МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

Методы решения

обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнения первого порядка.
Уравнения, допускающие понижение порядка.

учебно-методическое пособие

Новосибирск

2012

Настоящее пособие является первой частью цикла пособий, отражающих многолетний опыт проведения авторами практических занятий по курсу «Методы математической физики» на втором курсе отделения физической информатики физического факультета НГУ.

Разнообразные примеры и комментарии к ним знакомят студентов с идеями, лежащими в основе различных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и помогают осваивать алгоритмы решения типовых задач.

Каждый параграф пособия является методической разработкой двухчасового занятия. В конце занятия предлагаются вопросы для самостоятельной работы в классе и список задач для дальнейшего закрепления полученных практических навыков.

Целевая аудитория: студенты 2-го курса отделения физической информатики физического факультета и отделения геофизики и геомеханики геолого-геофизического факультета НГУ.

Авторы

Михайлова Т. Ю., Доманова Е. Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации

Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

Занятие 1

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными* называют уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{1.1}$$

С такими уравнениями вы уже не раз встречались. Мы лишь напомним, как они решаются.

Прежде всего заметим, что если в какой-либо точке $y = c_0$ функция $g(y)$ обращается в ноль, то функция $y(x) \equiv c_0$ является решением уравнения (1.1), т.к обращает его в тождество.

Чтобы найти другие решения, представим производную y' как отношение дифференциалов: $y' = \frac{dy}{dx}$, и «разделим переменные», приведя уравнение (1.1) к виду

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx.$$

Проинтегрируем правую и левую части уравнения:

$$G(y) = F(x) + C. \tag{1.2}$$

Здесь $G(y)$ и $F(x)$ — *некоторые* первообразные от функций $\frac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно, а C означает *произвольную* постоянную.

Соотношение (1.2) определяет зависимость между переменными x и y. Заметим, что зачастую разрешить это соотношение явным образом относительно переменной y технически сложно, да и не всегда целесообразно.

Пример 1. Решим уравнение $y' = x \cdot (1 + y^2)$, следуя описанному выше алгоритму:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = x \cdot dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C$$

Как видите, алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными достаточно прост. Это позволит нам на примере уравнений с разделяющимися переменными обсудить основные вопросы, возникающие при решении любого дифференциального уравнения, не отвлекаясь на технические проблемы.

И самый первый вопрос — что же такое «решение дифференциального уравнения». Дадим определение.

Решением дифференциального уравнения на интервале $(a; b)$ называется непрерывно дифференцируемая на $(a; b)$ функция $y = \varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество.

Почему так важно указывать интервал, на котором функция $y = \varphi(x)$ является решением? Рассмотрим примеры.

Пример 2. Функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ является решением уравнения

$$y' = -y^2 \tag{1.3}$$

на интервале $(2; +\infty)$, но не является решением ни на каком более широком интервале, так как она не определена в точке $x = 2$.

Эта же функция является решением уравнения (1.3) на интервале $(-\infty; 2)$. Но правильнее было бы говорить о двух функциях, являющихся различными решениями уравнения: $y_1 = \dfrac{1}{x-2}$ с областью определения $(-\infty; 2)$ и $y_2 = \dfrac{1}{x-2}$ с областью определения $(2; +\infty)$. $\square$

Пример 3. Функция $y = \sin x$ является решением уравнения

$$y' = \sqrt{1-y^2} \tag{1.4}$$

на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, однако не является решением на более широком интервале, хотя и определена для любых значений переменной x.

Действительно, подставив функцию $y = \sin x$ и ее производную в уравнение (1.4), мы получим равенство $\cos x = |\cos x|$, которое является тождеством на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Это равенство подскажет нам, на каких интервалах, кроме указанного, функция $y = \sin x$ также является решением. □

Часто требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее в точке x_0 дополнительным условиям, которые называются *начальными данными*. Такая задача называется *задачей Коши* и для уравнения первого порядка $y'(x) = f(x; y)$ ставится следующим образом: найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Так, рассмотренная в примере 3 функция $y = \sin x$ является решением задачи Коши $\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$ Заметим, что постановка задачи Коши носит локальный характер, то есть требуется найти решение, определенное в *некоторой* окрестности точки $x = x_0$. Так, функция $y = \sin x$ является решением поставленной задачи Коши лишь на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, который является окрестностью точки $x_0 = 0$.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y'(x) = f(x; y)$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

1. при любом значении C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением дифференциального уравнения,
2. если задача Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ имеет решение в некоторой окрестности точки x_0, то можно указать такое значение C_0, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет условию Коши $y(x_0) = y_0$.

Таким образом, задачу Коши обычно решают в два этапа:

1. находят общее решение дифференциального уравнения,
2. определяют значение константы C из условия $\varphi(x_0, C) = y_0$.

Например, проинтегрировав уравнение (1.3), мы найдем его общее решение: $y = \dfrac{1}{x+C}$. Для решения задачи Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$, определим константу C из условия $y_0 = \dfrac{1}{x_0 + C}$. Отсюда получим, что $C = \dfrac{1}{y_0} - x_0$.

Поставив для уравнения (1.3) две задачи Коши: одну — с начальными данными $y(3) = 1$, а другую — с начальными данными $y(1) = -1$, мы получим одно и то же значение $C = -2$. Но, как было отмечено выше, мы получим разные ветви функции $y = \dfrac{1}{x-2}$: одну — определенную в окрестности точки $x_0 = 3$, а другую — определенную в окрестности точки $x_0 = 1$.

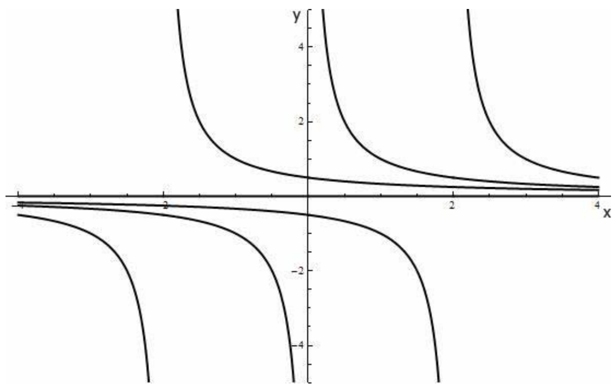


Рис. 1.1. Графики решений уравнения (1.3)

Заметим однако, что мы можем определить значение C только при условии, что $y_0 \neq 0$. Если же $y_0 = 0$, то есть требуется решить задачу Коши с начальными данными $y(x_0) = 0$, ее решением, очевидно, будет функция $y \equiv 0$ (мы получили ее на первом шаге разделения переменных). Также очевидно, что это решение не может быть получено из формулы $y = \dfrac{1}{x+C}$.

На рис. 1.1 изображены графики решений уравнения (1.3). Эти линии заполняют всю плоскость xOy, причем через каждую точку $(x_0; y_0)$ проходит ровно одна кривая. Прямая $y = 0$ в этом смысле ничем не отличается от остальных линий. Поэтому решение $y \equiv 0$ мы назовем *частным*, несмотря на то, что оно не описывается общей формулой.

Обратимся теперь к примеру 3. Интегрируя уравнение (1.4), получим соотношение $\arcsin y = x + C$. Графики решений уравнения несложно представить, заметив, что полученное соотношение задает явную функцию $x = \arcsin y - C$, поэтому все линии этого семейства можно получить из графика функции $x = \arcsin y$ сдвигами вдоль оси Ox (Рис. 1.2).

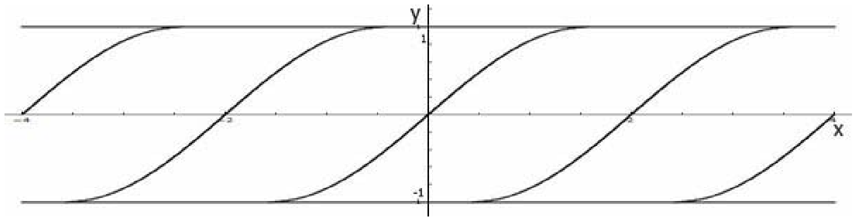


Рис. 1.2. Графики решений уравнения (1.4)

Если в результате интегрирования дифференциального уравнения мы пришли к соотношению $\Phi(x; y; C) = 0$, то принято говорить, что получен *общий интеграл* дифференциального уравнения. Точнее говоря, соотношение $\Phi(x; y; C) = 0$ называется общим интегралом уравнения $y' = f(x; y)$, если оно определяет (неявным образом) все множество решений этого уравнения.

Продолжим обсуждение примера 3. Уравнение (1.4) имеет еще два решения — $y_1 \equiv -1$ и $y_2 \equiv 1$ — которые невозможно получить из общего интеграла ни при каком значении C. Добавим эти две прямые к картине решений уравнения (1.4). Нетрудно видеть, что эти прямые являются *огибающими* семейства интегральных линий $\arcsin y = x + C$, то есть в каждой своей точке касаются одной из линий указанного семейства.

Другими словами, если мы поставим для уравнения (1.4) задачу Коши с начальными данными $y(x_0) = -1$ или $y(x_0) = 1$, то мы обнаружим, что решение этой задачи Коши неединственно. Например, условию $y(0) = -1$ удовлетворяют как решение $y = -\cos x$, так и решение $y \equiv -1$. Решение уравнения $y' = f(x; y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением*. Таким образом, уравнение (1.4) имеет два особых решения:

$y_1 \equiv -1$ и $y_2 \equiv 1$.

Так как исторически многие дифференциальные уравнения были связаны с различными геометрическими задачами, то в теории дифференциальных уравнений прочно утвердилась «геометрическая» лексика. Так, задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

можно понимать следующим образом: требуется найти на плоскости xOy такую кривую, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$ и в каждой своей точке $(x; y)$ имеет касательную, угловой коэффициент которой равен $f(x; y)$. Такую кривую принято называть *интегральной линией* дифференциального уравнения.

Решение задачи Коши и его геометрический образ — интегральная линия — настолько тесно связаны, что вместо фразы «функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши (1.5)» мы часто говорим «решение $y = y(x)$ проходит через точку $(x_0; y_0)$». Однако, понятие «интегральная линия дифференциального уравнения» можно рассматривать в более широком контексте.

Пример 4. Рассмотрим семейство окружностей $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = R^2$. Ее угловой коэффициент равен $(-\dfrac{x_0}{y_0})$, следовательно, рассматриваемые окружности являются интегральными линиями дифференциального уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$. Если же говорить о решениях этого дифференциального уравнения, то ими несомненно будут функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

В точках $(x; 0)$ уравнение $y' = -\dfrac{x}{y}$ не определяет значение производной y', то есть не определяет угловой коэффициент интегральной кривой $y = y(x)$ по отношению к оси Ox. Но с геометрической точки зрения в такой ситуации совершенно естественно рассмотреть угловой коэффициент кривой по отношению к оси Oy, то есть перейти к уравнению $x' = -\dfrac{y}{x}$.

Как видим, в точках $(x; 0)$, где $x \neq 0$, угловой коэффициент x' равен нулю, то есть касательная к кривой $x = x(y)$ параллельна оси Oy.

И только в точке $(0; 0)$ мы не можем определить ни значение y', ни значение x'. Такие точки называются *особыми* точками дифференциального уравнения. Как мы видим, при геометрическом подходе, когда переменные x и y «равноправны», более естественно записать уравнение в «симметричном» виде $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ или в виде $x\,dx + y\,dy = 0$, и дать ему следующую интерпретацию: требуется найти на плоскости такие кривые, которые в каждой своей точке $(x; y)$ имеют касательный вектор $(dx; dy)$, коллинеарный вектору $(x; -y)$ или, что то же самое, перпендикулярный вектору $(x; y)$. В нашем примере в особой точке $(0; 0)$ уравнение не задает никакого направления касательного вектора. □

В процессе решения дифференциального уравнения мы подвергли его преобразованиям:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \to \quad x' = -\frac{y}{x} \quad \to \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \quad \to \quad x\,dx + y\,dy = 0.$$

Возникает естественный вопрос: можно ли считать, что мы имеем дело с одним и тем же уравнением в разных видах или это разные уравнения?

Ответ на этот вопрос, как правило, содержится в постановке задачи. Например, если нужно найти *решения* дифференциального уравнения $y' = 1/x$, то функцию $x \equiv 0$ нельзя считать решением, если же нужно описать *интегральные линии* этого уравнения, то $x \equiv 0$ является одной из них.

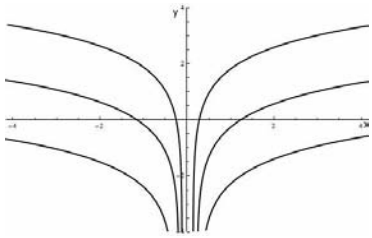
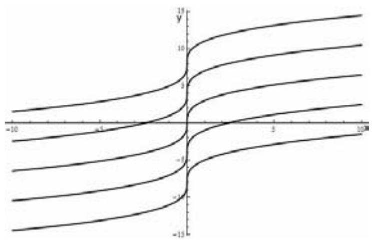
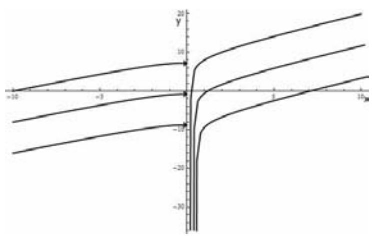
Мы не будем далее акцентировать внимание на этих различиях, поскольку из контекста всегда понятно, что имеется в виду.

Если в уравнении $y' = f(x)$ правая часть $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$, то общее решение дифференциального уравнения на этом интервале имеет вид $y = F(x) + C$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$. Задача Коши с начальными данными $(x_0; y_0)$, где $x_0 \in (a; b)$, имеет решение при любом $y_0 \in \mathbb{R}$ и записывается формулой

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + y_0.$$

Картина интегральных линий остается инвариантной при параллельном переносе вдоль оси Oy.

Для иллюстрации этих утверждений рассмотрим три типичных примера.

Дифф. уравнение	Общее решение	Решение задачи Коши $y(x_0) = y_0$	Вид интегр. кривых
$y' = 1/x$	$y = \ln\lvert x\rvert + C$	$y = \ln\lvert x/x_0\rvert + y_0$	
$y' = x^{-2/3}$	$y = 3x^{1/3} + C$	$y = 3x^{1/3} - 3x_0^{1/3} + y_0$	
$y' = e^{1/x}$	$y = \int\limits_{1}^{x} e^{\frac{1}{\xi}} d\xi + C$	$y = \int\limits_{x_0}^{x} e^{1/\xi} d\xi + y_0$	

В первых двух примерах прямая $x = 0$ является интегральной линией, но в первом случае она не касается других интегральных линий, а во втором — касается. В третьем примере прямая $x = 0$ не является интегральной линией.

Теперь рассмотрим уравнения вида $y' = f(y)$ с непрерывной на интервале $(a; b)$ функцией $f(y)$. Как мы уже видели ранее, если $f(c) = 0$ при каком-то $\in (a; b)$, то функция $y(x) \equiv c$ является решением уравнения $y' = f(y)$. Однако прямая $y = c$ может касаться других интегральных линий (рис. 1.2), а может и не касаться (рис. 1.1). Напомним, что решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.

Как же выяснить, является решение $y(x) \equiv c$ особым или частным? Рассмотрим полосу $x \in \mathbb{R}$, $y \in (a; b)$. Через каждую точку $(x_0; y_0)$ этой полосы $(y \neq c)$ проходит интегральная линия

$$x = x_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}, \tag{1.6}$$

а все остальные интегральные линии в этой полосе получаются из нее параллельным переносом вдоль оси Ox.

Теперь посмотрим, как ведет себя функция $x = x(y)$, заданная формулой (1.6), при $y \to c$, предполагая, что у точки $y = c$ есть некоторая окрестность, в которой нет других нулей функции $f(y)$, кроме $y = c$.

Допустим, интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ расходится в точке c. Поскольку непрерывная функция $f(\tau)$ сохраняет знак в правой и левой полуокрестностях точки c, то функция (1.6) монотонна и неограничена, и значит $x(y) \to \infty$ при $y \to c \pm 0$.

Если же интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ сходится в точке c, это означает, что $x(y)$ имеет конечный предел $x_1 = x_0 + \int\limits_{y_0}^{c} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ при $y \to c$. Другими словами, через точку $(x_1; c)$ проходит две интегральных линии: кривая (1.6) и прямая $y = c$. Поскольку картина интегральных линий не меняется при параллельном переносе вдоль оси Ox, то в каждой точке прямой $y = c$ нарушается единственность решения задачи Коши.

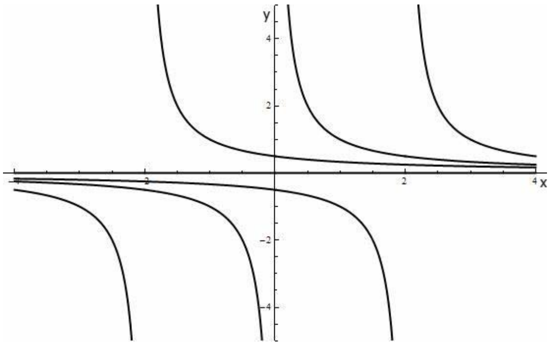
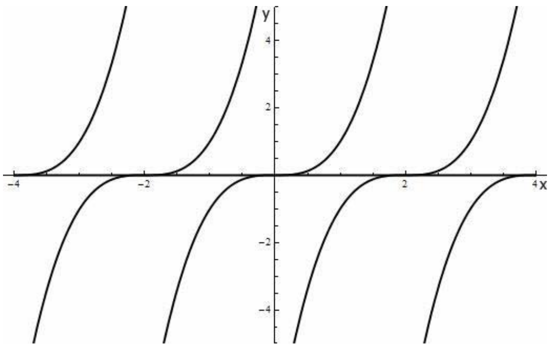
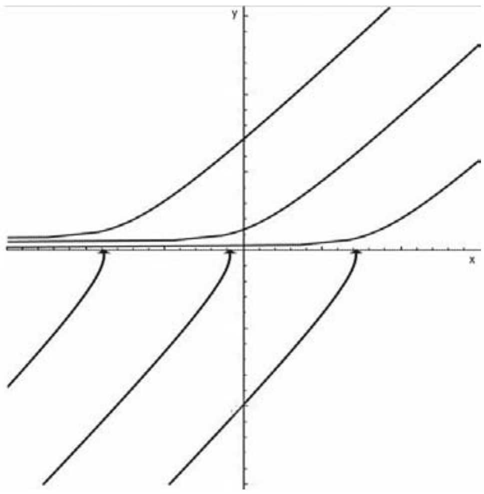
Таким образом, мы получили простой критерий: если $f(c) = 0$, то функция $y \equiv c$ является особым решением уравнения $y' = f(y)$, если и только если интеграл $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau)}$ сходится в точке $y = c$.

Напомним, что решить вопрос о сходимости легко, если $f(y) \sim k \cdot (y-c)^p$ при $y \to c$.

Если $p \geqslant 1$, то интеграл расходится — решение $y(x) \equiv c$ частное.

Если $0 < p < 1$, то интеграл сходится — решение $y(x) \equiv c$ особое.

Рассмотрим три характерных примера.

Дифф. уравнение	Общий интеграл	Вид интегр. кривых
$y' = -y^2$	$y = \dfrac{1}{x+C}$, $y \equiv 0$	
$y' = 3y^{2/3}$	$y = (x+C)^3$, $y \equiv 0$	
$y' = e^{-1/y}$	$x = \int\limits_1^y e^{1/\tau} d\tau + C$	

В первом примере функция $y \equiv 0$ является частным решением дифференциального уравнения, а во втором — особым. В третьем примере функция $y \equiv 0$ не является решением (при $y = 0$ уравнение не определяет направления интегральных линий).

Наконец, обсудим вопрос о поведении интегральных кривых «в целом». Дело в том, что классические теоремы существования и единственности решения задачи Коши, о которых будет идти речь на пятом занятии, носят существенно локальный характер, то есть гарантируют существование и единственность решения только в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$. А вопрос о поведении интегральных кривых на всей области определения дифференциального уравнения достаточно сложен.

Так, формула $y = (x+C)^3$ дает общее решение уравнения $y' = 3y^{2/3}$. Однако решением задачи Коши $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ следует считать функцию $y = x^3$ с областью определения $(0; +\infty)$, поскольку расширение интервала приводит к потере единственности решения. Так, функции $y_1(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, и $y_2(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^3, x \geqslant 0 \end{cases}$ являются решением дифференциального уравнения и удовлетворяет одним и тем же условиям Коши $y(1) = 1$.

Для уравнения $y' = f(y)$ с непрерывной на интервале $(a; b)$ функцией $f(y)$ мы можем описать максимальную область существования решения, проходящего через точку $(x_0; y_0)$. Такое решение называется *непродолжаемым* или *максимальным.*

Мы уже видели, что если на интервале $(a; b)$ функция $f(y)$ не имеет нулей, то каждая интегральная линия может быть задана соотношением (1.6). Так как функция $f(y)$ непрерывна и не обращается в ноль на $(a; b)$, то она знакопостоянна. Допустим для определенности, что $f(y) > 0$ на $(a; b)$. Тогда функция $x = x(y)$, заданная формулой (1.6), монотонно возрастает, а следовательно, монотонно возрастает и обратная ей функция $y = y(x)$, являющаяся решением дифференциального уравнения.

Поведение этого решения при $x \to \pm\infty$ определяется сходимостью или расходимостью интеграла $\int\limits_{y_0}^{\pm\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)}$. Так, если интеграл сходится при $y \to +\infty$, то это означает, что переменная x имеет конечный предел x^*, следовательно решение $y = y(x)$ имеет вертикальную асимптоту. Если же интеграл расходится, то $x \to +\infty$, и вертикальной асимптоты нет — решение существует на луче $(x_0; +\infty)$.

Аналогично решается вопрос при $y \to -\infty$.

Пример 5. Исследуя сходимость соответствующих интегралов, выясним, будет ли решение задачи Коши $\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ существовать на всей вещественной прямой.

Интегралы $\int\limits_0^{\pm\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2}$ сходятся, поскольку $\frac{d\tau}{1+\tau^2} \sim \frac{d\tau}{\tau^2}$ при $\tau \to \pm\infty$. Следовательно, областью определения непродолжаемого решения является ограниченный интервал $(-x^*; x^*)$ (в силу нечетности функции $\int\limits_0^y \frac{d\tau}{1+\tau^2}$ этот интервал симметричен относительно точки $x = 0$).

Мы можем также получить решение этой задачи Коши в явном виде, проинтегрировав уравнение. Из общего интеграла $\operatorname{arctg} y = x + C$ выделим решение, удовлетворяющее начальному условию: $\operatorname{arctg} 0 = 0 + C$. Отсюда $C = 0$, и решение задачи Коши дается формулой $\operatorname{arctg} y = x$, или $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Интегральная линия $y = \operatorname{tg} x$, проходящая через точку $(0; 0)$, имеет две вертикальных асимптоты. Остальные интегральные линии получаются из нее параллельным переносом вдоль оси Ox (рис. 1.3). Таким образом, несмотря на то, что правая часть уравнения $y' = 1 + y^2$ непрерывна при всех значениях $(x; y)$, каждое решение этого уравнения существует только на ограниченном интервале. $\square$

Вернемся к уравнению $y' = f(x) \cdot g(y)$.

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны при $x \in (a; b)$ и $y \in (c; d)$, причем $g(y)$ не обращается в нуль на $(c; d)$, то через каждую

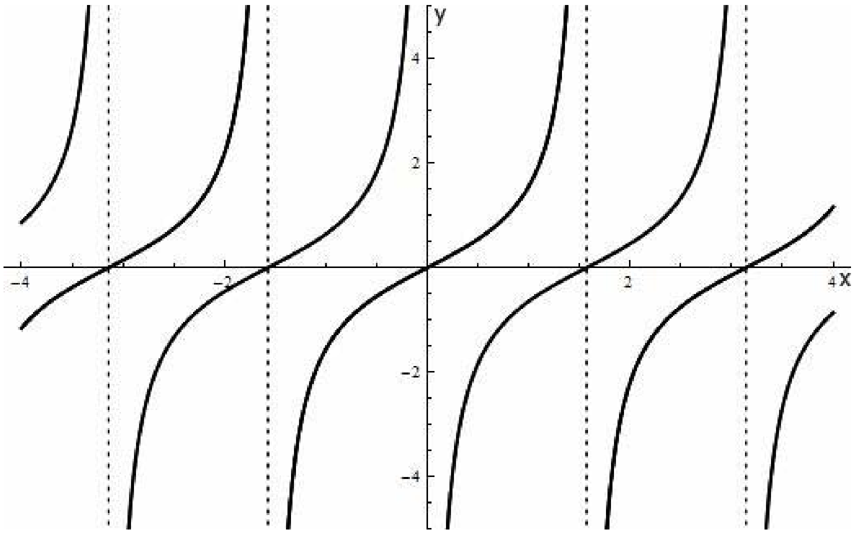


Рис. 1.3. Интегральные линии в примере 5.

точку $(x_0; y_0)$ прямоугольника $a < x < b$; $c < y < d$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения, и уравнение этой кривой имеет вид

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi.$$

Пример 6. Нарисовать картину интегральных линий уравнения

$$y\,' = -\frac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)} = -\frac{x}{x^2-1} \cdot \frac{y^2-1}{y}.$$

Уравнение не определяет направление, касательное к интегральной линии, в пяти точках: $(0;0)$, $(\pm 1; \pm 1)$. Это особые точки уравнения.

Заметим, что прямые $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$ с выколотыми точками $(\pm 1; \pm 1)$ являются интегральными линиями.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{x\,dx}{x^2-1} + \frac{y\,dy}{y^2-1} = 0$$

и проинтегрируем его:

$$\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = C_1$$

$$\ln |(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1)| = C_2$$

$$|(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1)| = e^{C_2} = C_3, \quad C_3 > 0$$

Функция $\Phi(x; y) = (x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1)$ должна быть непрерывна вдоль решения, так как решение $y = y(x)$ непрерывно, и следовательно, должна принимать либо значение C_3, либо значение $-C_3$, но не может менять знак. Поэтому в последнем равенстве мы можем освободиться от модуля, записав общий интеграл в виде

$$(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1) = C, \quad C \neq 0.$$

Заметим, что прямые $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$ также описываются этой формулой, если отказаться от требования $C \neq 0$. Таким образом, все интегральные линии описываются формулой

$$(x^2 - 1) \cdot (y^2 - 1) = C,$$

где C — произвольное число.

Такого рода преобразования общего интеграла к более простому виду используются довольно часто. При этом возникающие константы C_1, C_2, C_3 как правило обозначаются одной и той же буквой C. В дальнейшем мы будем поступать так же, не вдаваясь в подробные разъяснения.

Теперь, когда мы получили простую формулу общего интеграла, воспользуемся современными компьютерными программами, чтобы изобразить картину интегральных линий (рис. 1.4). Если бы мы писали эту книжку 20 лет назад, то мы получили бы эту картину, применяя аппарат математического анализа. Проверьте себя, попробовав обосновать особенности, которые вы видите на рисунке: вблизи особой точки $(0; 0)$ интегральные кривые похожи на окружности, а вблизи остальных особых точек — на гиперболы, также обоснуйте наличие вертикальных и горизонтальных асимптот. $\square$

В заключение рассмотрим поведение «в целом» интегральных кри-

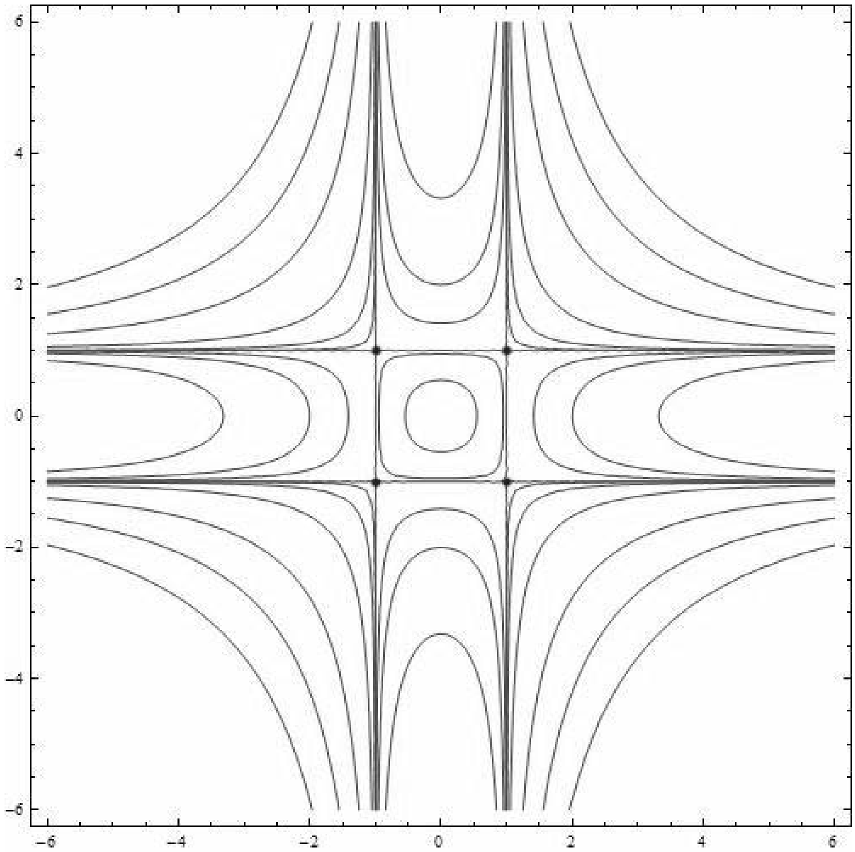
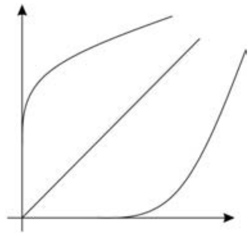
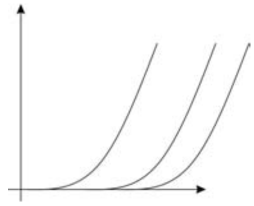
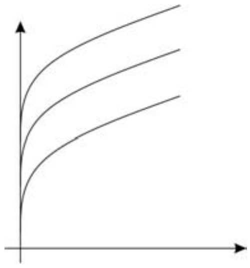
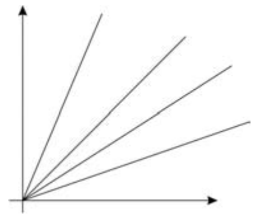


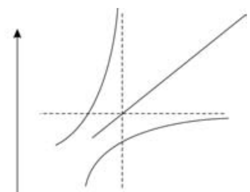
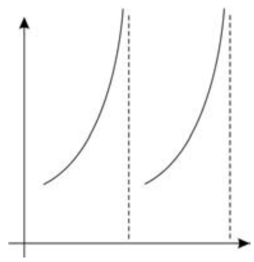
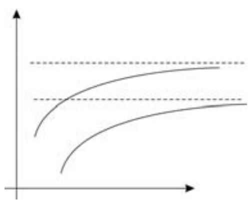
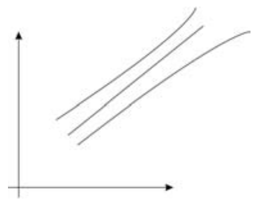
Рис. 1.4. Интегральные линии в примере 6.

вых уравнения $y' = \dfrac{g(y)}{f(x)}$ при следующих условиях: функции $f(x)$ и $g(y)$ определены и непрерывны при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, и $f(x) > 0$, $g(y) > 0$ при $x > 0$, $y > 0$. Заметим, что при этих условиях через каждую точку области $\{x > 0; y > 0\}$ проходит единственная интегральная кривая, и наклон касательной в этой точке положителен, то есть каждое решение $y = y(x)$ является монотонно возрастающим.

Точка $(0; 0)$ является единственной особой точкой уравнения. Поведение интегральных линий в окрестности этой точки определяется сходимостью или расходимостью интегралов $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{d\xi}{f(\xi)}$ и $G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{d\tau}{g(\tau)}$ в нуле (см. таблицу)

$G(y) \diagdown F(x)$	сходится	расходится
сходится		
расходится		

Поведение интегральных линий при $x \to +\infty$ или $y \to +\infty$ определяется сходимостью или расходимостью интегралов $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)}$ и $G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)}$ на бесконечности (см. таблицу)

$G(y) \diagdown F(x)$	сходится	расходится
сходится		
расходится		

Таким образом, получается 16 возможных комбинаций, и любая из них возможна. Например, для уравнения $y' = \dfrac{y^2 + \sqrt{y}}{x^2}$ интеграл $F(x)$ сходится при $x \to +\infty$ и расходится при $x \to +0$, а интеграл $G(y)$ сходится при $y \to +0$ и при $y \to +\infty$.

Самостоятельная работа

1. Найти все решения уравнения $e^{-y}(1+y') = 1$.

2. Найти все интегральные линии уравнения $x^2y' - 2xy = 3y$.

3. Найти все решения уравнения $y' = 3y^{2/3}$, удовлетворяющие условию $y(2) = 0$.

4. Найти общее решение уравнения $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; найти решение, ограниченное при $x \to +\infty$.

5. Найти общее решение уравнения $2xy' - y^2 = 1$; найти решение задачи Коши с начальными данными $y(1) = 0$. Указать область определения максимального решения, удовлетворяющего этому условию.

Домашняя работа

В домашнюю работу входят задачи из (*)

№№ 51, 54, 57, 60, 62, 64, 69, 70.

(*) Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие для вузов. — 6-е изд., стер. — М.: Наука. 1985. — 128 стр.

Ответы к самостоятельной работе

1. $\ln|e^{-y} - 1| = x + C$, $y \equiv 0$
2. $y = Cx^2e^{-3/x}$, $x = 0$
3. $y = (x-2)^3$, $y \equiv 0$
4. $x^2 = \ln|y^3 - 8| + C$, $y = 2$
5. $\operatorname{arctg} y = \dfrac{1}{2}\ln|x| + C$, $\;y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\ln x$, $\;x \in (e^{-\pi}, e^{\pi})$

Занятие 2

Однородные уравнения

Однородным называют дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.1}$$

Введением новой искомой функции $u = u(x)$ по формуле $u = \dfrac{y}{x}$ это уравнение легко сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, поскольку $y = u \cdot x$, то $y' = u' \cdot x + u$. Подставляя эти выражения в уравнение (2.1), получим уравнение $u' \cdot x = f(u) - u$, или $\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$.

Если $F(u)$ — одна из первообразных функции $\dfrac{1}{f(u) - u}$, то общий интеграл уравнения (2.1) можно записать в виде

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Полагая $C = \ln D$, где $D > 0$, можно придать этой формуле вид $F\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln D|x|$. Избавимся от модуля, заменив условие $D > 0$ условием $D \neq 0$, и преобразуем общий интеграл к виду

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln Dx. \tag{2.2}$$

Интегральные линии однородного уравнения обладают следующим замечательным свойством: преобразование подобия $(x; y) \mapsto (\lambda x; \lambda y)$, $(\lambda \neq 0)$, сохраняет картину интегральных линий неизменной, то есть интегральная линия при этом преобразовании переходит в интегральную линию. Это нетрудно доказать, используя формулу (2.2). Если $F\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln Dx$, то $F\left(\dfrac{\lambda y}{\lambda x}\right) = F\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln Dx = \ln D_1(\lambda x)$.

Напомним, что при разделении переменных могут быть потеряны решения вида $y = kx$, где k — корень уравнения $f(u) = u$. Точнее, нужно говорить о непродолжаемых решениях вида $y = kx$ с областью определения $x < 0$ или $x > 0$, поскольку точка $(0; 0)$ является особой точкой уравнения (2.1).

На первом занятии мы выяснили, при каких условиях эти решения будут особыми. Переформулируем полученный критерий для однородного уравнения.

Решение $y = kx$, где k — изолированный корень уравнения $f(u) = u$, является *особым* для уравнения (2.1) с непрерывной функцией $f(u)$, если и только если интеграл $\int\limits_k^u \frac{d\tau}{f(\tau)-\tau}$ *сходится* в точке k.

Если же функция $f(u)$ непрерывна на $(a; b)$ и всюду на этом интервале $f(u) \neq u$, то через каждую точку $(x_0; y_0)$ такую, что $a < \dfrac{y_0}{x_0} < b$, проходит одна и только одна интегральная линия, и ее уравнение имеет вид

$$\int\limits_{y_0/x_0}^{y/x} \frac{d\tau}{f(\tau)-\tau} = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|.$$

Пример 1. Найдем решения уравнения $y' = \frac{y(2y-x)}{x^2}$.

Это уравнение однородное, так как его можно преобразовать к виду

$$y' = 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right).$$

Замена $y = x\cdot u$, $y' = x\cdot u' + u$, приводит к уравнению $x\cdot u' + u = 2\,u^2 - u$, и далее к уравнению

$$\frac{du}{u(u-1)} = 2\,\frac{dx}{x}.$$

Его общий интеграл

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln Dx^2 \quad , \text{ или } \quad \frac{u-1}{u} = Cx^2.$$

Вернемся к исходной переменной y и запишем общее решение:

$$y = \frac{x}{1 - Cx^2}. \tag{2.3}$$

При разделении переменных мы «потеряли» решения $u = 0$ и $u = 1$, что соответствует решениям $y = 0$ и $y = x$ исходного уравнения. Эти решения — не особые, в чем можно убедиться непосредственно, исследуя формулу (2.3), или исследуя сходимость интеграла $\displaystyle\int \frac{du}{u(u-1)}$ при $u \to 0$ и $u \to 1$.

Заметим, что прямая $x = 0$ также является интегральной линией исходного уравнения, и три прямые $y = 0$, $y = x$ и $x = 0$ делят плоскость xOy на секторы, в каждом из которых достаточно нарисовать одну интегральную линию, а остальные получить из нее преобразованием подобия. Причем, достаточно рассмотреть лишь полуплоскость $x > 0$, так как картина при $x < 0$ получится преобразованием подобия с коэффициентом $\lambda < 0$ (или поворотом на 180^o вокруг начала координат).

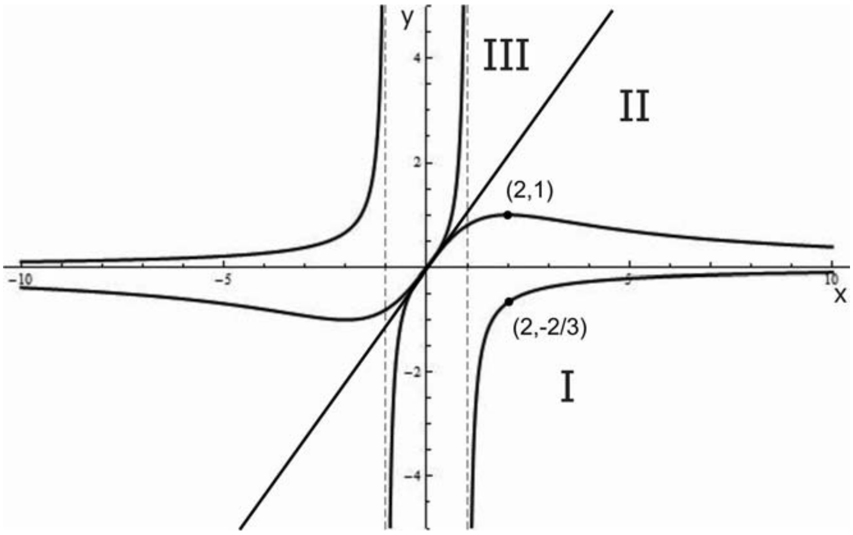


Рис. 2.1. Интегральные линии в примере 1.

Найдем интегральную линию, проходящую через точку $(2;1)$. Подставим ее координаты в формулу (2.3): $1 = \dfrac{2}{1-4C}$, откуда $C = -1/4$ и соответствующее решение $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$. Несмотря на то, что формально эта функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$, мы должны исключить особую точку $(0;0)$ и говорить о непродолжаемом решении с областью определения $(0;+\infty)$, проходящем через точку $(2;1)$. Соответствующая интегральная кривая лежит в секторе II (рис. 2.1).

Теперь найдем интегральную линию, проходящую через точку $(2; -2/3)$. Подставим ее координаты в формулу (2.3): $-\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{1-4C}$, откуда $C = 1$ и соответствующее решение $y = \dfrac{x}{1-x^2}$. Очевидно, эта функция не определена в точке $x = 1$, и данная формула задает при $x > 0$ два непродолжаемых решения: с областями определения $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Второе из них и является искомым, так как проходит через точку $(2; -2/3)$. Таким образом мы получили интегральную линию, лежащую в секторе I. А решение $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ с областью определения $(0; 1)$ дает нам интегральную линию, лежащую в секторе III.

В этом примере, благодаря полученной формуле общего решения, мы можем указать область определения любого непродолжаемого решения. Так, если $C \leqslant 0$, то непродолжаемое решение определено на луче $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$. Если же $C > 0$, то областью определения непродолжаемого решения служит один из следующих интервалов: $(-\infty; -\sqrt{C})$, $(-\sqrt{C}; 0)$, $(0; \sqrt{C})$ или $(\sqrt{C}; +\infty)$. В общем случае теорема, с которой мы познакомимся позже, утверждает лишь существование непродолжаемого решения. □

Пример 2. Решить задачу Коши $\begin{cases} xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2} \\ y(1) = 0,5 \end{cases}$.

Заметим, что правая часть уравнения определена только на множестве $|x| \geqslant |y|$, которое представляет собой объединение двух секторов: $x \geqslant |y|$ и $x \leqslant -|y|$, пересекающихся лишь в точке $(0; 0)$. Поскольку условие Коши поставлено в точке $x = 1$, нас будут интересовать только интегральные линии, лежащие в первом секторе, то есть при $x \geqslant 0$.

Нетрудно убедиться в том, что это уравнение однородное. Однако мы не будем преобразовывать его к виду (2.1), а сразу сделаем замену $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$, и, учитывая условие $x \geqslant 0$, перейдем к уравнению

$$u' \cdot x = \sqrt{1 - u^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя полученное соотношение, найдем общий интеграл $\arcsin u = \ln Dx$, или $\arcsin \dfrac{y}{x} = \ln Dx$.

Решения $y = -x$ и $y = x$ исходного уравнения, соответствующие значениям $u = \pm 1$, при которых функция $\sqrt{1-u^2}$ обращается в ноль, являются особыми, так как интеграл $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ расходится в точках $u = \pm 1$.

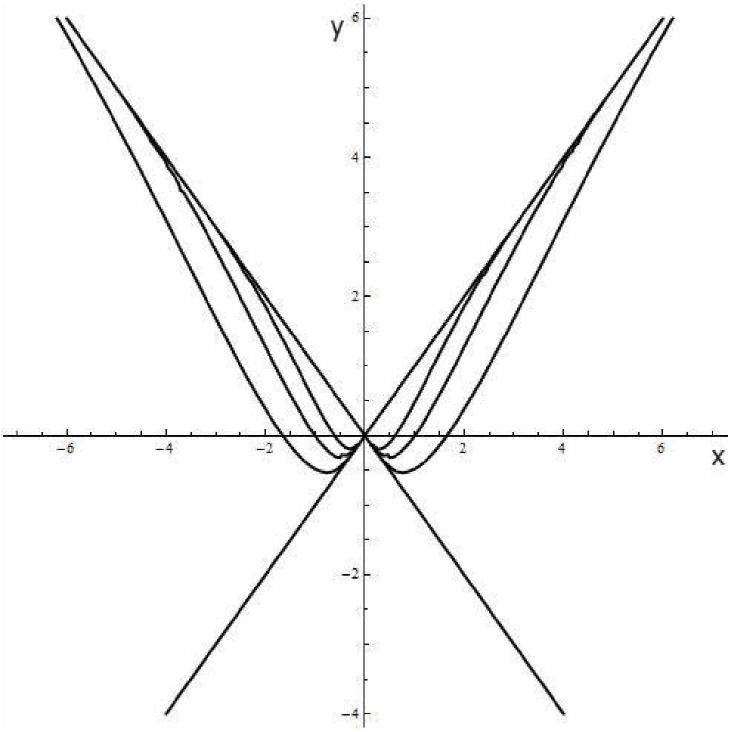


Рис. 2.2. Интегральные линии в примере 2.

Найдем решение, проходящее через точку $(0,5;1)$. Из формулы общего решения получаем: $\arcsin 0,5 = \ln D$, то есть $\ln D = \pi/6$. Следовательно, искомое решение задается формулой

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln Dx = \ln D + \ln x = \frac{\pi}{6} + \ln x.$$

Поскольку по определению $|\arcsin t| \leqslant \pi/2$, то эта формула имеет смысл лишь при $|\ln x + \pi/6| \leqslant \pi/2$, то есть $-2\pi/3 \leqslant \ln x \leqslant \pi/3$, или $e^{-2\pi/3} \leqslant x \leqslant e^{\pi/3}$.

Разрешая равенство $\arcsin \dfrac{y}{x} = \ln x + \dfrac{\pi}{6}$ относительно переменной y, получаем ответ: решением поставленной задачи Коши является функция $y = x \cdot \sin(\ln x + \dfrac{\pi}{6})$.

При $x = e^{-2\pi/3}$ это решение касается прямой $y = -x$, а при

$x = e^{\pi/3}$ — прямой $y = x$ (рис. 2.2). Поэтому для сохранения единственности мы должны считать областью определения непродолжаемого решения, проходящего через точку $(0,5;1)$, интервал $(e^{-2\pi/3}; e^{\pi/3})$. $\square$

Пусть уравнение задано в симметричной форме

$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0.$$

Оно является однородным, если $M(x;y)$ и $N(x;y)$ — однородные функции одной и той же степени однородности p, то есть для любого $t \neq 0$

$$M(tx;ty) = t^p \cdot M(x;y),$$

$$N(tx;ty) = t^p \cdot N(x;y).$$

В этом случае можно не переходить к виду (2.1), а сразу делать замену переменных $y = u \cdot x$, выражая дифференциалы $dy = du \cdot x + u \cdot dx$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$.

Выполнив замену $y = u \cdot x$, получим уравнение

$$x^2(u^2 - 2u)\,dx + x^2(x\,du + u\,dx) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения: $x^2 = 0$ или $(u^2 - u)\,dx + x\,du = 0$. Первое из них дает нам одну интегральную линию $x = 0$, а второе представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Это уравнение имеет решения $u \equiv 0$ и $u \equiv 1$, соответствующие решениям $y = 0$ и $y = x$ исходного уравнения, а также общий интеграл

$$\ln\left|\frac{u}{1-u}\right| = \ln Dx,$$

из которого получается общее решение $y = \dfrac{Dx^2}{1 + Dx}$.

Обратим внимание на поведение интегральных линий, входящих в

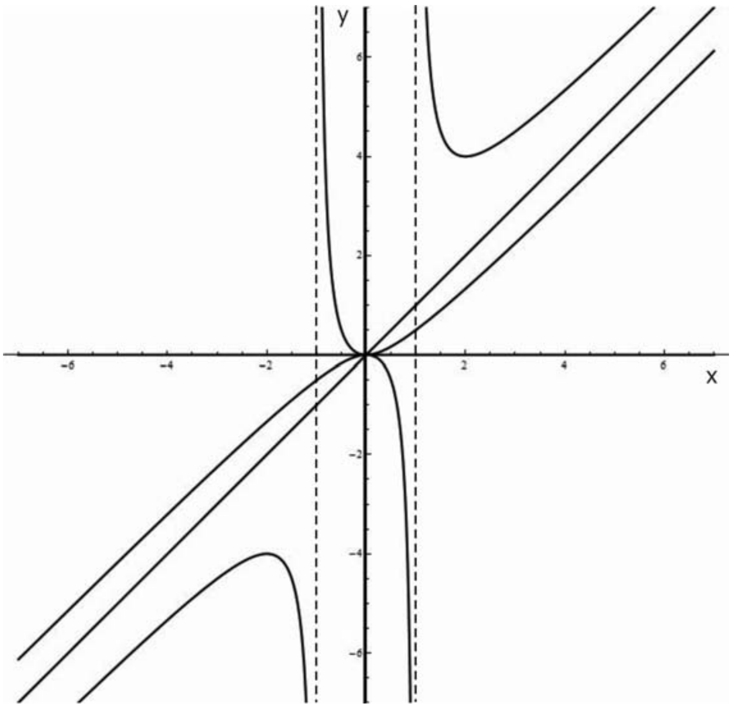


Рис. 2.3. Интегральные линии в примере 3.

точку $(0;0)$. Если в примере 1 все они, за исключением прямых $x=0$ и $y=0$, касались прямой $y=x$, то в примере 3 все входящие в точку $(0;0)$ интегральные кривые, за исключением прямых $x=0$ и $y=x$, касаются прямой $y=0$. Это хорошо видно на рис. 2.3. $\square$

Сформулируем без доказательства следующее утверждение:

Пусть прямая $y = kx$ является решением уравнения (2.1) (то есть $f(k) = k$), и функция $f(u)$ дифференцируема в точке $u = k$, тогда при условии $f\,'(k) < 1$ ни одно из решений не касается этой прямой в начале координат, а при условии $f\,'(k) > 1$ этой прямой в начале координат касается бесконечно много решений.

Проверьте справедливость этого утверждения на примерах 1 и 3.

Дифференциальное уравнение называется *обобщенным однородным*, если замена $y = z^m$ приводит его к однородному уравнению. Чтобы подобрать число m, нужно сначала сделать указанную замену, а потом сформулировать условие однородности.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $2y\,' + x = 4\sqrt{y}$.

Подставив $y = z^m$, мы придем к уравнению $2mz^{m-1}z' = 4z^{m/2} - x$.

Для того, чтобы это уравнение было однородным, оба слагаемых в правой части должны иметь одну и ту же степень, то есть $m/2 = 1$. Кроме того, такую же степень должен иметь коэффициент при z', то есть $m - 1 = 1$.

Оба эти требования совместны, и при $m = 2$ уравнение станет однородным. Итак, замена $z = \sqrt{y}$, или $y = z^2$, приводит нас к уравнению $4z \cdot z' = 4z - x$. Оно имеет общий интеграл $\dfrac{x}{2z - x} - \ln\left|\dfrac{2z - x}{x}\right| = \ln|x| + C$ и частное решение $z = x/2$, которое не является особым.

Возвращаясь к переменной y, получаем ответ: общий интеграл $\dfrac{x}{2\sqrt{y} - x} = \ln|2\sqrt{y} - x| + C$ и частное решение $y = x^2/4$. □

Замечание: если $m < 0$, то возможна потеря решения $y \equiv 0$. Перед тем, как делать замену $y = z^m$, проверьте, является ли функция $y \equiv 0$ решением.

Наконец, рассмотрим уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$.

Если наборы коэффициентов $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ пропорциональны, то есть $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, то замена $z = a_1x + b_1y$ или $z = a_1x + b_1y + c_1$ приведет нас к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 5. Решить уравнение $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$.

Положим $z = y - x + 2$. Тогда $y' = z' + 1$, и уравнение превращается в $(1 - z) + z(z' + 1) = 0$, или $z \cdot z' + 1 = 0$.

Его общий интеграл $z^2 + 2x = C$, или $(y - x + 2)^2 + 2x = C$. □

Если же коэффициенты $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ не пропорциональны, то это означает, что прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ имеют единственную точку пересечения $(x_0; y_0)$. Замена переменных $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$ приводит уравнение к однородному.

Пример 6. Решить уравнение $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$.

Прямые $2x - 4y + 6 = 0$, $x + y - 3 = 0$ пересекаются в точке $(1; 2)$. Введем новые переменные $(\xi; \eta)$, положив $x = \xi + 1$, $y = \eta + 2$, и получим однородное уравнение

$$(2\xi - 4\eta)\, d\xi + (\xi + \eta)\, d\eta = 0.$$

Далее, положим $\eta = u \cdot \xi$, и уравнение распадется на $\xi = 0$ и

$$(u^2 - 3u + 2)\, d\xi + \xi(1 + u)\, du = 0.$$

Последнее уравнение, в свою очередь, тоже распадается на $u = 1$, $u = 2$ и

$$\frac{(1 + u)\, du}{(u^2 - 3u + 2)} + \frac{d\xi}{\xi} = 0$$

$$\ln \frac{|u - 2|^3}{(u - 1)^2} + \ln |\xi| = C$$

$$\frac{(u - 2)^3 \xi}{(u - 1)^2} = D$$

$$(\eta - 2\xi)^3 = D(\eta - \xi)^2.$$

Из $u = 1$ и $u = 2$ получаем частные решения $\eta = \xi$ и $\eta = 2\xi$, причем последнее можно получить из формулы общего решения при $D = 0$.

Осталось только вернуться к переменным $(x; y)$ и записать ответ: $(y - 2x)^3 = D(y - x - 1)^2$; $y = x + 1$; $x = 1$. $\square$

Самостоятельная работа

1. Найти общее решение уравнения $(x - y)\, dx + x\, dy = 0$. Для этого уравнения решить задачу Коши $y(-1) = 0$.

2. Найти общее решение уравнения $y^2 + x^2 y' = xy \cdot y'$.

3. Найти общее решение уравнения $xy' = y - x \cdot e^{y/x}$.

4. Указать замену, которая приведет уравнение $2x^2 y' = y^3 + xy$ к однородному.

5. Решить задачу Коши $\begin{cases} (y+\sqrt{xy})\,dx = x\,dy \\ y(-1) = -1 \end{cases}$.

Домашняя работа

№№ 107, 114, 116, 126, 129.

Ответы к самостоятельной работе

1. $y = -x\ln|x| + Cx$, $x = 0$; $y = -x\ln(-x)$
2. $\dfrac{y}{x} = \ln|y| + C$
3. $e^{-y/x} = \ln Cx$
4. $y = \sqrt{z}$, $x^2z' = z^2 + xz$
5. $2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \operatorname{sgn} x \cdot \ln Cx$; $\quad 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = -\ln(-x) + 2$

Занятие 3

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида
$$y' = k(x)\, y + f(x). \tag{3.1}$$
Везде далее мы будем считать, что $k(x)$ и $f(x)$ — функции, непрерывные на некотором интервале $(a; b)$.

Отметим некоторые свойства решений линейных уравнений.

1) Пусть y_1 и y_2 — два решения уравнения (3.1). Тогда их разность $y = y_1 - y_2$ является решением *однородного* уравнения
$$y' = k(x)\, y. \tag{3.2}$$
Действительно, $y' = y'_1 - y'_2 = (k\, y_1 + f) - (k\, y_2 + f) = k\,(y_1 - y_2) = k\, y$.

Отсюда сразу же следует, что общее решение $y_{\text{о.н.}}$ уравнения (3.1) может быть представлено в виде
$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}, \tag{3.3}$$
где $y_{\text{о.о.}}$ — общее решение однородного уравнения (3.2), $y_{\text{ч.н.}}$ — частное решение неоднородного уравнения (3.1).

Такая структура присуща решениям любых линейных уравнений, то есть уравнений вида $L[y] = f$, где $L[y]$ — линейный оператор, независимо от его природы. Например, вы встречались с формулой (3.3) при решении алгебраических уравнений, где $L[y]$ — оператор умножения вектора y на матрицу. Также, при восстановлении функции по ее производной, вы фактически решали простейшее линейное дифференциальное уравнение $y' = f(x)$ и его общее решение — неопределенный интеграл — имеет такую же структуру.

Уравнение (3.1) часто записывают в виде $L[y] = y' - k(x)\,y = f(x)$, поэтому функцию $f(x)$ называют *правой частью* уравнения.

2) Пусть правая часть уравнения (3.1) представлена в виде линейной комбинации $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$, и функции y_i являются решениями уравнений $y_i{}' = k(x)\,y_i + f_i(x)$, $i = 1; 2$. Тогда их линейная комбинация $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ является решением уравнения (3.1), что легко проверить непосредственной подстановкой функции $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ в уравнение.

Свойство 2) называется *принципом суперпозиции* и применяется, например, чтобы свести решение трудной задачи к решению серии более простых задач.

3) Пусть функции y_i, $i = 1; 2$, являются решениями одного и того же однородного уравнения (3.2). Тогда их линейная комбинация $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ с произвольными коэффициентами α_i также является решением уравнения (3.2).

Это свойство является следствием принципа суперпозиции, но, ввиду его важности, заслуживает отдельного упоминания.

Заметим, что однородное уравнение всегда имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, то есть множество решений уравнения (3.2) непусто, и в силу свойства 3) наделено линейной структурой (является линейным многообразием).

Изучение линейных уравнений мы начнем с простейшего уравнения

$$y' = k\,y + f(x), \tag{3.4}$$

где k — некоторое число.

Общее решение однородного уравнения $y' = k\,y$ легко находится методом разделения переменных. Оно имеет вид $y = Ce^{kx}$.

Запомним это, и будем сразу выписывать решения таких уравнений:

$$y' = k\,y \quad \to \quad y = C \cdot e^{kx}.$$

Как видно из этой формулы, любое решение уравнения $y' = k\,y$ пропорционально функции $y = e^{kx}$. Таким образом, все решения этого уравнения образуют одномерное векторное пространство, базисом которого является функция $y = e^{kx}$.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (3.4), нам достаточно отыскать одно его частное решение и воспользоваться формулой (3.3).

Частное решение будем искать методом «вариации постоянной», то есть попробуем найти решение вида $y = C(x) \cdot e^{kx}$, где $C(x)$ уже не является константой. Подставляя эту функцию в уравнение (3.4), получим равенство

$$C\,'(x) \cdot e^{kx} + C(x) \cdot k\, e^{kx} = k \cdot C(x) e^{kx} + f(x),$$

из которого следует, что искомая функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$C\,'(x) = e^{-kx} \cdot f(x).$$

В качестве $C(x)$ можно взять любую первообразную функции $e^{-kx} \cdot f(x)$, например,

$$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-k\tau} \cdot f(\tau)\, d\tau,$$

где x_0 — произвольная точка из интервала $(a; b)$.

Таким образом, мы нашли частное решение уравнения (3.4):

$$y_{\,\text{ч.н.}}(x) = e^{kx} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-k\tau} \cdot f(\tau)\, d\tau = \int\limits_{x_0}^{x} e^{k(x-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau.$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.4) задается формулой

$$y(x) = C \cdot e^{kx} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{k(x-\tau)} \cdot f(\tau)\, d\tau. \tag{3.5}$$

Теперь решим задачу Коши $y(x_0) = y_0$. Поскольку $y_{\text{ч.н.}}(x_0) = 0$, то осталось подобрать константу C так, чтобы $C \cdot e^{kx_0} = y_0$. Итак, решением задачи Коши для уравнения (3.4) с начальными данными $y(x_0) = y_0$ является функция

$$y(x) = y_0 \cdot e^{k(x-x_0)} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{k(x-\tau)} \cdot f(\tau)\,d\tau.$$

Это решение состоит из двух слагаемых. Первое является решением задачи Коши для однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями $\begin{cases} y' = ky \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ а второе — решением задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями $\begin{cases} y' = ky + f(x) \\ y(x_0) = 0. \end{cases}$

Здесь мы снова наблюдаем проявление принципа суперпозиции: решение общей задачи Коши складывается из решений двух задач Коши специального вида.

Будем говорить, что уравнение (3.4) имеет *специальную* правую часть, если

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\lambda x},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. В этом случае частное решение уравнения можно найти методом «неопределенных коэффициентов», а именно, уравнение (3.4) имеет частное решение вида $y(x) = x^p \cdot Q_n(x) \cdot e^{\lambda x}$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n, коэффициенты которого нам и предстоит определить. Если $\lambda \neq k$, то $p = 0$, если же $\lambda = k$, то $p = 1$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' = 2y + (x^2 - 2x) \cdot e^x$.

Так как $k = 2$, то $y_{\text{о.о.}} = C \cdot e^{2x}$. Поскольку $\lambda = 1 \neq k$, будем искать частное решение в виде

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x.$$

Подставляя его в уравнение, приходим к тождеству

$$(2Ax+B)\cdot e^x+(Ax^2+Bx+C)\cdot e^x \equiv 2\,(Ax^2+Bx+C)\cdot e^x+(x^2-2x)\cdot e^x.$$

После сокращения на e^x и приведения подобных слагаемых получим

$$Ax^2+(2A+B)\,x+(B+C)\equiv(2\,A+1)x^2+(2\,B-2)\,x+2\,C.$$

Это равенство должно выполняться для всех значений x, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой его частях должны быть равны. Это приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} A=2\,A+1 \\ 2A+B=2\,B-2 \\ B+C=2\,C. \end{cases}$ Отсюда $A=-1$, $B=0$, $C=0$.

Итак, $y_{\text{ч.н.}}=-x^2\cdot e^x$, и $y_{\text{о.н.}}=C\cdot e^{2x}-x^2\cdot e^x$. □

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y\,'=y+(x^2-2x)\cdot e^x$.

Так как $k=1$, то $y_{\text{о.о.}}=C\cdot e^x$. Поскольку $\lambda=1=k$, то можно было бы искать частное решение в виде $y_{\text{ч.н.}}=x\cdot(Ax^2+Bx+C)\cdot e^x$, но проще найти его методом «вариации постоянной».

Если $y_{\text{ч.н.}}=C(x)\cdot e^x$, то функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$C\,'(x)=e^{-x}\cdot f(x)=x^2-2x.$$

Например, можно взять $C(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2$.

Тогда $y_{\text{ч.н.}}=(\dfrac{x^3}{3}-x^2)\cdot e^x$, и $y_{\text{о.н.}}=C\cdot e^x+(\dfrac{x^3}{3}-x^2)\cdot e^x$. □

Если правая часть уравнения (3.4) имеет вид

$$f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{или} \quad f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

то частное решение можно найти методом «неопределенных коэффициентов», используя формулу Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)\,x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$.

Поясним суть этого приема на примере.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y' = y - 2x \cdot \sin x$.

Заметим, что свойства линейных уравнений 1) – 3) выполняются как над полем вещественных, так и над полем комплексных чисел.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями уравнений $u' = u - 2x \cdot \cos x$ и $v' = v - 2x \cdot \sin x$ соответственно. Тогда функция $z = u + iv$ удовлетворяет уравнению $z' = z - 2x \cdot e^{ix}$.

Частное решение этого уравнения ищем в виде $z_{\text{ч.н.}} = (Ax + B) \cdot e^{ix}$, где A и B — комплексные числа. Подставляем в уравнение:

$$A \cdot e^{ix} + (Ax + B)\, i \cdot e^{ix} = (Ax + B) \cdot e^{ix} - 2x \cdot e^{ix}.$$

Отсюда $A + i\,(Ax + B) = (Ax + B) - 2x$, и $\begin{cases} i\,A = A - 2 \\ A + i\,B = B. \end{cases}$

Находим $A = (1 + i)$, $B = i$, и

$$\begin{aligned} z_{\text{ч.н.}} &= \big((1+i)\,x + i\big) \cdot (\cos x + i\,\sin x) = \\ &= \Big(x(\cos x - \sin x) - \sin x\Big) + i\,\Big(x(\cos x + \sin x) + \cos x\Big). \end{aligned}$$

Выделяем мнимую часть $v(x) = Im\, z(x) = x(\cos x + \sin x) + \cos x$. Это и есть частное решение исходного уравнения $y' = y - 2x \cdot \sin x$. А его общее решение

$$y_{\text{о.н.}} = C \cdot e^{x} + x(\cos x + \sin x) + \cos x. \quad \square$$

Обратимся теперь к уравнению общего вида (3.1).

Теорема. Если функции $k(x)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором интервале $(a; b)$, то через каждую точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 \in (a; b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ проходит единственное решение этого уравнения, определенное при всех $x \in (a; b)$.

Подчеркнем два важных момента. Во-первых, теорема утверждает, что задача Коши $y(x_0) = y_0$ имеет решение при любом $y_0 \in \mathbb{R}$. Во-вторых, это решение существует на всем интервале $(a; b)$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xy\,' + (x+1)y = 3x^2 \cdot e^{-x}$.

Это уравнение не разрешено относительно производной, но нетрудно видеть, что если привести его к виду (3.1), то функции $k(x)$ и $f(x)$ будут разрывны в точке $x = 0$. Поэтому максимальным интервалом, на котором выполняются условия теоремы, является луч $(-\infty; 0)$ или луч $(0; +\infty)$.

Рассмотрим однородное уравнение $xy\,' + (x+1)y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} + \frac{x+1}{x}\,dx = 0.$$

Его общее решение $y_{\text{ о.о.}} = C \cdot (x\,e^x)^{-1} = C \cdot \Phi(x)$.

Решение неоднородного уравнения найдем методом вариации постоянной: $y_{\text{ ч.н.}} = C(x) \cdot \Phi(x)$. Подставляя эту функцию в уравнение, получим равенство

$$x(C\,' \cdot \Phi + C \cdot \Phi\,') + (x+1)C \cdot \Phi = 3x^2 \cdot e^{-x}.$$

Так как $x\,\Phi\,' + (x+1)\Phi = 0$, то функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$C\,'(x)\Phi(x) = 3xe^{-x}.$$

Следовательно, $C\,'(x) = 3x^2$ и $C\,(x) = x^3$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{ о.н.}}(x) = C \cdot x^{-1}\,e^{-x} + x^2\,e^{-x}. \quad \square$$

В разобранном примере присутствуют ключевые моменты, на которых основан алгоритм решения любого уравнения вида (3.1). Отметим их еще раз.

1) Однородное уравнение решается методом разделения переменных, и его общее решение имеет вид $y_{\text{ о.о.}} = C \cdot \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — любое частное решение. Таким образом, решения однородного уравнения образуют одномерное векторное пространство, и $\Phi(x)$ — его базис.

2) Неоднородное уравнение решается методом вариации постоянной: $y_{\text{ ч.н.}} = C(x) \cdot \Phi(x)$, где $C(x)$ находится из условия $C\,'(x)\Phi(x) = f(x)$.

Часто возникают задачи, в которых требуется найти решение уравнения, удовлетворяющее каким-либо дополнительным условиям, отличным от условия Коши.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $xy\,' + y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

Условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши нарушены в точке $x = 0$. Все решения однородного уравнения $y_{\text{ о.о.}} = C/x$, кроме решения $y \equiv 0$, неограничены при $x \to 0$.

Возникает вопрос: как ведут себя решения неоднородного уравнения при $x \to 0$? Есть ли среди них ограниченные и даже имеющие предел при $x \to 0$?

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации постоянной: $y_{\text{ ч.н.}} = \dfrac{C(x)}{x}$. Тогда $C\,'(x) = f(x)$, $C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau$ и частное решение имеет вид

$$y_{\text{ ч.н.}} = \frac{1}{x} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau.$$

Для того, чтобы это решение было ограничено в точке $x = 0$, необходимо, чтобы $\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau \to 0$ при $x \to 0$, а это означает, что нужно положить $x_0 = 0$.

Итак, единственное решение, которое может быть ограниченным при $x \to 0$, имеет вид

$$y^* = \frac{\int\limits_0^x f(\tau)\,d\tau}{x}.$$

Покажем, что оно действительно ограничено и имеет конечный предел в точке $x = 0$. При переходе к пределу возникает неопределенность $\dfrac{0}{0}$, и мы раскроем ее, воспользовавшись правилом Лопиталя. Функция $f(x)$ непрерывна, ее первообразная $F(x) = \int\limits_x^x f(\tau)\,d\tau$ дифференцируема и $F\,'(x) = f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} y^*(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x f(\tau)\,d\tau}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0).$$

Итак, исходное уравнение имеет единственное ограниченное в точке $x = 0$ решение. Это решение имеет при $x \to 0$ конечный предел, равный $f(0)$. Остальные решения неограничены в точке $x = 0$. Понятно, что в таком случае ставить в точке $x = 0$ задачу Коши для уравнения $xy\,' + y = f(x)$ не имеет смысла. $\square$

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y\,' + y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на всей вещественной оси.

Решения однородного уравнения $y_{\text{о.о.}} = Ce^{-x}$, кроме решения $y \equiv 0$, неограничены при $x \to -\infty$. Существует ли решение неоднородного уравнения, ограниченное на всей вещественной оси?

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{\text{ч.н.}} = C(x)e^{-x}$, где $C\,'(x) = e^x f(x)$, $C(x) = \int\limits_{x_0}^x e^\tau f(\tau)\,d\tau$.

Для того, чтобы решение $y_{\text{ч.н.}} = C(x)e^{-x}$ было ограничено при $x \to -\infty$, необходимо, чтобы $\lim\limits_{x\to-\infty} C(x) = 0$.

Положим $C(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau} f(\tau)\, d\tau$. Этот интеграл сходится при $x \to -\infty$, так как $f(x)$ ограничена:

$$|f(\tau)| \le M \quad \Rightarrow \quad |e^{\tau} f(\tau)| \le M e^{\tau}$$

$$|C(x)| = \Bigl| \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau} f(\tau)\, d\tau \Bigr| < M \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau}\, d\tau = M e^{x}$$

Итак, единственное частное решение, которое может удовлетворять поставленным условиям, имеет вид

$$y^*(x) = e^{-x} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\tau} f(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{(\tau - x)} f(\tau)\, d\tau.$$

Сделаем замену $\tau - x = s$, тогда

$$y^*(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{s} f(x+s)\, ds,$$

и ограниченность этого решения становится очевидной:

$$|y^*(x)| \le M \int\limits_{-\infty}^{0} e^{s}\, ds = M.$$

Интересно отметить, что если функция $f(x)$ — периодическая с периодом T, то найденное решение $y^*(x)$ также будет периодическим:

$$y^*(x+T) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{s} f(x+T+s)\, ds = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{s} f(x+s)\, ds = y^*(x). \quad \square$$

Вообще говоря, периодичность правой части уравнения не всегда влечет существование периодического решения. Например, простейшее линейное уравнение $y' = \sin^2 x$ не имеет ни одного периодического решения (проверьте это, выписав формулу общего решения).

Уравнения, приводящиеся к линейным

1) Уравнение Бернулли $y' = k(x)\,y + f(x)y^m$, $m \neq 0$, $m \neq 1$.

Отметим, что при $m > 0$ это уравнение имеет решение $y \equiv 0$, которое является особым при $0 < m < 1$, а при $m > 1$ — частным.

Для отыскания других решений поделим обе части уравнения на y^m:

$$\frac{y'}{y^m} = k(x)\frac{1}{y^{m-1}} + f(x)$$

Замена $z(x) = 1/y^{m-1}$ приводит это уравнение к линейному.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $xy' + 2y + x^5e^xy^3 = 0$.

Это уравнение Бернулли, $m = 3$. Функция $y \equiv 0$ — решение.

Делим обе части уравнения на y^3: $\qquad x\dfrac{y'}{y^3} + \dfrac{2}{y^2} + x^5e^x = 0.$

Положим $z = y^{-2}$, тогда $z' = -2y^{-3}y'$: $\quad -\dfrac{x}{2}\cdot z' + 2z + x^5e^x = 0.$

$$z_{\text{ о.о.}} = C \cdot x^4,$$

$$z_{\text{ ч.н.}} = C(x) \cdot x^4, \text{ где } C(x) = 2e^x,$$

$$z_{\text{ о.н.}} = C \cdot x^4 + 2x^4e^x.$$

Таким образом, общее решение $y^{-2} = C \cdot x^4 + 2x^4e^x$ и $y \equiv 0$. $\quad\square$

2) Уравнение становится линейным, если x считать функцией от y.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $(2e^y - x)y' = 1$.

Положим $x = x(y)$, тогда $x' = 1/y'$, и уравнение можно преобразовать к виду

$$x' = -x + 2\,e^y.$$

$$x_{\text{ о.о.}} = C \cdot e^{-y},$$

$$x_{\text{ч.н.}} = A \cdot e^y, \text{ где } A = 1,$$

$$x_{\text{о.н.}} = C \cdot e^{-y} + e^y. \quad \square$$

3) Уравнение становится линейным при замене $z = G(y)$.

По правилу дифференцирования сложной функции $z' = G'(y) \cdot y' = g(y) \cdot y'$, где $G(y)$ — первообразная для функции $g(y)$. Если такие комбинации присутствуют в уравнении, замена $z = G(y)$ может его существенно упростить.

Пример 9. Рассмотрим уравнение $x^2y' + x + e^{-y} = 0$.

Умножим его на e^y: $\quad x^2e^yy' + xe^y + 1 = 0$.
Положим $z = e^y$, тогда $z' = e^yy'$. Уравнение становится линейным относительно z: $\quad x^2z' + xz + 1 = 0$.

Пример 10. Уравнение $\dfrac{y'}{y} + \ln y \operatorname{tg} x = \sin x$ заменой $z = \ln y$ превращается в линейное уравнение $z' + z \operatorname{tg} x = \sin x$. $\quad \square$

Самостоятельная работа

1. Найти общее решение уравнения $y' \cos x + y \sin x = 1$. (частное решение можно легко угадать!)

2. Найти общее решение уравнения $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$ и решить задачу Коши $y(2) = 0$.

3. Найти общее решение уравнения $y' + x\sqrt[3]{y} = 3$.

4. Найти общее решение уравнения $xy' + x^2e^y + 2 = 0$ и решить задачу Коши $y(-1) = 0$.

5. Найти общее решение уравнения $y' \sin 2y + \cos^2 y + 1 = 0$

Домашняя работа

№№ 149, 153, 159, 160, 178.

Ответы к самостоятельной работе

1. $y = C\cos x + \sin x$
2. $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2\,,\quad y = -1 + \sqrt{x-1}$
3. $y^{\frac{2}{3}} = Ce^{2x} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{6}\,,\quad y = 0$
4. $e^{-y} = Cx^2 + x^2\ln|x|$
   $y = -\ln(x^2 + x^2\ln(-x))$
5. $\sin^2 y = Ce^x + 2$ (или $\cos^2 y = Ce^x - 1$)

Занятие 4

Уравнения в полных дифференциалах

Мы уже убедились ранее, что запись дифференциального уравнения в виде
$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0 \tag{4.1}$$
является весьма удобной хотя бы потому, что переменные x и y входят в уравнение «на равных правах», то есть мы не акцентируем внимание на том, что x является независимой переменной, а y — функцией от нее. И решение такого дифференциального уравнения мы получаем, как правило, в виде общего интеграла $F(x;y;C) = 0$.

Уравнение (4.1) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$, то есть
$$dU = M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy. \tag{4.2}$$
Общий интеграл такого уравнения имеет вид $U(x;y) = C$.

Как определить, является ли уравнение вида (4.1) уравнением в полных дифференциалах? Понятно, что если выполнено условие (4.2), то функции $M(x;y)$ и $N(x;y)$ являются частными производными функции $U(x;y)$, а именно:
$$M(x;y) = \frac{\partial U}{\partial x} \text{ и } N(x;y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$
Если функция $U(x;y)$ дважды дифференцируема, то ее вторые смешанные производные должны совпадать:
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x;y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x;y)}{\partial x}.$$
И следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial M(x;y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x;y)}{\partial x} \tag{4.3}$$

Имеет место следующая

Теорема. Если функции $M(x;y)$, $N(x;y)$, $\dfrac{\partial M(x;y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N(x;y)}{\partial x}$ непрерывны в области $G : a < x < b$, $c < y < d$, и в области G выполнено условие (4.3), то через каждую точку $(x_0; y_0) \in G$ проходит единственная интегральная линия уравнения (4.1), и эта интегральная линия задается уравнением $U(x;y) = C$.

Посмотрим, как можно быстро найти функцию $U(x;y)$.

Пример 1. Решить уравнение $e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})\,dy$.

Приведем уравнение к виду (4.1): $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.

Проверим выполнения условия (4.3): $\dfrac{\partial e^{-y}}{\partial y} = -e^{-y} = \dfrac{\partial(-2y - xe^{-y})}{\partial x}$.

Остальные условия теоремы также выполнены во всей плоскости xOy, поэтому существует такая функция $U(x;y)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{-y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y}.$$

Проинтегрируем первое равенство по x, считая y параметром:

$$U(x;y) = x \cdot e^{-y} + C(y).$$

Тогда $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -xe^{-y} + C'(y)$. С другой стороны $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -2y - xe^{-y}$, поэтому $C'(y) = -2y$ и $C(y) = -y^2 + C$.

Таким образом, мы восстановили функцию $U(x;y)$ по ее дифференциалу, и можем записать общий интеграл:

$$xe^{-y} - y^2 = C. \quad \square$$

Если условие (4.3) не выполнено, то уравнение (4.1) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако, его можно сделать таковым, умножив на некоторую функцию $\mu(x;y)$. Эту функцию называют *инте-*

грирующим множителем. Известно, что такой множитель существует, и не один, но найти его не так-то просто.

Допустим, что после умножения (4.1) на некоторую функцию $\mu(x;y)$ мы получим уравнение

$$\mu(x;y)M(x;y)\,dx + \mu(x;y)N(x;y)\,dy = 0,$$

которое является уравнением полных дифференциалах. Тогда его коэффициенты должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot M) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot N).$$

Выполнив дифференцирование и перегруппировав слагаемые, мы увидим, что интегрирующий множитель должен являться решением линейного уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (4.4)$$

Алгоритм решения этого уравнения подразумевает, что на определенном этапе нужно решить уравнение (4.1). Казалось бы, круг замкнулся...

Выход из этого положения заключается в том, что нам не нужно находить множество *всех* решений уравнения (4.4), а достаточно найти хотя бы *одно* решение $\mu(x;y)$. Поэтому можно, исходя из различных наводящих соображений, искать интегрирующий множитель специального вида.

Чаще всего подбирают множитель $\mu(x;y)$, зависящий от некоторой комбинации переменных x и y, то есть $\mu = \mu(t)$, где $t = t(x;y)$. Поскольку в этом случае μ является функцией от одной переменной, то уравнение (4.4) существенно упростится:

$$M \cdot \mu'_t t'_y - N \cdot \mu'_t t'_x = \mu(-M'_y + N'_x).$$

Отсюда

$$\frac{\mu'_t}{\mu} = (\ln \mu)'_t = \frac{-M'_y + N'_x}{M \cdot t'_y - N \cdot t'_x}.$$

Очевидно, что интегрирующий множитель указанного вида будет существовать, только если правая часть этого уравнения является функцией от t. В таблице приведены некоторые виды интегрирующих множителей и условия, при которых они существуют.

$\mu = \mu(t)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = f(t)$
$\mu = \mu(x)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{-N} = f(x)$
$\mu = \mu(y)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{M} = f(y)$
$\mu = \mu(x+y)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{M - N} = f(x+y)$
$\mu = \mu(xy)$	$\frac{\mu'_t}{\mu} = \frac{-M'_y + N'_x}{xM - yN} = f(xy)$

Пример 2. Решить уравнение $(x + y^2)\,dx + (x^2 - \frac{x^2}{y})\,dy = 0$.

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так как $M = x + y^2$, $N = x^2 - \frac{x^2}{y}$, и $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - \frac{2x}{y}$.

Отсюда $-M'_y + N'_x = -2y + 2x - \frac{2x}{y}$. Перебирая предложенные варианты, мы придем к тому, что можно искать интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x + y)$. Тогда

$$\frac{\mu'_t}{\mu} = (\ln \mu)'_t = \frac{-2}{x + y} = \frac{-2}{t}.$$

Следовательно $\mu = t^{-2} = (x + y)^{-2}$ и уравнение

$$\frac{x + y^2}{(x + y)^2}\,dx + \frac{x^2 - \frac{x^2}{y}}{(x + y)^2}\,dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Далее действуем по уже знакомому алгоритму. Требуется найти такую функцию $U(x;y)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x+y^2}{(x+y)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2 - \frac{x^2}{y}}{(x+y)^2}.$$

Интегрируем первое равенство по x, считая y параметром. Заметим, что

$$\frac{x+y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)+(y^2-y)}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y^2-y}{(x+y)^2},$$

поэтому

$$U(x;y) = \ln|x+y| - \frac{y^2-y}{x+y} + C(y).$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{x+y} - \frac{(2y-1)(x+y)-(y^2-y)}{(x+y)^2} + C\,'(y) = \frac{(x^2-\frac{x^2}{y})}{(x+y)^2}.$$

Отсюда $C\,'(y) = 1 - \dfrac{1}{y}$ и $C(y) = y - \ln y$. Итак, общий интеграл имеет вид:

$$\ln\left|\frac{x+y}{y}\right| - \frac{y^2-y}{x+y} + y = C.$$

Заметим, что при делении на $(x+y)^2$ мы могли потерять решение $x+y=0$. Подстановкой в исходное уравнение убедимся, что функция $y=-x$ действительно является его решением. Мы не будем здесь обсуждать вопрос, является ли это решение особым, но очевидно, что оно не может быть получено из общего интеграла, поэтому его следует записать отдельно. $\square$

Метод «интегрируемых комбинаций»

Умножая уравнение (4.1) на интегрирующий множитель, мы добились того, что оно преобразовалось к виду $dU(x;y)=0$. Однако поиск этого множителя — довольно трудоемкий процесс.

Тем не менее, часто в уравнении можно выделить группу слагаемых, которая является дифференциалом какого-то выражения. Обозначив это выражение одной буквой, то есть введя новую переменную, иногда удается упростить уравнение, и в итоге — решить его.

Запомните следующие комбинации:

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$d(u^2 + v^2) = 2u\,du + 2v\,dv$$

$$f\,'(u)du = df$$

Пример 3. Решить уравнение $(x + x^2 + y^2)\,dx + y\,dy = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $(x^2 + y^2)\,dx + (x\,dx + y\,dy) = 0$.

Введем новую функцию $u = x^2 + y^2$, тогда $du = 2(x\,dx + y\,dy)$, и уравнение приобретает очень простой вид:

$$2u\,dx + du = 0.$$

Его интеграл $2x + \ln|u| = C$, или $2x + \ln(x^2 + y^2) = C$.

Заметим, что решая уравнение с разделяющимися переменными $2u\,dx + du = 0$, мы делили его на u. Нетрудно догадаться, что функция $u^{-1} = (x^2 + y^2)^{-1}$ является интегрирующим множителем исходного уравнения. $\square$

Пример 4. Решить уравнение $(xy^3 - 1)\,dx + x^2y^2\,dy = 0$.

Группируем слагаемые одинаковой степени однородности:

$$xy^2(y\,dx + x\,dy) = dx, \text{ или } xy^2 d(xy) = dx.$$

Умножаем обе части уравнения на x и полагаем $u = xy$. Уравнение приобретает вид $u^2du = xdx$, откуда $\dfrac{u^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} = C$. Возвращаясь к переменным $(x; y)$, запишем общий интеграл: $2x^3y^3 - 3x^2 = C$.

В процессе решения мы умножали уравнение на x — это и есть интегрирующий множитель уравнения.

Заметим также, что умножая уравнение на x, мы могли приобрести постороннее решение $x \equiv 0$ (оно входит в общий интеграл при $C = 0$). Однако проверка показывает, что эта функция является решением исходного уравнения. $\square$

Пример 5. Решить уравнение $(x^2 - \sin^2 y)\, dx + x \sin 2y\, dy = 0$.

Заметим, что $d(\sin^2 y) = 2 \sin y \cos y dy = \sin 2y dy$. Поэтому положим $u = \sin^2 y$, и уравнение примет вид

$$x^2\, dx - u\, dx + x\, du = 0.$$

Разделив его на x^2, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$dx + \frac{x\, du - u\, dx}{x^2} = 0, \text{ или } dx + d\,(\frac{u}{x}) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения $x + \dfrac{u}{x} = 0$, или $x^2 + \sin^2 y = Cx$. Также при делении на x^2 было потеряно решение $x \equiv 0$, которое невозможно получить из общего интеграла ни при каком значении C. $\square$

Несомненно, метод интегрируемых комбинаций не является алгоритмическим, а требует проявления смекалки и наработки определенного опыта. Однако даже однородные и линейные уравнения, имеющие четкие алгоритмы решения, можно эффективно решить с помощью этого метода.

Пример 6. Решить уравнение $(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$.

Это уравнение однородное, но метод интегрируемых комбинаций быстрее приведет нас к цели. Перегруппируем слагаемые: $x^2\, dx + (x\, dy^2 - y^2\, dx) = 0$, и разделим уравнение на x^2. Получим уравнение в полных дифференциалах $dx + d(\dfrac{y^2}{x}) = 0$.

Его общий интеграл $x + \dfrac{y^2}{x} = C$, или $x^2 + y^2 = Cx$. При делении было потеряно частное решение $x \equiv 0$. $\square$

Пример 7. Решить уравнение $(x^2y^3 + y)\,dx + (x^3y^2 - x)\,dy = 0$.

Здесь хорошо видны две группы слагаемых одинаковой степени однородности:

$$(x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy) + (y\,dx - x\,dy) = 0.$$
$$x^2y^2\,d(xy) + y^2 d\Big(\frac{x}{y}\Big) = 0.$$

Поделив уравнение на xy и положив $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$u\,du + \frac{dv}{v} = 0.$$

Его общий интеграл $u^2 + \ln v^2 = C$, или $x^2y^2 + \ln\dfrac{x^2}{y^2} = C$.

При делении на xy были потеряны решения $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$. $\square$

Пример 8. Решить уравнение $y'\sin x + y\cos x = \sin^2 x$.

Это уравнение линейное, но мы выделим интегрируемую комбинацию:

$$y'\sin x + y\cos x = (y\sin x)'.$$
$$(y\sin x)' = \sin^2 x \Rightarrow y\sin x = \int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$
$$y = \frac{C}{\sin x} + \frac{x}{2\sin x} - \frac{\cos x}{2} \quad \square$$

Замечание: также легко можно решить задачи 1 и 5 из самостоятельной работы предыдущего занятия.

Пример 9. Решить уравнение $xy' - y = x^2$.

Уравнение легко переписать в виде $\dfrac{xy' - y}{x^2} = 1$, или $(\frac{y}{x})' = 1$.

Следовательно $(\frac{y}{x}) = x + C$, $y = Cx + x^2$. $\square$

Самостоятельная работа

Во всех задачах нужно найти общий интеграл уравнения.

1. $(1 + y^2 \sin 2x)\, dx - 2y \cos^2 x dy = 0.$

2. $(x - y \cos \frac{y}{x})\, dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0$.

3. $x(\ln x^2 y - 1)\, dy = 2y\, dx.$
Указание: введите функции $u = \ln x^2$, $v = \ln y$.

4. $(x^2 + 1)(2x\, dx + \cos y\, dy) = 2x \sin y\, dx.$
Указание: $u = x^2 + 1$, $v = \sin y$.

5. $y(x + y)\, dx + (xy + 1)\, dy = 0.$

Домашняя работа

№№ 189, 200, 201, 206, 207.

Ответы к самостоятельной работе

1. $x - y^2 \cos^2 x = C$
2. $\ln|x| + \sin \frac{y}{x} = C$
3. $\ln|u + v| = v + C, \;\; y = C \ln x^2 y$
4. $\ln(x^2 + 1) + \frac{\sin y}{x^2 + 1} = C$
5. интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{y}$

   $xy + \frac{x^2}{2} + \ln|y| = C\,, \quad y = 0$

Занятие 5

Теоремы существования и единственности

На предыдущих занятиях мы рассмотрели методы интегрирования некоторых видов дифференциальных уравнений первого порядка. Однако проинтегрировать уравнение «в квадратурах», то есть записать решение в виде интегралов от элементарных функций, удается далеко не всегда. Тем не менее, хотелось бы иметь ответ на вопрос: каковы условия, при которых через точку $(x_0; y_0)$ проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = f(x; y)$? Сформулируем одну из теорем такого плана.

Теорема Пикара. Пусть функция $f(x; y)$ определена и непрерывна в области $G : |x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, и частная производная $f'_y(x; y)$ ограничена в G. Тогда задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x; y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

имеет единственное решение. Это решение определено по крайней мере на отрезке $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\{a; \dfrac{b}{M}\}$, а M — любое число такое, что $|f(x; y)| \leqslant M$ в области G.

Подчеркнем, что теорема Пикара носит локальный характер, то есть ничего не говорит об области существования непродолжаемого решения. Также важно понимать, что теорема дает нам *достаточные* условия существования и единственности решения задачи Коши. Эти условия можно немного ослабить, но, как правило, чем слабее условия, тем сложнее проверить их выполнение.

Иногда физики пренебрежительно относятся к теоремам существования, отдавая предпочтение численным методам решения. Однако при численном решении дифференциального уравнения теоремы существования и единственности не только не утрачивают своей актуальности, но приобретают еще большую значимость. Ведь, обращаясь к численным алгоритмам, вы должны иметь гарантии того, что решение действительно существует.

Кроме того, доказательство теоремы Пикара содержит в себе алгоритм приближенного построения решения с возможностью оценить точность этого приближения. Основная идея доказательства заключается в том, что задача (5.1) эквивалентна решению интегрального уравнения

$$y(x) = y_0(x) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau; y(\tau))\, d\tau,$$

которое решается методом последовательных приближений:

$$y^{[0]}(x) = y_0, \quad y^{[k+1]}(x) = y_0(x) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau; y^{[k]}(\tau))\, d\tau. \tag{5.2}$$

Последовательность функций $y^{[k]}(x)$ равномерно сходится к решению задачи (5.1) на отрезке $|x - x_0| \leqslant h$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $\begin{cases} y\,' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Все условия теоремы Пикара, очевидно, выполнены, и задача имеет единственное решение. Однако, при всей простоте условия, это решение невозможно выписать в квадратурах.

Рассмотрим область $G : |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1$. Очевидно, в этой области $|f(x; y)| \leqslant 2$. Поэтому $h = \min\{1; \frac{1}{2}\} = 0,5$, и по теореме Пикара искомое решение задачи Коши существует и единственно на отрезке $|x| \leqslant 0,5$.

Построим несколько приближений по формулам (5.2)

$$y^{[0]}(x) \equiv 0, \quad y^{[1]}(x) = \int\limits_{0}^{x} \tau^2\, d\tau = \frac{x^3}{3},$$

$$y^{[2]}(x) = \int\limits_0^x (\tau^2 + \frac{\tau^6}{9})\, d\tau = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}. \quad \square$$

Теперь обратимся к системам дифференциальных уравнений. Обозначим через $\vec{y}(x)$ вектор-функцию с компонентами $y_i(x)$, $i = 1, ..., n$. Систему уравнений $y_i{}' = f_i(x; y_1, ..., y_n)$, $i = 1, ..., n$, будем записывать кратко в векторной форме

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x; \vec{y}). \tag{5.3}$$

Такая система дифференциальных уравнений называется *нормальной.*

Поставим для системы (5.3) задачу Коши, задав в точке x_0 значения всех функций y_i, то есть $y_i(x_0) = y_{0i}$, $i = 1, ..., n$, или $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$.

Теорема Пикара гласит, что для существования и единственности решения задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(x; \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y_0}. \end{cases} \tag{5.4}$$

достаточно непрерывности всех функций $f_i(x; y_1, ..., y_n)$ и ограниченности всех производных $\dfrac{\partial f_i(x; y_1, ..., y_n)}{\partial y_j}$, $i, j = 1, ..., n$, в области G : $|x - x_0| \leqslant a$, $|y_i - y_{0i}| \leqslant b_i$.

Посмотрим, как работает метод последовательных приближений для нормальных систем.

Пример 2. Построим приближенно решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \quad x(0) = 1 \\ \dot{y} = x^2, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

Здесь независимой переменной является t, а $\dot{x}$ и $\dot{y}$ означают производные по t.

Итерации определяются формулами

$$x^{[0]}(t) = 1, \quad x^{[k+1]}(t) = 1 + \int\limits_0^t y^{[k]}(\tau)\, d\tau,$$

$$y^{[0]}(t) = 2, \quad y^{[k+1]}(t) = 2 + \int\limits_0^t \Big(x^{[k]}(\tau)\Big)^2\, d\tau.$$

На первом шаге получаем

$$x^{[1]}(t) = 1 + \int\limits_0^t 2\, d\tau = 1 + 2t,$$

$$y^{[1]}(t) = 2 + \int\limits_0^t 1\, d\tau = 2 + t.$$

Далее,

$$x^{[2]}(t) = 1 + \int\limits_0^t (2+\tau)\, d\tau = 1 + 2t + \frac{t^2}{2},$$

$$y^{[2]}(t) = 2 + \int\limits_0^t (1+2\tau)^2\, d\tau = 2 + t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3.$$

Последовательность функций $x^{[k]}(t)$, $y^{[k]}(t)$ равномерно сходится к решению задачи Коши на отрезке $|t| \leqslant h$, где $h = \min\{a; \frac{\min b_i}{M}\}$, а M — любое число такое, что $|f_i(x; y)| \leqslant M$ для всех $i = 1, ..., n$ в области G. $\square$

Обсудим постановку задачи Коши и теорему существования и единственности решения этой задачи для дифференциального уравнения порядка n, разрешенного относительно высшей производной:

$$y^{(n)} = f(x; y; y', ..., y^{(n-1)}). \tag{5.5}$$

Отметим, что уравнение (5.5) можно свести к нормальной системе (5.4), положив $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, ... , $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$. Тогда

$$\begin{cases} {y_1}'(x) = y_2(x) \\ {y_2}'(x) = y_3(x) \\ \vdots \\ {y_n}' = f(x; y; y', ..., y^{(n-1)}). \end{cases}$$

Вспомнив, как ставилась задача Коши для нормальной системы, мы придем к постановке задачи Коши для уравнения: найти n раз непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (5.5) и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_1,\, \dots\, ,\, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Если функция $f(x; y; y', ..., y^{(n-1)})$, фигурирующая в правой части уравнения (5.5), и ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(i)}}$ непрерывны и ограничены в области $G : |x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b_0$, $|y' - y_1| \leqslant b_1$, ... , $|y^{(n-1)} - y_{n-1}| \leqslant b_{n-1}$, то существует единственное решение $y(x)$, определенное на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant h$.

Мы не приводим здесь формулу, определяющую величину h, однако еще раз подчеркнем локальный характер этой теоремы.

Покажем, как работает метод последовательных приближений для уравнения второго порядка.

Пример 3. Построим приближенно решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + (y')^2 - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Положим $z(x) = y'(x)$ и перейдем к нормальной системе

$$\begin{cases} y' = z, & y(0) = 1 \\ z' = 2y - z^2, & z(0) = 0. \end{cases}$$

Итерационные формулы:

$$y^{[0]}(x) = 1, \quad y^{[k+1]}(x) = 1 + \int\limits_0^x z^{[k]}(\tau)\, d\tau,$$

$$z^{[0]}(x) = 0, \quad z^{[k+1]}(x) = \int\limits_0^x \Big(2y^{[k]}(\tau) - \big(z^{[k]}(\tau)\big)^2\Big)\, d\tau.$$

Первый шаг:

$$y^{[1]}(x) = 1, \qquad z^{[1]}(x) = \int\limits_0^x 2\, d\tau = 2x.$$

Второй шаг:

$$y^{[2]}(x) = 1 + \int\limits_0^x 2\tau\, d\tau = 1 + x^2, \qquad z^{[2]}(x) = \int\limits_0^x \Big(2 - (2\tau)^2\Big)\, d\tau = 2x - \frac{4}{3}x^3.$$

Третий шаг:

$$y^{[3]}(x) = 1 + \int\limits_0^x \Big(2\tau - \frac{4}{3}\tau^3\Big)\, d\tau = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4.$$

и так далее. $\square$

В некоторых случаях решение уравнения (5.5), удовлетворяющее заданным начальным условиям, можно угадать, не решая этого уравнения. При выполнении всех условий теоремы Пикара решение единственно, поэтому других решений, кроме найденного, задача Коши иметь не может.

Пример 4. Решить задачи Коши

$$\text{a)} \begin{cases} y' = \sin xy \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y'' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что в обоих случаях условия теоремы Пикара выполнены, и следовательно функции $y \equiv 0$ и $y = x$, являются решениями задач a) и b) соответственно. $\square$

Пример 5. Допустим, некое уравнение (5.5), правая часть которого удовлетворяет условиям теоремы Пикара, имеет два решения: $y_1 = \sin x$ и $y_2 = x - \dfrac{x^3}{3}$. Каким может быть его порядок?

Заметим, что в точке $x_0 = 0$ у функций y_1 и y_2 совпадают не только их значения, но и значения всех производных до четвертого порядка включительно. И только $y_1^{(5)}(0) = 1$, $y_2^{(5)}(0) = 0$. Следовательно, порядок уравнения должен быть не менее 6, иначе будет нарушена единственность решения. $\square$

Рассмотрим более подробно задачу Коши для уравнения второго порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x; y; y') \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Геометрический смысл этой задачи заключается в том, чтобы найти на плоскости xOy интегральную линию уравнения, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$ и имеет в этой точке заданное направление касательной.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $y'' = f(x; y; y')$, в котором функция $f(x; y; y')$ является многочленом от своих аргументов. Могут ли графики двух различных решений $y = y(x)$, проходящих через точку $(x_0; y_0)$, пересекаться в этой точке? касаться друг друга в этой точке? (см. рис. 5.1)

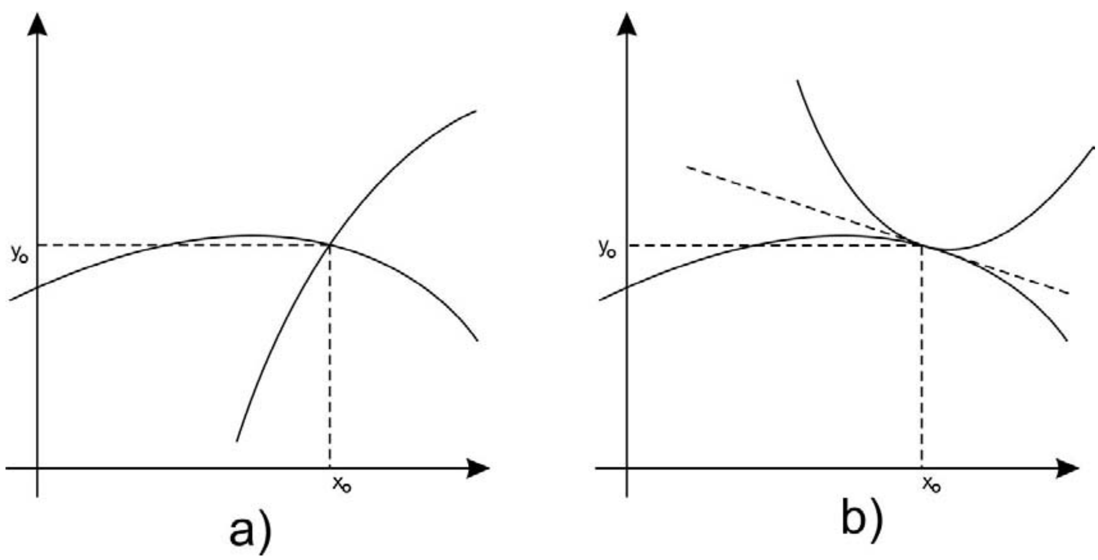


Рис. 5.1. Пересечение и касание двух решений уравнения

Поскольку в данном случае выполнены условия теоремы Пикара, две интегральные кривые, проходящие через точку $(x_0; y_0)$ и имеющие в ней одинаковый наклон касательных, должны совпадать в силу теоремы единственности. Поэтому случай a) возможен, а случай b) — нет. $\square$

Если дифференциальное уравнение возникло при рассмотрении какой-либо задачи механики, то задача Коши

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t; x; \dot{x}) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

состоит в том, чтобы определить закон движения точки $x(t)$, которая в начальный момент времени занимала положение x_0 и имела скорость v_0.

Самостоятельная работа

1. Укажите количество интегральных линий уравнения $y^{(n)} = x + y^2$, проходящих через точку (0;1) и имеющих в этой точке угловой коэффициент касательной равный 2, в зависимости от порядка уравнения.

2. Для уравнения $y'' = y \cdot \sqrt{x^2 - (y')^2}$ заданы начальные условия

$$\text{a)} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

В каком случае можно гарантировать существование и единственность решения такой задачи Коши?

3. Для системы $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + \ln(1+t) \\ x\dot{y} = \sqrt[3]{y - t} \end{cases}$ заданы начальные условия

$$\text{a)} \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{d)} \begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

В каком случае можно гарантировать существование и единственность решения такой задачи Коши?

4. Решите задачу Коши $\begin{cases} y \cdot y'' = x \cdot y' \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 2. \end{cases}$

Можно ли утверждать, что задача Коши с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ имеет единственное решение $y \equiv 0$?

Домашняя работа

№№ 225, 228, 232, 233.

Ответы к самостоятельной работе

1. $n = 1$, нет таких линий
   $n = 2$, единственная интегральная линия
   $n \geqslant 3$, бесконечно много
2. c)
3. c)
4. $y = x^2$; нет.

Занятие 6

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Речь пойдет об уравнениях самого общего вида

$$F(x; y; y') = 0. \tag{6.1}$$

Первая мысль, которая приходит в голову при встрече с таким уравнением, — разрешить его относительно y'. Однако надо иметь в виду, что даже если это удастся сделать, можно получить не одно, а несколько уравнений вида $y' = f(x; y)$.

Пример 1. Уравнение

$$x^2(y')^2 + xyy' - 2y^2 = 0 \tag{6.2}$$

является квадратным относительно y'. Его левую часть можно разложить на множители:

$$(xy' - y)(xy' + 2y) = 0,$$

поэтому исходное уравнение эквивалентно паре уравнений: $xy' = y$ или $xy' = -2y$. Каждое из них является уравнением с разделяющимися переменными. Их решения суть $y = Cx$ и $y = Dx^{-2}$.

Заметим, что через каждую точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 \neq 0$, проходит две интегральных линии: $y = \frac{y_0}{x_0}x$ и $y = \frac{y_0 x_0^2}{x^2}$ — по одной линии из каждого семейства. Тем не менее, мы можем говорить о единственности решения, поскольку уравнение (6.2) в этой точке также определяет два значения производной y'. $\square$

Основным методом решения уравнений, не разрешенных относительно производной, является метод *введения параметра*. Но прежде чем переходить к его обсуждению, сделаем два простых упражнения.

Вспомним, что зависимость y от x можно задать не только явным образом, но и параметрически, а именно, система $\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$, где $p \in (a; b)$, $x(p)$ и $y(p)$ — дифференцируемые функции, определяет y как однозначную дифференцируемую функцию от x, если $\dot{x}(p) \neq 0$ (точка означает дифференцирование по параметру p). В этом случае производная y по x может быть найдена по формуле $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Попробуем решить обратную задачу: восстановить функцию $y = y(p)$, зная, что $y' = \sin p$ и $x = \cos p$, $p \in (0; \pi)$.

По определению дифференциала $dy = y'dx$. Подставляя сюда $y' = \sin p$ и $dx = -\sin p\, dp$, получаем $dy = -\sin^2 p\, dp$.

Интегрируя это соотношение, находим $y = -\dfrac{p}{2} + \dfrac{\sin 2p}{4} + C$.

Таким образом, система $\begin{cases} x = \cos p \\ y = -\dfrac{p}{2} + \dfrac{\sin 2p}{4} + C \end{cases}$ определяет функцию $y = y(x)$.

Действуя по той же схеме, можно восстановить функцию $x = x(p)$, зная, что $y' = p^2 + p$ и $y = \ln p$, $p > 0$.

По определению дифференциала $dy = y'dx$. Подставляя сюда $y' = p^2 + p$ и $dy = \dfrac{dp}{p}$, получаем

$$\frac{dp}{p} = (p^2 + p)\, dx, \text{ или } dx = \frac{dp}{(p+1)p^2}$$

(при $p > 0$ деление на $(p^2 + p)$ не приводит к потере решений).

Интегрируя это соотношение, находим $x = \ln \dfrac{p+1}{p} - \dfrac{1}{p} + C$.

По сути, мы восстановили функцию $y = y(x)$ по ее производной, но в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \ln \dfrac{p+1}{p} - \dfrac{1}{p} + C \\ y = \ln p. \end{cases}$

В обоих случаях алгоритм решения был достаточно прост: если известна производная $y' = \varphi(p)$ и одна из переменных $x(p)$ или $y(p)$, то другую можно восстановить, подставляя известные функции в формулу дифференциала $dy = y'dx$ и интегрируя полученное соотношение.

Теперь вернемся к уравнению (6.1). Общая схема его решения такова:

1) Введем параметр, положив $y' = p$. Тогда уравнение (6.1) превратится в соотношение $F(x; y; p) = 0$, связывающее переменные x, y и p.

2) Дифференцируя равенство $F(x; y; p) = 0$, получим связь между дифференциалами этих переменных $F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_p dp = 0$.

3) Дополнив последнее равенство соотношением $dy = p\,dx$, получим систему из двух линейных уравнений относительно dx, dy и dp.

4) Выразим из этой системы dx (или dy) через dp и проинтегрируем полученное соотношение. Таким образом, мы найдем x (или y) как функцию параметра p.

5) Подставив $x(p)$ (или $y(p)$) в уравнение $F(x; y; p) = 0$, выразим через параметр p и вторую функцию из пары $(x; y)$. Таким образом, решение уравнения будет представлено в параметрическом виде.

На практике можно выделить простые случаи, когда уравнение (6.1) не содержит одной из переменных x или y.

Пример 2. Решить уравнение $y = (y')^2 + 2(y')^3$.

Вводя параметр стандартным образом $y' = p$, перепишем уравнение в виде $y = p^2 + 2p^3$. Дифференцируя это соотношение и дополняя его равенством $dy = p\,dx$, получаем систему

$$\begin{cases} dy = (2p + 6p^2)\,dp \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Поскольку зависимость y от параметра p уже задана, осталось определить зависимость x от p.

Из системы исключаем dy и получаем дифференциальное уравнение

$$p\,dx = (2p + 6p^2)\,dp.$$

Оно расщепляется на два более простых уравнения:

$$dx = (2 + 6p)\,dp \quad \text{или} \quad p = 0.$$

Интегрируя первое уравнение, получаем $x(p) = 2p + 3p^2 + C$.

Уравнение $p = 0$ не является дифференциальным, но подставляя значение $p = 0$ в формулу $y = p^2 + 2p^3$, мы получаем решение исходного уравнения $y \equiv 0$.

Обратите внимание: было бы ошибкой подставить значение $p = 0$ в соотношение $dy = p\,dx$ и получить целое семейство решений $y \equiv C$!

Итак, общее решение уравнения имеет вид $\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = p^2 + 2p^3. \end{cases}$
И есть еще решение $y \equiv 0$, не входящее в общее решение. $\square$

Пример 3. Решить уравнение $x = (y')^3 + y'$.

Вводя параметр стандартным образом $y' = p$, перепишем уравнение в виде $x = p^3 + p$. Дифференцируя это соотношение и дополняя его равенством $dy = p\,dx$, получаем систему

$$\begin{cases} dx = (3p^2 + 1)\,dp \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Поскольку зависимость x от параметра p уже задана, осталось определить зависимость y от p. Из системы исключаем dx и получаем дифференциальное уравнение

$$dy = p(3p^2 + 1)\,dp.$$

Интегрируя его, получаем $y(p) = \dfrac{3}{4}p^4 + \dfrac{1}{2}p^2 + C$.

Общее решение имеет вид $\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \dfrac{3}{4}p^4 + \dfrac{1}{2}p^2 + C. \end{cases}$ $\square$

Предыдущих примерах уравнение не содержало одну из переменных. Теперь перейдем к рассмотрению общего случая.

Пример 4. Решить уравнение $2xy' - y = y' \ln(yy')$.

Введем параметр $y' = p$, и перепишем уравнение в виде

$$2xp - y = p\ln(yp). \tag{6.3}$$

Дифференцируем (6.3) и получаем систему

$$\begin{cases} 2p\,dx + 2x\,dp - dy = \ln(yp)\,dp + \dfrac{y\,dp + p\,dy}{y} \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Заметим, что равенство (6.3) легко разрешить относительно x. Благодаря этому, из системы можно исключить x и dx:

$$2\,dy + \frac{p\ln(yp) + y}{p}\,dp - dy = \ln(yp)\,dp + dp + \frac{p}{y}\,dy.$$

$$dy(1 - \tfrac{p}{y}) = dp(1 - \tfrac{y}{p}).$$

Отсюда $y = p$ или $y\,dp + p\,dy = 0$, то есть $yp = C$. Осталось подставить полученные выражения $y(p)$ в (6.3) и выразить оттуда зависимость $x(p)$.

Однако в данном примере можно сразу выписать решение в явном виде $x = x(y)$, если равенства $y = p$ и $yp = C$ разрешить относительно p и подставить эти выражения в (6.3).

Итак, мы получили общее решение: $x = \dfrac{1}{2}\ln C + \dfrac{1}{2C}y^2$, $C > 0$, и еще одно решение, не входящее в общее семейство: $x = \dfrac{1}{2} + \ln|y|$.

Несмотря на довольно причудливое вхождение константы в формулу общего решения, можно заметить, что оно описывает семейство парабол,

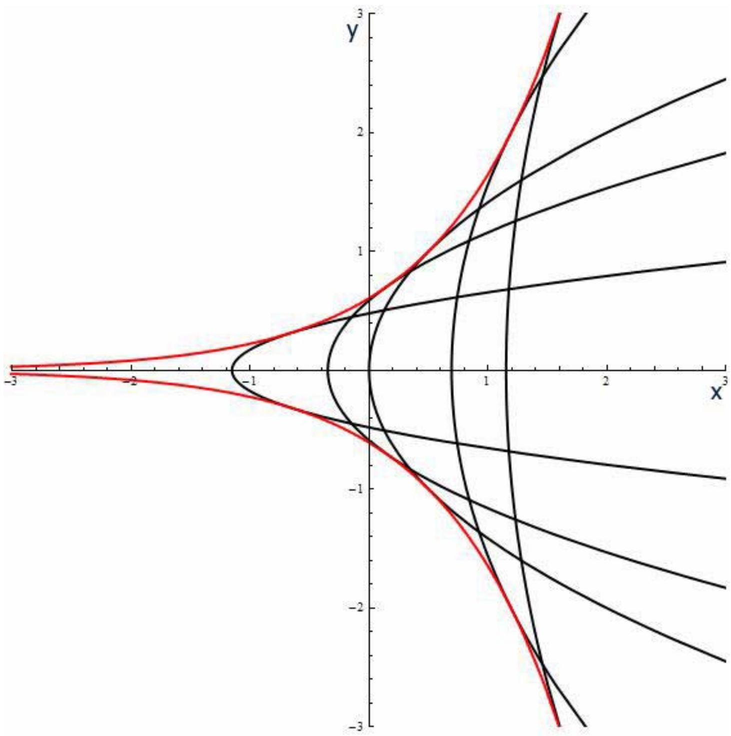


Рис. 6.1. Интегральные линии в примере 4.

осью симметрии которых является прямая $y = 0$ (рис. 6.1). Чем правее находится вершина параболы, тем более пологими являются ее ветви.

На рисунке видно также, что есть область, внутри которой через каждую точку проходит две интегральные линии, а вне этой области интегральных линий нет. Интересно, что границей этой области является интегральная линия $x = \dfrac{1}{2} + \ln|y|$, которая в каждой своей точке касается одной из парабол семейства решений. Другими словами, каждая ветвь линии $x = \dfrac{1}{2} + \ln|y|$ является особым решением. □

Мы не будем обсуждать вопрос о том, как с помощью аналитического инструментария выяснить, является ли некоторое решение, полученное при расщеплении уравнения, особым. А займемся другим, не менее интересным вопросом — как ввести параметр наиболее рациональным, удобным для дальнейших вычислений способом.

Пример 5. Введение параметра в уравнении $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$ стандартным способом нельзя назвать удачным.

Но если мы положим $y'+1 = p^2$, а $y'-y = p^3$, то уравнение обратится в тождество, а y и y' легко будет выразить через параметр:

$$\begin{cases} y = p^2 - p^3 - 1 \\ y' = p^2 - 1. \end{cases}$$

Останется только найти $x(p)$ по уже знакомой нам схеме.

$$\begin{cases} dy = (2p - 3p^2)\,dp \\ dy = (p^2 - 1)\,dx. \end{cases}$$

Отсюда $(p^2 - 1)\,dx = (2p - 3p^2)\,dp$.

Значения $p^2 = 1$ приводят к решениям $y \equiv 1$ и $y \equiv -1$.

Если же $p^2 \neq 1$, то $dx = \dfrac{2p - 3p^2}{p^2 - 1}\,dp$, откуда

$$x = -3p + 2,5\ln|p+1| - 0,5\ln|p-1| + C.$$

Таким образом, мы получили общее решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = -3p + 2,5\ln|p+1| - 0,5\ln|p-1| + C \\ y = p^2 - p^3 - 1. \end{cases} \qquad \square$$

Уравнения вида $F(x; y; \sqrt{1 + (y')^2}\,) = 0$ часто возникают в вариационном исчислении, поскольку дифференциал дуги кривой имеет вид $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$. В таких уравнениях параметр эффективно вводится следующим образом:

$$y' = \operatorname{tg} p, \quad p \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\cos p}.$$

Пример 6. Решить уравнение $y' = y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$.

Положим $y' = \operatorname{tg} p$, тогда уравнение примет вид $\operatorname{tg} p = y \cdot \dfrac{1}{\cos p}$, или $y = \sin p$. Находим $x = x(p)$:

$$\begin{cases} y = \sin p \\ y' = \operatorname{tg} p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dy = \cos p\, dp \\ dy = \operatorname{tg} p\, dx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos p\, dp = \operatorname{tg} p\, dx.$$

Отсюда $p = 0$, что приводит к решению $y \equiv 0$, или $dx = \dfrac{\cos^2 p}{\sin p}\, dp$. Последнее уравнение дает семейство решений

$$\begin{cases} x = \cos p + \ln|\operatorname{tg}\frac{p}{2}| + C \\ y = \sin p. \end{cases} \qquad \square$$

Приведем еще примеры эффективного введения параметра.

Дифф. уравнение	Параметризация	Цель
$(y')^2 + y^2 = 1$	$\begin{cases} y = \sin p \\ y' = \cos p \end{cases}$	найти $x = x(p)$
$x^2 - (y')^2 = 1$	$\begin{cases} x = \operatorname{ch} p \\ y' = \operatorname{sh} p \end{cases}$	найти $y = y(p)$

И в заключение рассмотрим одно изящное уравнение, называемое уравнением Клеро:

$$y = y'x + f(y').$$

Введем параметр стандартным образом: $y' = p$. Тогда $y = px + f(p)$ и

$$\begin{cases} dy = x\, dp + p\, dx + f'(p)\, dp \\ dy = p\, dx. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (f'(p) + x)\, dp = 0$$

Отсюда $p = C$ или $x = -f'(p)$. Из первого уравнения получаем общее решение $y = Cx + f(C)$, описывающее семейство прямых. Второе уравнение задает линию

$$\begin{cases} x = -f\,'(p) \\ y = -pf\,'(p) + f(p). \end{cases}$$

Можно показать, что если $f\,''(p)$ существует, непрерывна и не обращается в ноль, то эта кривая будет огибающей семейства прямых $y = Cx + f(C)$, и следовательно, особым решением. □

Самостоятельная работа

Во всех задачах требуется решить уравнение, вводя параметр.

1. $3\,(y\,')^4 = y\,' + y$.

2. $2y\,' = x + \ln y\,'$

3. $y\,' = e^{(\frac{xy'}{y})}$

4. $y\,' = x \cdot \sqrt{1 + (y\,')^2}$

5. $y = xy\,' - (y\,')^2$

Домашняя работа

№№ 251, 269, 281 (указание: $y\,' = py$), 285, 292, 293.

Ответы к самостоятельной работе

1. $\begin{cases} x = 4p^3 - \ln|p| + C \\ y = 3p^4 - p \end{cases}, \quad y = 0$

2. $\begin{cases} x = 2p - \ln p \\ y = p^2 - p + C \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = C\ln p \\ y = Cp \end{cases}, \quad y = e^x$ или $Cx = \ln Cy$.

4. $\begin{cases} x = \sin p \\ y = -\cos p + C \end{cases}$

5. $y = Cx - C^2\,, \quad y = \dfrac{x^2}{4}$

Занятие 7

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим уравнения второго порядка

$$F(x; y; y'; y'') = 0. \tag{7.1}$$

На этом занятии мы обсудим приемы, позволяющие понизить порядок уравнения, то есть свести решение уравнения (7.1) к решению уравнения первого порядка.

Если уравнение (7.1) не содержит искомую функцию $y(x)$, то есть имеет вид $F(x; y'; y'') = 0$, то, вводя новую функцию $u(x) = y'(x)$, мы придем к уравнению первого порядка $F(x; u; u') = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 y'' = (y')^2$.

Полагая $u(x) = y'(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $x^2 u' = u^2$. Оно имеет решение $u \equiv 0$, которое приводит к $y \equiv D$, и общее решение $u = \dfrac{x}{Cx+1}$.

Возвращаясь в последнем выражении к функции $y(x)$, получаем уравнение $y'(x) = \dfrac{x}{Cx+1}$.

Если $C = 0$, его решения — семейство $y = \dfrac{x^2}{2} + D$. Если же $C \neq 0$, его решения

$$y(x) = \frac{1}{C^2}\Big(Cx - \ln|Cx+1|\Big) + D. \quad \square$$

Как мы видим, общее решение уравнения содержит две произвольные константы, и это не случайно.

Вспомним, что задача Коши для уравнения второго порядка, разрешенного относительно высшей производной, ставится следующим образом: найти дважды дифференцируемую функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению $y'' = f(x; y; y')$ и начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

Теорема Пикара гарантирует существование и единственность решения этой задачи на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant h$ при условии непрерывности функции $f(x; y; y')$ и ограниченности ее производных $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0; y_1)$.

Это означает, что условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ должны однозначно определять значения двух констант в общем решении уравнения $y'' = f(x; y; y')$. Конечно, мы можем столкнуться с ситуацией, когда эти условия определяют решение, которое не описывается общей формулой.

Так, нетрудно убедиться, что для задачи Коши

$$\begin{cases} x^2 y'' = (y')^2 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

выполнены условия теоремы Пикара, поэтому других решений, кроме $y \equiv 1$, оно не имеет. Однако, это решение не входит в семейство, описываемое общей формулой.

Поэтому при решении задачи Коши не стоит увлекаться поиском общего решения. Более эффективно определять значения констант по мере их появления «на сцене».

Поставим другие начальные условия для того же уравнения:

$$\begin{cases} x^2 y'' = (y')^2 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Замена $u(x) = y'(x)$ приводит нас к задаче Коши $x^2 u' = u^2$, $u(1) = 1$. Ее решением является функция $u = x$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получим задачу Коши $y' = x$, $y(1) = 1$. Ее решением является функция $y = \dfrac{x^2 + 1}{2}$, также не входящая в общее решение.

Если уравнение (7.1) не содержит явно независимую переменную x, то есть имеет вид $F(y; y'; y'') = 0$, то следует сделать замену $u(y) = y'$. Чрезвычайно важно понимать, что аргументом функции u является y. Поэтому по правилу дифференцирования сложной функции $y''(x) = u'(y) \cdot y'(x) = u' \cdot u$, где $u'(y) = \dfrac{du}{dy}$.

Таким образом, замена $u(y) = y'$ приводит уравнение $F(y; y'; y'') = 0$ к уравнению первого порядка $F(y; u; u' \cdot u) = 0$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' = 2y \cdot y'$.

Замена $y' = u(y)$, $y'' = u' \cdot u$ приводит уравнение к виду $u' \cdot u = 2y \cdot u$. Тогда $u = 0$, что дает семейство решений $y = C$, или $u' = 2y$, что дает $u(y) = y^2 + C$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем уравнение $y'(x) = y^2 + C$.

Далее рассмотрим отдельно три случая.

Если $C = 0$, то есть $y'(x) = y^2$, то получим решение $y = 0$, которое входит в найденное ранее семейство $y = C$, и решение $y = -\dfrac{1}{x + C}$, которое следует считать частным, поскольку в ответ входит только одна константа.

Если $C = a^2 > 0$, то есть $y'(x) = y^2 + a^2$, то получим общий интеграл

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} = x + C.$$

Если $C = -a^2 < 0$, то есть $y'(x) = y^2 - a^2$, то получим общий интеграл

$$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{y - a}{y + a} \right| = x + C. \quad \square$$

Теперь для этого же уравнения решим задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = 2y \cdot y' \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Так как $y' = u(y)$, то в начальный момент (при $x = 0$) имеем $y = 1$

и $y'\big|_{y=1} = 2$, то есть $u(1) = 2$. Именно с таким начальным условием и следует решать задачу Коши для уравнения $u' \cdot u = 2y \cdot u$.

Так как $u \equiv 0$ не удовлетворяет условию Коши, то $u' = 2y$, откуда $u(y) = y^2 + C$. Из условия $u(1) = 2$ получаем $C = 1$. Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем задачу Коши

$$\begin{cases} y'(x) = y^2 + 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Общий интеграл уравнения $\operatorname{arctg} y = x + C$. Из начального условия $\operatorname{arctg} 1 = 0 + C$, то есть $C = \frac{\pi}{4}$.

Итак, решение поставленной задачи Коши дается формулой

$$\operatorname{arctg} y = x + \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда можно определить y как явную функцию от x, отметив, что $\left| x + \frac{\pi}{4} \right| < \frac{\pi}{2}$, то есть $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, где $x \in \left(\frac{-3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. $\square$

Рассмотрим ситуацию, когда уравнение (7.1) не содержит явно переменных x и y, то есть имеет вид $F(y'; y'') = 0$.

В данном случае порядок уравнения можно понизить двумя способами: положив $y' = p(x)$ или $y' = p(y)$. В первом случае мы придем к уравнению $F(p; \frac{dp}{dx}) = 0$, а во втором — к уравнению $F(p; p\frac{dp}{dy}) = 0$.

Какой из этих способов лучше? А может быть эффективно использовать оба? Тогда из первого уравнения мы определим x как функцию от p, а из второго — y как функцию от p, и получим ответ в параметрической форме. Рассмотрим пример.

Пример 3. Решить уравнение $y'' = e^{(y')^2}$.

Полагаем $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'(x)$ и $\frac{dp}{dx} = e^{p^2}$, или $e^{-p^2}dp = dx$.

Теперь положим $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'(y) \cdot p$ и $\frac{dp}{dy} \cdot p = e^{p^2}$, или

$e^{-p^2} p\,dp = dy.$

Итак, мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} dx = e^{-p^2} dp \\ dy = e^{-p^2} p\,dp. \end{cases}$$

Осталось только проинтегрировать их:

$$\begin{cases} x = \int\limits_0^p e^{-\tau^2} d\tau + C_1 \\ y = -0,5e^{-p^2} + C_2. \end{cases}$$

Мы получили общее решение (содержащее две произвольных константы) в параметрической форме. □

Рассмотренный прием можно назвать методом введения параметра для уравнения второго порядка $F(y'; y'') = 0$, приводящим к понижению порядка уравнения. Если для этого уравнения нужно решить задачу Коши с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, то, вводя параметр описанным способом, мы придем к решению двух задач Коши:

$$\begin{cases} F(p; \frac{dp}{dx}) = 0 \\ p(x_0) = y_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} F(p; p\frac{dp}{dy}) = 0 \\ p(y_0) = y_1. \end{cases}$$

Как мы видели ранее, вовсе не обязательно вводить параметр стандартным способом. Продемонстрируем эффективность «нестандартного» введения параметра на следующем примере.

Пример 4. Решить уравнение $(y'')^2 = (y')^2 + 1$.

Положим $y'' = \operatorname{ch} p$, $y' = \operatorname{sh} p$. Тогда уравнение обратится в тождество: $\operatorname{ch}^2 p = \operatorname{sh}^2 p + 1$.

Наша цель — восстановить x и y как функции от p.

С одной стороны, $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, и из первого уравнения получаем

$\dfrac{dy'}{dx} = \operatorname{ch} p$, или $dy' = \operatorname{ch} p\, dx$. С другой стороны, из второго уравнения $dy' = \operatorname{ch} p\, dp$.

Следовательно, $\operatorname{ch} p\ dx = \operatorname{ch} p\ dp$, или $dx = dp$ (так как функция $\operatorname{ch} p$ не обращается в ноль). Таким образом, $x = p + C_1$.

Вспомним, что $y' = \operatorname{sh} p$, то есть $dy = \operatorname{sh} p\, dx$. Учитывая, что $dx = dp$, получим $dy = \operatorname{sh} p\, dp$ и $y = \operatorname{ch} p + C_2$.

Итак, общее решение в параметрическом виде $\begin{cases} x = p + C_1 \\ y = \operatorname{ch} p + C_2. \end{cases}$

Отсюда легко получить и явную зависимость y от x:

$$y = \operatorname{ch}(x - C_1) + C_2. \quad \Box$$

Заметим, что понижая порядок уравнения стандартными методами, мы обрекли бы себя на довольно громоздкие вычисления.

Обычно мы вводим параметр, если уравнение не разрешено относительно высшей производной. Если к тому же уравнение допускает понижение порядка, можно совместить эти два приема.

Пример 5. Решить уравнение $(y'')^3 + xy'' = 2y'$.

Полагаем $y'' = p$, тогда из уравнения $2y' = p^3 + xp$, и

$$2\, dy' = 3p^2 dp + xdp + pdx.$$

С другой стороны, $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то есть $dy' = p\, dx$. Исключая dy', придем к уравнению

$$3p^2 dp = p\, dx - xdp.$$

Если $p = 0$, то $y' = 0$, следовательно $y = C$.

Иначе, поделив уравнение на p^2, придем к $3\, dp = \dfrac{p\, dx - xdp}{p^2}$ или $3\, dp = d\left(\dfrac{x}{p}\right)$. Отсюда $\dfrac{x}{p} = 3p + C_1$, то есть $x = 3p^2 + C_1 p$.

Тогда $2y' = p^3 + xp = 4p^3 + C_1p^2$ и мы легко можем восстановить функцию $y(p)$:

$$2\,dy = (4p^3{+}C_1p^2)dx = (4p^3{+}C_1p^2)(6p{+}C_1)dp = (24p^4{+}10C_1p^3{+}C_1^2p^2)dp.$$

Итак, $\begin{cases} x = 3p^2 + C_1p \\ y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5}{4}C_1p^4 + \dfrac{1}{6}C_1^2p^3 + C_2. \end{cases}$ □

Пример 6. Решить задачу Коши $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}(y'')^3 + 4y'' \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

Функция $y = \dfrac{2}{3}p^3 + 4p$ монотонна, и следовательно, однозначно обратима. Таким образом, уравнение $y = \dfrac{2}{3}(y'')^3{+}4y''$ можно однозначно разрешить относительно y'', причем для полученного уравнения $y'' = F(y)$ выполнены все условия теоремы Пикара, и поставленная задача Коши имеет единственное решение.

Положим $y'' = p$, тогда из уравнения $y = \dfrac{2}{3}p^3 + 4p$. Поставим перед собой цель определить $y' = f(p)$. Тогда

$$y'' = f'(p) \cdot \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(p) \cdot \frac{dp}{dy} \cdot f(p) = p.$$

Исключая отсюда $\dfrac{dy}{dp}$ с помощью соотношения $y = \dfrac{2}{3}p^3 + 4p$, мы получим для функции $f(p)$ уравнение первого порядка:

$$f'(p) \cdot f(p) = p \cdot \frac{dy}{dp} = p \cdot (2p^2 + 4).$$

Отсюда $f^2(p) = p^4 + 2p^2 + C$, или $(y')^2(p) = p^4 + 2p^2 + C$. Фактически, мы понизили порядок уравнения, сведя его к уравнению первого порядка.

Напомним, что мы ищем решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Из монотонности функции $y = \dfrac{2}{3}p^3{+}4p$ следует, что $y = 0$, если и только если $p = 0$. Поэтому $y'\big|_{p=0} = 1$, следовательно, $C = 1$ и $y'(p) = \sqrt{p^4 + 2p^2 + 1} = p^2 + 1$

Итак, $\begin{cases} y'(p) = p^2 + 1 \\ y = \frac{2}{3}p^3 + 4p. \end{cases}$

Нам осталось найти $x(p)$, что мы уже неоднократно делали.

$$\begin{cases} dy = (p^2+1)dx \\ dy = (2p^2+4)dp \end{cases} \Rightarrow dx = \frac{2p^2+4}{p^2+1}dp \Rightarrow x = 2p + 2\operatorname{arctg} p + C.$$

Так как $x\big|_{p=0} = 0$, то $C = 0$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2p + 2\operatorname{arctg} p \\ y = \frac{2}{3}p^3 + 4p. \end{cases}$ □

Если в уравнении (7.1) функция $F(x; y; y'; y'')$ является однородной порядка 0 относительно переменных y, y' и y'', то есть

$$F(x;\ ky;\ ky';\ ky'') = F(x;\ y;\ y';\ y''),$$

то порядок уравнения можно понизить, сделав замену $\dfrac{y'}{y} = u(x)$.

Тогда $y' = y \cdot u, \quad y'' = y \cdot u' + y' \cdot u = y \cdot u' + y \cdot u^2$.

Пример 7. Решить уравнение $y'' \cdot y = (y')^2 \cdot x$.

Положив $y' = y \cdot u$, придем к уравнению $y^2(u' + u^2) = y^2u^2x$. Отсюда

$$y = 0 \text{ или } u' + u^2 = u^2x.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными: $u' = u^2(x-1)$.

$$u = 0 \text{ или } \frac{du}{u^2} = (x-1)dx.$$

Если $u = 0$, то $y' = 0$ и $y = C$.

Если $\dfrac{du}{u^2} = (x-1)dx$, то $u = \dfrac{2}{-x^2+2x+C}$, и для функции $y(x)$ мы получаем уравнение первого порядка:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{-x^2+2x+C},$$

которое легко интегрируется, если известно значение C.

Так, если для исходного уравнения была поставлена задача Коши $y(1)=1$, $y'(1)=2$, то

$$\left.\frac{y'}{y}\right|_{x=1} = 2 = \frac{2}{1+C} \quad \Rightarrow \quad C=0.$$

Тогда

$$\frac{y'}{y} = \frac{-2}{x(x-2)} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C.$$

$$y = \frac{x}{x-2}\cdot C$$

Из начальных условий $C=-1$.

Итак, решение поставленной задачи Коши $y = \dfrac{x}{2-x}$. $\square$

Самостоятельная работа

Во всех задачах требуется решить уравнение, понижая его порядок.

1. $y''(1+x)+y'=0$.

2. $(y')^2+2y\cdot y''=0$

3. $y''\ln y'=1$

4. Решить задачу Коши $\begin{cases} (y')^2=(3y-2y')\cdot y'' \\ y(0)=1, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

5. $xy\cdot y''-x(y')^2=y\cdot y'$

Домашняя работа

№№ 429, 434, 441, 467, 505.

Ответы к самостоятельной работе

1. $y = C_1 \ln|1 + x| + C_2$
2. $y = C\,, \quad y^3 = C_1(x + C_2)^2$
3. $\begin{cases} x = p\ln p - p + C_1 \\ y = \dfrac{p^2}{2}\ln p - \dfrac{p^2}{4} + C_2 \end{cases}$
4. $y = e^x$
5. $\ln|y| = C_1x^2 + C_2$ или $y = C_2e^{C_1x^2}$

Занятие 8

Уравнения высокого порядка (n>2), допускающие понижение порядка

Рассмотрим уравнение n-ого порядка ($n > 2$)

$$F(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n)}) = 0. \tag{8.1}$$

Заметим сразу, что общее решение этого уравнения содержит n произвольных констант, подбирая которые, можно решить любую корректно поставленную задачу Коши.

Посмотрим сначала, как работают приемы понижения порядка, изученные нами на предыдущем занятии.

Если уравнение имеет вид $F(x;\, y^{(k)};\, ...;\, y^{(n)}) = 0$, $k \geqslant 1$, то есть не содержит функцию $y(x)$ и ее производных до порядка $k-1$ включительно, тогда замена $z = y^{(k)}$ приведет его к уравнению порядка $n - k$.

Пример 1. Решить уравнение $xy''' = (1-x)y''$.

Положим $z = y''$, тогда $xz' = (1-x)z$ и $z = C_1xe^{-x}$. Возвращаясь к функции y и последовательно интегрируя, получаем

$$y'' = C_1xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2x + C_3. \quad \square$$

Если уравнение имеет вид $F(y;\, y';\, ...;\, y^{(n)}) = 0$, то есть не содержит переменную x, тогда, как мы помним, следует сделать замену $y' = u(y)$. При этом

$$y''(x) = u'(y) \cdot y'(x) = u' \cdot u,$$

$$y'''(x) = u''(y) \cdot y'(x) \cdot u + u' \cdot u'(y) \cdot y'(x) = u'' \cdot u^2 + (u')^2 \cdot u$$

и так далее.

Пример 2. Решить уравнение $y''' = \dfrac{y' \cdot y''}{y}$.

Замена $y' = u(y)$ приводит к уравнению

$$u'' \cdot u^2 + (u')^2 \cdot u = \frac{u^2 \cdot u'}{y} \ .$$

Отсюда $u = 0$, что дает $y = C \neq 0$, или

$$u'' \cdot u + (u')^2 = \frac{u \cdot u'}{y} \ .$$

Это однородное уравнение, порядок которого можно понизить, положив $\dfrac{u'}{u} = v$. Тогда $u' = u \cdot v$, $u'' = u \cdot v^2 + u \cdot v'$ и

$$u^2(v^2 + v') + u^2 v^2 = \frac{u^2 v}{y}.$$

После деления на u^2 получаем уравнение Бернулли

$$2v^2 + v' = \frac{v}{y}.$$

Оно имеет решение $v = 0$. Если же $v \neq 0$, то, положив $z = 1/v$, придем к уравнению $z' = 2 - \dfrac{z}{y}$.

Подобрав его частное решение $z = y$, легко построить общее решение $z = \dfrac{C}{y} + y$, откуда $v = \dfrac{y}{C + y^2}$. Возвращаясь к функции u, получаем уравнение $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{y}{C + y^2}$, которое легко интегрируется: $u = C_2\sqrt{y^2 + C_1}$, где $C_2 \neq 0$.

Таким образом, $y' = C_2\sqrt{y^2 + C_1}$. Интегрируем это уравнение с разделяющимися переменными и в зависимости от значения C_1, получаем ответ:
если $C_1 \neq 0$, то $\ln|y + \sqrt{y^2 + C_1}| = C_2 x + C_3$, иначе $\ln|y| = C_2 x + C_3$. $\square$

Пример 3. Решить уравнение $y^2 \cdot y' \cdot y''' + (y \cdot y'')^2 = 2(y')^4$.

С одной стороны, это уравнение однородное, и его порядок можно понизить заменой $y' = u(x) \cdot y$. С другой стороны, оно не содержит явно переменную x, и в таком случае рекомендуется замена $y' = p(y)$.

Сразу трудно сказать, какой путь быстрее приведет к цели. Начнем с того, что проще. Сделаем замену $y' = u(x) \cdot y$. Тогда

$$y'' = u'y + u \cdot y' = u'y + u^2 y,$$

$$y''' = u''y + u' \cdot y' + 2u \cdot u'y + u^2 y' = u''y + 3u'uy + u^3 y,$$

и мы приходим к уравнению

$$u \cdot u'' + 5u'u^2 + (u')^2 = 0.$$

Теперь делаем замену $u' = v(u)$, тогда $u'' = v'(u) \cdot v$ и

$$u \cdot v' \cdot v + 5v \cdot u^2 + v^2 = 0,$$

$$v \cdot (u \cdot v' + 5 \cdot u^2 + v) = 0.$$

Отсюда $v = 0 \Rightarrow u = C \Rightarrow y' = C_1 y$ и $y = C_2 e^{C_1 x}$, или

$$uv' + 5u^2 + v = 0,$$

$$udv + 5u^2 du + vdu = 0,$$

$$d(uv) + \frac{5}{3} d(u^3) = 0,$$

$$uv + \frac{5}{3} u^3 = C_1.$$

Подставляя $v = u'$, получаем уравнение $uu' + \frac{5}{3} u^3 = C_1$, которое является уравнением с разделяющимися переменными:

$$dx = \frac{udu}{C_1 - \frac{5}{3} u^3}.$$

Из $y' = u \cdot y$ следует, что

$$\frac{dy}{y} = udx = \frac{u^2 du}{C_1 - \frac{5}{3} u^3}.$$

Интегрируя два последних уравнения, мы получим решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \int\limits_{u_0}^{u} \dfrac{\tau d\tau}{C_1 - \frac{5}{3}\tau^3} + C_2 \\ \ln|y| = \int\limits_{u_0}^{u} \dfrac{\tau^2 d\tau}{C_1 - \frac{5}{3}\tau^3} + C_3. \end{cases}$$

Проинтегрировать рациональные функции можно, но мы не будем этого делать. Если бы мы решали задачу Коши и на этапе нахождения функции $v(u)$ определили константу C_1, то дальнейшие вычисления были бы намного проще.

Так, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -\dfrac{2}{3}$, то, подставляя эти значения в $y' = u(x) \cdot y$ и $y'' = u'(x) \cdot y + u(x) \cdot y'$, мы получим, что $u(0) = 1$, $u'(0) = -\dfrac{5}{3}$.

Отсюда $v(1) = -\dfrac{5}{3}$, и из $uv + \dfrac{5}{3}u^3 = C_1$ получаем, что $C_1 = 0$.

Тогда решение находится особенно просто:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{-3du}{5u^2} \\ \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{-3du}{5u}. \end{cases}$$

Учитывая, что значению параметра $u = 1$ соответствуют значения $x = 0$ и $y = 1$, интегрируем эти уравнения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3(1-u)}{5u} \\ y = u^{-3/5}. \end{cases}$$

Выражая y через x, получаем ответ в явном виде: $y = (\dfrac{5}{3}x + 1)^{0,6}$. $\square$

Описанные приемы решения уравнений n-ного порядка достаточно громоздки. Это связано с тем, что рассматриваемые уравнения были нелинейными. В случае линейных уравнений работает совсем другая техника, которую мы обсудим позднее.

А сейчас мы рассмотрим один весьма изящный прием решения уравнений высокого порядка, очень похожий на метод интегрируемых комбинаций (см. занятие 4).

Порядок уравнения понижается, если удается представить левую часть уравнения в виде полной производной, то есть

$$F(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n)}) = \big(G(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n-1)})\big)' = 0.$$

Тогда мы получаем уравнение порядка $(n-1)$

$$G(x;\, y;\, y';\, ...;\, y^{(n-1)}) = C.$$

Приведем несколько типичных комбинаций:

$$(xy')' = y' + xy'' \qquad (y \cdot y')' = (y')^2 + y \cdot y''$$

$$\left(\frac{y'}{x}\right)' = \frac{xy'' - y'}{x^2} \qquad (y \cdot y'')' = y'' \cdot y' + y \cdot y'''$$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y \cdot y'' - (y')^2}{y^2} \qquad (f(y'))' = f'(y') \cdot y''$$

$$((y')^n)' = n(y')^{(n-1)} \cdot y''$$

$$\left(\frac{y}{y'}\right)' = \frac{(y')^2 - y \cdot y''}{(y')^2} \qquad (\ln y')' = y''/y'$$

Пример 4. Решить уравнение $y \cdot y''' + 3y' \cdot y'' = 0$.

Нетрудно убедиться, что левая часть уравнения является полной производной от $(y \cdot y'' + (y')^2)$, поэтому можно понизить порядок уравнения:

$$y \cdot y'' + (y')^2 = C_1.$$

Далее, $y \cdot y'' + (y')^2 = (y \cdot y')'$, поэтому из $(y \cdot y')' = C_1$ следует, что $y \cdot y' = C_1 x + C_2$. Заметив, что $2y \cdot y' = (y^2)'$, проинтегрируем уравнение еще раз и получим ответ:

$$y^2 = C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3. \quad \square$$

Пример 5. Решить уравнение $y' \cdot y''' = 2(y'')^2$.

Уравнение имеет решение $y'' = 0$, откуда $y = C_1 x + C_2$. Если же $y'' \neq 0$, то преобразуем уравнение к виду $y' \cdot y''' - (y'')^2 = (y'')^2$ и поделим на $(y'')^2$:

$$\frac{y' \cdot y''' - (y'')^2}{(y'')^2} = 1.$$

Заметим, что левая часть уравнения является полной производной:

$$\Big(-\frac{y'}{y''}\Big)' = 1.$$

Отсюда $-\dfrac{y'}{y''} = x + C_1$ или $\dfrac{y''}{y'} = -\dfrac{1}{x + C_1}$.

Поскольку $\dfrac{y''}{y'} = (\ln y')'$, то $\ln y' = -\ln|x + C_1| + C_2$, или $y' = \dfrac{C_2}{x + C_1}$. Наконец, получаем решение $y = C_2 \ln|x + C_1| + C_3$. $\square$

В заключение рассмотрим случай, когда уравнение (8.1) имеет следующий специфический вид:

$$F(y;\, xy';\, x^2 y'';\, ...;\, x^n y^{(n)}) = 0.$$

Такие уравнения называют уравнениями Эйлера. Понятно, что $x = 0$ всегда является особой точкой такого уравнения.

Положим $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$, то есть $t = \ln|x|$. Производную по переменной t будем обозначать точкой.

Тогда $y' = \dot{y} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dot{y} \cdot \dfrac{1}{x}$, то есть $xy' = \dot{y}$.

Дифференцируя это равенство по x, получаем $y' + xy'' = \ddot{y} \cdot \dfrac{1}{x}$, откуда $xy' + x^2 y'' = \ddot{y}$, или $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$.

Дифференцируя последнее равенство по x, получаем $2xy'' + x^2 y''' = (\ddot{y} - \dot{y}) \cdot \dfrac{1}{x}$, откуда $x^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}$, и так далее.

Таким образом, после замены переменной x на $t = \ln|x|$ мы придем к уравнению $G(y;\, \dot{y};\, \ddot{y};\, ...;\, y^n) = 0$, где дифференцирование происходит по t, но сама переменная t явно в уравнение не входит. Как мы знаем, в этом случае замена $\dot{y} = u(y)$ понижает порядок этого уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $x^2(2y \cdot y'' - (y')^2) = 1 - 2xy \cdot y'$.

Вводим новую переменную $t = \ln|x|$, и, пересчитав производные, приходим к уравнению $2y \cdot \ddot{y} - (\dot{y})^2 = 1$.

Вводим новую функцию, положив $u(y) = \dot{y}$. Тогда $\ddot{y} = u' \cdot u$ и

$$2yu \cdot u' - u^2 = 1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными легко интегрируется: $y = 0$ или $\frac{2udu}{1+u^2} = \frac{dy}{y}$, откуда $y = C_1(1+u^2)$.

Вспомнив, что $\dot{y} = u(y)$, получаем систему

$$\begin{cases} y = C_1(1+u^2) \\ \dot{y} = u, \end{cases}$$

где u можно считать параметром. Остается найти зависимость $t(u)$, как мы уже неоднократно делали.

$$\begin{cases} dy = 2C_1udu \\ dy = udt \end{cases} \quad \Rightarrow 2C_1udu = udt$$

Отсюда $u = 0$, что приводит к $y = C$, или $t = 2C_1u + C_2$, и, возвращаясь к переменной x, получаем ответ в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = C_2e^{2C_1u} \\ y = C_1(1+u^2) \end{cases}$$

При желании можно получить ответ в явном виде, исключив параметр u, но мы не будем этого делать. □

Самостоятельная работа

Решить уравнения, понижая порядок.

1. $y^{(5)} = y^{(4)} + x$.

2. $y'' - x \cdot y''' + (y''')^3 = 0$.

3. $y''' \cdot (y')^2 = (y'')^3$.

4. Решить задачу Коши $\begin{cases} y' \cdot y''' = (y'')^2 + (y')^2 \cdot y'' \\ y(1) = 0,\ y'(1) = -1,\ y''(1) = 1. \end{cases}$
(Указание: представьте уравнение в виде полной производной)

5. Найти *семейство* интегральных линий уравнения $y\,y'y''' - 2(y')^2 y'' = y(y'')^2$, проходящих через точку (x_0, y_0).

Домашняя работа

№№ 438, 458, 468, 482, 504.

Ответы к самостоятельной работе

1. $y = C_1 e^x - \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^4}{24} + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$
2. $y = \dfrac{C_1}{6} x^3 + C_1^3 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ и частное решение получаемое из
$\begin{cases} x = -3p^2 \\ y'' = -2p^3 \end{cases}$ $\qquad\begin{cases} x = -3p^2 \\ y = -\dfrac{72}{35} p^7 - 3C_1 p^2 + C_2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \ln|p| + 2C_1 p + C_2 \\ y = p + C_1 p^2 + C_3 \end{cases}, \quad y = C_1 x + C_2$
общее решение, получаемое из $y'' = C_1 x + C_1^3$
4. Указание: $\left(\dfrac{y''}{y'}\right)' = (y')'$
$y = -\ln x$
5. $y' = C_1 y^3 + C_2\,, \quad \displaystyle\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{C_1 \tau^3 + C_2} = x - x_0\,, \quad y = y_0$