение для любых n .

Полученное решение представляет собой общий интеграл уравнения (4.6) для заданных значений γ , который зависит от двух произвольных функций f и g . Решение уравнений гидродинамики (4.1) получается отсюда с помощью соотношений (4.5). В результате решение записывается в неявном виде.

Следует сказать несколько слов о частном интеграле уравнений гидродинамики (4.1) в виде простой волны Римана. Как мы видели в прошлой лекции, для этого решения плотность ρ и скорость u функционально связаны между собой: $\rho = \rho(u)$. В этом случае $J^{-1} = 0$. Поэтому при выводе уравнения (4.2), когда мы сокращаем множитель J^{-1} , этот частный интеграл теряется. Более подробную информацию об этом можно найти в [30].

В заключение этой лекции укажем на несколько других интересных примеров сведения нелинейных уравнений к линейным методом годографа, которые приведены в справочнике [47].

ЛЕКЦИЯ 5.

Канонический вид уравнений 2-го порядка

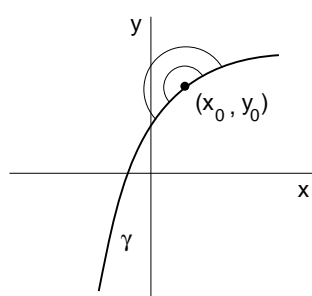
5.1. Случай двух переменных

Линейное уравнение второго порядка на неизвестную функцию u , зависящую от двух переменных x, y , записывается в виде

$$\hat{\mathcal{L}}u = f, \quad \hat{\mathcal{L}}u \equiv a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} \quad f = Au_x + Bu_y + Cu + f_0. \quad (5.1)$$

Здесь a, b, c, A, B, C, D, f_0 — заданные функции x, y . Слагаемые $\hat{\mathcal{L}}u$, содержащие вторые производные, называются *главной дифференциальной частью*. Главная дифференциальная часть определяет тип уравнения.

Поскольку уравнение (5.1) второго порядка, то для этого уравнения на кривой γ в задаче Коши необходимо помимо значения функции u задавать ее производные u_x и u_y .



Далее будем действовать по той же схеме, что и для систем уравнений первого порядка, т. е. строить разложение решения в окрестности точки (x_0, y_0) , лежащей на начальной кривой γ :

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + \dots$$

Отметим, что первые два члена этого разложения однозначно определены, так как значения функции u и ее первых производных заданы на γ . Квадратичные слагаемые, которые определяются вторыми производными, могут быть найдены только из решения уравнения. Поэтому, чтобы продолжить решение в окрестность начальной точки, нужно, по крайней мере, знать вторые производные u . Как и в случае систем уравнений первого порядка, *характеристиками* для уравнения второго порядка (5.1) будем называть такие кривые в плоскости x, y , с которых решение уравнения не может быть продолжено.

Для отыскания характеристик для уравнения (5.1) перейдем к новым криволинейным координатам $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$, предполагая прямое и обратное преобразования неособыми, т. е.

$$J = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \infty.$$

При такой замене операторы дифференцирования по x, y будут выражаться через новые переменные по формулам

$$\partial_x = \alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta, \quad \partial_y = \alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta,$$

где $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ и т. д.

При этих преобразованиях оператор главной дифференциальной части запишется в виде

$$\hat{\mathcal{L}} = a (\alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta)^2 + 2b (\alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta) (\alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta) + c (\alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta)^2.$$

При такой записи квадрат оператора представляет собой произведение операторов. Действие оператора дифференцирования в нем применяется ко всем функциям, стоящим справа от него. Если далее раскрыть все скобки, то в новых координатах новая главная дифференциальная часть будет записываться в виде

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{a} \partial_\alpha^2 + 2\tilde{b} \partial_\alpha \partial_\beta + \tilde{c} \partial_\beta^2, \quad (5.2)$$

а новые преобразованные функции $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ выразятся через старые с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a \alpha_x^2 + 2b \alpha_x \alpha_y + c \alpha_y^2, \\ \tilde{b} &= a \alpha_x \beta_x + b (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + c \alpha_y \beta_y, \\ \tilde{c} &= a \beta_x^2 + 2b \beta_x \beta_y + c \beta_y^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Обратим внимание на то, что между коэффициентами \tilde{a} и \tilde{c} есть определенная симметрия: \tilde{c} может быть получен из \tilde{a} , если заменить α на β , и наоборот.

Если $\tilde{a} = 0$, то мы не сможем из уравнения найти вторую производную $u_{\alpha\alpha}$, а следовательно, и продолжить решение в окрестность начальной точки. Поэтому уравнением характеристики будет

$$\tilde{a} = a \alpha_x^2 + 2b \alpha_x \alpha_y + c \alpha_y^2 = 0. \quad (5.4)$$

Это — квадратное уравнение относительно α_x , его решение дает два корня:

$$\alpha_x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a} \alpha_y. \quad (5.5)$$

Таким образом, чтобы характеристики существовали (были действительными), необходима неотрицательность дискриминанта квадратного уравнения: $D = b^2 - ac \geq 0$. Если $D < 0$, то корни квадратного уравнения являются комплексными и в соответствии с определением введение характеристик невозможно.

Рассмотрим более подробно все три случая $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ и покажем, каким образом уравнения могут быть приведены к так называемому каноническому виду.

1° $D > 0$ — гиперболический тип

Квадратное уравнение (5.4) имеет два разных действительных корня (5.5). Им соответствуют два семейства характеристик. В силу симметрии между коэффициентами \tilde{a} и \tilde{c} можно одновременно обратить в нуль оба коэффициента $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, если в качестве новой, канонической, переменной $\alpha \equiv \xi$ выбрать решение уравнения (5.5) со знаком плюс, а в качестве $\beta \equiv \eta$ — решение со знаком минус. Легко найти, что оставшийся коэффициент $\tilde{b} = -2D\xi_y\eta_y/a \neq 0$. В результате уравнение сводится к виду $2\tilde{b}u_{\xi\eta} = \tilde{f}$. Здесь в \tilde{f} вошли все члены, не содержащие вторых производных. Разделив уравнение на $2\tilde{b}$, мы приходим к *каноническому виду для уравнения гиперболического типа*

$$u_{\xi\eta} = \tilde{f}.$$

Здесь \tilde{f} — преобразованная правая часть, куда входят и первые производные. Иногда для гиперболических уравнений пользуются вторым каноническим видом, который получается из первого заменой $\xi = \frac{1}{2}(\phi + \psi)$, $\eta = \frac{1}{2}(\phi - \psi)$,

$$u_{\phi\phi} - u_{\psi\psi} = \tilde{f}.$$

В частности, уравнение (3.17) имеет как раз такой вид, поэтому одномерное волновое уравнение относится к гиперболическому типу.

2° $D = 0$ — параболический тип

В этом промежуточном случае имеется вырождение: квадратное уравнение (5.4) имеет только одно решение $\alpha_x = -b\alpha_y/a$. Возьмем $\alpha = \xi$ в качестве первой канонической переменной, а η выберем произвольно. Тогда обращаются в нуль коэффициенты при $u_{\xi\xi}$ и при перекрестной производной $u_{\xi\eta}$. В результате уравнение преобразуется к виду

$$u_{\eta\eta} = \tilde{f}.$$

Это есть канонический вид уравнения параболического типа, в него не вошла вторая производная по ξ .

Примером уравнения параболического типа может служить одномерное уравнение теплопроводности или диффузии (1.14):

$$u_t = u_{xx}. \quad (5.6)$$

Это уравнение первого порядка по времени.

3° $D < 0$ — эллиптический тип

При отрицательном дискриминанте корни квадратного уравнения (5.4) комплексно сопряжены. Возьмем один из них:

$$\alpha_x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{a} \alpha_y, \quad \alpha = \xi \pm i\eta.$$

В качестве канонических переменных выберем вещественную ξ и мнимую η части функции $\alpha(x, y)$. Если теперь подставить $\alpha = \xi + i\eta$ в квадратное уравнение (5.4) и разделить вещественную и мнимую часть,

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a(\xi_x \pm i\eta_x)^2 + 2b(\xi_x \pm i\eta_x)(\xi_y \pm i\eta_y) + c(\xi_y \pm i\eta_y)^2 = \\ &= a(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c(\xi_y^2 - \eta_y^2) + 2 \pm i [a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y] = 0, \end{aligned}$$

то из сравнения с уравнениями (5.3) видно, что получившаяся мнимая часть — это коэффициент \tilde{b} , который входит в главную дифференциальную часть при переходе к координатам ξ, η , а вещественная часть — это разность $\tilde{a} - \tilde{c}$. Равенство нулю мнимой части обеспечивает $\tilde{b} = 0$, а вещественной дает $\tilde{a} = \tilde{c}$. После деления на \tilde{a} мы приходим каноническому виду для уравнений эллиптического типа:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \tilde{f}.$$

Примером эллиптического уравнения служит двумерное уравнение Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (5.7)$$

Упражнение 5.1. Покажите, что если уравнение второго порядка (5.1) свести к системе уравнений первого порядка, то классификация по типам сохранится. Сравните с двумя примерами 3.1 и 3.2 из лекции 3.

5.2. Случай многих переменных

При $n > 2$ линейное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \tilde{f}(x) = b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u + f(x),$$

где по индексам i, j, k подразумевается суммирование от 1 до n , а в левой части уравнения оставлена только главная дифференциальная часть. Для классификации, как мы видели, правая часть не важна, поэтому ограничимся рассмотрением однородного уравнения:

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Гладкая невырожденная замена переменных

$$y = y(x), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

приводит главную часть к виду, аналогичному (5.2):

$$\tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} = \tilde{f}, \quad \tilde{a}_{kl} = a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j},$$

где в \tilde{f} входят первые производные. Отсюда видно, что матрица коэффициентов главной дифференциальной части преобразуется в каждой точке как квадратичная форма $Q = a_{ij}p_i p_j$ и тем самым задача классификации уравнений второго порядка сводится к классификации квадратичных форм. Последние, как известно [37], элементарными преобразованиями сводятся к следующему каноническому виду:

$$Q = \sum_{k=1}^p q_k^2 - \sum_{k=p+1}^m q_k^2,$$

где $m \leq n$ — ранг квадратичной формы, т. е. число ненулевых собственных значений матрицы a_{ij} , а $p \leq m$ — индекс, т. е. количество положительных значений. Отсюда получается классификация уравнений по типам:

- 1°. $p = n$ (все собственные значения отличны от нуля и одного знака) — *эллиптический тип*.
- 2°. $m < n$ (имеются нулевые собственные числа) — *параболический тип*.
- 3°. $m = n, p < n$ (матрица невырождена, но имеются собственные значения того и другого знака) — *гиперболический тип*.

Замечание 5.1. Следует отметить, что преобразование многомерных уравнений к каноническому виду неоднозначно.

Пример 5.1. Трехмерное уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

инвариантно относительно ортогональных преобразований координат (вращений трехмерного пространства). Действительно, если за z выбрать ось вращения, то

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, & y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \Rightarrow \\ \partial_x &= \cos \varphi \partial_{x'} - \sin \varphi \partial_{y'}, & \partial_y &= \sin \varphi \partial_{x'} + \cos \varphi \partial_{y'} \Rightarrow \partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2. \end{aligned}$$

Мы показали, что оператор Лапласа инвариантен относительно вращений.

Пример 5.2. Трехмерное² волновое уравнение ($c = 1$)

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

инвариантно относительно преобразований Лоренца:

$$\begin{aligned} t' &= t \operatorname{ch} \beta + x \operatorname{sh} \beta, & x' &= t \operatorname{sh} \beta + x \operatorname{ch} \beta \Rightarrow \\ \partial_t &= \operatorname{ch} \beta \partial_{t'} + \operatorname{sh} \beta \partial_{x'}, & \partial_x &= \operatorname{sh} \beta \partial_{t'} + \operatorname{ch} \beta \partial_{x'} \Rightarrow \partial_t^2 - \partial_x^2 = \partial_{t'}^2 - \partial_{x'}^2. \end{aligned}$$

²В физике при определении размерности уравнения в частных производных обычно учитываются только пространственные переменные. С математической точки зрения данное уравнение — четырехмерное.

Замечание 5.2. Определение типа уравнения и его канонического вида локально (относится к каждой точке), поэтому все пространство может делиться на области эллиптичности и гиперболичности. На границах областей уравнение будет параболично. Например, уравнение $xu_{yy} - u_{xx} = 0$ гиперболично в правой полуплоскости и эллиплично в левой.

Замечание 5.3. Характеристики многомерного гиперболического уравнения не кривые, а поверхности.

Вычислим характеристики для двумерного волнового уравнения

$$\hat{L}u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

При переходе к новым переменным $\alpha = \alpha(t, x, y)$, $\beta = \beta(t, x, y)$, $\gamma = \gamma(t, x, y)$ операторы дифференцирования записываются в виде

$$\partial_t = \alpha_t \partial_\alpha + \beta_t \partial_\beta + \gamma_t \partial_\gamma, \quad \partial_x = \alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta + \gamma_x \partial_\gamma, \quad \partial_y = \alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta + \gamma_y \partial_\gamma.$$

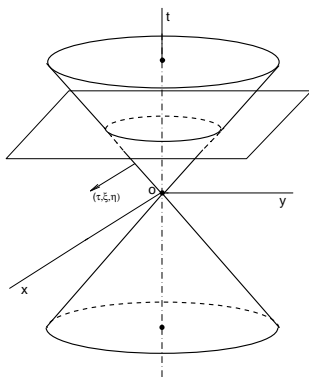
Подставляя эти выражения в оператор \hat{L} и приводя подобные при производной ∂_α^2 , находим уравнение характеристик:

$$\tilde{a} = \alpha_t^2 - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 = 0.$$

Получилось уравнение первого порядка — уравнение Гамильтона — Якоби. Его решение может быть найдено с помощью метода характеристик. Оно представляет собой поверхность $\alpha(t, x, y) = \text{const}$. Геометрически можно понять, как устроена данная поверхность. Компоненты вектора градиента $(\tau, \xi, \eta) = (\alpha_t, \alpha_x, \alpha_y)$ удовлетворяют уравнению конуса

$$\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0.$$

Градиент $\alpha(t, x, y)$ ортогонален поверхности $\alpha(t, x, y) = \text{const}$. Значит и характеристическая поверхность будет конусом. Этот конус ограничивает верхней полостью область влияния вершины. Нижняя полость окружает область зависимости.



Сечение светового конуса плоскостью $t = \text{const}$ пересекает характеристику (поверхность конуса) по окружности, которая является волновым фронтом. Проекция нормали на ту же плоскость есть луч, указывающий направление распространения возмущения. В любом вертикальном сечении конуса плоскостью, проходящей через ось t , характеристики — это пара прямых, как и в случае одной пространственной переменной.

Замечание 5.4. Для квазилинейных систем характеристики (в многомерном случае — характеристические поверхности) могут быть введены как лучи (или лучевые поверхности), вдоль которых распространяются малые возмущения высокой частоты ω и малой длины волны λ . Высокая частота и малая длина волны означают $\omega T \gg 1$ и $\lambda/L \ll 1$, где соответственно T и L есть характерные время и масштаб изменения

основного решения. В оптике выполнение критериев $\omega T \gg 1$ и $\lambda/L \ll 1$ соответствует геометрической оптике, а для уравнений гидродинамики (1.5, 1.6, 1.7) — геометрической акустике. Как известно, в квантовой механике эти критерии соответствуют квазиклассическому приближению.

В качестве иллюстрации рассмотрим линеаризованную систему уравнений гидродинамики, которая эквивалентна уравнению акустики (1.9) - волновому уравнению, записанному для возмущения плотности ρ_1 . Представим возмущение плотности в виде $\rho_1 = \exp(iS)$, где S — медленная фаза относительно своих аргументов t и \mathbf{r} . Последнее, в частности, означает, что частота $\omega = S_t$ велика по сравнению с $\sqrt{|S_{tt}|}$. Аналогичный критерий предполагается выполненным для производных по пространственным переменным. Подставляя далее $\rho_1 = \exp(iS)$ в (1.9), получим

$$\frac{1}{c^2} (-S_t^2 + iS_{tt}) - i \Delta S - (\nabla S)^2 = 0.$$

Вторые производные малы в силу выполнения критериев. Пренебрегая ими, мы получим уравнение эйконала:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\nabla S)^2 = 0.$$

Это уравнение есть не что иное, как уравнение характеристик для волнового уравнения. Итак, характеристики в многомерном случае — это поверхности постоянной фазы (эйконала).

ЛЕКЦИЯ 6.

Автомодельность и бегущие волны

6.1. Понятие автомодельности

Определение 6.1. *Автомодельность* — это симметрия задачи, позволяющая компенсировать масштабные преобразования независимых переменных соответствующим растяжением решения.

При $n = 2$ (время t и координата x) автомодельность означает выбор новых масштабов для координаты $l(t)$ и решения $u(t)$, таких, что в новых переменных решение является функцией одной переменной ξ :

$$u(x, t) = A(t)f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{l(t)}. \quad (6.1)$$

Когда такое преобразование удастся найти, задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. При $n \geq 3$ переход к автомодельным переменным $\xi = \mathbf{x}/l(t)$ понижает порядок дифференциального уравнения, по крайней мере, на единицу. Часто преобразование проще всего найти с помощью анализа размерности физических величин, входящих в уравнение. Иногда удобнее прямо анализировать преобразования растяжения неизвестных функций и независимых переменных и искать, какую группу преобразований допускает уравнение, т. е. какие растяжения оставляют уравнения неизменными. Важным частным случаем автомодельных решений является решение типа *бегущей волны* $u(x, t) = A(t)g(x - Vt)$, где g — функция одной переменной, а V — скорость данной волны. Легко видеть, что в этом случае замена $\exp(x - Vt) = \tilde{x}/\tilde{t}$ переводит решение типа бегущей волны в (6.1). Если $A(t) = \text{const}$, то такое решение описывает *стационарную волну*, которая распространяется с постоянной скоростью V без искажения своего профиля. Подробности теории автомодельных решений, особенно хорошо развитой в механике сплошных сред, физике плазмы и астрофизике, можно найти в литературе, посвященной методам размерности и подобия [8, 19, 20, 50].

6.2. Примеры

Рассмотрим четыре примера автомодельных решений. Первые два примера относятся к линейному и нелинейному уравнениям теплопроводности. В первой лекции мы привели вывод уравнения теплопроводности. Нелинейное уравнение теплопроводности отличается от линейного тем, что коэффициент теплопроводности зависит от температуры. Что касается двух других примеров — уравнения Кортевега — де Вриза (КДВ) и уравнения Бюргера, то мы дадим их упрощенный вывод.

Обратимся к простой волне Римана. Как было показано в третьей лекции, решение в виде простой волны Римана получается из уравнений гидродинамики, когда один из инвариантов Римана является константой. В результате между скоростью u и скоростью звука c имеется функциональная зависимость $c = c(u)$. В этом случае уравнение (3.15) для инварианта J_+ , равного $2u$, приводится к одному (квазилинейному) уравнению:

$$u_t + (u + c(u))u_x = 0.$$

Для малых скоростей $u \ll c_0 \equiv c(0)$ это уравнение в главном порядке

$$u_t + c_0 u_x = 0$$

описывает распространение звуковой волны со скоростью c_0 вправо: $u = u(x - c_0 t)$. В следующем порядке это уравнение приобретает вид

$$u_t + c_0 u_x + (1 + c'(0))u u_x = 0.$$

Если перейти в систему координат, движущуюся со скоростью c_0 ,

$$t' = t, \quad x' = x - c_0 t,$$

то это уравнение превращается в уравнение Хопфа (2.15):

$$u_t + (1 + c'(0))u u_x = 0$$

(здесь штрихи у t' и x' опущены). Для уравнения Хопфа, как мы показали ранее, любое начальное локализованное распределение в результате эволюции опрокидывается, т. е. существует такой момент времени $t = t^*$, когда на профиле скорости u возникает бесконечная производная по x . Однако в реальных физических системах возникновение бесконечных производных не происходит. Существуют два механизма, которые останавливают опрокидывание. Один из них диссипативный, связанный с вязкостью и теплопроводностью. Этот механизм приводит к тому, что линейные звуковые волны испытывают слабое затухание. Выражается это в том, что частота звуковых колебаний ω в зависимости от волнового числа k приобретает мнимую добавку, квадратичную относительно k :

$$\omega = kc_0 - i\mu k^2,$$

где μ есть обобщенный коэффициент вязкости (в дальнейшем мы его будем просто называть коэффициентом вязкости). Данному закону дисперсии отвечает линейное уравнение

$$u_t + c_0 u_x = \mu u_{xx},$$

в котором главным членом является второе слагаемое $c_0 u_x$, описывающее движение звуковой волны со скоростью c_0 . На фоне этого быстрого распространения член в правой части μu_{xx} описывает более медленный процесс затухания звуковой волны. Медленным в этом случае является также процесс опрокидывания. Таким образом, при одновременном учете эффектов слабого затухания и слабой нелинейности уравнение движения записывается в виде

$$u_t + c_0 u_x + (1 + c'(0)) u u_x = \mu u_{xx}.$$

Переходя в движущуюся со скоростью c_0 систему координат, это уравнение приобретает вид уравнения Бюргерса:

$$u_t + u u_x = \mu u_{xx}, \quad (6.2)$$

где новое u равно старому u , умноженному на $(1 + c'(0))$.

Другой механизм, препятствующий опрокидыванию волны, связан с эффектом волновой дисперсии – зависимостью фазовой скорости V линейных звуковых волн от волнового числа k :

$$V(k) = \omega/k,$$

где $V(k)$ – аналитическая функция k , разложение которой в отсутствие диссипации при $k \rightarrow 0$ происходит по четным степеням k . Это разложение при малых k записывается в виде

$$V(k) = c_0 - \beta k^2.$$

Одновременный учет слабой нелинейности и слабой дисперсии ($\beta k^2 \ll c_0$) приводит к уравнению Кортевега – де Вриза (КДВ):

$$u_t + 6u u_x + u_{xxx} = 0. \quad (6.3)$$

Как и уравнение Бюргерса (6.2), это уравнение записано в системе координат, движущейся со скоростью c_0 . В этом уравнении коэффициент 6 выбран исходя из удобства, он получается после простого масштабирования.

Это уравнение было выведено в конце XIX в. Кортевегом и де Вризом для описания длинных гравитационных волн на поверхности жидкости малой глубины h (приближение мелкой воды). В этом случае $c_0 = \sqrt{gh}$, где g – ускорение свободного падения, $\beta = h^2/6$ (более подробно об уравнении КДВ см., например, [23]).

Линейное уравнение теплопроводности

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности, которое задано на всей оси x ($x \in (-\infty, \infty)$), с точечным начальным условием:

$$u_t = Du_{xx}, \quad u(x, 0) = \delta(x). \quad (6.4)$$

Далее удобно исключить коэффициент теплопроводности путем замены $t \rightarrow Dt$. В результате уравнение записывается в виде

$$u_t = u_{xx}.$$

Анализ размерностей выполним при преобразовании растяжения:

$$t \rightarrow \mu t, \quad x \rightarrow \lambda x, \quad u \rightarrow \nu u. \quad (6.5)$$

Чтобы уравнение было инвариантным относительно такого преобразования, необходимо выполнение соотношения $\mu = \lambda^2$. Начальное условие сохранит свой вид, когда $\nu = \lambda^{-1}$ (размерность δ -функции равна обратной размерности ее аргумента). Комбинация двух этих соотношений дает $\lambda = \mu^{1/2}$, $\nu = \mu^{-1/2}$. Отсюда находим нужную автомодельную подстановку (6.1):

$$u(x, t) = t^{-1/2} f(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2}.$$

Если теперь в таком виде подставить решение в уравнение теплопроводности, то на функцию $f(\xi)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' + \frac{1}{2}f = 0. \quad (6.6)$$

При $t \rightarrow +0$, $x \neq 0$ решение должно исчезать, поэтому функция f должна обращаться в нуль при $\xi \rightarrow \infty$ вместе со своей производной. Второе условие следует из нормировки δ -функции:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi.$$

Уравнение (6.6) допускает однократное интегрирование, что дает $f' + \frac{1}{2}\xi f = 0$, где в силу первого условия постоянная интегрирования равна нулю. Линейное однородное обыкновенное уравнение первого порядка всегда решается: $\ln f = -\xi^2/4 + \text{const}$, а константа находится из второго условия. Получившееся автомодельное решение

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

описывает диффузионное расплывание (решение изображено на рис. 6.1). Характерная ширина решения растет — $l(t) \sim t^{1/2}$, а максимальное значение u уменьшается — $A(t) \sim t^{-1/2}$, так что площадь под графиком сохраняется.

Замечание 6.1. Полученный закон расплывания $l(t) \sim t^{1/2}$ является следствием более общего, интегрального, соотношения для среднего квадрата масштаба распределения:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} u dx \right)^{-1}.$$

Умножая уравнение теплопроводности (6.4) на x^2 и интегрируя по всем x , получим:

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2D.$$

Отсюда следует, что средний квадрат масштаба зависит линейно от времени: $\langle x^2 \rangle = 2Dt$, что согласуется с автомодельным расплыванием.

Замечание 6.2. Полученное автомодельное решение представляет собой функцию Грина

$$G(x - x', t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4t}\right)$$

задачи Коши для уравнения теплопроводности (6.4), решение которой записывается в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', t) u(x', 0) dx'. \quad (6.7)$$

Это следует из факта линейности уравнения (6.4) и очевидного равенства

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') u(x', 0) dx'.$$

В второй части курса мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

Замечание 6.3. В рассмотренном примере начальное условие (на всей оси x) задано в виде дельта-функции. Для начальных условий конечной ширины, например, для $u(x, 0) = Q \exp(-x^2/a^2)$, в задаче появляется второй масштаб a , и автомодельное решение уже перестает быть точным решением задачи Коши. Однако решение на больших временах, когда $l(t) \gg a$ и можно пренебречь a по сравнению с характерной шириной решения, асимптотически приближается к автомодельному. В частности, этот вывод следует из точного решения (6.7).

Вместо граничного условия на бесконечности также может встретиться требование обращения решения в нуль на концах некоторого конечного интервала: $u(\pm L, t) = 0$. Тогда в задаче появляется второй масштаб, поэтому автомодельное решение перестанет удовлетворять граничным условиям. Однако автомодельное решение будет справедливо на малых временах до тех пор, пока $l(t) \ll L$. Таким образом, в задачах, где характерные масштабы начальных и граничных условий существенно различаются ($a \ll L$), автомодельное решение представляет собой *промежуточную асимптотику* при $a \ll l(t) \ll L$.

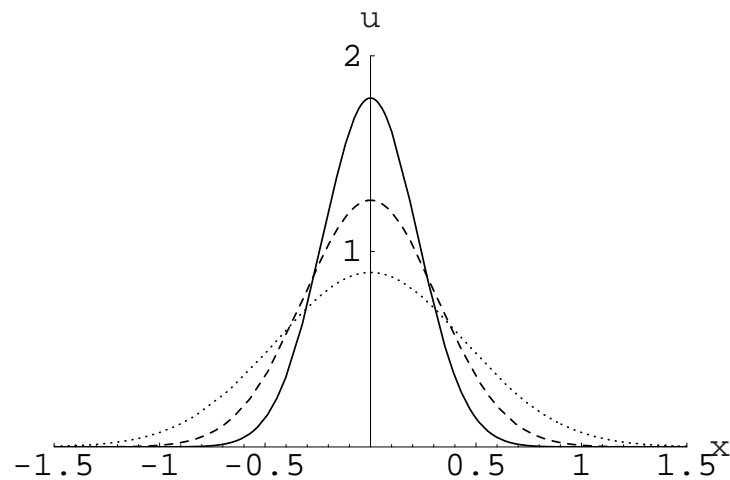


Рис. 6.1. Автомоделное решение линейного уравнения теплопроводности: сплошная линия — $t = 0.025$, пунктир — $t = 0.05$, точки — $t = 0.1$.

Нелинейное уравнение теплопроводности

Попытаемся решить нелинейное уравнение теплопроводности, в котором коэффициент температуропроводности зависит от температуры, для простейшей линейной зависимости $\chi \propto u$ с точечным начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u(x, 0) = \delta(x).$$

Растяжение переменных (6.5) оставляет уравнение инвариантным, когда $\lambda = \mu^{1/3}$, а начальное условие сохраняет вид при $\nu = \mu^{-1/3}$. Автомоделная подстановка

$$u(x, t) = t^{-1/3} f(xt^{-1/3})$$

сводит задачу к обыкновенному уравнению

$$(ff')' + \frac{1}{3}\xi f' + \frac{1}{3}f = 0.$$

Так же, как и в предыдущем примере, уравнение можно один раз проинтегрировать и выбрать нулевую константу: $ff' + \frac{1}{3}\xi f = 0$. Имеются два решения: $f = 0$, которое должно быть справедливо при больших по абсолютной величине ξ , и $f = C - \xi^2/6$. Решение во всей области есть

$$f(\xi) = \begin{cases} C - \frac{\xi^2}{6}, & \xi^2 \leq 6C, \\ 0, & \xi^2 > 6C. \end{cases}$$

Константу C можно найти из нормировки $C = 6^{1/3}/4$.

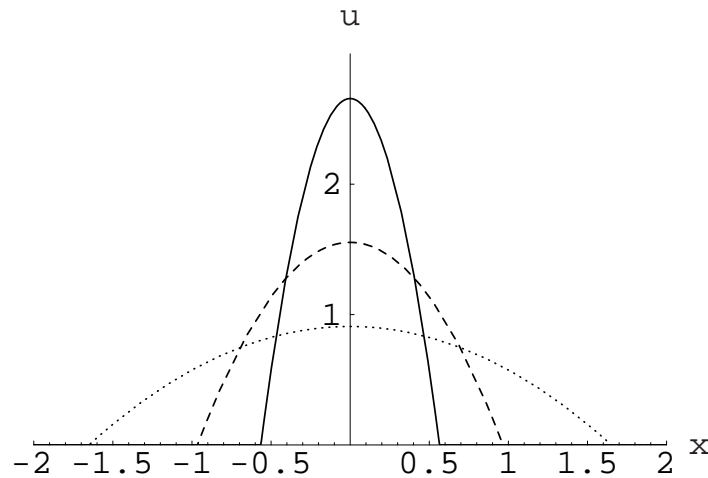


Рис. 6.2. Автомоделное решение нелинейного уравнения теплопроводности: сплошная линия — $t = 0,02$, пунктир — $t = 0,1$, точки — $t = 0,5$

На рис. 6.2 показано решение в три разных момента времени. В отличие от рис. 6.1, решение имеет резкий край — фронт тепловой волны. Расширение нагретой области в данном случае происходит по закону $l(t) \sim t^{1/3}$. Площадь под графиком профиля температуры, как и в предыдущем примере, сохраняется.

Уравнение Бюргерса

Для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}$$

найдем решение в виде стационарной волны $u(x, t) = f(\xi)$, $\xi = x - Vt$, где V — скорость волны, с нулевым граничным условием на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = 0.$$

Чтобы решение типа бегущей волны соответствовало определению 6.1, можно заменить независимые переменные на e^t и e^x . Другой вариант — воспользоваться более общим определением автомоделной подстановки. В общем случае автомоделным называется решение, которое зависит только от комбинации переменных t, x и не зависит от этих переменных по отдельности.

Подставляя f в уравнение Бюргерса, получим обыкновенное уравнение второго порядка $\mu f'' - ff' + Vf' = 0$, которое можно один раз проинтегрировать: $\mu f' - f^2/2 + Vf = C_1$. В силу граничного условия при $x \rightarrow +\infty$ постоянная $C_1 = 0$. Далее уравнение легко интегрируется: $\ln f - \ln(2V - f) = V\xi/\mu$. Отсюда

$$f(\xi) = V \left[1 - \operatorname{th} \frac{2V}{\mu} \xi \right].$$

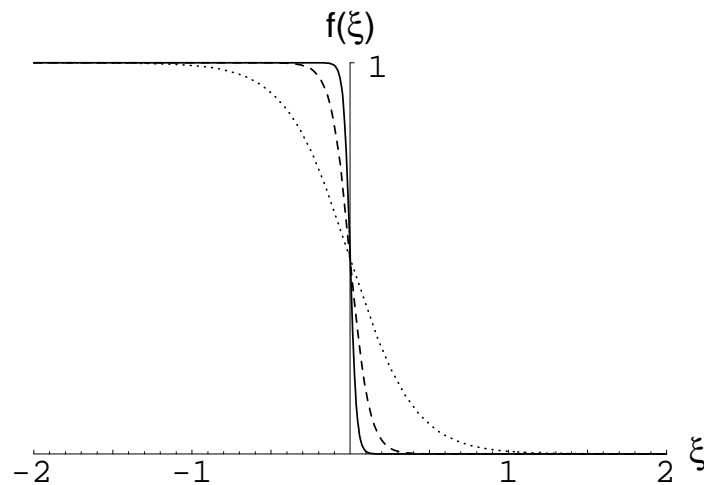


Рис. 6.3. Фронт ударной волны уравнения Бюргера при разных значениях параметра μ : сплошная линия — $\mu = 0,01$, пунктир — $\mu = 0,03$, точки — $\mu = 0,1$

Это решение имеет вид ударной волны со скачком $u = 2V$. Ширина фронта ударной волны $\delta = \mu/(2V)$ уменьшается с ростом величины скачка и соответственно растет при увеличении коэффициента вязкости μ . Важно, что при учете вязкости опрокидывания волны не происходит. Это решение как функция координаты ξ при $V = 1/2$ изображено на рис. 6.3.

Уравнение Кортевега — де Вриза

Обратимся к решению уравнения КДВ (6.3)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

в виде стационарной волны $u(x, t) = f(x - Vt)$ в предположении, что f обращается на бесконечности в нуль вместе со всеми производными. Иными словами, речь идет об уединенной волне (от англ. solitary wave, или сокращенно солитон). Форма солитона КДВ определяется из интегрирования обыкновенного уравнения третьего порядка:

$$f''' + 6ff' - Vf' = 0.$$

Это уравнение после однократного интегрирования имеет вид уравнения Ньютона

$$f'' = -3f^2 + Vf + C \equiv -\frac{\partial U}{\partial f}$$

для одномерного движения частицы в «потенциале» $U(f) = -Vf^2/2 + f^3 - Cf$. Отсюда следует интеграл энергии:

$$E = \frac{f'^2}{2} + U(f).$$

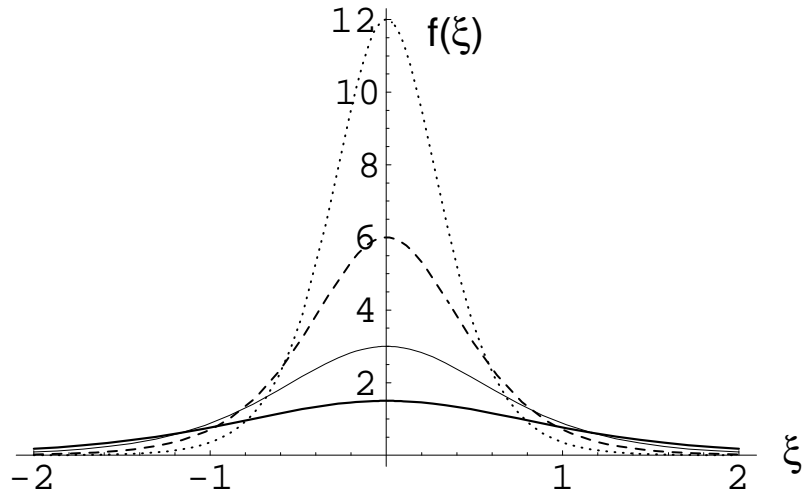


Рис. 6.4. Солитон уравнения Кортевега — де Вриза при разных значениях параметра V : толстая линия $V = 3$, тонкая — $V = 6$, пунктир — $V = 12$, точки — $v = 24$

Чтобы решение было уединенной волной или солитоном, обе константы интегрирования (C и E) должны быть равными нулю. В этом случае при нулевой энергии и $V > 0$ «частица» бесконечно «долго» уходит с максимальной точки потенциала $U(f) = -Vf^2/2 + f^3$ $f = 0$, достигает затем точки остановки $f = V/2$ (это максимальное значение f), отражается и потом экспоненциально «долго» возвращается к началу координат $f = 0$.

Для нахождения этой траектории (солитона) необходимо вычислить интеграл

$$\int \frac{df}{\sqrt{-2U(f)}} = \xi - \xi_0.$$

Этот интеграл после замены $y^2 = V/(2f)$ сводится к табличному:

$$-\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = -\operatorname{arccosh} y = \frac{\sqrt{V}}{2}(\xi - \xi_0).$$

Отсюда солитонное решение находится в явном виде:

$$u(x - Vt) = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2[\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)]},$$

где скорость $V = 4\kappa^2$. Ширина и амплитуда уединенной волны задаются одним параметром V . Из рис. 6.4 видно, как с ростом скорости V солитон становится более узким и более высоким.

ЛЕКЦИЯ 7.

Разделение переменных

7.1. Полное разделение переменных

Рассмотрим снова общее дифференциальное уравнение в частных производных (1.1). Будем искать его решение в виде произведения функции только одной переменной и функции всех остальных переменных:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_1(x_1)\phi(x_2, \dots, x_n).$$

Определение 7.1. Если уравнение можно переписать в виде

$$\mathcal{F}_1\left(x_1, \phi_1, \frac{d\phi_1}{dx_1}, \frac{d^2\phi_1}{dx_1^2}, \dots\right) = \mathcal{F}_2\left(x_2, \dots, x_n; \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}; \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}, \dots\right),$$

где в левой части содержится переменная x_1 и функции только от нее, то говорят, что произошло *разделение переменных*.

В этом случае обе части можно приравнять к постоянной C (*константе разделения*), потому что они зависят от разных переменных, и получится обыкновенное дифференциальное уравнение $\mathcal{F}_1 = C$. Иногда удается, записав решение уравнения $\mathcal{F}_2 = C$ в виде произведения функции, зависящей только от x_2 и функции переменных x_3, \dots, x_n , снова отделить переменную x_2 . Если такая процедура отделения переменных доходит до переменной x_{n-1} , то тогда говорят, что произошло полное разделение переменных. Существование полного или частичного разделения переменных связано, как правило, с симметрией исходного уравнения и граничных условий к нему. Например, если уравнение для функции $u(x_1, x_2, x_3)$, определенной во всем трехмерном пространстве \mathcal{R}^3 , инвариантно относительно всех возможных поворотов, то следует ожидать разделение переменных в сферической системе координат.

В качестве примера рассмотрим, каким образом происходит разделение переменных для уравнения Шредингера, описывающее движение электрона в атоме водорода в присутствии постоянного электрического поля \mathbf{E} . В этом случае стационарные состояния с энергией E находятся из решения стационарного уравнения Шредингера

(1.13):

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (7.1)$$

где оператор Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + e\mathbf{E}r. \quad (7.2)$$

Здесь m, e — масса электрона и абсолютная величина его заряда. (Далее будет использоваться атомная система единиц, в которой m, e и постоянная Планка равны единице: $e = m = \hbar = 1$.)

В уравнениях (7.1) и (7.2) перейдем к параболическим координатам ξ, η и φ , направив ось z вдоль постоянного поля \mathbf{E} :

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2}. \quad (7.3)$$

Новая система координат является криволинейной ортогональной системой координат. Новые переменные меняются в пределах: $0 \leq \xi, \eta < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

В плоскости (x, z) , т. е. при $\varphi = 0$, координатные линии представляют собой два семейства парабол $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$, повернутых вершинами вверх и вниз. Если вращать рисунок вокруг оси z , параболы перейдут в параболоиды вращения — координатные поверхности $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$. Третье семейство поверхностей $\varphi = \text{const}$ — это полуплоскости, проходящие через ось z . Параболические координаты точки указывают, на пересечении каких трех поверхностей находится точка.

Чтобы перейти в операторе Лапласа от декартовой к новой ортогональной системе координат $q_i = q_i(x, y, z)$, надо вычислить коэффициенты Ламе:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.$$

Оператор Лапласа, как известно, записывается через коэффициенты Ламе следующим образом:

$$\Delta = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{h}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \right),$$

где коэффициент преобразования объема обозначен $h = h_1 h_2 h_3$. Для параболических координат коэффициенты Ламе равны:

$$h_\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi}}, \quad h_\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\eta}}, \quad h_\varphi = \sqrt{\xi\eta}, \quad h = \frac{1}{4}(\xi + \eta).$$

В результате уравнение Шредингера записывается в виде

$$\left(\Delta + \frac{2}{r} - 2\mathcal{E}z\right)\psi = \kappa^2\psi, \quad \kappa^2 = -2E, \quad \mathcal{E} = |\mathbf{E}|, \quad (7.4)$$

где оператор Лапласа равен:

$$\Delta = \frac{4}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi \eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (7.5)$$

В уравнении (7.4) вся зависимость от φ содержится в последнем слагаемом в (7.5) в виде второй производной по углу φ . Поэтому зависимость от φ сразу отделяется. Формально это соответствует отысканию решения в виде $\psi(\xi, \eta, \varphi) = R(\xi, \eta)\Phi(\varphi)$, где для $\Phi(\varphi)$ получается уравнение

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.6)$$

здесь константа разделения m (магнитное квантовое число) принимает только целые значения, чтобы решение было 2π -периодической функцией угла φ .

Если теперь каждую декартову координату из (7.3) возвести в квадрат и все сложить, то найдется $r = (\xi + \eta)/2$. Отсюда видно, что переменные в оставшемся уравнении для $R(\xi, \eta)$ снова разделяются: $R(\xi, \eta) = X(\xi)Y(\eta)$. В результате получаются два однотишных уравнения:

$$\frac{(\xi X')'}{X} - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{\mathcal{E}\xi^2}{4} - \frac{\kappa^2\xi}{4} + C_1 = 0, \quad \frac{(\eta Y')'}{Y} - \frac{m^2}{4\eta} + \frac{\mathcal{E}\eta^2}{4} - \frac{\kappa^2\eta}{4} + C_2 = 0, \quad (7.7)$$

где $C_1 + C_2 = 1$. После замены

$$X = \frac{\chi_1}{\sqrt{\xi}}, \quad Y = \frac{\chi_2}{\sqrt{\eta}}$$

уравнения (7.7) сводятся к двум одномерным уравнениям Шредингера:

$$\frac{d^2\chi_1}{d\xi^2} + \left(\frac{C_1}{\xi} - \frac{m^2 - 1}{4\xi^2} - \frac{\mathcal{E}\xi}{4} - \frac{\kappa^2}{2} \right) \chi_1 = 0, \quad \frac{d^2\chi_2}{d\eta^2} + \left(\frac{C_2}{\xi} - \frac{m^2 - 1}{4\eta^2} + \frac{\mathcal{E}\eta}{4} - \frac{\kappa^2}{2} \right) \chi_2 = 0.$$

Для каждого из этих уравнений величина $\kappa^2/4$ имеет смысл энергии, а функции

$$U_1(\xi) = -\frac{C_1}{2\xi} + \frac{m^2 - 1}{8\xi^2} - \frac{\mathcal{E}\xi}{8}, \quad U_2(\eta) = \frac{C_2}{\xi} + \frac{m^2 - 1}{4\eta^2} - \frac{\mathcal{E}\eta}{8}$$

представляют собой потенциальные энергии. Важно, что вне зависимости от знака \mathcal{E} у этих уравнений нет локализованных решений, соответствующих связанному состоянию. Каждое состояние с $\kappa^2 > 0$ является квазистационарным за счет возможности подбарьерного прохождения. При малых полях, много меньших атомного, время жизни такого состояния экспоненциально велико.

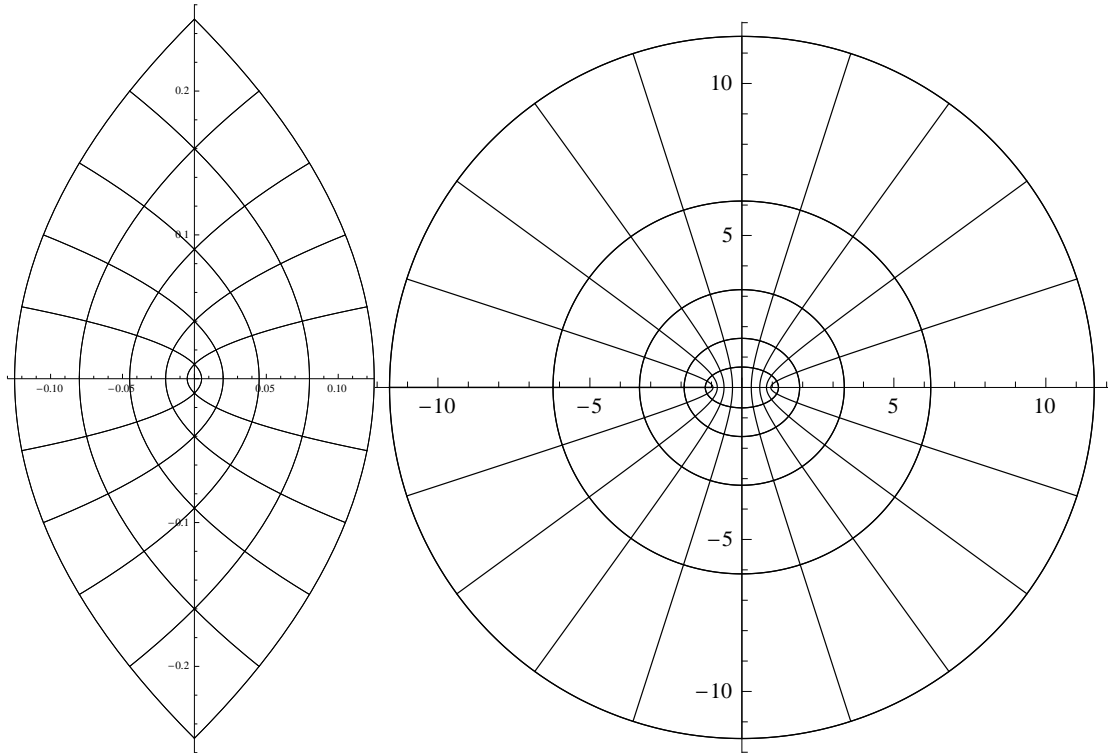


Рис. 7.1. Линии уровня параболических (слева) и эллиптических (справа) координат

Следует отметить, что при $\mathcal{E} = 0$ решение уравнений (7.7) выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию, которую мы изучим в лекции 11. Здесь же нам достаточно показать, что при $\mathcal{E} \neq 0$ происходит полное разделение переменных и задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, как видно из этого примера, переменные удается разделить только в специальных симметричных случаях. В особенно симметричных системах переменные разделяются в нескольких системах координат. Так, в уравнении Шредингера для невозмущенного атома водорода $\hat{H} = \hat{p}^2/2 - 1/r$ можно разделить переменные в сферических или параболических координатах, а в задаче о пространственном осцилляторе $\hat{H} = \hat{p}^2/2 + r^2/2$ переменные разделяются в декартовых, цилиндрических и сферических координатах [31].

Уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (7.8)$$

при постоянном k еще более симметрично, поэтому допускает полное разделение переменных более чем в двух координатных системах. Приведем только таблицы таких систем, отсылая читателя за доказательством к монографии Миллера [38]. Таблицы 7.1 и 7.2 содержат списки четырех координатных систем для двумерного и одиннадцати координатных систем для трехмерного пространства соответственно. Координатные линии $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ в двумерных параболических и эллиптических координатах показаны на рис. 7.1. Первые четыре координатные системы в трехмерном простран-

Таблица 7.1. Системы координат, в которых разделяются переменные в двумерном уравнении Гельмгольца

№	Координаты	Преобразование
1	Декартовы	x, y
2	Полярные	$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$
3	Параболические	$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), y = \xi\eta$
4	Эллиптические	$x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$

стве получают из двумерных добавлением оси z .

7.2. Метод Фурье

Разделение переменных для линейных уравнений второго порядка позволяет продвинуться намного дальше, чем в общем случае, а иногда также и решить задачу до конца. Для этого часто надо уметь решать спектральную задачу для эллиптического оператора

$$\hat{L} = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c, \quad (7.9)$$

где a_{ij}, b_k, c — функции $x = (x_1, \dots, x_n)$, квадратичная форма $Q = a_{ij} p_i p_j$ положительно определена. Требуется знать собственные функции $\psi_n(x)$ и собственные значения λ_n задачи в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\hat{L}\psi_n = \lambda_n \psi_n \quad (7.10)$$

с однородными условиями на границе области $\mathcal{S} = \partial\mathcal{D}$:

$$\left[\alpha \psi_n + \beta \frac{\partial \psi_n}{\partial n} \right]_{x \in \mathcal{S}} = 0, \quad (7.11)$$

где $\partial/\partial n$ означает производную по внутренней нормали к поверхности \mathcal{S} .

Следует сказать, что для (неоднородного) линейного эллиптического уравнения

$$\hat{L}u = g(x) \quad (7.12)$$

более общими являются неоднородные граничные условия на поверхности \mathcal{S} :

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = f(x). \quad (7.13)$$

Обычно эти задачи подразделяют на три типа:

$\alpha = 1, \beta = 0$ I краевая задача (или *задача Дирихле*)

$\alpha = 0, \beta = 1$ II краевая задача (или *задача Неймана*)

$\alpha\beta \neq 0$ III краевая задача.

Рассматриваются также краевые задачи, в которых граничная поверхность делится на части $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_m$, на каждой части ставится своя задача $\alpha = \alpha_k, \beta = \beta_k, f = f_k; k = 1, \dots, m$. Такую постановку называют *смешанной* краевой задачей.

Таблица 7.2. Системы координат, в которых разделяются переменные в трехмерном уравнении Гельмгольца

№	Координаты	Преобразование
1	Декартовы	$x \quad y \quad z$
2	Цилиндрические	$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$
3	Параболического цилиндра	$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$ $y = \xi\eta$ $z = z$
4	Эллиптического цилиндра	$x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta$ $y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$ $z = z$
5	Сферические	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
6	Вытянутого сфероида	$x = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \cos \varphi$ $y = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \sin \varphi$ $z = a \operatorname{ch} \eta \cos \alpha$
7	Сплюснутого сфероида	$x = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \cos \varphi$ $y = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \sin \varphi$ $z = a \operatorname{sh} \eta \cos \alpha$
8	Параболические	$x = \xi\eta \cos \varphi$ $y = \xi\eta \sin \varphi$ $z = (\xi^2 - \eta^2)/2$
9	Параболоидальные	$x = 2c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \operatorname{sh} \gamma$ $y = 2c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \operatorname{ch} \gamma$ $z = \frac{c}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta - \operatorname{ch} 2\gamma)$
10	Эллипсоидальные	$x = \sqrt{\frac{(\mu - a)(\nu - a)(\rho - a)}{a(a - 1)}}$ $y = \sqrt{\frac{(\mu - 1)(\nu - 1)(\rho - 1)}{1 - a}}$ $z = \sqrt{\frac{\mu\nu\rho}{a}}$
11	Конические	$x = r \sqrt{\frac{(b\mu - 1)(b\nu - 1)}{1 - b}}$ $y = r \sqrt{\frac{b(\mu - 1)(\nu - 1)}{b - 1}}$ $z = r \sqrt{b\mu\nu}$

Пусть спектр для оператора \hat{L} (7.9) с граничным условием (7.11) отрицательный, т. е. все $\lambda_n < 0$, а система собственных функций полна³. В этом случае можно найти решение линейного гиперболического уравнения с начальными условиями

$$u_{tt} = \hat{L}u, \quad u(x, 0) = \phi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \phi_1(x) \quad (7.14)$$

и с теми же однородными граничными условиями (7.11). Продемонстрируем, как строится решение.

Ищем решение в виде $u(x, t) = T(t)\psi(x)$, тогда переменная t отделяется:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{\hat{L}\psi}{\psi} = -\omega^2,$$

а константа разделения получается отрицательной в силу отрицательности собственных чисел оператора \hat{L} . Решение обыкновенного уравнения дается формулой $T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Зная полную систему собственных функций, мы можем искать решение в виде разложения с коэффициентами, зависящими от t , и получить обыкновенные уравнения на коэффициенты, приравнивая выражения при одинаковых собственных функциях:

$$u(x, t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(x) \Rightarrow \ddot{c}_n = \lambda_n c_n. \quad (7.15)$$

Обозначим $\lambda_n = -\omega_n^2 < 0$, тогда $c_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$. Теперь при $t = 0$ получается разложение в обобщенный ряд Фурье заданных начальных условий:

$$\phi_0(x) = \sum_n A_n \psi_n(x), \quad \phi_1(x) = \sum_n \omega_n B_n \psi_n(x).$$

Теперь, пользуясь ортогональностью системы функций, мы можем найти все коэффициенты A_n, B_n и построить решение задачи Коши (7.14).

Замечание 7.1. Если надо решить не гиперболическое уравнение, а параболическое с одним начальным условием

$$u_t = \hat{L}u, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad (7.16)$$

то, разлагая по собственным функциям, получим обыкновенные уравнения первого порядка:

$$\dot{c}_n = \lambda_n c_n \Rightarrow c_n = A_n e^{-|\lambda_n|t}.$$

Тогда все коэффициенты A_n найдутся с помощью разложения начального условия:

$$\phi(x) = \sum_n A_n \psi_n(x).$$

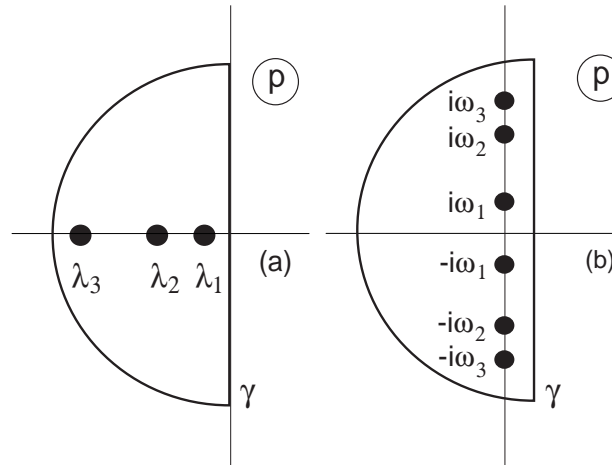


Рис. 7.2. Контур γ в p -плоскости: a — для параболического уравнения, b — для гиперболического

Замечание 7.2. Все формулы метода Фурье можно вывести также с помощью преобразования Лапласа по t . В частности, для параболического уравнения (7.16), проводя преобразование Лапласа

$$u_p(x) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt,$$

получим уравнение $pu_p = \hat{L}u_p + \phi(x)$. Подставляя разложение образа решения $u_p = \sum c_n \psi_n$ и начального условия $\phi = \sum a_n \psi_n$, найдем коэффициенты $c_n = a_n / (p - \lambda_n)$, откуда

$$u_p = \sum \frac{a_n}{p - \lambda_n} \psi_n \Rightarrow u(x, t) = \sum_n a_n \psi_n \oint_\gamma \frac{dp}{2\pi i} \frac{e^{pt}}{p - \lambda_n},$$

где контур γ для каждого конечного отрезка ряда замыкается полуокружностью большого радиуса R и охватывает полюсы подынтегрального выражения, которые лежат на левой действительной полуоси (рис. 7.2, a). Вычисляя интеграл как предел суммы вычетов при $R \rightarrow \infty$, получим то же самое разложение решения параболического уравнения. Для гиперболического уравнения полюсы $p = \pm i\omega_i = \pm i\sqrt{-\lambda_i}$ лежат на мнимой оси, как показано на рис. 7.2, b .

Замечание 7.3. Если уравнение неоднородное, его можно решить, разлагая правую часть по системе функций ψ_n .

Упражнение 7.1. Методом преобразования Лапласа получите решение задачи Коши для неоднородных уравнений $u_{tt} = \hat{L}u + f$ и $u_t = \hat{L}u + f$.

³Для полноты системы собственных функций дифференциального оператора в бесконечномерном гильбертовом пространстве самосопряженности недостаточно. Требуется, чтобы собственные значения были ограничены сверху (или снизу) и $\lambda_n \rightarrow -\infty$ (или $\rightarrow \infty$) при $n \rightarrow \infty$. Подробное изложение теории, не предполагающей ограниченности операторов, можно найти в учебнике Михлина [39].

ЛЕКЦИЯ 8.

Разделение переменных в цилиндрических координатах

8.1. Задача о круглой мембране

В данной лекции мы разделим переменные двумерного уравнения Гельмгольца в полярных координатах. В качестве физического примера рассмотрим задачу о малых гармонических колебаниях круглой мембраны радиуса a с закрепленным краем. Осцилляции мембраны описываются двумерным волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_2 u = 0, \quad u(a, \varphi, t) = 0,$$

где c — скорость звука, а

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

— двумерный оператор Лапласа в полярных координатах. Для гармонических колебаний мембраны частоты ω решение следует искать в виде

$$u(r, \varphi, t) = U(r, \varphi) e^{-i\omega t}.$$

Для функции $U(r, \varphi)$ получается спектральная задача — уравнение Гельмгольца:

$$\Delta_2 U = -k^2 U, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad U(a, \varphi) = 0, \quad (8.1)$$

где $-k^2$ представляет собой собственное значение оператора Лапласа.

Уравнение (8.1) допускает разделение переменных $U = R(r)\Phi(\varphi)$:

$$\frac{(rR)'}{rR} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = -k^2.$$

Отсюда на функцию $\Phi(\varphi)$ получается уравнение $\Phi'' + m^2\Phi = 0$, где m — параметр разделения, принимающий только целые значения, как в формуле (7.6). На радиальную

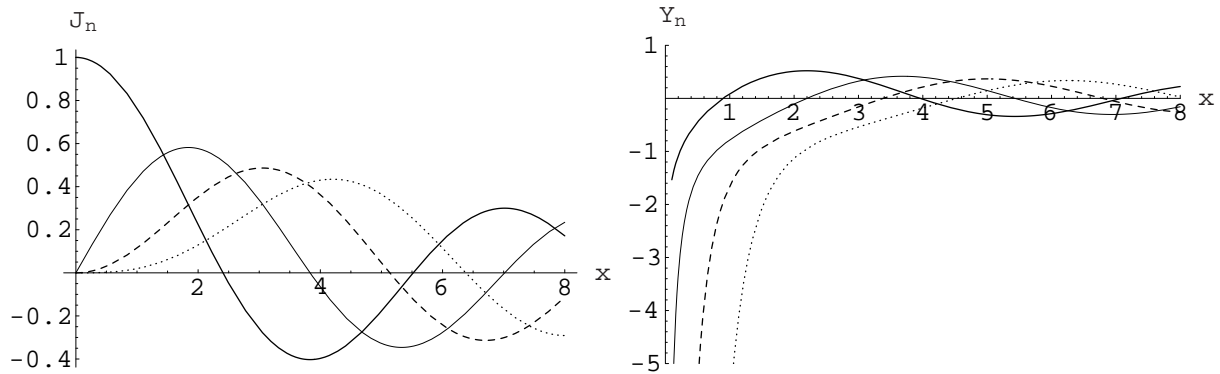


Рис. 8.1. Функции Бесселя $J_n(x)$ (слева) и Неймана $Y_n(x)$ (справа): толстая линия — $n = 0$, тонкая — $n = 1$, пунктир — $n = 2$, точки — $n = 3$

часть $R(r)$ возникает уравнение

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0,$$

которое с помощью замены $x = kr$ записывается в универсальном, не зависящем от k виде

$$R'' + \frac{1}{x}R' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0. \quad (8.2)$$

Это уравнение называется *уравнением Бесселя*. Решением уравнения являются *функции Бесселя* $J_m(x)$ и *функции Неймана*⁴ $Y_m(x)$, изображенные на рис. 8.1. В нашей задаче о мембране надо искать решение, не имеющее особенностей при $x = 0$, поэтому остаются только функции Бесселя.

Граничные условия при $r = a$ соответствуют требованию $J_m(ka) = 0$, из которого определяются собственные значения $k_{mn} = j_{mn}/a$, где j_{mn} означает n -й нуль функции Бесселя порядка m . Таким образом, решение задачи Коши для волнового уравнения можно записать в виде ряда Фурье:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{m,n} (A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t) J_m(k_{mn}r) e^{im\varphi},$$

где коэффициенты A_{mn}, B_{mn} определяются исходя из начальных условий. Таким образом, мы решили задачу о мембране.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств функции Бесселя. Функции Бесселя относятся к *цилиндрическим функциям*. В физических задачах эти функции возникают при разделении переменных различных уравнений в цилиндрических координатах. Сводку формул и таблицы всех цилиндрических функций можно найти в справочниках [1, 60, 62]. Там же содержатся таблицы других основных специальных функций. Теорию цилиндрических функций, а также вывод различных соотношений между цилиндрическими функциями можно найти в книге [10].

⁴Иногда, особенно часто в физической литературе, их обозначают N_m .

8.2. Функции Бесселя

Разложение в ряд

Сначала найдем, как ведет себя решение уравнения Бесселя в нуле, положив $R \sim x^\sigma, x \rightarrow 0$. Старшей степенью в уравнении (8.2) будет $x^{\sigma-2}$. Чтобы коэффициент при старшей степени обратился в нуль, должно выполняться условие $\sigma^2 - m^2 = 0$, откуда оставляем $\sigma = +|m|$, а второй корень отбрасываем, поскольку соответствующее решение имеет особенность при $x \rightarrow 0$ и дается функцией Неймана $Y_m(x)$ ⁵. Теперь выделим степенное поведение в начале координат явно $R = x^m w(x)$, считая, что $m \geq 0$. В результате подстановки в исходное уравнение получаем:

$$w'' + \frac{2m+1}{x}w' + w = 0.$$

Решение этого уравнения ищем в виде разложения по степеням x : $w = \sum c_n x^n$, подставляем в уравнение и затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{ll} x^{-1} : & c_1 = 0 \\ 1 : & 2c_2 + 2(2m+1)c_2 + c_0 = 0 & c_2 = -\frac{c_0}{4(m+1)} \\ x : & 6c_3 + 3(2m+1)c_3 + c_1 = 0 \\ x^2 : & 12c_4 + 4(2m+1)c_4 + c_2 = 0 & c_4 = -\frac{c_2}{8(m+2)} \end{array}$$

В левом столбце перед знаком двоеточия записана степень x , в среднем — уравнение, получившееся приравнением коэффициентов при данной степени, а в правом — получившаяся рекуррентная формула для коэффициента. Видно, что коэффициенты при нечетных степенях исчезают. Отсюда получается общая формула для коэффициентов при четных степенях.

Все коэффициенты разложения пропорциональны нормировочному коэффициенту c_0 , который из уравнения найти нельзя. Его выбирают равным $c_0 = 2^{-m}/m!$, так, чтобы разложение функции Бесселя в ряд выглядело наиболее просто:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \frac{1}{n!(m+n)!}. \quad (8.3)$$

Заменяя факториалы на Γ -функцию Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (8.4)$$

⁵В задачах дифракции и рассеяния иногда удобно перейти к линейным комбинациям функций Бесселя и Неймана $H_m^{(1,2)}(z) = J_m(z) \pm iY_m(z)$. Такие комбинации называются функциями Ганкеля.

можно обобщить формулу (8.3) на дробные и комплексные индексы:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \quad (8.5)$$

В частности, для отрицательного целого $\nu = -m$ можно заменить индекс суммирования на $n' = n - m = 0, 1, \dots$. В этом случае суммирование начинается с $n' = 0$. Предыдущие слагаемые при этом обратятся в нуль из-за того, что Γ -функция, стоящая в знаменателе, обращается в бесконечность при целых отрицательных аргументах. Возникающая сумма снова сводится к ряду (8.3). В результате получается формула $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$.

Рекуррентное соотношение

Рекуррентное соотношение для функций Бесселя может быть выведено с помощью того же разложения (8.3):

$$\begin{aligned} J_{m-1} + J_{m+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m-1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m+1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n+1)!} = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m-1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n-1)!} \\ &+ \sum_{n'=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n'+m-1} \frac{(-1)^{n'-1}}{(n'-1)!(m+n')!} = \frac{2m}{x} J_m. \end{aligned}$$

Здесь мы в первой сумме выделили нулевое слагаемое, а во второй заменили индекс суммирования на $n' = n+1$. В результате обе суммы объединились в одну и получилась формула

$$J_{m-1} + J_{m+1} = \frac{2m}{x} J_m. \quad (8.6)$$

Упражнение 8.1. Получите тем же способом рекуррентное соотношение для разности

$$J_{m-1} - J_{m+1} = 2J'_m. \quad (8.7)$$

Такое соотношение называется формулой дифференцирования.

Замечание 8.1. Данные соотношения можно также получить используя определение функции Бесселя как решение дифференциального уравнения (8.2).

Интегральные представления и производящие функции

Двумерное уравнение Гельмгольца (8.1) имеет частное решение $U(r, \varphi) = e^{iky}$, которое легко проверить в декартовых координатах. Его можно разложить по собственным

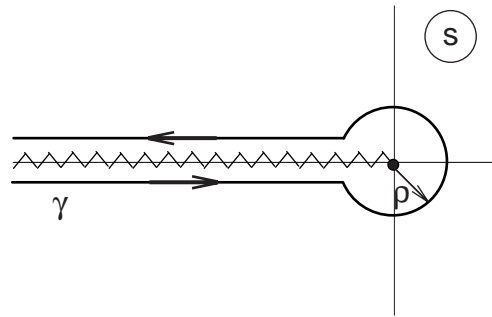


Рис. 8.2. Контур интегрирования γ в плоскости комплексного переменного s для представления Ганкеля функции Эйлера

функциям лапласиана в полярных координатах:

$$e^{ikr \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\varphi} J_m(kr).$$

Коэффициенты этого ряда Фурье находятся, как обычно, интегрированием:

$$c_m J_m(kr) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ikr \sin \varphi - im\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Последнее соотношение справедливо при любых $x = kr$, поэтому можно устремить $x \rightarrow 0$, получится:

$$c_m \frac{x^m}{2^m m!} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^n \frac{(ix)^n}{n!} \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Самый большой член суммы, не обращающийся в нуль, появляется при $n = m$ (именно в нем содержится экспонента $e^{im\varphi}$, которая сократится с $e^{-im\varphi}$). Интеграл равен 2π , поэтому все коэффициенты $c_m = 1$. Таким способом мы сразу получили интегральное представление и *производящую функцию*:

$$J_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \varphi - im\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (8.8)$$

$$e^{ix \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(x). \quad (8.9)$$

Это представление обычно называют *представлением Бесселя*, оно справедливо для целых m .

Чтобы обобщить интегральное представление на произвольные ν , сначала выведем две формулы. Начнем с представления Ганжеля функции Эйлера (8.4):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^s s^{-z} ds, \quad (8.10)$$

где контур γ обходит отрицательную действительную полуось (вдоль которой идет разрез) в положительном направлении (рис. 8.2). Контур интегрирования разбивается на две прямые и окружность c_ρ радиуса $\rho \rightarrow 0$, интеграл по окружности стремится к нулю, а по нижнему и верхнему берегам разреза сводится к одинаковому виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^s s^z dz &= \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{-\rho}^{-\infty} + \int_{c_\rho} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-t} \left[(te^{+i\pi})^{-z} - (te^{-i\pi})^{-z} \right] dt = \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-z} e^{-t} dt = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1-z). \end{aligned}$$

Чтобы окончательно получить формулу (8.10), надо еще вывести соотношение между Γ -функциями:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (8.11)$$

Воспользуемся известным выражением для B -функции Эйлера

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

из которого получается

$$B(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt.$$

Заменой переменной $t = e^\xi / (1 + e^\xi)$ сводим его к интегралу в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{z\xi} d\xi}{1 + e^\xi},$$

который в свою очередь можно найти в таблице или вычислить методом Ватсона — Зоммерфельда как сумму вычетов в полюсах $\xi = \pi i, 3\pi i, 5\pi i, \dots$. Получится геометрическая прогрессия

$$2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z(2n+1)\pi i}}{e^{(2n+1)\pi i}} = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

что доказывает формулу (8.11), а следовательно, и представление Ганкеля (8.10).

Вернемся к выводу интегрального представления функции Бесселя при произвольном ν . Воспользуемся разложением (8.5), где в каждом слагаемом заменим функцию $1/\Gamma(n + \nu + 1)$ ее интегральным представлением. Далее поменяем порядок суммирования и интегрирования и заменим переменную интегрирования $s = xt/2$. Тогда сумма соберется в экспоненту, а контурный интеграл останется:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \quad (8.12)$$

Называют эту формулу интегральным представлением *Шлефли*. При целых ν разрез на рис. 8.2 не нужен, контур γ можно замкнуть, тогда заменой $z = e^{i\varphi}$ представление Шлефли переводится в представление Бесселя (8.8).

Соотношение ортогональности

Соотношение ортогональности мы выведем из дифференциального уравнения Бесселя, записав его для двух значений k , удовлетворяющих нулевым граничным условиям $J_m(k_1 a) = J_m(k_2 a) = 0$:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) J_m(k_1 r) = -k_1^2 J_m(k_1 r), \quad \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) J_m(k_2 r) = -k_2^2 J_m(k_2 r).$$

Первое уравнение умножим на $J_m(k_2 r)$, второе — на $J_m(k_1 r)$, вычтем друг из друга и проинтегрируем по $r dr$ от 0 до a . Затем интегрируем по частям и находим:

$$r \left[J_m(k_2 r) \frac{dJ_m(k_1 r)}{dr} - J_m(k_1 r) \frac{dJ_m(k_2 r)}{dr} \right]_0^a = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^a J_m(k_1 r) J_m(k_2 r) r dr.$$

Сразу видно, что решения с $k_1 \neq k_2$ ортогональны. Для одинаковых k в левой и правой частях получается нуль, и надо раскрыть неопределенность по правилу Лопиталья. Получится нормировочный множитель, а соотношение ортогональности запишется как

$$\int_0^a J_m \left(j_{mn_1} \frac{r}{a} \right) J_m \left(j_{mn_2} \frac{r}{a} \right) r dr = \frac{a^2}{2} [J'_m(j_{mn_1})]^2 \cdot \delta_{n_1 n_2}. \quad (8.13)$$

Обратите внимание, что ортогональны функции Бесселя одного порядка m , но с разными $k_{1,2} = j_{m,n_{1,2}}$. Это означает разное число узлов двух решений на отрезке $0 \leq r \leq a$.

Упражнение 8.2. Выведите соотношение ортогональности и найдите нормировочный множитель для другого граничного условия $J'_m(k_1 a) = J'_m(k_2 a) = 0$.

Таким образом, после дифференциального уравнения Бесселя (8.2) мы изучили степенной ряд (8.3), рекуррентные соотношения (8.6), (8.7), интегральные представления (8.8), (8.12), производящую функцию (8.9) и соотношение ортогональности (8.13). По этой же схеме мы будем изучать и другие специальные функции с той разницей, что вместо степенного ряда для ортогональных полиномов будет выводиться формула Родрига. В примерах лекций 12.–13. мы выведем также несколько асимптотических выражений для специальных функций. По этой схеме упорядочены формулы в сводке, вынесенной в приложение.

ЛЕКЦИЯ 9.

Разделение переменных в сферических координатах

9.1. Частица в центральном поле

Рассмотрим квантовомеханическую задачу о движении частицы в центральном поле, т. е. будем искать собственные функции гамильтониана:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(r),$$

где потенциальная энергия U зависит только от расстояния r до начала координат. В дальнейшем будем полагать $\hbar = m = 1$.

В сферических координатах оператор Лапласа разбивается на радиальную и угловую части Δ_Ω :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega, \quad \Delta_\Omega = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Отсюда видно, что для стационарного уравнения Шредингера (1.13) переменные разделяются, если искать решение в виде произведения радиальной и угловой функций $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$:

$$-2(E - U(r)) = \frac{(r^2 R')'}{r^2 R} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{(\sin \theta \Theta)'}{\sin \theta \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} \right]. \quad (9.1)$$

Уравнение на $\Phi(\varphi)$ получается вида $\Phi'' + m^2 \Phi = 0$. Его решение уже известно: $\Phi = e^{im\varphi}$, где m — целое число. Теперь последовательно займемся уравнениями на $\Theta(\theta)$ и $R(r)$.

9.2. Угловое уравнение. Функции Лежандра

Угловое уравнение получается, если выражение в квадратных скобках предыдущего уравнения приравнять ко второй константе разделения λ :

$$\frac{(\sin \theta \Theta)'}{\sin \theta \Theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \lambda. \quad (9.2)$$

Заменой $x = \cos \theta$ это уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2}\Theta = \lambda\Theta.$$

Сначала исследуем поведение при $x \rightarrow \pm 1$ (особые точки). Для этого решение в окрестности точки $x = 1$ ищем в виде степени от $\xi = x - 1$ при $\xi \rightarrow 0$: $\Theta \sim \xi^\sigma$. Приравняв коэффициент при самой старшей степени ξ к нулю, получаем $-2\sigma^2 + m^2/2 = 0$ или $\sigma = \pm m/2$. Считая m неотрицательным, выбираем корень со знаком $+$, чтобы решение не имело особенности при $\xi \rightarrow 0$. Аналогично поступим с точкой $x = -1$, “южным” полюсом сферической системы координат. Объединяя обе эти асимптотики, решение представим в виде

$$\Theta = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u(x),$$

где функция u подчиняется уравнению

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' - [m(m+1) + \lambda]u = 0. \quad (9.3)$$

Для того чтобы найти решение этого уравнения при произвольном (целом) m , вначале рассмотрим уравнение (9.3) при $m = 0$:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' - \lambda y = 0. \quad (9.4)$$

Это уравнение называется *уравнением Лежандра*. Будем его последовательно дифференцировать. В результате однократного дифференцирования получим:

$$(1-x^2)y''' - 4xy'' - [2 + \lambda]y' = 0.$$

Это уравнение совпадает с (9.3) при $m = 1$ для $y_1 = y'$. После m -кратного дифференцирования легко получить

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - 2x(m+1)y^{(m+1)} - [m(m+1) + \lambda]y^{(m)} = 0.$$

Это уравнение для $y^{(m)}$ совпадает с уравнением (9.3) для y_m . Таким образом, решение (9.3) есть m -я производная решения уравнения Лежандра: $y_m = y^{(m)}$. Остается решить уравнение Лежандра. Будем искать решение уравнения (9.4) в виде разложения в

ряд по степеням x : $y = \sum c_n x^n$. Подстановка этого ряда в уравнение приводит к рекуррентным соотношениям на коэффициенты c_n :

$$\begin{aligned} 1 : \quad & 2c_2 - \lambda c_0 = 0, \quad c_2 = \frac{\lambda}{2} c_0 \\ x : \quad & 2 \cdot 3c_3 - (2 + \lambda)c_1 = 0, \quad c_3 = \frac{\lambda+2}{2 \cdot 3} c_1 \\ x^2 : \quad & 3 \cdot 4c_4 - (2 + 4 + \lambda)c_2 = 0, \quad c_4 = \frac{\lambda+4+2}{3 \cdot 4} c_2, \dots \end{aligned}$$

Из выписанных трех соотношений легко увидеть, что связанными оказываются между собой коэффициенты при четных степенях и нечетных степенях по отдельности. Для четных коэффициентов в общем случае имеем:

$$c_{2n+2} = \frac{\lambda + 2 \dots + 2n}{(2n+1)(2n+2)} c_{2n}, \quad (9.5)$$

а для нечетных —

$$c_{2n+1} = \frac{\lambda + 2 + \dots + 2n}{2n(2n+1)} c_{2n-1}. \quad (9.6)$$

При произвольном фиксированном λ коэффициенты с большим номером будут практически одинаковыми, так как в числителе рекуррентных соотношений получается $\lambda + 2 + 4 + \dots + 2k = \lambda + k(k+1) \sim k^2$ ($k \rightarrow \infty$), а в знаменателе $(k+1)(k+2) \sim k^2$.

Пусть $c_0 \neq 0, c_1 = 0$, тогда останутся только четные коэффициенты. Такой ряд будет сходиться при $x^2 < 1$ как геометрическая прогрессия $1 + x^2 + x^4 + \dots = 1/(1-x^2)$. Таким образом, у решения имеется особенность при $x \rightarrow \pm 1$. То же самое происходит и для нечетных решений, когда $c_0 = 0, c_1 \neq 0$. Особенности не будет только при дискретных значениях λ , при которых ряд обрывается. Из соотношений (9.5), (9.6) следует, что обрыв ряда происходит при

$$\lambda = -l(l+1), \quad \text{где } l \text{ — целое число.}$$

Следовательно, условие регулярности на полюсах позволяет найти не только решение, но и собственные значения λ . Решения уравнения Лежандра, не имеющие особенностей при $x^2 \rightarrow 1$, содержат конечное число членов разложения. Эти многочлены называются *полиномами Лежандра*. Степень полинома равна l . В квантовой механике l называется орбитальным квантовым числом. Оно совпадает с числом нулей полинома Лежандра. Четность этих полиномов равна $(-1)^l$, т. е. при замене $x \rightarrow -x$ $P_l(x) \rightarrow (-1)^l P_l(-x)$. Полиномы Лежандра $P_l(x)$ нормируются в точке $x = 1$: $P_l(1) = 1$.

При этой нормировке полиномы Лежандра могут быть представлены с помощью *формулы Родрига*:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (9.7)$$

Второе линейно независимое решение дается функциями $Q_l(x)$, которые имеют особенности в точках $x = \pm 1$ и называются *функциями Лежандра второго рода*. Функции Лежандра называют также *сферическими функциями* (рис. 9.1).

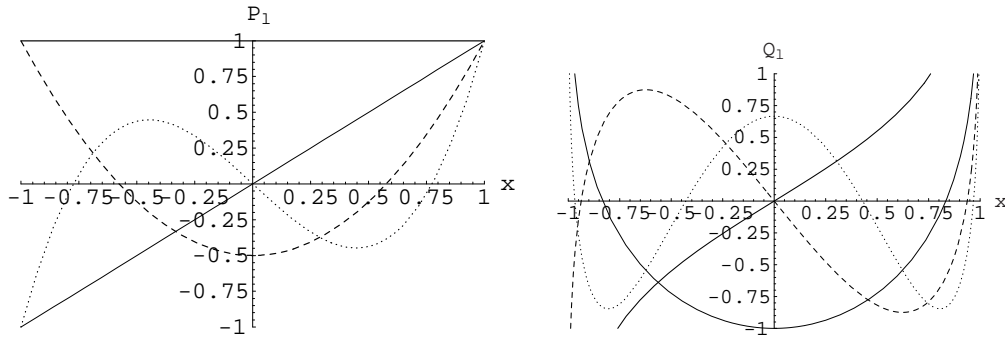


Рис. 9.1. Функции Лежандра первого рода $P_l(x)$ (слева) и второго рода $Q_l(x)$ (справа): толстая линия — $l = 0$, тонкая — $l = 1$, пунктир — $l = 2$, точки — $l = 3$

Покажем теперь, что (9.7) есть решение уравнения (9.4). Для этого введем вспомогательную функцию $W_l(x) = (x^2 - 1)^l$ и будем ее дифференцировать. Первое дифференцирование дает

$$(x^2 - 1)W_l' - 2lxW_l = 0.$$

Три следующих дифференцирования

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)W_l'' + (2 - 2l)xW_l' - 2lW_l &= 0 \\ (x^2 - 1)W_l''' + (4 - 2l)xW_l'' + (2 - 4l)W_l' &= 0 \\ (x^2 - 1)W_l^{IV} + (6 - 2l)xW_l''' + (4 + 2 - 6l)W_l'' &= 0 \dots \end{aligned}$$

позволяют написать результат $l + 1$ шага:

$$(1 - x^2)W_l^{(l+2)} - 2xW_l^{(l+1)} - l(l+1)W_l^{(l)} = 0.$$

Для функции $W_l^{(l)}$ это есть уравнение Лежандра, т. е. $W_l^{(l)}$ удовлетворяет уравнению (9.4) и тем самым формула Родрига (9.7) доказана.

Вернемся к уравнению (9.3), его решения — производные полиномов Лежандра — называются *присоединенными функциями Лежандра*:

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad m \geq 0.$$

Полное решение угловой задачи, собственные функции оператора Δ_Ω ,

$$\Delta_\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

называются *сферическими гармониками*. Сферические гармоники просто выражаются через присоединенные функции Лежандра первого рода:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta),$$

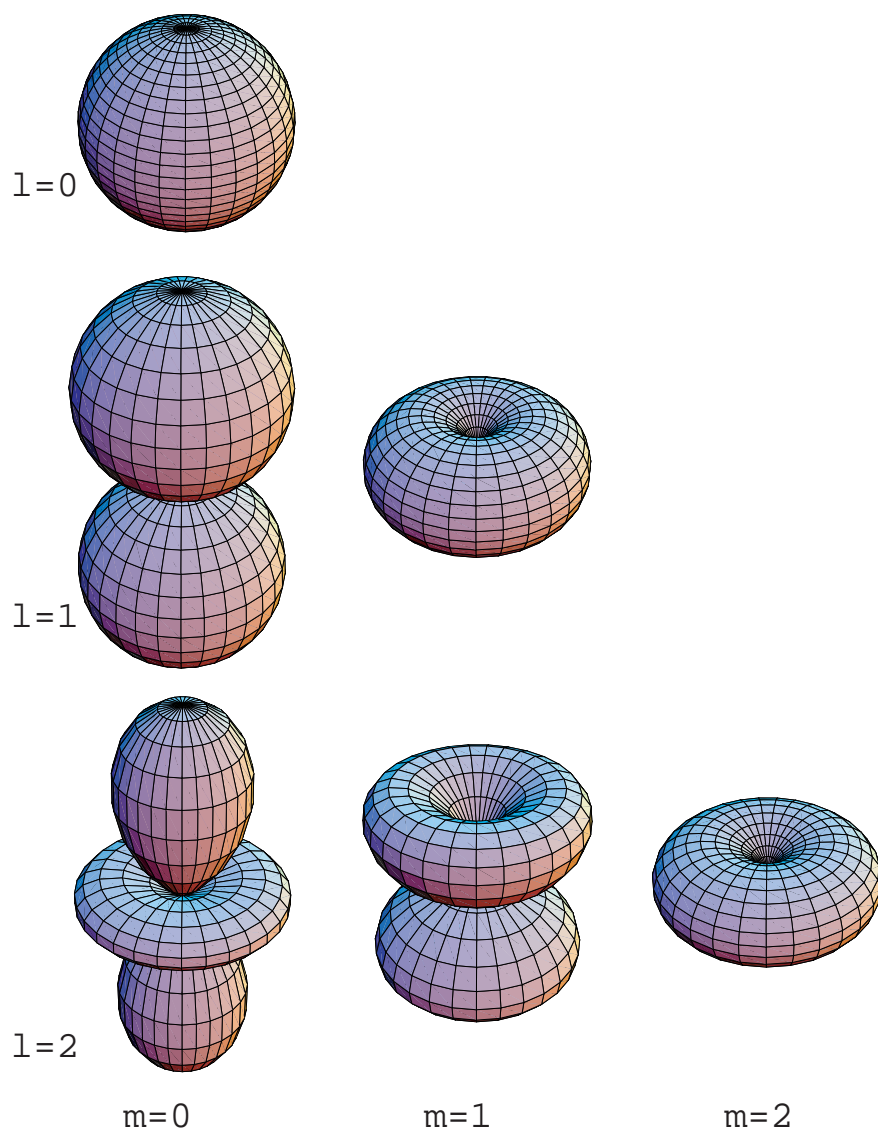


Рис. 9.2. Сферические гармоники $|Y_{lm}(\theta, \varphi)|$ при $l = 0, 1, 2, 0 \leq m \leq l$

где C_{ml} — нормировочные коэффициенты, подобранные так, чтобы сферические гармоники стали ортонормированными на единичной сфере

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Для небольших значений орбитального квантового числа $l \leq 2$ графики сферических гармоник как функций полярного и азимутального углов изображены на рис. 9.2. При $l = 0$ получилась сфера, по мере увеличения l поверхность становится все более изрезанной. Функции с максимальным числом $m = l$ сосредоточены вблизи экватора. То, что мы изобразили абсолютную величину $|Y_{lm}|$, сделало картинку аксиально-симметричными, не зависящими от азимутального угла φ . Фактически на рис. 9.2 показаны присоединенные функции Лежандра. Теорию сферических функций можно найти в книге [9], включая обобщение на комплексный аргумент и дробные индексы.

Упражнение 9.1. Найдите коэффициенты C_{lm} .

9.3. Радиальное уравнение. Сферические функции Бесселя

Вернемся к радиальному уравнению (9.1) и попробуем решить его для свободной частицы $U = 0$, когда оно сводится к уравнению Гельмгольца:

$$R_l'' + \frac{2}{r} R_l' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0. \quad (9.8)$$

Введем переменную $x = kr$ и новую неизвестную функцию $\chi_l(r) = R_l(r)r$. В результате этой замены уравнение (9.8) превращается в одномерное стационарное уравнение Шредингера:

$$\chi_l'' + \left[1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l = 0.$$

При $l = 0$ это уравнение легко решается: $\chi_0 = \sin x$, а второе решение $R_0 = \cos x/x$ мы вынуждены отбросить как имеющее особенность при $x = 0$.

Теперь выполним другую замену неизвестной функции $R = u(x)/\sqrt{x}$. В результате имеем:

$$u'' + \frac{1}{x} u' + \left[1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{x^2} \right] u = 0.$$

Это уравнение — уже знакомое нам уравнение Бесселя (8.2), но для функций с полуцелым индексом $u = J_{l+1/2}(x)$. Сопоставив с предыдущим решением для $l = 0$, сразу найдем выражение $J_{1/2}$ через элементарные функции:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (9.9)$$

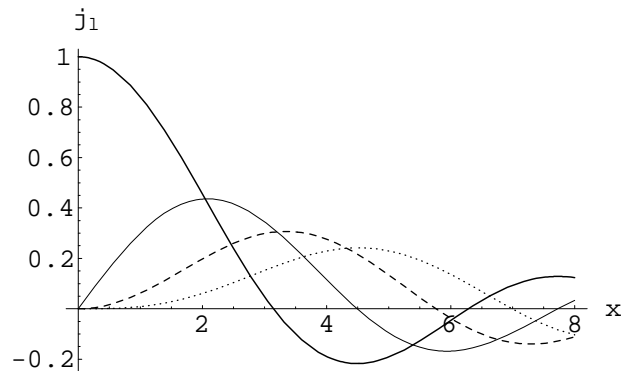


Рис. 9.3. Сферические функции Бесселя $j_l(x)$: толстая линия — $l = 0$, тонкая — $l = 1$, пунктир — $l = 2$, точки — $l = 3$.

Здесь коэффициент $\sqrt{2/\pi}$ определяется из нормировки функций Бесселя.

Покажем теперь, что все функции Бесселя с полуцелым индексом $l + 1/2$ выражаются через тригонометрические функции и степени x . Для этого воспользуемся рекуррентными соотношениями (8.6) и (8.7). Вычитая эти соотношения друг из друга, находим:

$$J_{\nu+1} = -x^\nu \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu).$$

Отсюда получается общая формула для функций Бесселя с полуцелым индексом:

$$J_{\frac{3}{2}} = -x^{1/2} \frac{d}{dx} x^{-1/2} J_{\frac{1}{2}}, \quad J_{\frac{5}{2}} = x^{5/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 x^{-1/2} J_{\frac{1}{2}}, \dots$$

$$J_{l+\frac{1}{2}} = (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{l+1/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}.$$

Иногда вводят *сферические функции Бесселя*, определенные с более удобной для данной задачи нормировкой. Для них формула становится короче:

$$j_l = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}, \quad j_l = x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}.$$

Графики этих функций показаны на рис. 9.3.

ЛЕКЦИЯ 10.

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Разделяя переменные в уравнениях Гельмгольца и Шредингера в цилиндрических и сферических координатах, мы столкнулись с функциями Бесселя и Лежандра. Исторически так и были открыты когда-то цилиндрические, сферические, сфероидальные функции, функции параболического цилиндра и т. п. Нам, однако, понадобится и более поздний подход, основанный на классификации специальных функций и их связи с гипергеометрической функцией. Гипергеометрическая функция имеет целый ряд замечательных свойств, в частности, интегральные представления, рекуррентные соотношения, производящие функции и т. д. [1, 9, 10, 43, 60, 62]. Функции, более сложные, чем гипергеометрическая, гораздо менее поддаются исследованию. Для них, например, нет даже интегральных представлений.

Цилиндрические и сферические функции появились в нашем курсе как решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами. В данной лекции мы рассмотрим основные положения математической теории дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, исследуя решение этих уравнений в комплексной плоскости. Наша цель — по виду уравнения определить, сводится ли оно к гипергеометрическому.

10.1. Канонический вид

Однородное линейное уравнение второго порядка в комплексной плоскости с полиномиальными коэффициентами $a(z), b(z), c(z)$

$$a(z)w'' + b(z)w' + c(z)w = 0$$

путем деления на $a(z)$ сводится к виду

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0, \tag{10.1}$$

где $p(z)$ и $q(z)$ — рациональные функции. Это уравнение может быть преобразовано, если решение искать в виде произведения известной функции ϕ на новую неизвестную функцию $u(z)$, $w(z) = \phi(z)u(z)$. Такой переход называют *преобразованием Лиувилля*, если уравнение на новую функцию $u(z)$ снова имеет рациональные коэффициенты:

$$u'' + \left(2\frac{\phi'}{\phi} + p\right)u' + \left(\frac{\phi''}{\phi} + p\frac{\phi'}{\phi} + q\right)u = 0.$$

Особо выделяют такое преобразование, которое обращает в нуль коэффициент при первой производной. Как легко заметить, для этого надо взять $\phi = \exp(-\frac{1}{2} \int p dz)$. Вид получившегося уравнения

$$u'' + I(z)u = 0, \quad I(z) = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}$$

называется *каноническим*, а функция $I(z)$ — *инвариантом*.

10.2. Разложение вблизи обыкновенной точки

Определение 10.1. Точка $z = z_0$ называется *обыкновенной точкой* уравнения (10.1), если в ее окрестности функции $p(z), q(z)$ аналитичны.

Теорема 10.1. Если z_0 есть обыкновенная точка уравнения (10.1), то существует такая ее окрестность, в которой решение существует, единственно и аналитично.

Поясним только идею доказательства. Как и в теории дифференциальных уравнений на действительной оси [5, 22, 46], существование и аналитичность решения доказываются методом Пикара.

Для упрощения положим $z_0 = 0$. Рассмотрим уравнение в каноническом виде

$$w'' + I(z)w = 0, \quad w(0) = c_0, \quad w'(0) = c_1. \quad (10.2)$$

Дважды проинтегрировав это уравнение и заменив далее порядок интегрирования в двойном интеграле, уравнение (10.2) сводится к интегральному уравнению:

$$w = c_0 + c_1 z + \int_0^z (z - z')I(z')w(z') dz'.$$

Данному интегральному уравнению соответствует итерационная схема

$$w_{n+1}(z) = c_0 + c_1 z + \int_0^z (z - z')I(z')w_n(z') dz',$$

при сходимости которой (при $n \rightarrow \infty$) мы получаем решение исходного уравнения (10.2): $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z) = w(z)$.

Обозначим

$$M = \max_{|z| < R} |I(z)|, \quad m = \max_{|z| < R} |w_0(z)|,$$

где R — радиус круга, лежащего в области аналитичности инварианта $I(z)$, а за нулевое приближение принимаем $w_0 = c_0 + c_1 z$. Для разности соседних приближений находим

$$w_{n+1}(z) - w_n(z) = - \int_0^z (z - z') I(z') (w_n(z') - w_{n-1}(z')) dz'.$$

Теперь остается показать, что получилось сжатое отображение. Можно последовательно получить оценки абсолютных величин разностей и убедиться, что они быстро уменьшаются:

$$|w_1 - w_0| \leq mM \left| \int_0^z \zeta d\zeta \right| \leq mM \int_0^\rho \rho' d\rho' = mM \frac{\rho^2}{2},$$

$$|w_2 - w_1| \leq mM^2 \frac{\rho^4}{2 \cdot 4}, \dots, |w_n - w_{n-1}| \leq mM^n \left(\frac{\rho^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!},$$

где $\rho = |z| < R$. Замечая, что $w_n = w_0 + (w_1 - w_0) + (w_2 - w_1) + \dots + (w_n - w_{n-1})$, мы сводим исследование сходимости итерационной процедуры к задаче о сходимости ряда. Можно убедиться, что ряд мажорируется абсолютно сходящимся рядом:

$$|w_n| \leq m \sum_{k=0}^n \left(\frac{M\rho^2}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \leq m \exp \frac{M\rho^2}{2}.$$

Значит ряд, частичная сумма которого равна w_n , сходится. Поэтому сходится и итерационная схема Пикара, откуда следует, что решение интегрального уравнения существует. Ряд сходится равномерно, и, следовательно, решение задачи (10.2) оказывается аналитическим.

Чтобы доказать единственность, подставим в уравнение (10.2) ряды $w = c_0 + c_1 z + \dots$, $I(z) = a_0 + a_1 z + \dots$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем:

$$\begin{aligned} 1 : \quad & 2c_2 + a_0 c_0 = 0 \quad c_2 = -\frac{1}{2} a_0 c_0 \\ z : \quad & 6c_3 + a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0 \quad c_3 = -\frac{1}{6} (a_0 c_1 + a_1 c_0) \\ z^2 : \quad & 12c_4 + a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 = 0 \quad c_4 = -\frac{1}{12} (a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0) \end{aligned}$$

Каждый коэффициент выражается только через коэффициенты с меньшими номерами, а два первых нам известны, значит решение строится единственным образом.

10.3. Разложение вблизи особой точки

Определение 10.2. Точка z_0 называется *особой точкой* уравнения (10.1), если хотя бы одна из функций $p(z)$ или $q(z)$ имеет полюс в точке $z = z_0$.

Если у $p(z)$ и $q(z)$ имеется полюс в точке $z = z_0$, то из области следует исключить эту точку. В результате область перестает быть односвязной и аналитическое продолжение $w(z)$ уже не является однозначной функцией. Выберем такую окрестность D точки z_0 , в которой нет других полюсов. Тогда решение из точки $z_1 \in D$ можно продлить вдоль контура γ (рис. 10.1) в некоторую окрестность начальной точки как аналитическую функцию. В этой окрестности можно выбрать за центр следующую точку $z_2 \in \gamma$ и из нее снова продолжить решение в новый круг с помощью разложения в ряд Тейлора. Продолжая эту процедуру, мы доберемся до любой точки $z \in \gamma$. Если получится бесконечное число кругов, всегда можно выбрать конечное подпокрытие. На рис. 10.1 показаны три окрестности и их пересечения.

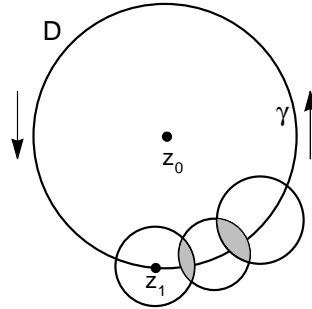


Рис. 10.1. Контур γ для обхода особой точки

У линейного уравнения второго порядка (10.1) имеются два линейно независимых решения w_1 и w_2 . Их определитель Вронского (или вронскиан) равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Продолжения w_1 и w_2 останутся линейно независимыми. Действительно, решения удовлетворяют уравнению (10.1)

$$w_1'' + pw_1' + qw_1 = 0, \quad w_2'' + pw_2' + qw_2 = 0.$$

Умножим первое уравнение на w_2 , второе на w_1 и вычтем друг из друга, получится уравнение первого порядка для определителя Вронского:

$$\Delta' + p\Delta = 0.$$

Его решение $\Delta(z)$ дается экспонентой

$$\Delta(z) = \Delta(z_1) \exp \left(- \int_{z_1}^z p(z') dz' \right).$$

Из аналитичности $p(z)$ следует, что $\Delta(z) \neq 0$, если $\Delta(z_1) \neq 0$.

Когда γ — замкнутая кривая, как показанная на рис. 10.1, можно вернуться в исходную точку. Решения, полученные продолжением из $w_{1,2}$ после одного обхода в положительном направлении, обозначим $w_{1,2}^+$. Новые решения в окрестности начальной точки можно разложить по старым, образующим полный базис пространства решений:

$$w_1^+ = a_{11}w_1 + a_{12}w_2, \quad w_2^+ = a_{21}w_1 + a_{22}w_2.$$

Среди линейных комбинаций решений $\tilde{w}_{1,2}$ есть такие, которые при обходе умножаются на число:

$$\tilde{w}_1^+ = a_{11}\tilde{w}_1 + a_{12}\tilde{w}_2 = \lambda\tilde{w}_1, \quad \tilde{w}_2^+ = a_{21}\tilde{w}_1 + a_{22}\tilde{w}_2 = \lambda\tilde{w}_2.$$

Отсюда видно, что λ суть собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а нужные нам линейные комбинации решений даются ее собственными векторами. Возможны два варианта: либо матрица A приводится к диагональному виду $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, либо ее можно привести к жордановой клетке $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Рассмотрим их последовательно.

1°. При обходе решения $\tilde{w}_{1,2}$ просто умножаются на число $\lambda_{1,2}$. Отметим, что эталонная функция $f(z) = z^\rho$ при обходе так же приобретает множитель: $f^+ = f \cdot e^{2\pi i\rho}$. Назовем *характеристическим показателем* показатель такой степенной функции, которая при обходе точки z_0 приобретает тот же самый множитель $\lambda_{1,2}$, что и решение при обходе полюса. Тогда характеристические показатели наших решений равны:

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_{1,2}.$$

Для простоты записи снова предположим, что $z_0 = 0$ (то есть сдвинем полюс в начало координат), тогда отношение решения к степенной функции с тем же характеристическим показателем будет уже однозначной функцией при обходе и, следовательно, может быть разложена в ряд Лорана. Тогда мы можем написать общий вид разложения решений в окрестности начала координат:

$$\tilde{w}_{1,2} = z^{\rho_{1,2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(1,2)} z^n, \quad (10.3)$$

где $c_n^{(1,2)}$ — наборы коэффициентов.

2°. Жорданова клетка отвечает преобразованию

$$\tilde{w}_1^+ = \lambda\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2, \quad \tilde{w}_2^+ = \lambda\tilde{w}_2.$$

Второе решение \tilde{w}_2 умножается на число, поэтому имеет такой же вид (10.3) степенной функции, умноженной на ряд Лорана. Если разделить первое уравнение на второе, мы увидим, что отношение решений приобретает при обходе не множитель, а слагаемое:

$$u^+ = u + \frac{1}{\lambda}, \quad u \equiv \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2}.$$

Эталоном такого поведения при обходе служит логарифмическая функция $f(z) = \ln z$, $f^+ = f + 2\pi i$. Чтобы добавка к функции $u(z)$ имела правильную величину, надо поставить перед логарифмом коэффициент $1/2\pi i\lambda$, тогда разность $u(z) - \ln z/2\pi i\lambda$ становится однозначной функцией, разлагающейся в ряд Лорана. Отсюда найдем, что общий вид отношения решений u в логарифмическом случае

$$\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} = \frac{\ln z}{2\pi i\lambda} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (10.4)$$

представляет собой сумму логарифма и ряда Лорана.

Определение 10.3. Если в ряде Лорана (10.3) или (10.4) содержится лишь конечное число слагаемых с отрицательными степенями, то точка z_0 называется *регулярной* или *правильной* особой точкой уравнения (10.1). Если имеется бесконечный набор членов с отрицательными показателями, то точка z_0 называется *иррегулярной* или *неправильной* особой точкой.

10.4. Критерий Фукса

Возникает естественный вопрос: можно ли по виду коэффициентов уравнения определить, какая у него особая точка? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 10.2. Теорема Фукса. Точка z_0 является регулярной особой точкой уравнения (10.1) тогда и только тогда, когда $p(z)$ имеет при $z = z_0$ полюс не выше первого порядка, а $q(z)$ — не выше второго порядка.

Достаточность следует из явного вида уравнения (10.1) в окрестности точки $z_0 = 0$:

$$w'' + \frac{p_0}{z}w' + \frac{q_0}{z^2}w = 0, \quad (10.5)$$

где p_0, q_0 — постоянные. Это уравнение однородное, его решение дается степенной функцией $w = z^\rho$. Отсюда получаем *определяющее уравнение*

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0,$$

решение которого дает два характеристических показателя. Теперь можно искать решение уравнения (10.1) в виде $w = z^\rho u(z)$, где u — новая неизвестная функция, а $\rho = \rho_1$ или ρ_2 — один из характеристических показателей. Из решения уравнения (10.5) следует, что $u = \text{const}$, т. е. разложение Лорана функции $u(z)$ не содержит отрицательных степеней, и поэтому $z_0 = 0$ — регулярная особая точка. Заметим, что характеристические показатели определены с точностью до целочисленного слагаемого, поэтому в регулярной особой точке вместо общего ряда Лорана всегда можно выписать разложение в ряд Тейлора. Если $q_0 = 0$, то один из характеристических показателей получается целым.

Необходимость можно продемонстрировать, записывая оба решения в виде произведения степенной функции на аналитическую: $w_{1,2} = z^{\rho_{1,2}} u_{1,2}(z)$. Функцию $p(z)$ тогда можно определить из вронскиана $p = -(\ln \Delta)'$. В окрестности точки $z_0 = 0$ разложение p имеет полюс первого порядка: $p \sim (1 - \rho_1 - \rho_2)/z$. Функцию $q(z)$ найдем из уравнения $q = -w''/w - pw'/w$. Отсюда следует, что q имеет полюс не выше второго порядка: $q_0 = \rho_1 \rho_2$.

Замечание 10.1. Для бесконечно удаленной особой точки замена независимой переменной $t = 1/z$ переведет особую точку в $t = 0$. Далее остается применить теорему Фукса к задаче:

$$\ddot{w} + \left(\frac{2}{t} - \frac{p(1/t)}{t^2} \right) \dot{w} + \frac{q(1/t)}{t^4} w = 0. \quad (10.6)$$

Отсюда следует, что для регулярности точки $z = \infty$ функция $p(z)$ должна иметь на бесконечности нуль не ниже первого порядка, а функция $q(z)$ — не ниже второго порядка.

10.5. Уравнения класса Фукса

Теперь мы знаем, как локально определить тип особой точки. Перейдем к рассмотрению глобальных свойств уравнений на всей комплексной плоскости. Оказывается, регулярность особых точек (если их немного) накладывает сильные ограничения на уравнение.

Определение 10.4. Уравнение принадлежит к классу Фукса, если на всей расширенной комплексной плоскости оно имеет только регулярные особые точки.

Для уравнений класса Фукса, пользуясь теоремой 10.2, можно выписать функции p, q в виде разложения по полюсам в точках $z = \alpha_k$:

$$p(z) = \sum_k \frac{A_k}{z - \alpha_k}, \quad q(z) = \sum_k \left[\frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z - \alpha_k} \right],$$

где все точки α_k лежат на конечном расстоянии. Требование регулярности для бесконечной точки (при этом согласно (10.6) разложение

$$\tilde{q}(t) = \frac{q(1/t)}{t^4} \rightarrow \frac{B_\infty}{t^2} + \frac{C_\infty}{t}$$

при $t \rightarrow 0$) дает ограничение на коэффициенты C_k :

$$\sum_k C_k = 0. \quad (10.7)$$

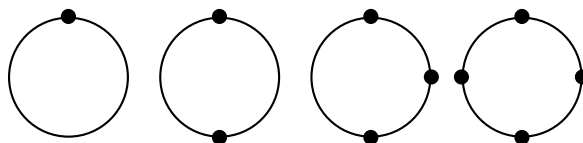


Рис. 10.2. Уравнения класса Фукса с одной, двумя, тремя и четырьмя особыми точками (слева направо)

1. *Одна регулярная особая точка.* В качестве такой точки можно взять $z = \infty$. Тогда все коэффициенты $A_k = B_k = C_k = 0$ и уравнение приобретает простой вид $w'' = 0$. Решение — линейная функция $w(z) = c_0 + c_1 z$.
2. *Две регулярные особые точки.* Одну из этих точек можно считать находящейся на бесконечности. Тогда в силу (10.7) коэффициент $C = 0$ для другой особой точки. В результате получается уравнение Эйлера: $w'' + \frac{A_0}{z}w' + \frac{B_0}{z^2}w = 0$. Уравнение оказалось однородным, поэтому заменой $\zeta = \ln z$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Если обе особые точки находятся на конечном расстоянии, то с помощью дробно-линейного преобразования $z \rightarrow (z - \alpha_1)/(z - \alpha_2)$ переводим точку α_2 в бесконечность.
3. *Три регулярные особые точки.* Переводим с помощью преобразования $z \rightarrow (z - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)/(z - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)$ особые точки в стандартные положения $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 1$, $\alpha_3 \rightarrow \infty$. В этом случае уравнение сводится к *гипергеометрическому уравнению Гаусса*, которое мы выпишем в следующей лекции.
4. *Четыре регулярные особые точки и более.* Никакими дробно-линейными преобразованиями не удастся перевести особые точки в стандартные положения, поэтому каждое уравнение надо рассматривать отдельно, и для таких специальных функций полная теория до сих пор не построена.

На рис. 10.2 схематически показано стандартное положение особых точек на сфере Римана. Одна особая точка всегда может быть переведена на «северный полюс» сферы. Две особые точки уравнения Эйлера можно преобразовать в полюса сферы. Три особые точки уравнения Гаусса можно дробно-линейным преобразованием расположить в полюсах, соответствующих $z = 0, \infty$ и на «экваторе» $z = 1$. Четыре особые точки никаким дробно-линейным преобразованием невозможно перевести в заданные стандартные места сферы Римана.

Цель, поставленная в начале лекции, достигнута. Исследование уравнения с полиномиальными коэффициентами сводится к подсчету числа полюсов и их порядка. Если в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ имеется одна или две регулярные особые точки, решение уравнения — элементарная функция. Если регулярных особых точек три, решение находится в классе гипергеометрических функций, а если четыре или больше — то анализ кардинально усложняется.

ЛЕКЦИЯ 11.

Гипергеометрические функции

11.1. Функция Гаусса

Гипергеометрическое уравнения Гаусса

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0. \quad (11.1)$$

имеет три регулярные особые точки $z = 0, 1, \infty$. На сфере Римана они расположены на полюсах и экваторе (рис. 11.1, а). Если искать решение в виде ряда, выбрать $c_0 = 1$ и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях, то получится *гипергеометрический ряд*, или *гипергеометрическая функция (Гаусса)*:

$$w = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (11.2)$$

Здесь α, β, γ — параметры, а z — переменная. Точка с запятой отделяет параметры в числителе, знаменателе и переменную. Нижний индекс слева указывает количество параметров в числителе, а справа — в знаменателе каждого слагаемого. Такие обозначения пришли из теории обобщенных гипергеометрических рядов, где индексы могут быть любыми натуральными числами. Индексы в литературе чаще всего не пишут, а функции отличают друг от друга по числу параметров.

Приведем несколько очевидных свойств гипергеометрической функции. Вывод этих и многих других свойств гипергеометрической функции, например, можно найти в справочнике [9].

1. В единичном круге $|z| < 1$ гипергеометрический ряд сходится абсолютно.
2. Параметры α, β входят симметрично: ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; z)$.
3. Если α (или β) — целое отрицательное число или нуль, то ряд обрывается и становится многочленом. Если $\gamma (= -n)$ — целое отрицательное число или нуль, то ряд (11.2) не определен и надо пользоваться другим решением:

$$w = z^{n+1} {}_2F_1(\alpha + n + 1, \beta + n + 1; n + 2; z).$$

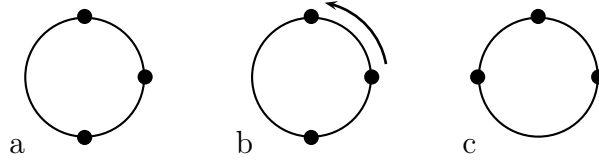


Рис. 11.1. Схема расположения полюсов на сфере Римана для уравнений Гаусса (а), Куммера (b), Лежандра (с)

Упражнение 11.1. Найдите второе решение с помощью преобразования Лиувилля $w(z) = z^\sigma u(z)$. Надо подобрать σ так, чтобы новое уравнение на u стало гипергеометрическим.

11.2. Вырожденная гипергеометрическая функция

Особенно часто в задачах встречается предельный случай функции Гаусса — *вырожденная* (или конфлюентная, или Куммера) *гипергеометрическая функция*, которая дается рядом Куммера:

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \dots \quad (11.3)$$

Дифференциальное уравнение получается из уравнения Гаусса (11.1) предельным переходом. Замена $z \rightarrow z/\beta$ переводит вторую регулярную особую точку из $z = 1$ в $z = \beta$. После предельного перехода $\beta \rightarrow \infty$ вторая точка устремляется в бесконечность и сливается с третьей (рис. 11.1, b). Получается *вырожденное гипергеометрическое уравнение*:

$$zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0. \quad (11.4)$$

1. Вырожденный гипергеометрический ряд имеет бесконечный радиус сходимости. При целом отрицательном параметре α ряд (11.3) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция становится полиномом.
2. Уравнение (11.4) имеет две особые точки: регулярную особую точку $z = 0$ с характеристическими показателями $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1 - \gamma$ и иррегулярную $z = \infty$. Последняя образовалась из-за слияния двух регулярных точек уравнения Гаусса. Поведение одного из решений на бесконечности экспоненциальное: $w \sim e^z$.
3. Преобразование Лиувилля вида $w(z) = e^z u(z)$ не меняет тип уравнения. Если одновременно сменить знак z , то отсюда получается *преобразование Куммера*:

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = e^z {}_1F_1(\gamma - \alpha; \gamma; -z).$$

4. Если подобрать степенное преобразование Лиувилля $w(z) = z^\sigma u(z)$ так, чтобы уравнение оставалось вырожденным гипергеометрическим, то получается второе решение:

$$w_2(z) = z^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; z).$$

11.3. Примеры

Функции Лежандра

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' - \lambda u = 0$$

(9.4) имеет три особые точки $x = \pm 1, \infty$. Для $x = \pm 1$ функции $p(z), q(z)$ имеют полюсы первого порядка, а при $x = \infty$ $p(z)$ имеет нуль первого порядка, $q(z)$ — нуль второго порядка (рис. 11.1, с). Отсюда по теореме Фукса получаем, что все три особые точки регулярные, поэтому уравнение Лежандра сведется к гипергеометрическому. Перевести точки в стандартные положения можно линейным преобразованием $z = (x + 1)/2$, тогда уравнение сведется к виду $z(z - 1)u'' + (2z - 1)u' + \lambda u = 0$. Сравнивая с (11.1), находим, что $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = \lambda$. Отсюда следует, что α подчиняется квадратному уравнению, корни которого $\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$. Один из этих корней надо выбрать за α , другой — за β . Условие обрыва ряда из лекции 9. легко получается отсюда, если приравнять один из корней к целому неположительному числу $-l, l = 0, 1, 2, \dots$, что дает прежний ответ: $\lambda = -l(l + 1)$.

Функции Бесселя

Запишем уравнение Бесселя для произвольного индекса ν :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

При $x = 0$ функция $p(x)$ имеет полюс первого порядка, а $q(x)$ — второго порядка. При $x = \infty$ p имеет нуль первого порядка, а q вообще не имеет нуля: $q(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Значит, уравнение имеет на бесконечности иррегулярную особую точку. Асимптотика вблизи нуля находится из определяющего уравнения. Если подставить $y = x^\rho$, то получится $\rho_{1,2} = \pm \nu$. На бесконечности уравнение переходит в $y'' + y = 0$, решения которого $y_{1,2} = \exp(\pm ix)$. Исключая асимптотики с помощью подстановки $y = x^\nu \exp(ix)u(x)$, получается уравнение

$$xu'' + [(2\nu + 1) + 2ix]u' + i(2\nu + 1)u = 0.$$

Это уравнение сводится к вырожденному гипергеометрическому заменой $-2ix = z$. Сравнивая с (11.4), находим параметры $\alpha = \nu + \frac{1}{2}, \gamma = 2\nu + 1$ и само решение, выраженное через вырожденную геометрическую функцию:

$$J_\nu(x) = Cx^\nu e^{ix} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; -2ix\right).$$

Отметим, что при $\gamma = 2\alpha$ вырожденная гипергеометрическая функция сводится к цилиндрической.

Полиномы Лагерра

Рассмотрим уравнение Шредингера для атома водорода в сферических координатах, где $\hat{H} = \hat{p}^2/2 - 1/r$ (в атомных единицах с $e = \hbar = m = 1$). В этом случае, как мы видели ранее, переменные разделяются: $\psi = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ - сферическая гармоника с орбитальным квантовым числом l и его проекцией m . Радиальная волновая функция $R(r)$ подчиняется уравнению

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \varkappa^2 \right) R = 0, \quad (11.5)$$

где энергия $E = -\varkappa^2/2$.

Это уравнение имеет две особые точки — регулярную и иррегулярную. Покажем, что (11.5) сводится к вырожденному геометрическому уравнению (11.4). При $r \rightarrow 0$ уравнение имеет степенную асимптотику $R = r^\rho$, $\rho_1 = l$, $\rho_2 = -l - 1$. Выбираем первый корень, чтобы решение не имело особенности. При больших r уравнение переходит в $R'' - \varkappa^2 R = 0$, из двух его решений оставляем убывающую экспоненту $R = \exp(-\varkappa r)$, чтобы избежать особенности на бесконечности. Действуя по стандартной схеме, заменим неизвестную функцию $R = r^l e^{-\varkappa r} u(r)$ и получаем:

$$r u'' + 2(l+1 - \varkappa r) u' - 2(\varkappa l - 1 + \varkappa) u = 0.$$

Отсюда видно, что это уравнение сводится к вырожденному гипергеометрическому с помощью замены $z = 2\varkappa r$, его решение дается функцией

$$u = {}_1F_1 \left(l+1 - \frac{1}{\varkappa}; 2l+2; 2\varkappa r \right).$$

Чтобы ряд обрывался, первый параметр надо приравнять $-n_r$, $n_r = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда получается формула Бальмера $E_n = -1/2n^2$, где $n = n_r + l + 1$ называется главным квантовым числом (n_r — радиальное квантовое число).

Вырожденное гипергеометрическое уравнение с целым отрицательным (или нулевым) параметром $\alpha = -n$, $n = 0, 1, \dots$

$$xy'' + (\nu + 1 - x)y' + ny = 0 \quad (11.6)$$

называется *уравнением Лагерра*. Его решения $y = L_n^\nu$ называются *обобщенными полиномами Лагерра*. При $\nu = 0$ они превращаются в обычные полиномы Лагерра.

Окончательно радиальные волновые функции записываются через полиномы Лагерра в виде

$$R_{nl}(r) = C_{nl} r^l e^{-\varkappa r} L_{n-l-1}^{2l+1}(2\varkappa r), \quad (11.7)$$

где $0 \leq l < n$ и C_{nl} — нормировочный множитель. Явное выражение для C_{nl} можно найти, например, в [24].

Примеры радиальных волновых функций (11.7) приведены на рис. 11.2.

Упражнение 11.2. При $E = 0$ найти решение уравнения (7.7) для атома водорода в параболических координатах.

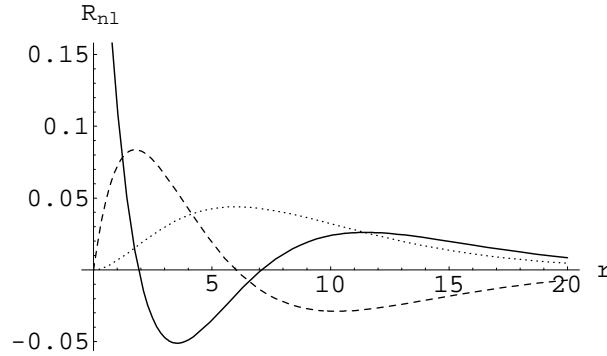


Рис. 11.2. Радиальные волновые функции водорода $R_{nl}(r)$ при $n = 3$: сплошная линия — $l = 0$, пунктир — $l = 1$, точки — $l = 2$

Функции параболического цилиндра. Полиномы Эрмита

Рассмотрим уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора с оператором Гамильтона $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2 x^2/2$:

$$\psi'' - x^2\psi = -k^2\psi, \quad k^2 = 2E, \quad \hbar = m = \omega = 1. \quad (11.8)$$

В теории специальных функций это уравнение называют уравнением Вебера. Такие уравнения возникают при разделении переменных в параболических цилиндрических координатах, поэтому весь класс функций называется функциями параболического цилиндра. Уравнение Вебера имеет одну иррегулярную особую точку $x = \infty$. Точка $x = 0$ обыкновенная, характеристические показатели в обыкновенной точке $\sigma = 0, 1$. Оба показателя годятся, чтобы получить регулярное в нуле решение, поэтому будем их анализировать последовательно.

Решение на бесконечности ищем в виде $\psi = \exp(\mu x^\sigma)$, это общий вид для иррегулярной особой точки. Подставляя в (11.8), получим:

$$\mu^2 \sigma^2 x^{2\sigma-2} + \mu \sigma (\sigma - 1) x^{\sigma-2} - x^2 = -k^2.$$

При $x \rightarrow \infty$ правой частью можно пренебречь по сравнению с x^2 , а вторым слагаемым — по сравнению с первым, когда $\sigma > 0$. Оставшееся равенство позволяет найти сразу и показатель $\sigma = 2$, и коэффициент $\mu = \pm \frac{1}{2}$. Нас интересует корень со знаком минус, чтобы решение было регулярным при $x \rightarrow \infty$.

1°. *Чётные решения.* Замена $\psi = \exp(-x^2/2)u(x)$ сводит уравнение к виду

$$u'' - 2xu' + (k^2 - 1)u = 0,$$

который пока не похож на гипергеометрические уравнения. Однако поведение при $x \rightarrow \infty$ подсказывает, что нужна еще одна замена независимой переменной — $t = x^2$. В результате

$$t\ddot{u} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\dot{u} + \frac{k^2 - 1}{4}u = 0,$$

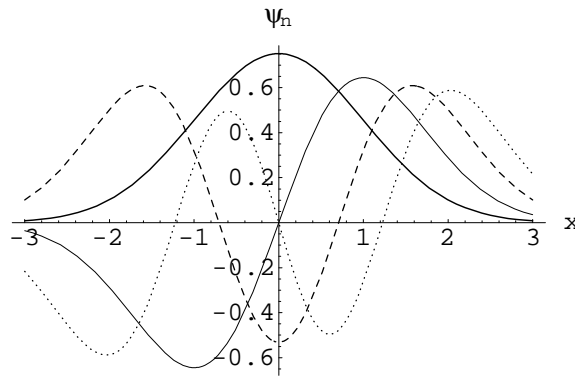


Рис. 11.3. Волновые функции осциллятора $\psi_n(x)$: толстая линия — $n = 0$, тонкая — $n = 1$, пунктир — $n = 2$, точки — $n = 3$

где точкой обозначена производная по t . Это вырожденное гипергеометрическое уравнение, решение которого $u = {}_1F_1((1 - k^2)/4; 1/2; x^2)$ представляет собой ряд, ведущий себя при $x \rightarrow \infty$ как $\exp(x^2)$. Даже с учетом множителя $\exp(-x^2/2)$ получится особенность на бесконечности. Ряд обрывается при дискретных значениях k , когда параметр $\alpha = -n$ равен нулю или целому отрицательному числу, $k_n^2 = 4n + 1$. Для энергии получается $E_n = 2n + \frac{1}{2}$.

2°. *Нечетные решения.* Преобразование Лиувилля $\psi = x \exp(-x^2/2)u(x)$ после замены $x^2 = t$ дает вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$t\ddot{u} + \left(\frac{3}{2} - t\right)\dot{u} + \frac{k^2 - 3}{4}u = 0.$$

Отсюда $u = {}_1F_1((3 - k^2)/4; 3/2; x^2)$. Чтобы обеспечить обрыв ряда, надо выбрать $k_n^2 = 4n + 3$ ($E_n = 2n + 1 + \frac{1}{2}$). Многочлены ${}_1F_1(-n; \frac{1}{2}; x^2)$, $x {}_1F_1(-n; \frac{3}{2}; x^2)$ называются *полиномами Эрмита*. Принятая нормировка дается формулой Родрига

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Волновые функции одномерного гармонического осциллятора показаны на рис. 11.3. Номер функции соответствует количеству ее нулей.

Дополнение: Свойства полиномов Лагерра

Выведем несколько свойств полиномов Лагерра ($\nu = 0$), пользуясь методом Лапласа. Метод Лапласа применительно к нашей задаче заключается в записи решения линейного дифференциального уравнения (11.6) в виде контурного интеграла

$$y(x) = \oint_{\gamma} K(x, p) w(p) \frac{dp}{2\pi i},$$

где ядро $K(x, p) = e^{px}$. Контур γ выбирается так, чтобы при интегрировании по частям внеинтегральные члены исчезали. В нашей задаче выберем замкнутый контур, обходящий полюс $p = 0$ в положительном направлении. Легко проверяется, что

$$xy(x) = \oint_{\gamma} \frac{dp}{2\pi i} w(p) \frac{d}{dp} e^{px} = - \oint_{\gamma} \frac{dp}{2\pi i} e^{px} \frac{dw}{dp},$$

т. е. вместо x в p -представлении надо писать $-d/dp$.

Упражнение 11.3. Покажите, что при преобразовании Лапласа d/dx переходит в оператор умножения p .

Итак, чтобы получить лапласовский образ уравнения (11.6), надо заменить

$$\frac{d}{dx} \rightarrow p, \quad x \rightarrow -\frac{d}{dp},$$

сохраняя порядок операторов.

В результате преобразования уравнение (11.6) приобретает вид

$$-\frac{d}{dp} p^2 w + pw + \frac{d}{dp} pw + nw = 0 \Rightarrow p(1-p)w' + (n+1-p)w = 0,$$

где $w(p)$ — образ функции $y(x)$. Возникшее уравнение — уравнение первого порядка, решение которого находится просто: $w = (1-p)^n / p^{n+1}$. Остается выполнить обратное преобразование Лапласа:

$$y(x) = \oint \frac{dp}{2\pi i} e^{px} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} = \operatorname{Res}_{p=0} e^{px} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^n} [(1-p)^n e^{px}]_{p=0},$$

где интегрирование ведется по контуру, обходящему полюс $p = 0$ в положительном направлении. Далее удобно обозначить $q = px$, а затем $z = x - q$:

$$y(x) = \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dq^n} \left(1 - \frac{q}{x}\right)^n e^q \Big|_{q=0} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n e^{x-z} \Big|_{z=x}.$$

В новых обозначениях можно вынести $\exp x$ за оператор дифференцирования, затем обозначить z и x одной буквой и получить формулу Родрига. Обычно ее пишут без множителя $(-1)^n$:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Упражнение 11.4. Выведите производящую функцию:

$$F(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n L_n(x) = (1-h)^{-1} \exp \left[-\frac{hx}{1-h} \right].$$

Упражнение 11.5. Покажите, что решение уравнения

$$x^2 y'' + ax y' + (Ax^2 + Bx + C)y = 0$$

сведется к вырожденному гипергеометрическому при произвольных константах a, b, A, B, C .

ЛЕКЦИЯ 12.

Асимптотические методы

В предыдущих лекциях мы столкнулись с тем, что лишь для немногих дифференциальных уравнений удастся получить ответ в формульном виде. Однако в приложениях часто нет необходимости в точных формулах, потому что в задаче присутствует малый или большой параметр. Цель асимптотических методов, с которыми мы познакомимся в следующих трех лекциях, — научиться использовать наличие такого параметра как для нахождения асимптотик интегралов, так и для решения уравнений. Среди многочисленных книг, посвященных асимптотическим методам (см., например, [18, 25, 27, 42, 44, 58, 59]), можно рекомендовать сравнительно простое, но современное введение в асимптотические методы вычисления интегралов [57].

12.1. Асимптотическое разложение

Напомним, что такое асимптотическое разложение.

Определение 12.1. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется *асимптотическим разложением* функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если остаток ряда является величиной более высокого порядка малости:

$$R_N = f(z) - \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n = o((z - z_0)^N)$$

или

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_N}{(z - z_0)^N} = 0.$$

В тех же обозначениях обычная сходимость означает:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0,$$

а значит, ряд может расходиться в обычном смысле, но быть асимптотическим разложением.

Если необходимо найти асимптотическое разложение в окрестности бесконечно удаленной точки, то можно взять разложение по степеням $t = 1/z \rightarrow 0$.

Укажем несколько свойств асимптотического разложения.

- 1° Если асимптотическое разложение существует, то оно единственно. Действительно, если пределы существуют, можно найти последовательно все коэффициенты c_n :

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad c_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - c_0}{z - z_0}, \quad c_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - c_0 - c_1(z - z_0)}{(z - z_0)^2}, \dots$$

- 2° Асимптотические разложения двух разных функций могут совпадать. Например, $\exp(-1/z) \approx 0$ при $z \rightarrow +0$ (знаком \approx мы обозначили асимптотическое равенство)⁶ Действительно, $c_n = \lim z^{-n} \exp(-1/z) = 0$.

- 3° Асимптотические разложения можно складывать, умножать, интегрировать, но нельзя дифференцировать. Примером может служить функция $f(x) = e^{-x} \sin e^x$. Все коэффициенты ее асимптотического разложения при $x \rightarrow +\infty$ равны нулю, как и в примере 2°, а первая производная $f'(x) = -f(x) + \cos \exp x$ не имеет асимптотического разложения. Коэффициенты c_n как пределы из пункта 1° не существуют, даже нельзя найти коэффициента c_0 .

12.2. Метод Лапласа

Интегралом Лапласа называют интеграл вида

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) e^{\lambda S(t)} dt, \quad (12.1)$$

где $A(t)$, $S(t)$ — действительные функции, которые мы будем называть амплитудной и фазовой, а λ считается действительным параметром. Рассмотрим асимптотику этого интеграла при $\lambda \rightarrow +\infty$. Если λ велико, то очевидно, что вклад в интеграл вносит небольшая окрестность точки максимума функции $S(t)$. Здесь возможны два случая.

- 1° Функция $S(t)$ монотонна, т. е. $S'(t) \neq 0, x \in [a, b]$, а ее максимум достигается в одной из предельных точек интегрирования, например, при $t = a$. Тогда вклад в интеграл вносит только окрестность точки a . Рис. 12.1, а показывает, что интеграл набирается в окрестности размером $\sim 1/\lambda$, и поэтому главный член разложения будет того же порядка.

⁶Часто в литературе встречается знак \sim , а иногда пишут просто $=$.

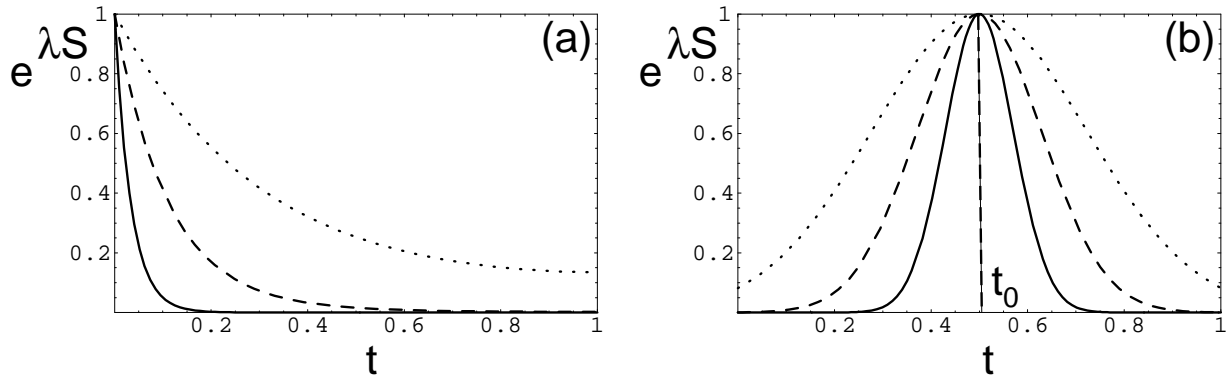


Рис. 12.1. Экспонента $e^{\lambda S}$ под интегралом Лапласа (12.1) как функция переменной t : a — случай 1°, $S = -3t + t^3$, $a = 0$, $b = \infty$. При увеличении параметра λ (точки — $\lambda = 1$, пунктир — $\lambda = 3$ и сплошная линия — $\lambda = 10$, соответственно) вклад в интеграл дает все меньшая окрестность точки $a = 0$. b — случай 2°, $S = -(t - 1/2)^2$. При увеличении параметра λ ($= 10, 30, 100$) вклад в интеграл дает все меньшая окрестность точки $t_0 = 0,5$

2° Функция $S(t)$ достигает максимума в промежуточной точке: $S'(t_0) = 0$, $t_0 \in (a, b)$, $S''(t_0) < 0$. Тогда из разложения фазовой функции в ряд до квадратичных членов

$$S(t) = S(t_0) + \frac{1}{2}S''(t_0)(t - t_0)^2 \quad (12.2)$$

следует, что интеграл в основном набирается при $|t - t_0| \lesssim 1/\lambda^{1/2}$. На рис. 12.1, b приведен пример, демонстрирующий, что с ростом параметра λ подынтегральная функция велика все в меньшей окрестности точки t_0 .

В случае 1° формула для главной члена асимптотики выводится с помощью интегрирования по частям:

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) \frac{de^{\lambda S(t)}}{\lambda S'(t)} = \frac{A(t)e^{\lambda S(t)}}{\lambda S'(t)} \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{A(t)}{\lambda S'(t)} \right)' e^{\lambda S(t)} dt. \quad (12.3)$$

Следующие члены разложения по степеням $1/\lambda$ получаются отсюда при последовательном интегрировании по частям возникающих интегралов в правой части. Первый член этого разложения при условии $S(a) > S(b)$, $S'(t) \neq 0$ имеет вид

$$F \approx -\frac{A(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}, \quad (12.4)$$

т. е. для главного члена получилась оценка $\sim 1/\lambda$, что соответствует приведенным выше качественным наблюдениям.

Для случая 2° функцию $S(t)$ следует заменить ее разложением (12.2) и вынести из-под знака интеграла значение амплитуды $A(t)$, взятое в точке $t = t_0$. В результате

$$F(\lambda) = A(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \lambda \left(S(t_0) + \frac{1}{2}S''(t_0)\tau^2 \right) d\tau.$$

В этом интеграле $t - t_0 = \tau$, а пределы интегрирования по τ распространены от $-\infty$ до ∞ . Так как $S''(t_0) < 0$, то оценка свелась к известному интегралу Пуассона. Отсюда окончательно получим:

$$F \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(t_0)}} A(t_0) e^{\lambda S(t_0)}, \quad (12.5)$$

т. е. основной порядок F определяется экспонентой $e^{\lambda S(t_0)}$ с предэкспоненциальным фактором $\sim \lambda^{-1/2}$.

Пример 12.1. Рассмотрим интеграл

$$F(a) = \int_0^{\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{a}{x}\right) dx.$$

Видно, что прямое вычисление асимптотик этого интеграла при $a \rightarrow +\infty$ с помощью полученных формул невозможно, потому что функция $1/x$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow +0$. Чтобы свести этот интеграл к лапласовскому виду (12.1), изменим в μ раз масштаб переменной: $x = \mu t$, $dx = \mu dt$. Тогда показатель экспоненты запишется как $\lambda S = -\mu^2(t^2 + a/\mu^3 t)$. Если выбрать $\mu = (a/2)^{1/3}$, то выражение в круглой скобке станет фазовой функцией $S(t) = -t^2 - 2/t$, а μ^2 окажется за скобкой и будет большим параметром $\lambda = \mu^2$. Остается лишь два раза продифференцировать $S(t)$, найти значения $S(t)$ и ее второй производной в стационарной точке:

$$S'(t) = -2t + \frac{2}{t^2} = 0 \Rightarrow t_0 = 1, \quad S(t_0) = -3, \quad S''(t_0) = -6.$$

Отсюда с помощью (12.5) получаем оценку:

$$F(a) \approx \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{-3\left(\frac{a}{2}\right)^{2/3}}.$$

Отметим, что даже при $a = 0$, когда точное значение интеграла известно: $F(0) = \sqrt{\pi}/2$, асимптотическая формула дает приличную точность для $F(0) \approx \sqrt{\pi}/\sqrt{3}$.

Пример 12.2. Найдем поведение гамма-функции Эйлера:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \xi^x e^{-\xi} d\xi$$

при $x \rightarrow +\infty$. Вначале приводим этот интеграл к виду (12.1), что делается, если записать $\xi^x = e^{x \ln \xi}$ и перейти к новой переменной $\xi = xt$. Тогда $d\xi = x dt$, $S(t) = -t + \ln t$, $\lambda = x$. У $S(t)$ имеется одна стационарная точка: $t_0 = 1$, в которой $S(t_0) = S''(t_0) = -1$. Отсюда с помощью формулы (12.5) следует нужная нам асимптотика гамма-функции Эйлера:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

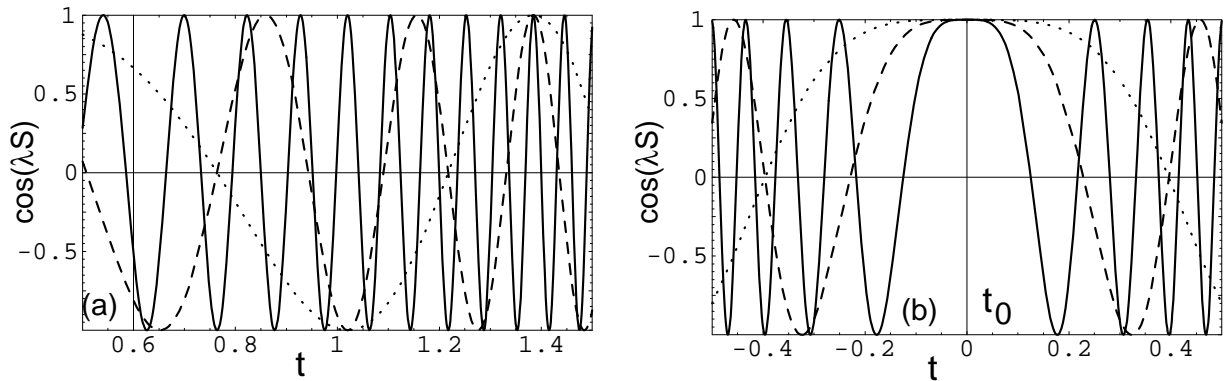


Рис. 12.2. Вещественная часть экспоненты $e^{i\lambda S}$ под интегралом (12.6) как функция переменной t : a — случай 1° , $S = t - 4t^2$. При увеличении параметра λ (точки — $\lambda = 1$, пунктир — $\lambda = 3$ и сплошная линия — $\lambda = 10$ соответственно) вклад в интеграл дает все меньшая окрестность концевых точек $a = 0,5, b = 1,5$. При $\lambda \rightarrow \infty$ остальные вклады взаимно компенсируются из-за осцилляций функции $e^{i\lambda S(t)}$. b — случай 2° , $S = t^2$. При увеличении параметра $\lambda = 10, 30, 100$ вклад вносит все меньшая окрестность стационарной точки $t_0 = 0$. Остальные вклады знакопеременные и при $\lambda \rightarrow \infty$ гасят друг друга

При целых x данная асимптотика известна как формула Стирлинга. Формула Стирлинга дает весьма точную оценку факториала $n! = \Gamma(n + 1)$. В частности, при $n = 2$ получается $2! \approx 1,919$, т. е. погрешность составляет всего лишь 5 %, хотя 2 не слишком большой параметр.

12.3. Метод стационарной фазы

Метод стационарной фазы представляет собой модификацию метода Лапласа, рассмотренного в предыдущем параграфе.

Обратимся к нахождению асимптотики интеграла типа Лапласа (12.1) с действительной амплитудой $A(t)$, но чисто мнимой фазой $S(t) \rightarrow iS(t)$:

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t)e^{i\lambda S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (12.6)$$

Асимптотика этого интеграла также существенным образом зависит от того, имеет ли функция $S(t)$ стационарные точки на интервале интегрирования (a, b) . Как и в предыдущем случае, возникают две возможности 1° и 2° . На рис. 12.2 для случаев 1° и 2° представлена вещественная часть подынтегральной экспоненты. Аналогично предыдущему разделу, главный член асимптотического разложения получится в случае 1° порядка λ^{-1} , а в случае 2° — $\lambda^{-1/2}$.

В случае 1° оценка получается с помощью интегрирования по частям:

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) \frac{de^{i\lambda S(t)}}{i\lambda S'(t)} \approx \frac{1}{i\lambda} \left[\frac{A(b)e^{i\lambda S(b)}}{S'(b)} - \frac{A(a)e^{i\lambda S(a)}}{S'(a)} \right].$$

В случае 2° вначале фазовую функцию разлагаем в ряд (12.2), далее распространяем пределы интегрирования до бесконечности и затем сводим задачу к интегралу Френеля:

$$F(\lambda) = A(t_0)e^{i\lambda S(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S''(t_0)\tau^2/2} d\tau.$$

Для вычисления интеграла Френеля сначала следует повернуть контур интегрирования заменой $\tau = se^{i\phi}$, $d\tau = e^{i\phi} ds$, где ϕ — угол поворота, s — координата вдоль нового контура. Для сходимости при $\lambda \rightarrow +\infty$ вещественная часть подынтегральной экспоненты $e^{iS''\tau^2}$ должна убывать. Поэтому секторы сходимости, заштрихованные на рисунке, находятся в I и III четверти при $S''(t_0) > 0$ или во II и IV четверти комплексной плоскости τ при $S''(t_0) < 0$.

Если повернуть контур на угол $\phi = \pi/4$, $S'' > 0$ или на угол $\phi = -\pi/4$, $S'' < 0$ (повернутый контур изображен на рис. 12.3 стрелкой), то в нуль обратится мнимая часть экспоненты и вычисление сведется к интегралу Пуассона:

$$\begin{aligned} \tau = se^{i\pi/4} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|S''|s^2/2} ds e^{i\pi/4} &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''|}} e^{i\pi/4}, \\ \tau = se^{-i\pi/4} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|S''|s^2/2} ds e^{-i\pi/4} &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''|}} e^{-i\pi/4}. \end{aligned}$$

Оба случая можно записать единой формулой:

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(t_0)|}} A(t_0) e^{i\lambda S(t_0) + i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(t_0)}, \quad (12.7)$$

где $\operatorname{sgn} S''(t_0)$ означает знак второй производной в стационарной точке.

Замечание 12.1. В данном примере мы предполагали, что вторая производная отлична от нуля. Если она обращается в нуль, т. е. $S''(t_0) = 0$, $S'''(t_0) = 0$, \dots , $S^{(n-1)}(t_0) = 0$, $S^{(n)}(t_0) \neq 0$, то оценка делается аналогично. Интеграл не сводится к интегралу Пуассона, но выражается через Γ -функцию. В этом случае в главном порядке $F \sim \lambda^{-1/n}$. Если стационарных точек несколько и они не бесконечно близки друг от друга, то асимптотика интеграла дается суммой по стационарным точкам.

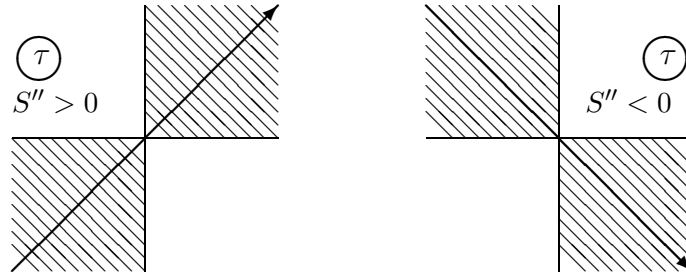


Рис. 12.3. Поворот контура при вычислении интеграла Френеля при $S''(t_0) > 0$ и $S''(t_0) < 0$

Пример 12.3 (Функция Бесселя). Найдём асимптотику функции Бесселя $J_m(x)$ при $x \rightarrow \infty$ при фиксированном действительном индексе m , используя интегральное представление

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \varphi - im\varphi} d\varphi.$$

Для этого интеграла фазовая функция $S(\varphi) = \sin \varphi$ внутри интервала интегрирования имеет две стационарные точки:

$$S' = \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad S(\pm\pi/2) = \pm 1, \quad S''(\pm\pi/2) = \mp 1.$$

Вклад от одной из точек, например, $\varphi = +\pi/2$, дается формулой (12.7). Вклад от другой точки будет комплексно сопряжен. В результате

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{ix - im\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} + \text{к.с.} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Пример 12.4 (Функция Эйри). Воспользуемся интегральным представлением для функции Эйри:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 + xt)} dt, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Масштабным преобразованием $t = \mu\tau$, $dt = \mu d\tau$ «остановим» стационарную точку: $\lambda S = \mu^3(\tau^3/3 - |x|\tau/\mu^2)$ будет содержать в скобке функцию τ , не зависящую от параметра μ , когда $\mu = |x|^{1/2}$. Отсюда $S(\tau) = \tau^3/3 - \tau$, $\lambda = \mu^3$. Дифференцируя фазовую функцию, найдем $S' = \tau^2 - 1 = 0 \Rightarrow \tau_{1,2} = \pm 1$, откуда $S(\pm 1) = \mp 2/3$, $S''(\pm 1) = \pm 2$. Как и в предыдущем примере, вклады от двух стационарных точек оказываются комплексно сопряженными:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Отметим, что функция Эйри представляет собой волновую функцию частицы в однородном поле. Найденная асимптотика при $x \rightarrow -\infty$ соответствует движению в классически доступной области: по мере увеличения $|x|$ длина волны де Бройля уменьшается как $|x|^{-1/2}$.

ЛЕКЦИЯ 13.

Метод перевала

13.1. Седловая точка

Метод перевала (седловой точки или наискорейшего спуска) предназначен для получения асимптотик интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} A(z)e^{\lambda S(z)} dz, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (13.1)$$

где A , S — функции, аналитические в окрестности некоторой кривой γ , а λ — большой вещественный параметр. Для демонстрации метода перевала мы ограничимся рассмотрением простейшего варианта интеграла (13.1), когда амплитудная функция $A = 1$.

Основная идея метода заключается в такой деформации контура γ , чтобы подынтегральная функция $e^{\lambda S(z)}$ была велика по абсолютной величине на как можно более коротком участке и чтобы одновременно, при перемещении по этому контуру, подынтегральная функция не испытывала осцилляций.

Действительно, разобьем фазовую функцию на действительную и мнимую части $S(z) = u(z) + iv(z)$, $z = x + iy$. Поскольку $S(z)$ — аналитическая функция, то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют соотношениям Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими, а во-вторых,

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

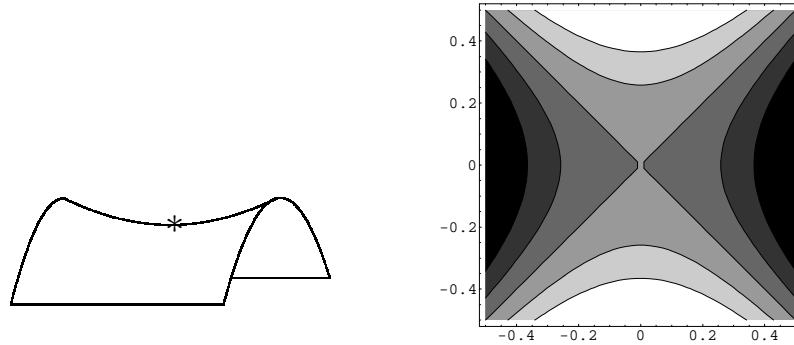


Рис. 13.1. Вещественная часть фазовой функции в окрестности простой седловой точки и ее линии уровня. Светлым показаны более высокие значения

т. е. градиенты $u(x, y)$ и $v(x, y)$ взаимно ортогональны. Отсюда можно сделать два вывода.

- 1° Всякая стационарная точка z_0 , где $S'(z_0) = 0$, представляет собой *седло* или *точку перевала* (обозначенную на рис. 13.1 звездочкой *), поскольку если одна из вторых частных производных положительна, например, $u_{xx} > 0$, то вторая обязательно отрицательна, $u_{yy} < 0$.
- 2° На рис. 13.1 изображены также линии уровня вещественной части $u = u(x, y)$ в окрестности стационарной точки $z_0 = 0$ для простейшего случая, когда разложение фазовой функции начинается с квадратичных членов

$$S(z) \approx S(0) + \frac{1}{2}S''(0)z^2. \quad (13.2)$$

Оси x и y на рисунке повернуты на угол $\phi = \arg S''(0)/2$, так что коэффициент при z^2 можно считать положительным. Светлый тон означает более высокие точки, т. е. большие значения u , а темные области — «ямы». Есть два конуса направлений, по которым функция u убывает, и два сегмента направлений, вдоль которых u возрастает. Вещественная часть $u(x, y)$ быстрее всего убывает вдоль *линии наискорейшего спуска*. Вдоль этой же линии мнимая часть $v(x, y)$ постоянна, т. е. подынтегральная функция $e^{\lambda S(z)}$ вдоль этой линии не осциллирует. Это есть второй вывод, который следует из соотношений Коши — Римана, в частности, из ортогональности градиентов функций v и u . Для рассматриваемого примера (см. рис. 13.1) линии наискорейшего спуска совпадают с действительными полуосями.

13.2. Топологический и аналитический этапы

Таким образом, задача оценки интеграла (13.1) сводится к двум шагам.

- 1° ШАГ ПЕРВЫЙ — ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ: Деформируем контур так, чтобы он проходил через седловую точку вдоль линий наискорейшего спуска.
- 2° ШАГ ВТОРОЙ — АНАЛИТИЧЕСКИЙ: Оцениваем интеграл по разложению фазовой функции в малой окрестности точки перевала.

Топологическая часть — самая сложная. Чтобы понять, что за контур нам нужен, оценим абсолютную величину функции $F(\lambda)$:

$$|e^{\lambda S}| = e^{\lambda u(z)} \leq \max_{z \in \gamma} e^{\lambda u(z)}, \quad (13.3)$$

где максимум берется по всем z , лежащим на кривой γ . Чтобы оценка была как можно точнее, будем варьировать контур γ , не выходя за множество Γ допустимых контуров. *Допустимыми, или эквивалентными*, будем называть такие контуры, на которых интегралы принимают одинаковые значения. Отметим, что при деформации контура мы не должны выходить за область аналитичности функции $S(z)$, т. е. пересекать полюсы. Если контур незамкнутый, а его концы лежат в конечных точках, то при деформации контура его концы должны оставаться неподвижными. Для несобственных интегралов бесконечно удаленные концы контура должны всегда оставаться в секторах сходимости.

Будем менять форму контура, пока максимум в правой части (13.3) не перестанет уменьшаться. Самая точная оценка получится, если в качестве контура $\gamma = \gamma^*$ выбрать тот, на котором достигается минимум:

$$|\exp \lambda S| \leq \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \exp \lambda u(z). \quad (13.4)$$

Такой контур называется *минимаксным*. Возможность его выбора в общем случае не доказана. Однако в простых задачах, например, при вычислении асимптотик многих специальных функций, минимаксный контур удается найти и полученные оценки интеграла оказываются весьма точными. В примерах, рассмотренных ниже, минимаксный контур состоит из так называемых *линий Стокса*. Это такие кривые, вдоль которых мнимая часть v функции $S(z)$ постоянна, поэтому действительная часть u вдоль этих линий меняется быстрее всего. Совокупность линий Стокса, проходящих через критические точки фазовой функции, будем называть *графом Стокса*. Граф сделаем ориентированным, указывая на линиях Стокса стрелками направление убывания функции u .

Аналитическая часть предполагает локальное исследование функции, поэтому второй шаг оказывается проще. Интеграл оценивают, сводя его к эталонному в малой окрестности стационарной точки. Выполним такую оценку в простейшем случае (13.2), когда вторая производная отлична от нуля. Для этого выделим модули и аргументы:

$$S''(z_0) = \rho e^{i\theta}, \quad z - z_0 = s e^{i\phi}.$$

Отсюда

$$S(z) - S(z_0) = \frac{1}{2} \rho s^2 e^{i\theta + 2i\phi}.$$

Теперь найдем те направления, вдоль которых разность $S(z) - S(z_0)$ быстрее всего убывает с увеличением s , т. е. равна $-\rho s^2/2$. Чтобы так получилось, комплексная экспонента должна обратиться в -1 , т. е. при $\cos(\theta + 2\phi) = -1$. Отсюда

$$\phi_{1,2} = \frac{\pm\pi - \theta}{2}. \quad (13.5)$$

В этом же направлении мнимая часть обращается в нуль, $\sin(\theta + 2\phi) = 0$,

$$\operatorname{Im}(S(z) - S(z_0)) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0).$$

Поэтому при интегрировании вдоль этих линий исчезают осцилляции подынтегральной функции. Теперь интеграл сводится к типу Лапласа и дается оценкой:

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(z_0)|}} e^{\lambda S(z_0) + i\phi}. \quad (13.6)$$

В качестве ϕ надо выбрать то из двух направлений $\phi_{1,2}$ (13.5), вдоль которого мы интегрируем. Это и есть линия наискорейшего спуска.

Замечание 13.1. В исходном интеграле (13.1) мы предполагали амплитудную функцию $A(z)$ равной 1. Если такая функция $A(z) \neq \text{const}$, то оценка интеграла умножится на ее значение в стационарной точке z_0 . При этом нужно следить, чтобы функция $A(z)$, будучи аналитической, при деформации контура не выходила за свою область аналитичности.

Существенными могут оказаться также вклады от концов контура, которые вычисляются интегрированием по частям, как и в случае I, рассмотренном в предыдущей лекции.

Замечание 13.2. Если в задаче имеется несколько неподвижных изолированных стационарных точек, через которые проходит минимаксный контур, оценка интеграла получается из (13.6) суммированием по всем таким точкам.

Замечание 13.3. Если функция S зависит от дополнительного параметра μ , при изменении которого стационарные точки сливаются, а нам необходима равномерная по μ оценка, то интеграл сводится к другому более сложному эталонному. Подробности см. в справочнике [57], где приведены и другие особые случаи: слияние стационарной точки с полюсом, концом контура интегрирования, точкой ветвления.

13.3. Примеры

Пример 13.1 (Функция Эйри при $p \rightarrow +\infty$). Найдем асимптотику функции Эйри в классически запрещенной области:

$$\operatorname{Ai}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 + pt)} dt, \quad p \rightarrow +\infty.$$

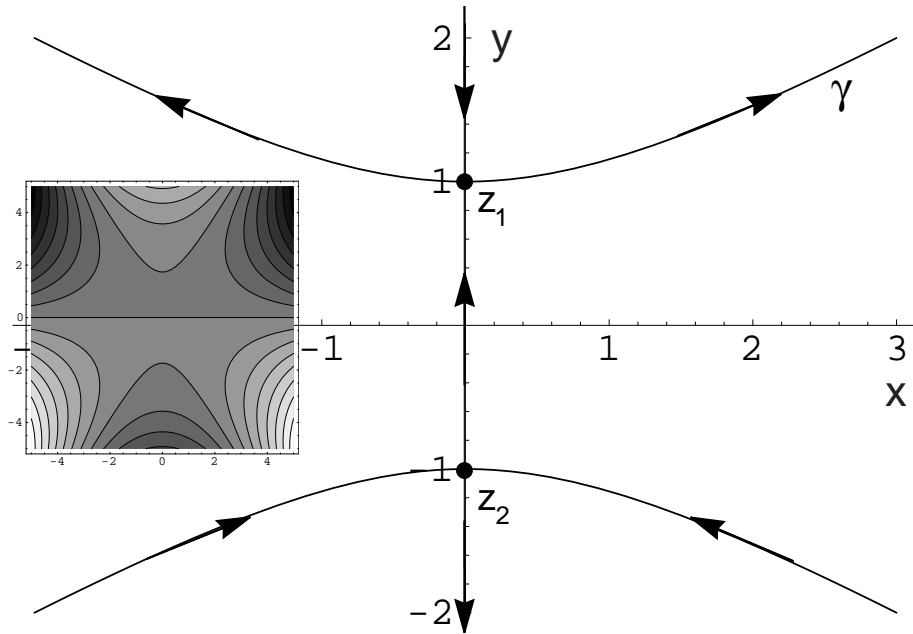


Рис. 13.2. Линии Стокса функции $S = i(z^3/3 + z)$. Стрелками показано направление уменьшения $u(x, y)$. На врезке показаны линии уровня $u(x, y) = \text{const}$. Высокие области светлее, низкие — темнее

Сначала «остановим» стационарную точку:

$$t = p^{1/2} z, \quad dt = p^{1/2} dz, \quad S = i(z^3/3 + z), \quad \lambda = p^{3/2}.$$

Дифференцируя фазовую функцию, найдем:

$$S' = i(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm i, \quad S(\pm i) = \mp \frac{2}{3}, \quad S''(\pm i) = \mp 2.$$

Чтобы понять, через какую точку пройдет минимаксный контур, построим те линии Стокса, которые проходят через стационарные точки, т. е. в которых $\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_{1,2})$:

$$v(x, y) = \text{Im } S = \text{Im } i \left(\frac{x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{3} + x + iy \right) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x = 0.$$

В результате имеем гиперболу $x^2/3 - y^2 = -1$ с асимптотами, наклоненными под углами $\pm\pi/6$, и прямую $x = 0$ (рис. 13.2).

Теперь найдем секторы абсолютной сходимости интеграла. Для этого надо взять $z = Re^{i\alpha}$ при $R \rightarrow \infty$ и посмотреть, когда вещественная часть фазы отрицательна. Получается $\alpha \in (0, \pi/3) \cup (2\pi/3, \pi) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)$. Значит мы можем деформировать контур γ , проходящий по действительной оси, так, чтобы он проходил через точку $z_1 = i$. Контур, проходящий через вторую стационарную точку, не относится ко множеству допустимых, поскольку при деформации контура его концы не должны выходить за секторы сходимости. Можно непрерывно преобразовать контур γ в верхнюю ветвь

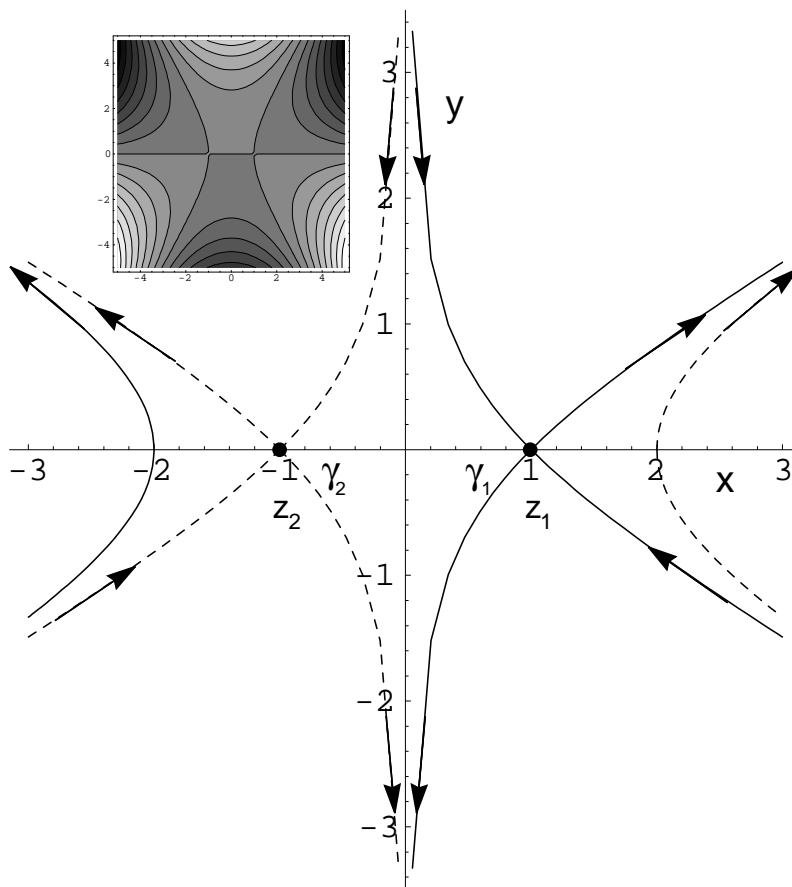


Рис. 13.3. Линии Стокса функции $S = i(z^3/3 - z)$: $v(x, y) = -2/3$ (сплошные линии) или $v(x, y) = +2/3$ (пунктир). Врезка — линии уровня $u(x, y) = \text{const}$. Чем светлее область, тем больше высота

гиперболы, не выходя за область аналитичности подынтегральной функции. Такой контур является и допустимым, и минимаксным.

Если выбрать из $\phi_{1,2} = 0, \pi$ направление $\phi = 0$, вдоль которого ведется интегрирование, то асимптотическая оценка получается из формулы (13.6):

$$\text{Ai}(p) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}p^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}p^{1/4}}. \quad (13.7)$$

Полученная асимптотика функции Эйри экспоненциально затухающая, как и должно быть для волновой функции частицы в классически запрещенной области.

Пример 13.2 (Функция Эйри при $p \rightarrow -\infty$). Рассмотрим вновь функцию Эйри:

$$\text{Ai}(-p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 - pt)} dt,$$

и методом перевала найдем ее асимптотику при $p \rightarrow +\infty$. (Это та же асимптотика, что и в примере 12.4.) После замены переменной $t = p^{1/2}z$ фазовая функция $S(z) =$

$i(z^3/3 - z)$ получится с другим знаком перед z . Асимптотические ее свойства при $|z| \rightarrow \infty$ определяются кубическим членом, поэтому секторы сходимости останутся теми же, что и в предыдущем примере. Найдём стационарные точки:

$$S' = i(z^2 - 1) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1, \quad S(\pm 1) = \mp \frac{2}{3}i, \quad S''(\pm 1) = \pm 2i.$$

Построим далее граф Стокса $\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_1)$:

$$v(x, y) = \text{Im } S = \text{Im } i \left(\frac{x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{3} - x - iy \right) = \frac{x^3}{3} - xy^2 - x = -\frac{2}{3}.$$

Можно качественно построить кривые, если решить уравнение относительно

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3x} - 1 + \frac{x^2}{3}}.$$

На рисунке 13.3 изображены линии для $v = \pm 2/3$. Чтобы пройти по минимаксному контуру, надо серьезно деформировать исходный контур: действительную ось превратить в ветви $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Как и в методе стационарной фазы, точки перевала мы должны пройти под углами $\phi = \pi/4$ при $z_1 = 1$ и $\phi = 3\pi/4$ при $z_2 = -1$. Получится та же осциллирующая асимптотика, что и в методе стационарной фазы:

$$\text{Ai}(-p) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}p^{1/4}} \cos \left(\frac{2}{3}p^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (13.8)$$

Пример 13.3 (Полиномы Лежандра). Рассмотрим интегральное представление полиномов Лежандра:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{2^l} \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - \xi)^{l+1}},$$

которое, например, можно получить из формулы Родрига, если воспользоваться формулой для вычета в полюсе порядка $l + 1$. Контур γ в этом интеграле обходит точку $z = \xi \equiv \cos \theta$ в положительном направлении. Выберем амплитуду $A(z) = (z - \xi)^{-1}$ и фазу

$$S(z) = \ln \frac{z^2 - 1}{z - \cos \theta}.$$

Пусть $l \gg 1$ — большой параметр. Найдём стационарные точки:

$$S' = \frac{2z}{z^2 - 1} - \frac{1}{z - \cos \theta} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = e^{\pm i\theta},$$

$$S(e^{\pm i\theta}) = \ln 2e^{i\theta} = \ln 2 + i\theta, \quad S''(e^{\pm i\theta}) = \frac{e^{\mp i\theta}}{i \sin \theta}.$$

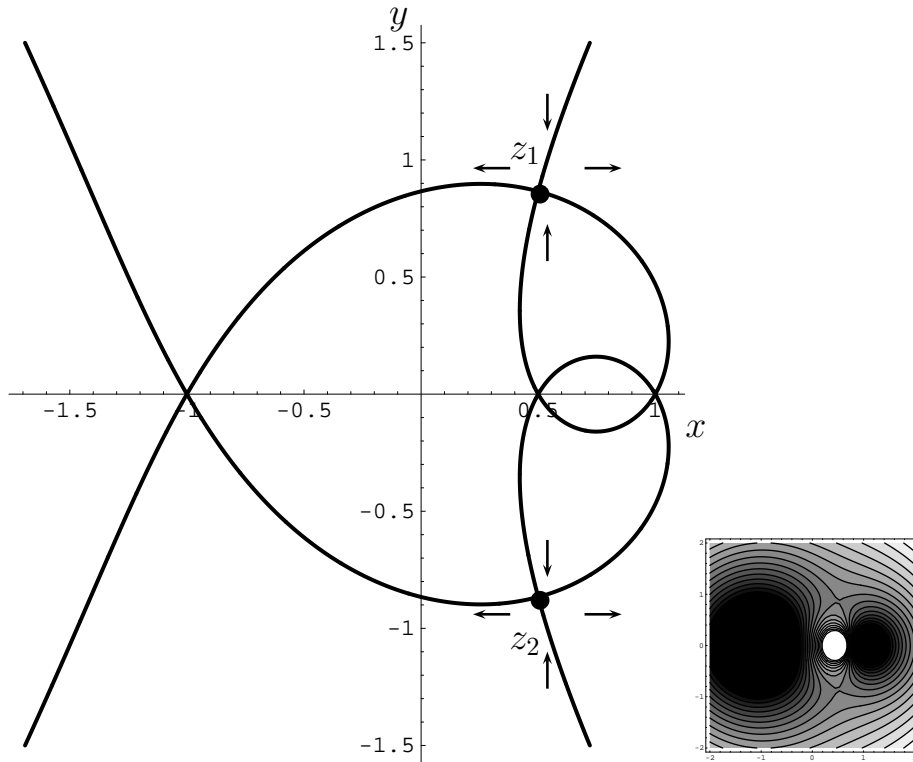


Рис. 13.4. Граф Стокса функции $S = \ln(z^2 - 1) - \ln(z - \cos \theta)$, $\theta = \pi/3$. На врезке линии уровня $u(x, y) = \ln \left| \frac{z^2 - 1}{z - \cos \theta} \right| = \text{const}$

Следовательно, значение аргумента ψ второй производной $S''(z_1) = \rho e^{i\psi}$ равно $\psi = -\theta - \pi/2$. Отсюда $\phi_1 = 3\pi/4 + \theta/2$, $\phi_2 = -\pi/4 + \theta/2$. Из графа Стокса на рис. 13.4 видно, что при интегрировании против часовой стрелки надо выбрать ϕ_1 . Получаем асимптотику

$$P_l(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi l |\sin \theta|}} \cos \left(l\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Нет никаких препятствий, мешающих деформировать исходный контур так, чтобы он прошел вдоль линий Стокса, потому что полюс $z = \cos \theta$ остается внутри контура.

Найденная асимптотика справедлива при углах θ , не слишком близких к $0, \pi$:

$$\theta, \pi - \theta \gg \frac{1}{l}.$$

Неравномерность разложения вблизи 0 и π связана с неприменимостью предположений об изолированности критических точек и аналитичности амплитуды. При $\theta \rightarrow 0$ или π точки $z_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ сближаются. Впрочем, особенность оказалась интегрируемой, если вычислять интеграл от квадрата полинома Лежандра по $\sin \theta d\theta$.

Для получения равномерного при $\theta \rightarrow 0$ разложения можно воспользоваться уг-

ловым уравнением (9.2) при $m = 0$:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{du}{d\theta} = -l(l+1)u.$$

При малых углах заменяем $\operatorname{ctg} \theta \approx \theta^{-1}$, а $l(l+1) \approx (l+1/2)^2$ при $l \gg 1$. Получается уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{du}{d\theta} + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 u = 0.$$

Решение дается функцией Бесселя нулевого порядка, которую при $l\theta \gg 1$ можно заменить асимптотикой:

$$u(\theta) = J_0((l+1/2)\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi l\theta}} \cos \left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} \right].$$

В общей области применимости, при $1/l \ll \theta \ll 1$, обе асимптотики совпадают. Заметим, что сами предельные значения при $\theta \rightarrow 0, \pi$ можно получить непосредственно из формулы Родрига: $P_l(1) = 1, P_l(-1) = (-1)^l$.

ЛЕКЦИЯ 14.

Метод усреднения

Во многих физических задачах возникает ситуация, когда поведение системы является почти периодическим, при этом соответствующие колебания могут быть характеризованы мгновенной частотой ω и амплитудой. Мгновенная означает, что сигнал на временах порядка нескольких колебаний представляет собой почти периодическую функцию, т. е. с определенной точностью может быть аппроксимирована периодической функцией. Интересен вопрос, как ведет себя система на больших временах, в частности, каким образом меняется частота и амплитуда колебаний. Если факторы, влияющие на изменение параметров колебаний, являются слабыми, то с математической точки зрения это означает наличие малого параметра:

$$\epsilon \ll 1.$$

Если при $\epsilon = 0$ динамическая система может быть полностью описана, т. е. соответствующие уравнения допускают точное решение, то можно пытаться строить решение уравнений при $\epsilon \ll 1$ в виде разложения по степеням параметра ϵ , используя методы *теории возмущений*. Конечно, при этом желательно, чтобы такое разложение было равномерным по параметру. Например, обычный ряд Тейлора не всегда дает равномерное разложение, как видно из простейшего примера

$$\sin((1 + \epsilon)t) = \sin t + \epsilon t \cos t - \frac{(\epsilon t)^2}{2!} \sin t + \dots$$

Разложение хорошо работает на малых временах вплоть до $t \sim 1$, а при $t \sim 1/\epsilon$ несколько первых членов разложения не дают даже приближенного представления о поведении функции. Один из методов теории возмущений, который позволяет найти тенденцию изменения решения на больших временах, называется *методом усреднения*. Метод усреднения используется в небесной механике со времен Лагранжа и Лапласа для расчета эволюции планетных орбит. Однако до сих пор его обоснование нельзя считать законченным. Мы рассмотрим только простейшие случаи. Более общие результаты можно найти в книгах Арнольда по обыкновенным дифференциальным уравнениям [2, 4]. Более подробное изложение метода усреднения высших

порядков и его применений в механике и электронике можно найти в монографии Боголюбова — Митропольского [14].

В данной лекции мы ограничимся рассмотрением механических систем с конечным числом степеней свободы. Будем предполагать, что система *невозмущенных* $2n$ уравнений представляет собой гамильтоновские уравнения

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $p = (p_1, \dots, p_n)$ — координаты и импульсы, а $H(x, p)$ — (невозмущенный) гамильтониан. Пусть данная система описывает финитное движение с характерным периодом $T \sim 1$. *Возмущенными* назовем уравнения

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} + \epsilon v_1(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon f_1(x, p),$$

где ϵ — малый параметр. Цель метода усреднения — найти разложение решения $x(t)$, $p(t)$, справедливое на больших временах $t \sim 1/\epsilon$.

14.1. Усредненное уравнение. Преобразование Боголюбова — Крылова

Перепишем невозмущенные уравнения в новых переменных — переменных действие-угол I , φ . В гамильтоновой системе переменные φ представляют собой обобщенные координаты, а действия I — обобщенные импульсы. Соответствующее преобразование к I и φ является каноническим, соответственно уравнения в новых переменных сохраняют свой гамильтонов вид:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \quad (14.1)$$

Факт интегрируемости невозмущенных уравнений означает, что невозмущенный гамильтониан представляет собой функцию, зависящую только от действий: $H = H(I)$. Таким образом, уравнения (14.1) для переменных действие-угол записываются как

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I). \quad (14.2)$$

Назовем I — *медленной* переменной, а φ — *угловой* переменной или фазой. Тогда возмущенное уравнение запишется как

$$\dot{I} = \epsilon g(I, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(I) + \epsilon f(I, \varphi), \quad (14.3)$$

где функции f, g находятся по функциям $v_1(x, p)$, $f_1(x, p)$.

Вместо (14.3) рассмотрим *усредненное уравнение*

$$\dot{J} = \epsilon G(J), \quad G(J) = \frac{\int g(J, \varphi) d\varphi}{\int d\varphi}. \quad (14.4)$$

Метод усреднения предлагает рецепт — решить усредненное уравнение для функции J вместо возмущенных уравнений (14.3). Выигрыш очевиден — уравнений в системе (14.4) оказывается вдвое меньше, чем в исходной.

Пример 14.1. Пусть $n = 1$, I, ϕ — скалярные функции, а ω — постоянная. Рассмотрим возмущенное уравнение:

$$\dot{I} = \epsilon(a + b \sin \phi), \quad \dot{\phi} = \omega, \quad I(0) = I_0, \quad \phi(0) = 0.$$

Невозмущенное уравнение $\dot{I} = 0, \dot{\phi} = \omega$ дает $I(t) = I_0, \phi(t) = \omega t$. В данном примере несложно найти и решение возмущенного уравнения:

$$I(t) = \epsilon at + \epsilon b \int_0^t \sin(\omega t') dt' + I_0 = \epsilon at + \frac{\epsilon b}{\omega}(1 - \cos \omega t) + I_0.$$

Усредненное уравнение

$$\dot{J} = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b \sin \phi) d\phi = \epsilon a$$

решается сразу. Его решение $J(t) = I_0 + \epsilon at$ при тех же начальных условиях уходит от точного на величину порядка ϵ , а значит, правильно передает тенденцию на больших временах

$$|J(t) - I(t)| = \frac{\epsilon b}{\omega} |1 - \cos \omega t| \leq \text{const} \cdot \epsilon.$$

Выведем усредненное уравнение для одночастотной системы $n = 1$. Легко видеть, что при одинаковых начальных условиях изменение медленной переменной за период $T = 2\pi/\omega$ равно

$$\Delta I = I(t) - I(0) = \epsilon T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(I, \phi(t)) dt = \epsilon T \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(I, \phi) d\phi = \epsilon T G(I).$$

Усреднение по времени заменяем усреднением по быстрой переменной $\phi : dt = d\phi/\dot{\phi} = d\phi/\omega$, переобозначая $I \rightarrow J$. Отметим, что медленную эволюцию J за много периодов можно описать разностным уравнением

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \epsilon G(J),$$

которое иногда называют *стробоскопическим*. Если приближенно заменить отношение конечных разностей производной, то получается усредненное дифференциальное уравнение (14.4).

Самое тонкое место здесь — замена усреднения по времени усреднением по всем значениям угловой переменной ϕ . Наш вывод относится к одночастотной системе, в

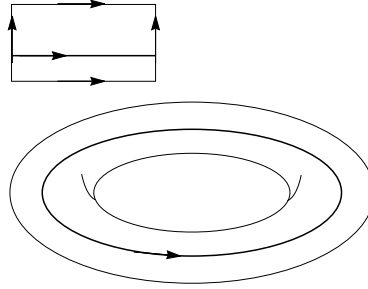


Рис. 14.1. Тор (φ_1, φ_2) с замкнутой намоткой: резонанс $\omega_1/\omega_2 = 0/1$. На врезке — развертка тора

которой имеется всего $n = 1$ угловая переменная $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При $n > 1$ уравнения (14.2), (14.3), (14.4) пишутся так же, как в одночастотном случае, но под переменными I, φ понимаются векторы $I = (I_1, \dots, I_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Частота и угловая переменная — тоже векторы $\omega = (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I))$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. При $n = 2$ движение в пространстве угловых переменных (φ_1, φ_2) происходит по поверхности тора

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1(0), \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2(0), \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi.$$

При рациональном отношении частот $\omega_1/\omega_2 = p/q, p, q \in \mathbb{Z}$ «намотка» замыкается и траектория движения не замечает всю поверхность тора. Следовательно, заменять на усреднение по поверхности тора незаконно, по крайней мере при небольших значениях чисел p, q . Такие случаи относятся к *резонансным*. При больших p, q замкнутая траектория проходит практически через всю поверхность тора и можно воспользоваться методом усреднения.

На рис. 14.1 изображен тор с замкнутой траекторией. В левом верхнем углу изображена прямоугольная выкройка тора, стрелки на сторонах показывают, с какой ориентацией стороны склеиваются. Траектория движения тоже показана стрелкой. Точка на траектории попала на две противоположные стороны прямоугольника, которые склеены. Траектория замкнута, она соответствует резонансу $\omega_1/\omega_2 = 0/1$, когда метод усреднения заведомо не работает.

Пример 14.2. Чтобы познакомиться с еще одним явлением — *прохождением через резонанс*, рассмотрим один пример двухчастотной системы. Если имеется малая нелинейность — зависимость частоты ω от амплитуды I , то система за большое время $t \sim 1/\epsilon$ выйдет из резонанса:

$$\dot{\varphi}_1 = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = 1, \quad \dot{I}_1 = \epsilon, \quad \dot{I}_2 = \epsilon \cos \varphi_1.$$

Решение невозмущенного уравнения находится сразу:

$$I_1 = I_1(0), \quad I_2 = I_2(0), \quad \varphi_1 = I_1(0)t + \varphi_1(0), \quad \varphi_2 = t + \varphi_2(0).$$

Отношение частот $\omega_1/\omega_2 = I_1(0)$. Поэтому резонансы будут проявляться для начальных условий $I_1(0) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Рассмотрим резонанс нулевого порядка $I_1(0) = 0$, изображенный на рис. 14.1.

Усредненное уравнение

$$\dot{J}_1 = \epsilon, \quad \dot{J}_2 = 0$$

имеет решение $J_1 = \epsilon t$, $J_2 = \text{const}$. Чтобы проверить, насколько велика ошибка решения усредненного уравнения, найдем точное решение и проверим, сохраняется ли величина I_2 . Обращаясь к возмущенному уравнению, получим

$$\begin{aligned} I_1 = \epsilon t, \quad \varphi_1 = \epsilon \frac{t^2}{2} + \varphi_1(0) &\Rightarrow \Delta I_2 = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(\epsilon \frac{t^2}{2} + \varphi_1(0) \right) dt = \\ &= \sqrt{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(\frac{\xi^2}{2} + \varphi_1(0) \right) d\xi = \sqrt{\pi\epsilon} (\cos \varphi_1(0) - \sin \varphi_1(0)). \end{aligned}$$

Значит, уход переменной I_2 от значения $J_2 = \text{const}$, предсказанного методом усреднения, не так уж и велик:

$$|J_2 - I_2| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\epsilon}.$$

Важно, что полученная оценка имеет порядок $\epsilon^{1/2}$ (т. е. $\rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$). В одночастотной системе соответствующая оценка $\sim \epsilon$. В многочастотном случае погрешность метода усреднения может увеличиться.

Рассмотрим, как реализуется указанная схема усреднения, на примере задачи о слабонелинейном осцилляторе

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon F(x, \dot{x}).$$

Здесь F — функция, зависящая от координаты и скорости (возможно, еще и от времени как параметра), а ϵ — малый параметр.

Невозмущенные уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

являются гамильтоновскими с $H = p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2$:

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\omega_0^2 x.$$

Далее удобно ввести нормальные переменные a и a^* :

$$p = -i\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}(a - a^*), \quad x = \sqrt{\frac{1}{2\omega_0}}(a + a^*)$$

или

$$a = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}x + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_0}}p, \quad a^* = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}x - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_0}}p. \quad (14.5)$$

В этих переменных гамильтониан $H = \omega_0 a^* a$, а невозмущенные уравнения записываются в виде одного уравнения для комплексной величины a :

$$\dot{a} = -i\frac{\partial H}{\partial a^*} = -i\omega_0 a. \quad (14.6)$$

Переменные a^* и a играют важную роль в квантовой механике, где они являются аналогами операторов рождения и уничтожения. В классическом случае эти переменные зависят от времени экспоненциально: $a^* = a_0^* e^{i\omega_0 t}$ и $a = a_0 e^{-i\omega_0 t}$, так что $|a|^2$ не зависит от времени. Величина $|a|^2$ представляет собой действие I , так что $H = \omega_0 I$. Сопряженная к действию фаза ($\equiv \arg a$) подчиняется уравнению $\dot{\varphi} = -\omega_0$, т. е. меняется со временем линейно: $\varphi = -\omega_0 t + \varphi_0$.

Используя определение нормальных переменных (14.5), уравнение для нелинейного осциллятора записывается в виде

$$\dot{a} + i\omega_0 a = i\epsilon \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} F,$$

где F – действительная функция, выраженная через a^* и a .

Если теперь перейти к аргументу и модулю $a = \sqrt{I} e^{i\varphi}$ и разделить действительную и мнимую части, то уравнение «возмущенного» осциллятора сводится к двум уравнениям (14.3):

$$\dot{I} = \epsilon \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}} F \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = -\omega_0 + \epsilon \sqrt{\frac{2}{\omega_0 I}} F \cos \varphi. \quad (14.7)$$

Отсюда получается усредненное уравнение (14.4), для которого функция $G(J)$ определяется в виде интеграла:

$$\dot{J} = \epsilon G(J),$$

$$G(J) = \sqrt{\frac{2J}{\omega_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \left(\sqrt{\frac{2J}{\omega_0}} \cos \varphi, \sqrt{2\omega_0 J} \sin \varphi \right) \sin \varphi d\varphi = \sqrt{\frac{2J}{\omega_0}} \langle F \sin \varphi \rangle. \quad (14.8)$$

Здесь треугольные скобки означают усреднение по фазе φ . Отметим, что в усредненное уравнение вошла первая фурье-компонента возмущающей силы на частоте невозмущенных колебаний.

В следующих трех примерах вместо J мы будем использовать $\sqrt{2J}$, которая обозначается той же буквой J . В этих переменных усредненное уравнение (14.8) имеет тот же вид, изменится только вид функции $G(J)$.

14.2. Примеры

Пример 14.3 (Резонанс). Малая внешняя сила раскачивает осциллятор на его собственной частоте $F(x, \dot{x}) = \cos t$ (здесь мы выбрали частоту осциллятора $\omega_0 = 1$, что соответствует переходу к безразмерному времени $\omega_0 t$). Невозмущенная угловая переменная (фаза осциллятора) находится из уравнения (14.7): $\varphi(t) = -t + \varphi_0$, где φ_0 – начальная фаза. Отсюда находим:

$$G(J) = \langle \cos(\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi \rangle = \langle (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} \sin \varphi_0.$$

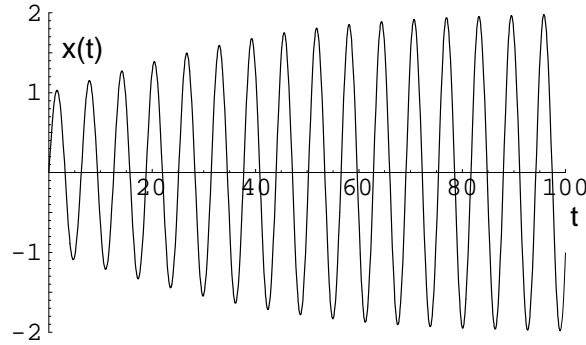


Рис. 14.2. Выход генератора Ван дер Поля на автоколебательный режим: $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \epsilon = 0.05$.

Усредненное уравнение $\dot{J} = \epsilon \sin \varphi_0/2$ решается следующим образом: $J(t) = J(0) + \epsilon t \sin \varphi_0/2$. Медленная переменная J , амплитуда колебаний, линейно растет со временем, когда начальная фаза $\varphi_0 \neq 0, \pi$.

Пример 14.4 (Уравнение Ван дер Поля). Уравнение

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

описывает генератор — усилитель с положительной обратной связью, который может переходить в режим самовозбуждения. Соответствующая функция $F = \dot{x}(1 - x^2)$, тогда из (14.8) найдем:

$$G(J) = \langle J \sin \varphi (1 - J^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2}J - \frac{1}{8}J^3 \Rightarrow \dot{J} = \frac{\epsilon}{8}J(4 - J^2).$$

Усредненное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными решается, но для наших целей достаточно исследовать его на устойчивость, посмотрев изменение знака \dot{J} в стационарных точках. Получается, что $J = 0$ — неустойчивое решение, а $J = 2$ — устойчивое (режим автоколебаний). В исходных переменных уравнение Ван дер Поля описывает предельный цикл электронного генератора или одночастотного лазера, или, другими словами, выход на автоколебательный режим (рис. 14.2).

Пример 14.5 (Параметрический резонанс). Рассмотрим осциллятор, частота которого меняется от времени периодически:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \epsilon \cos \Omega t)x = 0.$$

Общий гамильтониан этой системы

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2(1 + \epsilon \cos \Omega t)x^2/2$$

явно зависит от времени. Как результат в переменных a и a^* (14.5) в H появляются три дополнительных слагаемых, пропорциональных ϵ :

$$H = \omega_0 a^* a + \epsilon \cos(\Omega t) \frac{\omega_0}{4} (aa + a^* a^* + 2|a|^2).$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\dot{a} + i\omega_0 a = -i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \cos(\Omega t)(a^* + a), \quad \dot{a}^* - i\omega_0 a^* = i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \cos(\Omega t)(a + a^*).$$

Поскольку a^* и a в нулевом приближении (при $\epsilon = 0$) изменяются пропорционально $e^{\pm i\omega_0 t}$, то легко видеть, что итерации решения этих уравнений по малому параметру ϵ приводят к появлению дополнительных гармоник с частотами

$$\omega_{n_1} = \omega_0 + n_1\Omega, \quad \omega_{n_2} = -\omega_0 + n_2\Omega,$$

где $n_{1,2}$ — целые положительные и отрицательные числа. Между этими гармониками возможны резонансы, если выполняются условия

$$\omega_{n_1} = -\omega_0 + n_2\Omega.$$

Первыми и соответственно главными являются резонансы с $n_1 = -1$, $n_2 = 0$ и $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, что эквивалентно одному и тому же резонансному условию:

$$2\omega_0 = \Omega. \quad (14.9)$$

В гамильтониане этому резонансу отвечают два слагаемых, пропорциональных ϵ :

$$\bar{H} = \omega_0 a^* a + \frac{1}{2}(h a^* a^* + h^* a a), \quad (14.10)$$

где

$$h = h_0 e^{-i\Omega t}, \quad h_0 = \epsilon \frac{\omega_0}{4}$$

— так называемая «накачка». Черта над H означает усреднение с учетом резонанса (14.9). Остальные члены вблизи этого резонанса являются быстро осциллирующими и после усреднения по высокой частоте выпадают. Согласно правилу (14.6) уравнения движения, соответствующие данному \bar{H} , будут иметь вид

$$\dot{a} + i\omega_0 a + i h_0 e^{-i\Omega t} a^* = 0, \quad \dot{a}^* - i\omega_0 a^* - i h_0^* e^{i\Omega t} a = 0.$$

Эти два связанных уравнения содержат явную зависимость от времени. С помощью замены

$$a = c e^{-i\Omega t/2}, \quad a^* = c^* e^{i\Omega t/2}$$

эта зависимость исключается:

$$\dot{c} + i\left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right)c + i h_0 c^* = 0, \quad \dot{c}^* - i\left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right)c^* - i h_0^* c = 0.$$

Решения полученной системы ищутся в виде $c, c^* \sim e^{\gamma t}$. Для γ получается характеристическое уравнение, которое имеет два корня:

$$\gamma = \pm \sqrt{|h_0|^2 - (\Delta\omega)^2}, \quad \Delta\omega = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}.$$

Отсюда видно, что неустойчивость (соответствует знаку плюс) возникает при $|h_0|^2 > (\Delta\omega)^2$. Максимум инкремента $\gamma_{max} = |h_0|$ достигается при выполнении резонансного условия (14.9). Ширина этого резонанса по частотам равна $2\gamma_{max}$. Эта неустойчивость называется параметрической. Условие параметрического резонанса (14.9) имеет простую квантово-механическую интерпретацию. Второе слагаемое в гамильтониане (14.10) соответствует процессу одновременного рождения двух квантов с частотой ω_0 при уничтожении одного кванта накачки. В результате энергия одного кванта накачки (совпадающая с точностью до постоянной Планка с частотой Ω) передается двум квантам осциллятора, что в точности дает условие резонанса (14.9).

Учет трения с декрементом ν приводит к появлению порога неустойчивости по амплитуде накачки: параметрическая неустойчивость раскачивается при $\gamma_{max} = |h_0| \geq \nu$.

Пример 14.6. (Нелинейное трение). Уравнение

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x}^3 + x = 0$$

описывает осциллятор с трением, пропорциональным кубу скорости. По функции $F = -\dot{x}^3$, пользуясь тождеством

$$\overline{\sin^4 \varphi} = \frac{1}{4} \overline{(1 - \cos^2 2\varphi)^2} = \frac{3}{8},$$

найдем из (14.8) усредненное уравнение

$$\dot{J} = -\frac{3}{8}\epsilon J^3.$$

Его решение дается формулой

$$J^2 = \frac{1}{\frac{1}{J_0^2} + \frac{3}{4}\epsilon t}.$$

Амплитуда колебаний затухает на больших временах медленнее, чем в случае линейного трения: как $t^{-1/2}$ вместо экспоненты. Объясните, почему?

Сводка формул по специальным функциям

1. Гамма-функция Эйлера

Интегральные представления:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} t^{-z} e^t dt,$$

контур γ изображен на рис. П.1. Тождества:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

2. Гипергеометрические функции

Функция Гаусса ${}_2F_1$

Дифференциальное уравнение для ${}_2F_1(a, b; c; x)$:

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле $x = 0$:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Преобразование Эйлера:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\right).$$

Интегральное представление:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a} dt.$$

Функция Куммера ${}_1F_1$

Дифференциальное уравнение для ${}_1F_1(a; c; x)$:

$$x y'' + (c - x) y' - a y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле $x = 0$:

$${}_1F_1(a; c; x) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; x/b) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Второе решение:

$$y = x^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1; 2 - c; x).$$

Преобразование Куммера:

$${}_1F_1(a; c; x) = e^x {}_1F_1(c - a; c; -x).$$

Интегральное представление:

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{xt} dt,$$
$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0.$$

Асимптотическое поведение:

$${}_1F_1(a; c; x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}, \quad x \rightarrow +\infty,$$
$${}_1F_1(a; c; x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

3. Цилиндрические функции

Функции Бесселя J_ν и Неймана Y_ν

Дифференциальное уравнение для $J_\nu(x)$:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле $x = 0$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}.$$

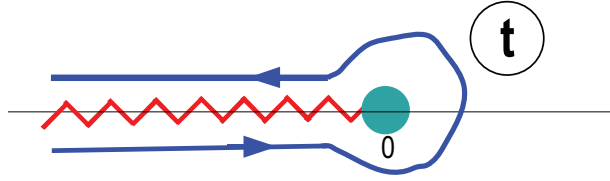


Рис. П.1. Контур интегрирования γ в плоскости комплексного t , обходящий разрез $-\infty < t \leq 0$ в положительном направлении. Разрез показан зигзагом.

Выражение через гипергеометрическую функцию:

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-ix} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix\right).$$

Рекуррентное соотношение:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x).$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{dx} J_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \\ \frac{d}{dx} (x^{\pm\nu} J_\nu(x)) &= \pm x^{\pm\nu} J_{\nu\mp 1}(x). \end{aligned}$$

Интегральные представления Шлефли и Пуассона:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z^{\nu+1}} \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ix \sin \varphi - i\nu\varphi} - \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{sh} t - \nu t} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} \varphi \cos(x \sin \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{ix t} (1-t^2)^{\nu-1/2} dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Интегрирование идет по контуру γ (рис. П.1), начинающемуся и заканчивающемуся в $-\infty$, обходящему точку $z = 0$ в положительном направлении.

Второе решение:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi \nu} \left[J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x) \right].$$

Асимптотическое поведение:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\nu \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Случай полуцелого индекса:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Функции Бесселя целого порядка J_n

Функции отрицательного порядка:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Производящие функции:

$$e^{ix \sin \phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} J_m(x),$$

$$\exp \left[\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x).$$

Соотношения ортогональности:

$$\int_0^1 x J_k(\gamma_n x) J_k(\gamma_m x) dx = \frac{\delta_{nm}}{2} \left(\frac{dJ_k(\gamma_m)}{d\gamma_m} \right)^2, \quad J_k(\gamma_m) = 0,$$

$$\int_0^1 x J_k(\lambda_n x) J_k(\lambda_m x) dx = \frac{\delta_{nm}}{2} \left(1 - \frac{k^2}{\lambda_m^2} \right) J_k^2(\lambda_m), \quad \frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m} = 0.$$

Модифицированная функция Бесселя I_ν и функция Макдональда K_ν

Дифференциальное уравнение для $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$:

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле $x = 0$:

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n + \nu + 1)}.$$

Выражение через обычные функции Бесселя:

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ix).$$

Выражение для K_ν через $I_\nu, I_{-\nu}$:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \sin \pi\nu}.$$

Интегральные представления:

$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2} dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2,$$

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} \nu t dt, \quad \operatorname{Re} x > 0,$$

$$K_\nu(2\sqrt{pq}) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu/2} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-px-q/x} dx, \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0.$$

Асимптотическое поведение:

$$I_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi x}{2}} e^x, \quad K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$I_\nu(x) \simeq \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad K_0(x) \simeq -\ln x, \quad x \rightarrow +0;$$

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad x \rightarrow +0, \nu \neq 0.$$

Функции Ганкеля $H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$

Выражение через функции Бесселя и Неймана:

$$H_m^{(1)}(z) = J_m(z) + iY_m(z), \quad H_m^{(2)}(z) = J_m(z) - iY_m(z).$$

Асимптотика при $z \rightarrow \infty$:

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}, \quad -\pi + \delta < \arg z < 2\pi - \delta,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}, \quad -2\pi + \delta < \arg z < \pi - \delta.$$

Интегральные представления

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\pi i\nu/2}}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{iz \operatorname{ch} t - \nu t} dt, \quad 0 < \arg z < \pi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\pi i\nu/2}}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{-iz \operatorname{ch} t - \nu t} dt, \quad 0 < \arg z < \pi.$$

4. Ортогональные полиномы

Полиномы Лежандра P_l и присоединенные функции Лежандра P_l^m

Дифференциальное уравнение для $P_l(x)$:

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + l(l + 1) y = 0.$$

Дифференциальное уравнение для $P_l^m(x)$:

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \left(l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) y = 0.$$

Формулы Родрига:

$$P_l(x) \equiv P_l^0(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$
$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Первые 3 полинома:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{ll}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$x(2l + 1)P_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x).$$

Формулы дифференцирования:

$$(2l + 1)P_l(x) = \frac{d}{dx} P_{l+1}(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x),$$
$$lP_l(x) = x \frac{d}{dx} P_l(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x).$$

Производящие функции:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xr + r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), & r < 1; \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(x), & r > 1; \end{cases} \quad -1 < x < 1.$$

Интегральные представления:

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^{-l-1} dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}},$$

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^l d\varphi.$$

Интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки $t = 0$ в положительном направлении.

Асимптотическое поведение:

$$P_l(\cos \theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{\sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad l|\sin \theta| \gg 1.$$

Сферические гармоники Y_{lm}

Выражение через присоединенные функции Лежандра:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta).$$

Дифференциальные уравнения для Y_{lm} :

$$\Delta_\Omega Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}, \quad i \frac{d}{d\varphi} Y_{lm} = -mY_{lm}.$$

Здесь Δ_Ω — угловая часть трехмерного оператора Лапласа в сферических координатах.

Соотношение ортогональности:

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Соотношение полноты:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}').$$

Полиномы Эрмита H_n

Дифференциальное уравнение для $H_n(x)$:

$$y'' - 2x y' + 2n y = 0.$$

Формула Родрига:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Первые 3 полинома:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}.$$

Соотношение полноты:

$$\frac{e^{-(x^2+x'^2)/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(x')}{2^n n!} = \delta(x - x').$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Производящая функция:

$$\exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x).$$

Интегральные представления:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{2^{n+1} e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} z^n e^{-z^2} \cos\left(2xz - \frac{n\pi}{2}\right) dz \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Полиномы Лагерра L_n^ν

Дифференциальное уравнение для $L_n^\nu(x)$:

$$x y'' + (\nu + 1 - x) y' + n y = 0.$$

Формула Родрига:

$$L_n^\nu(x) = \frac{x^{-\nu} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{n+\nu}.$$

Первые 3 полинома:

$$\begin{aligned} L_0^\nu(x) &= 1, & L_1^\nu(x) &= \nu + 1 - x, \\ L_2^\nu(x) &= \frac{1}{2}(\nu + 1)(\nu + 2) - (\nu + 2)x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\nu L_m^\nu(x) L_n^\nu(x) dx = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{n!} \delta_{mn}.$$

Соотношение полноты:

$$(xx')^{\nu/2} e^{-(x+x')/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^\nu(x) L_n^\nu(x')}{\Gamma(n + \nu + 1)} = \delta(x - x').$$

Рекуррентное соотношение:

$$(n + 1)L_{n+1}^\nu(x) - (2n + \nu + 1 - x)L_n^\nu(x) + (n + \nu)L_{n-1}^\nu(x) = 0.$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} L_n^\nu(x) &= nL_n^\nu(x) - (n + \nu)L_{n-1}^\nu(x), \\ \frac{d}{dx} L_n^\nu(x) &= -L_{n-1}^{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

Производящая функция:

$$(1 - z)^{-\nu-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^\nu(x).$$

Интегральное представление:

$$\begin{aligned} L_n^\nu(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 + \frac{x}{t}\right)^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^\nu \frac{dt}{t} \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint \frac{(1-t)^{n+\nu}}{t^n} e^{tx} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Здесь интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки $t = 0$ в положительном направлении.

Список литературы

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1997.
4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
5. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
6. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.
7. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. Линейные уравнения математической физики. СМБ. М.: Наука, 1964.
8. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Наука, 1978.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. II. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
11. Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977.
12. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1978.
13. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Задачи по математической физике. М.: Изд. Московского университета, 1998.
14. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

15. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1987.
16. Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.
17. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
18. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961.
19. Дибай Э. А., Каплан С. А. Размерность и подобие астрофизических величин. М.: Наука, 1976.
20. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
21. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
23. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
24. Колоколов И. В., Кузнецов Е. А., Мильштейн А. И., Подивилов Е. В., Черных А. И., Шапиро Д. А., Шапиро Е. Г. Задачи по математическим методам физики. Изд. 4е, испр. М.: Эдиториал URSS, 2009.
25. Копсон Э. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.
26. Коткин Г. Л., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1977.
27. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
28. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.
29. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика, Изд. 4е. М.: Наука, 1988.
31. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, Изд. 4е. М.: Наука, 1989.
32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика, Изд. 4е. М.: Наука, 1988.
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, Часть I, Изд. 3е. М.: Наука, 1978.

34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, Изд. 4е. М.: Наука, 1988.
35. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1955.
36. Ли Цзун-дао. Математические методы в физике. М.: Мир, 1965.
37. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
38. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
39. Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
40. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, Т.1. М.: ИЛ, 1958.
41. Мэтьюз Дж., Уокер Д. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, Москва. 1972.
42. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
43. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
44. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
45. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях в частных производных. М.: Наука, 1961.
46. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.
47. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002.
48. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
49. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.1. М.: Мир, 1982.
50. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.
51. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1976.
52. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
53. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
54. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
55. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

56. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
57. Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
58. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. М.: Мир, 1965.
59. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.
60. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977.
61. Chow T. L. Mathematical methods for physicists: a concise introduction. New York, Melbourne: Cambridge Univ. Press, 2000.
62. Olver F. et. al. NIST Handbook of Mathematical Functions. New York: NIST and Cambridge University Press, 2010.

Предметный указатель

- автомодельность, 46
- бегущая волна, 46
- бета-функция Эйлера, 68
- бифуркация, 23
- гамма-функция Эйлера, 65, 68, 118
- главная дифференциальная часть, 39
- граф Стокса, 102
- задача
 - Дирихле, 59
 - Коши, 17
 - Неймана, 59
 - смешанная краевая, 59
- инвариант
 - Римана, 32
 - уравнения второго порядка, 79
- калибровка Лоренцева, 10
- канонический вид
 - гиперболической системы, 30
 - уравнения второго порядка
 - в частных производных, 41
 - обыкновенного, 78
- константа разделения, 55
- контур
 - минимаксный, 102
- линия
 - наискорейшего спуска, 101
 - Стокса, 102
- метод
 - годографа, 35
 - Лапласа, 61
 - Фурье, 59
- начальная гиперповерхность, 17
- начальное условие, 17
- область
 - влияния, 31, 44
 - зависимости, 31, 44
- общее решение, 15
- обыкновенная точка, 79
- одночастотная система, 111
- определитель
 - Вронского, 81
- опрокидывание, 23, 33
- особая точка, 81
 - иррегулярная, 83
 - регулярная, 83
- переменная
 - медленная, 110
 - угловая, 110
- полиномы
 - Лагерра, 89, 125
 - обобщенные, 89
 - Лежандра, 73
 - Эрмита, 90, 91, 124
- порядок уравнения, 6
- представление
 - Ганкеля, 68
 - интегральное
 - Бесселя, 67
 - Пуассона, 120
 - Шлефли, 69, 120
- преобразование
 - Куммера, 87
 - Лапласа, 61

- Лежандра, 35, 36
- Лиувилля, 79, 87
- производящая функция, 67
- промежуточная асимптотика, 50
- простая волна Римана, 33
- разделение переменных, 55
- разложение
 - асимптотическое, 93
- расширенное пространство, 19
- решение
 - общее, 7
 - частное, 18
- сектор сходимости, 98
- соотношение на характеристиках, 32
- сферические гармоники, 74, 124
- уравнение
 - акустики, 9
 - Бесселя, 64, 88, 108
 - Бюргерса, 52
 - Вебера, 90
 - возмущенное, 110
 - волновое, 43
 - неоднородное, 33
 - однородное, 30
 - Гамильтона — Якоби, 25
 - Гельмгольца, 58
 - гипергеометрическое, 85, 86
 - вырожденное, 87
 - Кортевега — де Вриза, 48
 - класса Фукса, 84
 - Лагерра, 89
 - Лапласа, 11, 42, 43
 - Лежандра, 72, 88
 - невозмущенное, 110
 - непрерывности, 9
 - определяющее, 83
 - первого порядка
 - квазилинейное, 20
 - нелинейное, 24
 - неоднородное, 19
 - однородное, 15
 - состояния, 9
 - теплопроводности, 11
 - нелинейное, 51
 - одномерное, 49
 - усредненное, 110
 - Хопфа, 22, 47
 - Шредингера, 10, 56
 - в центральном поле, 71
 - для атома водорода, 89
 - для осциллятора, 90
 - Эйлера, 9, 85
- формула
 - Даламбера, 31
 - Родрига
 - для полиномов Лагерра, 92
 - для полиномов Лежандра, 73
 - для полиномов Эрмита, 91
 - Стирлинга, 97
- функции
 - Бесселя, 64, 88, 119
 - модифицированные, 121
 - сферические, 77
 - Ганкеля, 65, 122
 - гипергеометрические
 - Гаусса, 86, 118
 - Куммера, 87, 119
 - Лежандра, 88, 123
 - второго рода, 73
 - присоединенные, 74
 - Макдональда, 121
 - Неймана, 64, 119
 - параболического цилиндра, 90
 - цилиндрические, 64
 - Эйри, 99, 105
- характеристика
 - гиперболической системы, 28
 - квазилинейного уравнения, 21
 - линейного уравнения, 15
 - нелинейного уравнения, 25
 - уравнения 2-го порядка, 40, 44
- характеристический показатель, 82