МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Линейные уравнения и системы.

учебно-методическое пособие

Новосибирск

2012

Настоящее пособие является второй частью цикла пособий, отражающих многолетний опыт проведения авторами практических занятий по курсу «Методы математической физики» на втором курсе отделения физической информатики физического факультета НГУ.

Разнообразные примеры и комментарии к ним знакомят студентов с идеями, лежащими в основе различных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и помогают осваивать алгоритмы решения типовых задач.

Каждый параграф пособия является методической разработкой двухчасового занятия. В конце занятия предлагаются вопросы для самостоятельной работы и список задач для дальнейшего закрепления полученных практических навыков. Нумерация занятий единая для всего цикла пособий.

Целевая аудитория: студенты 2-го курса отделения физической информатики физического факультета и отделения геофизики и геомеханики геолого-геофизического факультета НГУ.

Авторы

Михайлова Т. Ю., Доманова Е. Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации

Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

Занятие 9

Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения Эйлера.

Рассмотрим сначала однородное линейное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{9.1}$$

Как мы уже отмечали ранее, множество решений однородного линейного уравнения не пусто (однородное уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0$) и образует линейное многообразие (то есть линейная комбинация решений уравнения (9.1) также является решением этого уравнения).

Известно, что уравнение (9.1) имеет n линейно независимых решений

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad ... \quad , \quad y_n(x), \tag{9.2}$$

и любое решение уравнения (9.1) может быть представлено в виде линейной комбинации этих решений:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k(x). \tag{9.3}$$

Другими словами, решения однородного линейного уравнения n-ого порядка образуют линейное векторное пространство, размерность которого равна порядку уравнения. Любая система функций (9.2), образующая базис этого пространства, называется *фундаментальной системой решений* (ФСР). Формула (9.3) дает общее решение уравнения (9.1).

Наша ближайшая цель — научиться находить ФСР уравнения (9.1).

Как мы помним, однородное линейное уравнение первого порядка

$y' = k\,y$ имеет решение $y = e^{kx}$. Попробуем найти частное решение уравнения (9.1) вида $y = e^{\lambda x}$. Подставляя эту функцию в уравнение (9.1), и деля его на $e^{\lambda x} \neq 0$, мы увидим, что значение λ должно быть корнем алгебраического уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (9.4)$$

Многочлен $L[\lambda] = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$ называется *характеристическим многочленом*, а уравнение (9.4) — *характеристическим уравнением* для уравнения (9.1).

В комплексной плоскости уравнение (9.4) имеет n корней (с учетом их кратности). Зная эти корни, можно построить ФСР уравнения (9.1). Таким образом, задача решения дифференциального уравнения (9.1) сводится к алгебраической задаче решения уравнения (9.4). Напомним, как это делается.

Пусть уравнение (9.4) имеет k различных вещественных корней λ_1, λ_2, ... , λ_k. Это дает нам k частных решений уравнения (9.1): $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, ... , $e^{\lambda_k x}$. Эти решения линейно независимы, следовательно, если $k = n$, то ФСР построена.

Пусть уравнение (9.4) имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + i\,\beta$. Поскольку коэффициенты уравнения (9.4) вещественны, то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ также является корнем этого уравнения. Эта пара корней дает нам два вещественных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если вещественный корень λ_0 имеет кратность $m > 1$, то ему соответствует серия из m линейно независимых решений $e^{\lambda_0 x}$, $x \cdot e^{\lambda_0 x}$, ... , $x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$.

Наконец, пара комплексно сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\,\beta$ кратности $m > 1$ дает серию из $2m$ линейно независимых решений

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta x,\;\; x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x,\; ... ,\;\; x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\;\; x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x,\; ... ,\;\; x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{gathered}$$

ФСР, построенную по изложенным выше правилам, мы будем называть классической. Рассмотрим примеры:

Дифф. уравнение	Характеристич. уравнение и его корни	Общее решение
$y'' + y' - 2y = 0$	$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$	$C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$
$y'' - 2y' = 0$	$\lambda^2 - 2\lambda = 0$; $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$	$C_1 e^{2x} + C_2$
$y''' + 2y'' - 3y' = 0$	$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,$ $\lambda_3 = -3$	$C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-3x}$
$y'' - 4y' + 5y = 0$	$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$; $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$	$C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$
$y'' + 4y = 0$	$\lambda^2 + 4 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 2i$	$C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
$y^{IV} - y = 0$	$\lambda^4 - 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 1,\ \lambda_{3,4} = \pm i$	$C_1 e^x + C_2 e^{-x} +$ $+ C_3 \cos x + C_4 \sin x$
$y^{VI} + 64y = 0$	$\lambda^6 + 64 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 2i,$ $\lambda_{3,4} = \sqrt{3} \pm i,$ $\lambda_{3,4} = -\sqrt{3} \pm i$	$C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x +$ $C_3 e^{\sqrt{3}x} \cos x + C_4 e^{\sqrt{3}x} \sin x +$ $C_5 e^{-\sqrt{3}x} \cos x + C_6 e^{-\sqrt{3}x} \sin x$
$y^{IV} + 2y'' + y = 0$	$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm i,$ $\lambda_{3,4} = \pm i$	$C_1 \cos x + C_2 \sin x +$ $+ C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$
$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$	$(\lambda - 1)^3 = 0$; $\lambda_{1,2,3} = 1$	$C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$

Кроме классической ФСР в некоторых случаях удобнее использовать другие ФСР. К описанию одной из них мы сейчас и перейдем.

Допустим, что мы нашли все корни характеристического уравнения и каким-нибудь образом занумеровали их: λ_1, λ_2, ... , λ_n. Если корень кратный, то он выписан в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Таким образом, количество чисел в последовательности равно порядку уравнения.

Построим набор функций $\psi_k(x)$. Функцию $\psi_1(x)$ определим как решение задачи Коши $\psi\,'_1 = \lambda_1\psi_1$, $\psi_1(0) = 1$, то есть $\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$.

Функцию $\psi_2(x)$ определим как решение задачи Коши $\psi\,'_2 = \lambda_2\psi_2+\psi_1$, $\psi_2(0) = 0$. Поскольку $\psi_2(x)$ является решением неоднородного уравнения, найдем ее методом вариации постоянной: $\psi_2(x) = C(x)\cdot e^{\lambda_2 x}$, где $C\,'(x) = e^{-\lambda_2 x}\psi_1(x)$ и $C(0) = 0$. Таким образом, $C(x) = \int\limits_0^x e^{-\lambda_2\tau}\psi_1(\tau)d\tau$ и

$$\psi_2(x) = \int\limits_0^x e^{\lambda_2(x-\tau)}\psi_1(\tau)d\tau.$$

Заметим, что $\psi\,'_2(0) = 1$.

Если функция $\psi_k(x)$ уже построена, то функцию $\psi_{k+1}(x)$ определим как решение задачи Коши $\psi\,'_{k+1} = \lambda_{k+1}\psi_{k+1} + \psi_k$, $\psi_{k+1}(0) = 0$. Функция $\psi_{k+1}(x)$ может быть задана интегралом

$$\psi_{k+1}(x) = \int\limits_0^x e^{\lambda_{k+1}(x-\tau)}\psi_k(\tau)d\tau.$$

Заметим, что $\psi_{k+1}(0) = 0$, $\psi\,'_{k+1}(0) = 0$, ... , $\psi^k_{k+1}(0) = 1$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k$, то есть корень имеет кратность k, то

$$\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ \psi_2(x) = xe^{\lambda_1 x},\ \psi_3(x) = \frac{x^2}{2}e^{\lambda_1 x},\ \dots,\ \psi_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_1 x}.$$

Как видим, в случае кратного корня новые базисные решения отличаются от классических только числовыми множителями.

Приведем формулы для $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.

$$\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad \psi_2(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$\psi_3(x) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}.$$

Из этих формул видно, что функция $\psi_3(x)$ зависит от параметров λ_1, λ_2, λ_3 симметрично, то есть совершенно не важно, в какой последовательности мы нумеровали корни.

ФСР, состоящую из функций $\psi_k(x)$, $k = 1, ..., n$, будем называть специальной.

Какие преимущества имеет специальная ФСР? Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = -\varepsilon$, $\lambda_{3,4} = 0$. Тогда классическая ФСР состоит из функций $e^{\varepsilon x}$, $e^{-\varepsilon x}$, 1 и x, а специальная — из функций

$$\psi_1(x) = e^{\varepsilon x}, \qquad \psi_2(x) = \frac{e^{\varepsilon x} - e^{-\varepsilon x}}{2\varepsilon} = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon x}{\varepsilon},$$

$$\psi_3(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh} \varepsilon \tau}{\varepsilon} d\tau = \frac{\operatorname{ch} \varepsilon x - 1}{\varepsilon^2},$$

$$\psi_4(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{ch} \varepsilon \tau - 1}{\varepsilon^2} d\tau = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon x - \varepsilon x}{\varepsilon^3}.$$

На первый взгляд кажется, что классическая ФСР существенно проще, и следовательно, имеет преимущество перед специальной ФСР. Однако, если $\varepsilon \to 0$, то классическая ФСР вырождается — перестает быть базисом в пространстве решений. А специальная ФСР легко справляется с этой проблемой и превращается в ФСР для уравнения с кратным корнем $\lambda = 0$ кратности 4:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_1(x) = 1, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_2(x) = x, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_3(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \psi_4(x) = \frac{x^3}{3!}.$$

Этот пример иллюстрирует важное свойство, которым обладает специальная ФСР: если коэффициенты характеристического многочлена зависят от параметра, то специальная ФСР остается таковой при непрерывном изменении этого параметра. □

Рассмотрим однородное линейное уравнение Эйлера n-ого порядка

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \tag{9.5}$$

Как мы знаем, в области $x > 0$ замена $x = e^t$ приводит его к уравнению, в которое независимая переменная t не входит в явном виде. В нашем случае это будет линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Оно, как известно, имеет частные решения вида $y = e^{\lambda t}$. Поэтому частные решения уравнения (9.5) сразу следует искать в виде $y = x^\lambda$ $(x > 0)$. Подставляя функцию $y = x^\lambda$ в уравнение (9.5), мы увидим, что параметр λ должен быть корнем алгебраического уравнения

$$\lambda(\lambda-1)...(\lambda-(n-1)) + ... + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{9.6}$$

После приведения подобных слагаемых оно примет вид

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + ... + b_{n-1}\lambda + b_n = 0. \tag{9.7}$$

Таким образом, замена $x = e^t$ приводит уравнение Эйлера (9.5) к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами, для которого (9.7) является характеристическим уравнением.

Зная корни уравнения (9.7), можно построить ФСР соответствующего дифференциального уравнения, и затем обратной заменой $t = \ln x$ получить из нее ФСР исходного уравнения Эйлера.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

Ищем частные решения вида x^λ. Тогда λ должно удовлетворять уравнению $\lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6 = 0$, или $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$, следовательно, ФСР состоит из функций x^2 и x^3. Общее решение уравнения Эйлера $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$. Заметим, что эта формула работает и при $x < 0$. □

Пример 3. Решить уравнение $x^3y''' + xy' - y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda-1 = 0$ раскладывается на множители $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = 0$ и сворачивается в $(\lambda-1)^3 = 0$.

ФСР соответствующего ему дифференциального уравнения состоит из функций $y_1 = e^t$, $y_2 = te^t$ и $y_3 = t^2e^t$. Выполнив обратную замену $t = \ln x$, получаем общее решение уравнения Эйлера $y = C_1x+C_2x\ln x+C_3x(\ln x)^2$, $(x > 0)$.

При $x < 0$ достаточно заменить под знаком логарифма x на $-x$. $\square$

Пример 4. Решить уравнение $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0$ преобразуется в $\lambda^2 + 1 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Соответственно, ФСР имеет вид $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$.

Выполнив обратную замену $t = \ln x$, получаем общее решение уравнения Эйлера $y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)$, $(x > 0)$. $\square$

Самостоятельная работа

Найти общее решение уравнения.

1. $y^V + 8y''' + 16y' = 0$.

2. $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

3. $y''' - 5y'' + 12y' - 8y = 0$.
Указание: $\lambda = 1$ — корень характеристического уравнения.

4. $y^{IV} + 16y = 0$.

5. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + y' + y = 0$.

6. $x^2y''' - 2y' = 0$.

7. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$.

Домашняя работа

В домашнюю работу входят задачи из (*)

№№ 520, 525, 528, 532, 590, 600.

(*) Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие для вузов. — 6-е изд., стер. — М.: Наука. 1985. — 128 стр.

Занятие 10

Неоднородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Специальная правая часть.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{10.1}$$

Как мы уже отмечали, разность двух решений этого уравнения является решением однородного уравнения. Отсюда сразу же следует, что общее решение $y_{\text{о.н.}}(x)$ уравнения (10.1) может быть представлено в виде

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x),$$

где $y_{\text{о.о.}}(x)$ — общее решение однородного уравнения, $y_{\text{ч.н.}}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

На предыдущем занятии мы уже научились находить общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Сейчас мы рассмотрим метод, позволяющий так же легко строить частное решение неоднородного уравнения со специальной правой частью.

Напомним, что мы называли *специальной* правую часть вида

$$f(x) = P_m(x) \cdot e^{\lambda x},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а λ — произвольное число (возможно, комплексное). В этом случае частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов. Оно имеет вид $y(x) = x^p \cdot Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}$, где $Q_m(x)$ — многочлен степени m, коэффициенты которого нам и предстоит определить.

Если λ не является корнем характеристического многочлена, то $p = 0$. Если же λ является корнем характеристического многочлена кратности s, то $p = s$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' + y'' = f(x)$.

Характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -1$, следовательно, $y_{\text{ о.о.}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$.

Найдем частные решения при различных правых частях $f(x)$.

а) $f(x) = e^{2x}$. Показатель экспоненты $\lambda = 2$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{\text{ ч.н.}} = Ae^{2x}$. Подставляя эту функцию в уравнение и сокращая на e^{2x}, получим $A = 1/12$.

б) $f(x) = x^2 e^x$. Показатель экспоненты $\lambda = 1$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида

$$y_{\text{ ч.н.}} = (Ax^2 + Bx + C)e^x.$$

Подставляя эту функцию в уравнение, воспользуемся формулой Лейбница дифференцирования произведения

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Получаем:

$$(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x + 3(2Ax + B) \cdot e^x + 3(2A) \cdot e^x + 0 \cdot e^x +$$
$$+(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x + 2(2Ax + B) \cdot e^x + (2A) \cdot e^x = x^2 e^x$$

Сокращая на e^x и приводя подобные слагаемые, получим равенство многочленов

$$2Ax^2 + (2B + 10A)x + (2C + 5B + 8A) = x^2,$$

которое выполнено тождественно, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Отсюда $A = 1/2$, $B = -5/2$, $C = 17/4$ и

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{2x^2 - 10x + 17}{4}\, e^x.$$

в) $f(x) = e^{-x}$. Показатель экспоненты $\lambda = -1$ является корнем характеристического многочлена кратности 1, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{\text{ч.н.}} = Axe^{-x}$. Подставляя эту функцию в уравнение и сокращая на e^{-x}, находим $A = 1$. Таким образом, $y_{\text{ч.н.}} = xe^{-x}$.

г) $f(x) = x$. Показатель экспоненты $\lambda = 0$ является корнем характеристического многочлена кратности 2, поэтому неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{\text{ч.н.}} = x^2(Ax+B) = Ax^3+Bx^2$. Подставляя эту функцию в уравнение, находим $A = 1/6$, $B = -1/2$. Таким образом, $y_{\text{ч.н.}} = \dfrac{x^3 - 3x^2}{6}$.

д) $f(x) = 4\sin 2x$. Так как $\sin 2x$ — мнимая часть экспоненты e^{2ix}, мы сначала найдем комплекснозначное частное решение уравнения с правой частью $f(x) = 4e^{2ix}$, а затем выделим его мнимую часть. Она и будет искомым частным решением.

Показатель экспоненты $\lambda = 2i$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому неоднородное уравнение с правой частью $f(x) = 4e^{2ix}$ имеет частное решение вида $y_{\text{ч.н.}} = Ae^{2ix}$. Подставляя эту функцию в уравнение, находим $A = \dfrac{-1+2i}{5}$. Таким образом,

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{-1+2i}{5}e^{2ix} = \frac{-1+2i}{5}(\cos 2x + i\sin 2x) =$$

$$= -\frac{1}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + \frac{i}{5}(2\cos 2x - \sin 2x)$$

Итак, уравнение с правой частью $f(x) = 4\sin 2x$ имеет частное решение

$$y_{\text{ч.н.}} = 0,2(2\cos 2x - \sin 2x).$$

Заметим, что мы также нашли частное решение

$$y_{\text{ ч.н.}} = -0,2(\cos 2x + 2\sin 2x),$$

соответствующее правой части $f(x) = 4\cos 2x$. $\square$

Обратимся теперь к неоднородному линейному уравнению Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

Понятно, что специальной правой частью следует считать функцию вида

$$f(x) = P_m(\ln x) \cdot x^{\lambda}, \quad (x > 0),$$

где $P_m(t)$ — многочлен степени m.

Искать частное решение методом неопределенных коэффициентов, подставляя предполагаемое решение непосредственно в уравнение Эйлера, легко, если $f(x) = x^{\lambda}$ и λ не является корнем характеристического уравнения. В противном случае лучше перейти к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, которое получается после замены переменной $t = \ln |x|$. Точнее, нас интересует не само дифференциальное уравнение, а корни его характеристического многочлена. Но этот многочлен совпадает с характеристическим многочленом уравнения Эйлера, поэтому замену переменной в уравнении нам выполнять не придется, а нужно лишь преобразовать правую часть уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 y''' + xy' - y = x^2 + x^2 \ln x + x \ln x$.

Характеристическое уравнение $(\lambda - 1)^3 = 0$ и общее решение однородного уравнения $y_{\text{ о.о.}} = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x (\ln x)^2$, $(x > 0)$, были нами найдены на прошлом занятии (см. Пример 3). Осталось найти частное решение неоднородного уравнения.

Согласно принципу суперпозиции, оно является суммой частных решений, соответствующих правым частям $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 \ln x$ и $f_3(x) = x \ln x$.

1) $f_1(x) = x^2$. Так как $\lambda = 2$ не является корнем характеристического

многочлена, уравнение имеет частное решение вида $y_1 = Ax^2$. Подставляя эту функцию в уравнение, получим $A = 1$, то есть $y_1 = x^2$.

2) Замена $x = e^t$ преобразует правую часть $f_2(x) = x^2 \ln x$ к виду $f_2(t) = e^{2t} \cdot t$. Так как $\lambda = 2$ не является корнем характеристического многочлена, уравнение имеет частное решение вида $y_2(t) = e^{2t} \cdot (At + B)$.

Подставляя эту функцию в уравнение, получим $A = 1$, $B = -3$, то есть $y_2(t) = e^{2t} \cdot (t - 3)$. Возвращаясь к переменной x, получаем $y_2(x) = x^2 \cdot (\ln x - 3)$.

3) Замена $x = e^t$ преобразует правую часть $f_3(x) = x \ln x$ к виду $f_3(t) = e^t \cdot t$. Так как $\lambda = 1$ является корнем характеристического многочлена кратности 3, уравнение имеет частное решение вида $y_3(t) = e^t \cdot t^3(At + B) = e^t \cdot (At^4 + Bt^3)$.

Однако мы не будем подставлять эту функцию в уравнение, а продемонстрируем следующий элегантный прием. Замена переменной $x = e^t$ преобразовала уравнение Эйлера в уравнение

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = e^t \cdot t.$$

Умножим обе части уравнения на e^{-t}:

$$e^{-t}\dddot{y} - 3e^{-t}\ddot{y} + 3e^{-t}\dot{y} - e^{-t}y = t.$$

Заметим, что с помощью формулы Лейбница левую часть уравнения можно представить в виде производной произведения:

$$\frac{d^3(e^{-t}y)}{dt^3} = t.$$

Отсюда легко найти частное решение: $e^{-t}y = \dfrac{t^4}{4!}$ и $y = \dfrac{t^4}{12}e^t$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $y_3(x) = \dfrac{x}{12}\ln^4 x$. $\square$

Самостоятельная работа

Найти общее решение уравнения.

1. $y^{V} + 8y''' + 16y' = \sin x + x + 16.$

2. $y'' + 4y = e^{-x}\cos 2x.$

3. $y''' + y' = \cos x.$

4. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = e^{-x}.$

5. $x^2y''' - 2y' = x^3.$

Домашняя работа

№№ 537, 541, 543, 593, 595, 597.

Занятие 11

Системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{A}\vec{y}, \tag{11.1}$$

где $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$ — квадратная числовая матрица порядка n.

Известно, что решения системы (11.1) образуют линейное векторное пространство, размерность которого равна n. Наша задача — научиться строить базис этого пространства, поскольку, зная базис (фундаментальную систему решений), легко написать общее решение системы.

Пусть $\vec{y}^{[1]}(t)$, ... , $\vec{y}^{[n]}(t)$ — некоторый набор частных решений системы (11.1). Составим матрицу $\mathbf{Y}(t)$, поместив в ее столбцы вектор-функции $\vec{y}^{[i]}(t)$. Очевидно, матрица $\mathbf{Y}(t)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t). \tag{11.2}$$

Можно показать, что функция $\varphi(t) = \det \mathbf{Y}(t)$ удовлетворяет однородному линейному уравнению

$$\dot{\varphi}(t) = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \varphi(t),$$

где $\operatorname{tr} \mathbf{A}$ — след матрицы $\mathbf{A}$, откуда следует, что

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \cdot e^{\operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot (t - t_0)}.$$

Эта замечательная формула называется формулой Лиувилля. Из нее тотчас же следует, что если $\det \mathbf{Y}(t_0) = 0$, то $\det \mathbf{Y}(t) \equiv 0$, и если

$\det \mathbf{Y}(t_0) \neq 0$, то $\det \mathbf{Y}(t) \neq 0$ при любых значениях t.

Подчеркнем, что это свойство выполняется не для любой функциональной матрицы. Так, если $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то $\det \mathbf{Y}(0) = 0$, $\det \mathbf{Y}(1) = 0$, но $\det \mathbf{Y}(2) \neq 0$.

Матрицу $\mathbf{Y}(t)$ будем называть *фундаментальной*, если она является решением уравнения (11.2) и $\det \mathbf{Y}(t_0) \neq 0$ в некоторой точке t_0.

Если матрица $\mathbf{Y}(t)$ фундаментальна, то общее решение системы (11.1) задается формулой

$$\vec{y}_{\,\text{о.о.}}(t) = \vec{Y}(t) \cdot \vec{c} = C_1 \vec{y}^{[1]}(t) + ... + C_n \vec{y}^{[n]}(t), \quad (11.3)$$

где $\vec{c}$ — вектор, составленный из произвольных констант $C_1, \ldots, C_n$.

Действительно, нетрудно проверить, что при любом векторе $\vec{c}$ формула (11.3) дает решение системы:

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{Y}}(t) \cdot \vec{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c} = \mathbf{A}\vec{y}(t)$$

С другой стороны, если поставить для системы (11.1) задачу Коши $\vec{y}(t_0) = \vec{y_0}$, то из равенства $\vec{y_0} = \mathbf{Y}(t_0) \cdot \vec{c}$ в силу невырожденности матрицы $\mathbf{Y}(t_0)$ можно определить значение $\vec{c} = \mathbf{Y}^{-1}(t_0) \cdot \vec{y_0}$.

Таким образом, формула (11.3) при подходящем наборе констант дает решение любой задачи Коши. Следовательно, эта формула действительно описывает общее решение системы (11.1).

Из сказанного выше следует, что решения $\vec{y}^{[1]}(t), \ldots, \vec{y}^{[n]}(t)$ образуют базис в пространстве решений, если в некоторой точке t_0 числовые векторы $\vec{y}^{[1]}(t_0), \ldots, \vec{y}^{[n]}(t_0)$ линейно независимы. Другими словами, столбцы фундаментальной матрицы образуют базис в пространстве решений системы (ФСР).

Рассмотрим различные способы построения ФСР системы однородных линейный уравнений с постоянными коэффициентами.

Имеет место следующее замечательное утверждение: если вектор-функция $\vec{y}(t)$ является решением системы (11.1), то каждая ее компонента $y_i(t)$ удовлетворяет однородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами, имеющему характеристический многочлен $P_n(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big)$.

Основываясь на этом утверждении, можно предложить алгоритм построения общего решения для систем второго порядка $\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$

1. Найти корни характеристического многочлена

$$P_n(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big) = \lambda^2 - \operatorname{tr}\mathbf{A}\cdot\lambda + \det\mathbf{A}.$$

Здесь $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ — след матрицы $\mathbf{A}$, то есть $(a_{11} + a_{22})$.

2. Выбрать любую компоненту ($x(t)$ или $y(t)$) и записать для нее общее решение этого уравнения.

3. Найти вторую компоненту, используя одно из уравнений системы.

4. Записать ответ в матричном или векторном виде.

Проиллюстрируем сказанное.

Пример 1. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$. Корни этого многочлена $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Общее решение соответствующего уравнения $x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}$.

Из первого уравнения системы $y = \dot{x} - 2x = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ □

Пример 2. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$. Корни этого многочлена $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Общее решение соответствующего уравнения

$$x(t) = C_1 e^{2t} \sin t + C_2 e^{2t} \cos t.$$

Из первого уравнения системы находим

$$y(t) = \dot{x} - x = C_1 e^{2t}(\sin t + \cos t) + C_2 e^{2t}(\cos t - \sin t).$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin t + \cos t & \cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \square$$

Описанный прием мы назовем *методом исключения*. Для систем второго порядка он является универсальным. Для системы третьего порядка метод исключения работает, если в системе есть уравнение, содержащее только две неизвестные функции. Это позволяет на третьем шаге алгоритма выразить одну компоненту через другую.

Пример 3. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$P_3(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda.$$

Корни этого многочлена $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Поскольку третье уравнение содержит только функции x и z, то, зная z, из него легко восстановить x. Поэтому начинаем с функции $z = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$. Тогда $x = \dot{z} + z = C_1 + 3C_2 e^{2t}$.

Наконец, из первого уравнения находим

$$y = 0,5(x - z - \dot{x}) = -2C_2 e^{2t} - 0,5C_3 e^{-t}.$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3e^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & -0,5e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \square$$

Замечание: характеристический многочлен можно найти по формуле

$$P_3(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}\mathbf{A}\cdot\lambda^2 -$$

$$- \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \cdot \lambda + \det\mathbf{A}$$

Пример 4. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = y_1. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен $P_4(\lambda) = \lambda^4 - 1$.

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$.

$y_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin t + C_4 \cos t,$

$y_2 = \dot{y}_1 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_3 \cos t - C_4 \sin t,$

$y_3 = \dot{y}_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \sin t - C_4 \cos t,$

$y_4 = \dot{y}_3 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - C_3 \cos t + C_4 \sin t.$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \square$$

Как мы видели, если λ — корни характеристического многочлена — являются вещественными числами, то частные решения систем имеют вид $\vec{y}(t) = \vec{u} \cdot e^{\lambda t}$, где $\vec{u}$ — некоторый числовой вектор.

А что если попробовать сразу искать частные решения в таком виде? Подставляя функцию $\vec{y}(t) = \vec{u} \cdot e^{\lambda t}$ в уравнение (11.1) и сокращая на $e^{\lambda t}$, мы получим уравнение $\lambda \vec{u} = \mathbf{A} \vec{u}$, или $\Big(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}\Big) \vec{u} = 0$.

Это означает, что λ является собственным числом, а $\vec{u}$ — соответствующим ему собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет простую структуру, то есть у нее n вещественных собственных чисел λ_i (с учетом их кратности) и n соответствующих этим числам линейно независимых собственных векторов $\vec{u}^{[i]}$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\vec{y}_{\text{о.о.}}(t) = C_1 \vec{u}^{[1]} e^{\lambda_1 t} + ... + C_n \vec{u}^{[n]} e^{\lambda_n t}.$$

Именно такую структуру имела матрица в рассмотренном примере 3. Проверьте, что $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 0$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — собственным вектором, соответствующим $\lambda_2 = 2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ — собственным вектором, соответствующим $\lambda_3 = -1$.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет однократное собственное число $\lambda = \alpha + i\beta$ (и следовательно, сопряженное к нему $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$), то для построения вещественной ФСР следует сначала найти комплексный собственный вектор $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$, отвечающий $\lambda = \alpha + i\beta$, и получить комплексное решение

$$\vec{w} e^{\lambda t} = (\vec{u} + i\vec{v}) e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \Big[(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t) + i(\vec{u}\sin\beta t + \vec{v}\cos\beta t) \Big].$$

Действительная и мнимая части этого решения будут также частными решениями системы (11.1), причем линейно независимыми.

Пример 5. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P_3(\lambda) = \det\Big(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\Big) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$.

Корни этого многочлена $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Найдем собственный вектор, отвечающий $\lambda_1 = 1$ из уравнения

$$\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big)\vec{u}=0\ \ :$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad u_1=0,\ u_2+u_3=0.$$

Например, можно взять $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$, и получить решение $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}e^t$.

Далее, значению $\lambda_2=1+2i$ отвечает собственный вектор $\vec{w}=\begin{pmatrix}2i\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

Следовательно, функция

$$\vec{w}e^{(1+2i)t}=\begin{pmatrix}2i\\ 1\\ 3\end{pmatrix}e^t(\cos 2t+i\sin 2t)=e^t\begin{pmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\\ 3\cos 2t\end{pmatrix}+ie^t\begin{pmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\\ 3\sin 2t\end{pmatrix}$$

является комплекснозначным решением системы.

Отделяя ее вещественную и мнимую части, получаем два вещественных решения: $e^t\begin{pmatrix}-2\sin 2t\\ \cos 2t\\ 3\cos 2t\end{pmatrix}$ и $e^t\begin{pmatrix}2\cos 2t\\ \sin 2t\\ 3\sin 2t\end{pmatrix}$.

Составим из полученных решений матрицу

$$\mathbf{Y}_1(t)=e^t\begin{pmatrix}0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t\\ 1 & \cos 2t & \sin 2t\\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t\end{pmatrix}.$$

Так как $\det\mathbf{Y}_1(0)=\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}\neq 0$, то это фундаментальная матрица, и значит, мы нашли базис в пространстве решений.

Заметим, что для рассматриваемой системы уравнений легко можно получить базис методом исключения. Например, положив

$$z = C_1 e^t + e^t (C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t),$$

из третьего уравнения находим

$$x = (\dot{z} - z)/3 = 2e^t (C_2 \sin 2t - C_3 \cos 2t)/3.$$

Наконец, из первого уравнения

$$y = -C_1 e^t + e^t (C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t)/3.$$

Записав полученные решения в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}\cos 2t & -\frac{2}{3}\sin 2t \\ -1 & \frac{1}{3}\sin 2t & \frac{1}{3}\cos 2t \\ 1 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

мы придем к другой фундаментальной матрице

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}\cos 2t & -\frac{2}{3}\sin 2t \\ -1 & \frac{1}{3}\sin 2t & \frac{1}{3}\cos 2t \\ 1 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Впрочем, легко заметить, что обе фундаментальные матрицы состоят из пропорциональных столбцов, которые отличаются лишь порядком. Вообще, любые две фундаментальные матрицы одной и той же системы уравнений связаны соотношением $\mathbf{Y}_2(t) = \mathbf{Y}_1(t) \cdot \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — невырожденная числовая матрица перехода.

Поскольку фундаментальные матрицы обратимы при любом значении t, найти матрицу $\mathbf{B}$ можно по формуле $\mathbf{B} = \mathbf{Y}_1^{-1}(0) \cdot \mathbf{Y}_2(0)$.

В нашем примере $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ $\square$

В заключение напомним, что мы рассматривали только матрицы простой структуры, оставив открытым вопрос о том, как найти фундаментальную матрицу (ФСР) в более сложных случаях, например, если характеристический многочлен имеет кратный корень, но число соответствующих собственных векторов меньше его кратности (то есть алгебраическая кратность корня больше его геометрической кратности). Кроме того, надо еще научиться алгебраическими средствами распознать, что мы столкнулись с такой ситуацией.

Другой способ построения ФСР, лишенный этих недостатков, мы обсудим на следующем занятии.

Самостоятельная работа

Найти общее решение системы.

1. $\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = -2x + y - z \end{cases}$

Указание: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$.

Собственный вектор $\vec{w}\Big|_{\lambda=i} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$ Указание: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 3$.

Домашняя работа

№№ 795, 798, 802, 808.

Занятие 12

Матричная экспонента.

Среди всех фундаментальных матриц $\mathbf{Y}(t)$ есть только одна, обладающая свойством $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$, что делает ее чрезвычайно удобной.

Действительно, любое решение системы $\dfrac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{A}\vec{y}$ выражается через фундаментальную матрицу по формуле $\vec{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\vec{c}$, где $\vec{c}$ — некоторый числовой вектор. Если поставить для системы задачу Коши $\vec{y}(0) = \vec{y_0}$, то из равенства $\vec{y_0} = \mathbf{Y}(0)\cdot\vec{c}$ в силу условия $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$ сразу же получается, что $\vec{c} = \vec{y_0}$. Таким образом, решение поставленной задачи Коши дается формулой $\vec{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\vec{y_0}$.

Такую замечательную фундаментальную матрицу называют матричной экспонентой и обозначают $\exp(\mathbf{A}t)$ по аналогии со скалярной функцией $y = e^{at}$, являющейся решением задачи Коши $\dot{y} = ay$, $y(0) = 1$. Итак,

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{E} \tag{12.1}$$

Можно показать, что матричная экспонента, как и функция $y = e^{at}$, раскладывается в ряд по степеням t:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\cdot t + \mathbf{A}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + ... + \mathbf{A}^n\cdot\frac{t^n}{n!} + ... \tag{12.2}$$

Посмотрим, каким образом можно найти матричную экспоненту.

<u>Первый способ</u> основан на том, что любые две фундаментальные матрицы связаны друг с другом соотношением $\mathbf{Y}_2(t) = \mathbf{Y}_1(t)\cdot\mathbf{B}$. Достаточно найти какую-нибудь фундаментальную матрицу $\mathbf{Y}(t)$, тогда $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{B}$ с некоторой матрицей $\mathbf{B}$. При $t = 0$ матричная экспонента равна $\mathbf{E}$, то есть $\mathbf{Y}(0)\cdot\mathbf{B} = \mathbf{E}$, откуда $\mathbf{B} = \mathbf{Y}^{-1}(0)$.

Таким образом, взяв произвольную фундаментальную матрицу $\mathbf{Y}(t)$, можно построить матричную экспоненту по формуле

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(0).$$

Пример 1. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

На предыдущем занятии (см. пример 5) мы нашли решение системы $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и ее фундаментальную матрицу

$$\mathbf{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 1 & \cos 2t & \sin 2t \\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\exp(\mathbf{A}t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 1 & \cos 2t & \sin 2t \\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ 1 & \cos 2t & \sin 2t \\ -1 & 3\cos 2t & 3\sin 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & -0,5\sin 2t & -0,5\sin 2t \\ 0,5\sin 2t & 0,75 + 0,25\cos 2t & -0,25 + 0,25\cos 2t \\ 1,5\sin 2t & -0,75 + 0,75\cos 2t & 0,25 + 0,75\cos 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{4} \begin{pmatrix} 4\cos 2t & -2\sin 2t & -2\sin 2t \\ 2\sin 2t & 3 + \cos 2t & -1 + \cos 2t \\ 6\sin 2t & -3 + 3\cos 2t & 1 + 3\cos 2t \end{pmatrix}$$

Это и есть матричная экспонента.

Второй способ. Матричную экспоненту легко построить, используя специальный базис, состоящий из функций $\psi_k(x)$, с которыми мы познакомились на занятии 9.

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\ \lambda_n$ — корни характеристического многочлена $\det\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big)$. Если корень кратный, то он выписан в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Напомним, что $\psi_1(t)=e^{\lambda_1 t}$, $\psi_{k+1}(t)=\int\limits_0^t e^{\lambda_{k+1}(t-\tau)}\psi_k(\tau)d\tau$. Тогда

$$\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{E}\cdot\psi_1(t)+\Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_2(t)+\Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_3(t)+\dots$$
$$\dots+\Big(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}\Big)\Big(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\Big)\cdot\dots\cdot\Big(\mathbf{A}-\lambda_{n-1}\mathbf{E}\Big)\cdot\psi_n(t) \quad (12.3)$$

Этот способ особенно эффективен в случае кратных корней, поскольку он не требует выяснения их геометрической кратности.

Пример 2. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен $\det\Big(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\Big)=(\lambda+1)^2$ имеет корень $\lambda=-1$ кратности 2. Поэтому $\psi_1(t)=e^{-t}$, $\psi_2(t)=te^{-t}$ и

$$\exp(\mathbf{A}t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot e^{-t}+\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot te^{-t}=\begin{pmatrix}e^{-t}-2te^{-t} & 2te^{-t}\\ -2te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t}\end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2, имеющей собственные числа $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$.

$$\psi_1(t)=e^{(\alpha+i\beta)t},\ \ \psi_2(t)=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{(\alpha+i\beta)-(\alpha-i\beta)}=\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}$$

$$\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{E}\cdot e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+\Big(\mathbf{A}-(\alpha+i\beta)\mathbf{E}\Big)\cdot\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}=$$
$$=e^{\alpha t}\cos\beta t\cdot\mathbf{E}+\Big(\mathbf{A}-\alpha\mathbf{E}\Big)\cdot\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t}{\beta}$$

Если $\alpha=0$, то $\exp(\mathbf{A}t)=\cos\beta t\cdot\mathbf{E}+\mathbf{A}\cdot\dfrac{\sin\beta t}{\beta}$.

Если $\beta = 0$, то $\exp(\mathbf{A}t) = e^{\alpha t}\cdot\mathbf{E} + \Big(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E}\Big)\cdot te^{\alpha t}$.

Пример 4. Найти $\exp(\mathbf{A}t)$ для матрицы $\mathbf{A}$, являющейся жордановой клеткой, то есть имеющей вид $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет единственное собственное число λ_0 кратности n. Поэтому $\psi_1(t) = e^{\lambda_0 t}$, $\psi_k(t) = \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_0 t}$, $1 < k \leqslant n$. Тогда

$$\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^k = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\dots}^{k-1} & 1 & & 0 \\ & 0 & \dots & \ddots & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$(1 < k < n)$, (диагональ из единиц смещается вправо), и наконец $\Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^n = \mathbf{0}$. Тогда по формуле (12.3)

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^{\lambda_0 t} + \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)\cdot te^{\lambda_0 t} + \dots + \Big(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E}\Big)^n\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_0 t} =$$

$$= e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

Применить метод исключения для решения этой системы невозможно. Поэтому сразу приступим к построению матричной экспоненты.

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 0$. Соответственно, $\psi_1(t) = e^t$, $\psi_2(t) = te^t$, $\psi_3(t) = \int\limits_0^t \psi_2(\tau)d\tau = te^t - e^t + 1$. Таким образом, $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E}\cdot e^t + \Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)\cdot te^t + \Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)^2\cdot(te^t - e^t + 1)$.

Заметим, что здесь $\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)^2 = -\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)$. Поэтому после приведения подобных слагаемых получаем

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}(e^t-1)+\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2e^t-1 & -e^t+1 & -e^t+1 \\ 3e^t-3 & -2e^t+3 & -3e^t+3 \\ -e^t+1 & e^t-1 & 2e^t-1 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы можно получить в виде линейной комбинации столбцов фундаментальной матрицы

$$\exp(\mathbf{A}t)\cdot\vec{c} = C_1\begin{pmatrix} 2e^t-1 \\ 3e^t-3 \\ -e^t+1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -e^t+1 \\ -2e^t+3 \\ e^t-1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -e^t+1 \\ -3e^t+3 \\ 2e^t-1 \end{pmatrix}.$$

В рассмотренном примере общее решение можно было бы записать проще, используя собственные векторы. Хотя собственное значение $\lambda = 1$ имеет кратность 2, но ранг матрицы $\Big(\mathbf{A}-\mathbf{E}\Big)$ равен 1. Следовательно, значению $\lambda = 1$ соответствует два линейно независимых собственных вектора, и матрица $\mathbf{A}$ имеет набор линейно независимых собственных векторов, образующих базис в $\mathbb{R}^3$. Найдем их.

$$\vec{u}^{[1]}\Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{[2]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{[3]}\Big|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, фундаментальная матрица системы имеет вид

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^t \\ 3 & e^t & 0 \\ -1 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что в столбцах матричной экспоненты стоят линейные комбинации столбцов матрицы $\mathbf{Y}(t)$, например,

$$\begin{pmatrix} 2e^t - 1 \\ 3e^t - 3 \\ -e^t + 1 \end{pmatrix} = -\vec{y}^{[1]} + 3\vec{y}^{[2]} - \vec{y}^{[3]},$$

что еще раз иллюстрирует формулу $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{B}$.

Пример 6. Найти общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases}$

В данном случае $\lambda_{1,2,3} = 1$, и мы не будем искать собственные векторы, а сразу перейдем к построению матричной экспоненты.

$\psi_1(t) = e^t, \;\; \psi_2(t) = te^t, \;\; \psi_3(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t.$

$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} \cdot e^t + \Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big) \cdot te^t + \Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big)^2 \cdot \dfrac{t^2}{2}e^t.$

Поскольку $\Big(\mathbf{A} - \mathbf{E}\Big)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \mathbf{0}$, то

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^t + te^t & -te^t & -te^t \\ 2te^t & e^t - 2te^t & -2te^t \\ -te^t & te^t & e^t + te^t \end{pmatrix}.$$

Как видим, в случае кратных корней частные решения могут иметь вид $\begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}$, где $P_i(t)$ — многочлены, степень которых меньше или равна кратности собственного числа, а в некоторых случаях, как в примере 5, равна нулю. Какова эта степень — зависит от матрицы A, но «умная» формула (12.3) избавляет нас от необходимости изучать ее структуру.

Третий способ. Для построения матричной экспоненты используем матричный ряд (12.2).

Пример 7. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица третьего порядка, имеющая характеристический многочлен $\lambda^3 - \lambda = 0$. По теореме Кэли любая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. Отсюда легко найти все степени матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ и так далее. Итак, $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$. Тогда

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\Big(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots\Big) + \mathbf{A}^2\Big(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\Big) = \\ = \mathbf{E} + \mathbf{A}\,\mathrm{sh}\,t + \mathbf{A}^2(\mathrm{ch}\,t - 1).$$

Заметим, что равенство $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ не означает, что порядок матрицы равен трем — собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ могут быть высокой кратности. Тем не менее, полученная формула матричной экспоненты остается справедливой.

<u>Четвертый способ</u>. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет блочно-диагональную структуру $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_3 \end{pmatrix}$, то

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{A}_1 t) & & \mathbf{0} \\ & \exp(\mathbf{A}_2 t) & \\ \mathbf{0} & & \exp(\mathbf{A}_3 t) \end{pmatrix}.$$

В частности, если матрица $\mathbf{A}$ диагональна: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$$\text{то } \exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Иногда блочная природа матрицы не столь очевидна, тем не менее можно воспользоваться данным способом построения матричной экспоненты.

Пример 8. Рассмотрим систему с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем соответствующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 4y_5 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 + y_4 \\ \dot{y}_3 = -y_3 \\ \dot{y}_4 = 2y_4 \\ \dot{y}_5 = -y_1 + y_5 \end{cases}$$

Она распадается на три подсистемы:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 4y_5 \\ \dot{y}_5 = -y_1 + y_5 \end{cases}, \quad \dot{y}_3 = -y_3, \quad \begin{cases} \dot{y}_2 = 2y_2 + y_4 \\ \dot{y}_4 = 2y_4 \end{cases}.$$

Соответственно, $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем матричную экспоненту для каждой подсистемы.

$$\exp(\mathbf{A}_1 t) = e^t \cos 2t\mathbf{E} + e^t \frac{\sin 2t}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -0,5\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$\exp(\mathbf{A}_2 t) = e^{-t}, \quad \exp(\mathbf{A}_3 t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь осталось «разнести» эти блоки на соответствующие места матрицы $\exp(\mathbf{A}t)$. Итак,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \begin{pmatrix} e^t\cos 2t & 0 & 0 & 0 & 2e^t\sin 2t \\ 0 & e^{2t} & 0 & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ -0,5e^t\sin 2t & 0 & 0 & 0 & e^t\cos 2t \end{pmatrix}.$$

Пятый способ. Если матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ подобны, то есть существует такая невырожденная матрица $\mathbf{T}$, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{T}^{-1}$, то $\exp(\mathbf{A}_1 t) = \mathbf{T}\cdot\exp(\mathbf{A}_2 t)\cdot\mathbf{T}^{-1}$.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет простую структуру, а именно, у нее есть n вещественных собственных чисел λ_1, λ_2, ... , λ_n и n линейно независимых собственных векторов $\vec{u}^{[1]}$, $\vec{u}^{[2]}$, ... , $\vec{u}^{[n]}$, то такую матрицу можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}\cdot\mathbf{T}^{-1}$$

при помощи матрицы $\mathbf{T}$, в столбцах которой стоят собственные векторы $\vec{u}^{[1]}$, ... , $\vec{u}^{[n]}$ матрицы $\mathbf{A}$.

Тогда $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\cdot\mathbf{T}^{-1}$.

Легко видеть, что матрица

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{T}\cdot\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \left(e^{\lambda_1 t}\vec{u}^{[1]} \;\middle|\; e^{\lambda_2 t}\vec{u}^{[2]} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; e^{\lambda_n t}\vec{u}^{[n]}\right)$$

является фундаментальной, и $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{B}$, где $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}$ — невырожденная матрица перехода.

В курсе линейной алгебры доказывается, что любая матрица подобна так называемой жордановой форме, то есть блочно-диагональной матрице, каждый блок которой является жордановой клеткой. Матричную экспоненту для жордановой клетки мы получили в примере 4, используя функции $\psi_k(t)$. Можно прийти к тому же результату другим путем.

Заметим, что жорданову клетку $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$ можно представить в виде $\mathbf{A} = \lambda_0\mathbf{E} + \mathbf{G}$, где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

Известно, что если матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ коммутируют, то $\exp\big((\mathbf{B}+\mathbf{C})t\big) = \exp(\mathbf{B}t)\cdot\exp(\mathbf{C}t)$.

Так как единичная матрица коммутирует с любой матрицей, то $\exp\big((\lambda_0\mathbf{E}+\mathbf{G})t\big) = e^{\lambda_0 t}\mathbf{E}\cdot\exp(\mathbf{G}t)$.

Далее, по формуле (12.2)

$$\exp(\mathbf{G}t) = \mathbf{E} + \mathbf{G}\cdot t + \mathbf{G}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + ... + \mathbf{G}^k\cdot\frac{t^k}{k!} + ...,$$

но так как $\mathbf{G}^k = \mathbf{0}$ при $k \geqslant n$, то ряд превращается в конечную сумму:

$$\exp(\mathbf{G}t) = \mathbf{E} + \mathbf{G}\cdot t + \mathbf{G}^2\cdot\frac{t^2}{2!} + ... + \mathbf{G}^{n-1}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы пришли к уже известной нам формуле

$$\exp(\mathbf{A}t) = e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Как видим, матричная экспонента для жордановой клетки строится легко, однако алгоритм приведения матрицы к жордановой форме (особенно в случае кратных собственных чисел) достаточно сложен. Поэтому для построения матричной экспоненты мы рекомендуем использовать другие, более эффективные приемы.

Самостоятельная работа

Найти матричную экспоненту $\exp(\mathbf{A}t)$.

1. Матрица $\mathbf{A}$ такова, что $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{E}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Указание: найдите фундаментальную матрицу методом исключения ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2$). Ответ оставьте в виде $\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{Y}^{-1}(0)$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$

Домашняя работа

Найти матричную экспоненту №№ 853, 864, 866, 874.

Занятие 13

Неоднородные линейные уравнения и системы.

Рассмотрим систему неоднородных линейных уравнений

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{f}(t), \tag{13.1}$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица порядка n, $\vec{f}(t)$ — произвольная вектор-функция.

Общее решение этой системы представимо в виде

$$\vec{y}_{\text{о.н.}}(t) = \vec{y}_{\text{о.о.}}(t) + \vec{y}_{\text{ч.н.}}(t),$$

где $\vec{y}_{\text{о.о.}}(t)$ — общее решение однородной системы, $\vec{y}_{\text{ч.н.}}(t)$ — частное решение неоднородной системы. Такая структура решения является прямым следствием линейности системы.

Мы знаем, что решение однородной системы можно представить в виде

$$\vec{y}_{\text{о.о.}}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c},$$

где $\mathbf{Y}(t)$ — фундаментальная матрица, столбцы которой являются линейно независимыми решениям этой системы.

Общим методом нахождения частного решения неоднородной системы является «метод вариации постоянной». Он заключается в том, что частное решение строится в виде

$$\vec{y}_{\text{ч.н.}}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \vec{c}(t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (13.1), получим

$$\dot{\mathbf{Y}}(t)\cdot\vec{c}(t)+\mathbf{Y}(t)\cdot\dot{\vec{c}}(t)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\vec{c}(t)+\vec{f}(t).$$

Учитывая, что $\dot{\mathbf{Y}}(t)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}(t)$, приходим к уравнению

$$\mathbf{Y}(t)\cdot\dot{\vec{c}}(t)=\vec{f}(t).$$

Поскольку $\mathbf{Y}(t)$ — фундаментальная матрица, она обратима при любом значении t, и следовательно

$$\dot{\vec{c}}(t)=\mathbf{Y}^{-1}(t)\;\cdot\vec{f}(t), \tag{13.2}$$

откуда мы и определяем вектор-функцию $\vec{c}(t)$, интегрируя каждую компоненту вектора $\mathbf{Y}^{-1}(t)\;\cdot\vec{f}(t)$.

С точки зрения теории, самая удобная из фундаментальных матриц — матричная экспонента. Помимо того, что $\exp(\mathbf{A}t)\Big|_{t=0}=\mathbf{E}$, она легко обращается: $\big[\exp(\mathbf{A}t)\big]^{-1}=\exp(-\mathbf{A}t)$. Поэтому разумно в качестве $\mathbf{Y}(t)$ выбирать матричную экспоненту, если ее легко построить (например, в случае кратных корней).

Пример 1. Найти общее решение системы $\begin{cases}\dot{x}=y+\sin t\\ \dot{y}=-x.\end{cases}$

Здесь $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, характеристический многочлен $P(\lambda)=\lambda^2+1$. По теореме Кэли матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то есть $\mathbf{A}^2=-\mathbf{E}$. На прошлом занятии мы построили матричную экспоненту для такого случая:

$$\exp(\mathbf{A}t)=\mathbf{E}\cos t+\mathbf{A}\sin t=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}.$$

Как было отмечено выше, $\left[\exp(\mathbf{A}t)\right]^{-1} = \exp(-\mathbf{A}t)$, то есть

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (13.2)

$$\dot{\vec{c}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cdot \sin t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Итак, $\begin{pmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cdot \sin t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}$, откуда $\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5\sin^2 t \\ 0,5t - 0,25\sin 2t \end{pmatrix}$.

(мы ищем *частное* решение, поэтому в качестве $C_1(t)$ и $C_2(t)$ можно выбрать любые из первообразных).

Итак, частное решение неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{ч.н.}}(t) \\ y_{\text{ч.н.}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5\sin^2 t \\ 0,5t - 0,25\sin 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t\sin^2 t \\ t\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + 0,5t\sin t \\ y(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t + 0,5t\cos t - 0,5\sin t. \end{cases}$$

После того, как найдено общее решение, можно решить задачу Коши. Например, если требовалось найти решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, то, подставляя $t = 0$ в формулу общего решения, находим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Следовательно, решение поставленной задачи Коши $\begin{cases} x(t) = \cos t + 0,5t\sin t \\ y(t) = -1,5\sin t + 0,5t\cos t. \end{cases}$ $\square$

Используя матричную экспоненту, выпишем общую формулу решения задачи Коши $\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \vec{f}(t)$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$:

$$\vec{y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\cdot\vec{y}_0 + \exp(\mathbf{A}t)\cdot\int\limits_0^t \exp(-\mathbf{A}\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau$$

(Сравните эту формулу с формулой решения задачи Коши для уравнения первого порядка, которую мы получили на третьем занятии.)

Пример 2. Найти общее решение системы $\begin{cases}\dot{x} = x - 2y - z\\ \dot{y} = -x + y + z + e^t\\ \dot{z} = x - z + 3e^{-t}.\end{cases}$

На занятии 11 мы нашли фундаментальную матрицу этой системы (см. пример 3):

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix}1 & 3e^{2t} & 0\\ 0 & -2e^{2t} & -e^{-t}\\ 1 & e^{2t} & 2e^{-t}\end{pmatrix}$$

Это не матричная экспонента, поскольку $\mathbf{Y}(0) \neq \mathbf{E}$.

Метод вариации приведет нас к системе, которую можно решить, например, методом Гаусса:

$$\begin{cases}\dot{C}_1 + 3e^{2t}\dot{C}_2 = 0\\ -2e^{2t}\dot{C}_2 - e^{-t}\dot{C}_3 = e^t\\ \dot{C}_1 + e^{2t}\dot{C}_2 + 2e^{-t}\dot{C}_3 = 3e^{-t},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{C}_1 = e^t + 1,5e^{-t}\\ \dot{C}_2 = -\dfrac{1}{3}e^{-t} - 0,5e^{-3t}\\ \dot{C}_3 = -\dfrac{1}{3}e^{2t} + 1.\end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем $\begin{cases}C_1 = e^t - 1,5e^{-t}\\ C_2 = \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{6}e^{-3t}\\ C_3 = -\dfrac{1}{6}e^{2t} + t\end{cases}$

Следовательно, частное решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix}x_{\text{ч.н.}}\\ y_{\text{ч.н.}}\\ z_{\text{ч.н.}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3e^{2t} & 0\\ 0 & -2e^{2t} & -e^{-t}\\ 1 & e^{2t} & 2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t - 1,5e^{-t}\\ \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{6}e^{-3t}\\ -\dfrac{1}{6}e^{2t} + t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^t - e^{-t}\\ -0,5e^t - \dfrac{1}{3}e^{-t} - te^{-t}\\ e^t - \dfrac{4}{3}e^{-t} + 2te^{-t}\end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3e^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & -e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ -t - \frac{1}{3} \\ 2t - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Как видим, частное решение системы представлено в виде суммы двух функций. Первая является частным решением системы

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^t, \tag{13.3}$$

а вторая — частным решением системы

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}. \tag{13.4}$$

Будем говорить, что правая часть системы имеет *специальный вид*, если $\vec{f}(t) = \mathbf{P}_m(t) \cdot e^{\lambda_0 t}$, где $\mathbf{P}_m(t)$ — вектор-функция, каждая компонента которой является многочленом степени не выше m.

Частное решение в таком случае следует искать в виде

$$\vec{y}_{\text{ч.н.}}(t) = \mathbf{Q}_{m+p}(t) \cdot e^{\lambda_0 t},$$

где $\mathbf{Q}_{m+p}(t)$ — вектор-функция, каждая компонента которой является многочленом степени $m + p$. Если λ_0 — не корень характеристического многочлена, то $p = 0$, если же λ_0 — корень характеристического многочлена кратности k, то $p = k$. Коэффициенты этих многочленов неизвестны, но их можно найти, подставив функцию $\mathbf{Q}_{m+p}(t) \cdot e^{\lambda_0 t}$ в исходную систему.

Следуя этому алгоритму, решение системы (13.3) следует искать в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e^t$. Подставляем его в систему:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда $a = 2$, $b = -0,5$, $c = 1$.

Поскольку $\lambda = -1$ является корнем характеристического многочлена, система (13.4) имеет частное решение вида $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1t + B_1 \\ A_2t + B_2 \\ A_3t + B_3 \end{pmatrix} \cdot e^t$. В результате мы получим громоздкую систему для определения шести неизвестных, и решать эту задачу методом неопределенных коэффициентов уже не так эффективно. Однако этот метод показывает нам, какова должна быть структура решения, что дает, например, возможность проконтролировать правильность вычислений методом вариации постоянной, а также отвечать на некоторые вопросы о поведении решений. □

Вернемся к примеру 1. Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = y + e^{it} \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

Найдем комплекснозначное решение этой системы и выделим его мнимую часть. Так как $\lambda = i$ — корень характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$, то решение следует искать в виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} \cdot e^{it}$, где A, B, C, D — комплексные числа. После подстановки получаем:

$$\begin{cases} A + i(At + B) = (Ct + D) + 1 \\ C + i(Ct + D) = -(At + B). \end{cases}$$

Решение этой системы $A = 0,5,\ B = 0,\ C = 0,5i,\ D = -0,5.$

Выделяем мнимую часть решения:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} t \\ it - 1 \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t)\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Методом неопределенных коэффициентов мы получили то же частное решение, что и методом вариации постоянных. Вообще говоря, частные решения, полученные разными способами, могут отличаться на слагаемое, являющееся решением однородной системы. □

Теперь посмотрим, как работает метод вариации постоянных для линейного уравнения n-ного порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{13.5}$$

где $f(x)$ — произвольная функция.

Введем функции $y_i(x)$ следующим образом:

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ ... ,\ y_n = y^{(n-1)}$$

Эти равенства и уравнение (13.5) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ ... \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = -a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - ... - a_{n-1} y_2 - a_n y_1 + f(x), \end{cases}$$

или

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{13.6}$$

Характеристический многочлен системы совпадает с характеристическим многочленом исходного уравнения (13.5):

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & 0 \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n \cdot (\lambda^n + \lambda^{n-1}a_1 + ... + a_n)$$

Как мы знаем, однородное уравнение имеет n линейно независимых решений $\varphi_i(x)$, и любое решение однородного уравнения можно представить в виде их линейной комбинации:

$$y(x) = y_1(x) = C_1\,\varphi_1(x) + C_2\,\varphi_2(x) + ... + C_n\,\varphi_n(x)$$

Тогда

$$y_2(x) = {y_1}'(x) = C_1\,{\varphi'}_1(x) + C_2\,{\varphi'}_2(x) + ... + C_n\,{\varphi'}_n(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = C_1\,\varphi_1^{(n-1)}(x) + C_2\,\varphi_2^{(n-1)}(x) + ... + C_n\,\varphi_n^{(n-1)}(x)$$

Таким образом, фундаментальная матрица однородной системы (13.6) имеет специальный вид

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

и называется матрицей Вронского, а ее определитель $\varphi(x) = \det \mathbf{Y}(x)$ — вронскианом. Мы уже упоминали, что определитель фундаментальной матрицы удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\varphi'(x) = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \varphi(x) = -a_1 \varphi(x)$$

Эта формула в дальнейшем окажется очень полезной.

Метод вариации для системы (13.6) приводит нас к соотношению

$$\mathbf{Y}(x) \cdot \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix},$$

из которого можно определить функции $C'_i(x)$, поскольку $\det \mathbf{Y}(x) \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} C'_1(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^{-1}(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{13.7}$$

Таким образом, метод вариации заключается в следующем:

1. Находим общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{o.o.}}(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x).$$

2. Составляем матрицу Вронского

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

3. Частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = C_1(x)\,\varphi_1(x) + C_2(x)\,\varphi_2(x) + ... + C_n(x)\,\varphi_n(x).$$

4. Находим функции $C_i(x)$, интегрируя уравнение (13.7).

5. Записываем общее решение уравнения (13.5) в виде

$$y_{\text{о.н.}}(x) = y_{\text{о.о.}}(x) + y_{\text{ч.н.}}(x),$$

где $y_{\text{о.о.}}(x)$ — общее решение однородного уравнения, $y_{\text{ч.н.}}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Из предлагаемого алгоритма видно, что при решении задач нет необходимости сводить уравнение к системе. Мы проделали это один раз в общем виде, чтобы было понятно происхождение условий (13.7).

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Корни характеристического многочлена $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о.о.}}(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-2x}.$$

Ищем частное решение в виде

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = C_1(x)\,e^{-x} + C_2(x)\,e^{-2x}.$$

Составляем матрицу Вронского и решаем систему

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{e^x+1} \end{pmatrix},$$

откуда

$$C'_1(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad , \; C'_2(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1} \qquad \text{и}$$

$$C_1(x) = \ln(e^x+1), \quad C_2(x) = \ln(e^x+1) - e^x.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x) - e^{-x}.$$

Последнее слагаемое можно включить в общее решение однородного уравнения. Итак,

$$y_{\text{о.н.}}(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x).\ \square$$

Мы научились строить ФСР для линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами. В случае переменных коэффициентов процесс построения ФСР не так прост, и мы обсудим этот вопрос позднее. Однако, если ФСР каким-либо образом получена, то дальнейшее построение частного решения неоднородного уравнения или системы методом вариации никоим образом не зависит от того, являются коэффициенты системы (13.1) или уравнения (13.1) числами или функциями от t.

Продемонстрируем метод вариации для решения уравнения Эйлера.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $x^2y'' - 2y = 6\dfrac{\ln x}{x}$.

Ищем решения однородного уравнения в виде $y(x) = x^\lambda$. Это приводит нас к характеристическому уравнению $\lambda(\lambda-1) - 2 = 0$, корни которого $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Таким образом,

$$y_{\text{о.о.}}(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2.$$

Ищем частное решение в виде

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = C_1(x)\frac{1}{x} + C_2(x)x^2.$$

Составляем матрицу Вронского и выписываем систему уравнений для поиска $C_i(x)$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & x^2 \\ -\dfrac{1}{x^2} & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{6\ln x}{x^3} \end{pmatrix}. \tag{13.8}$$

Обращаем ваше внимание на правую часть этой системы. Дело в том, что при сведении уравнения к системе необходимо, чтобы коэффициент при старшей производной был равен 1. Поэтому мы делим уравнение на x^2 и получаем в правой части функцию $\frac{6\ln x}{x^3}$.

Далее, решая систему (13.8), получим

$$C'_1(x) = -2\frac{\ln x}{x}\quad, C'_2(x) = 2\frac{\ln x}{x^4}\quad, \text{откуда}$$
$$C_1(x) = -\ln^2 x, \quad C_2(x) = -\frac{2}{3}\frac{\ln x}{x^3} - \frac{2}{9}\frac{1}{x^3}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$y_{\text{ ч.н.}}(x) = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2}{3}\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{9x}.$$

Включая последнее слагаемое в общее решение однородного уравнения, запишем ответ:

$$y_{\text{ о.н.}}(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2 - \left(\frac{2}{3}\ln x + \ln^2 x\right)\frac{1}{x}.$$

Заметим, что правая часть уравнения Эйлера в рассмотренном примере имела специальный вид, что позволяет получить решение этого уравнения методом неопределенных коэффициентов. Таким образом, у вас есть возможность выбора того или иного метода в зависимости от ситуации. □

Самостоятельная работа

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y + t^2e^t \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

4. Найдите решение, ограниченное на всей числовой прямой.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y - 5 \qquad (\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3). \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

5. $x^2y'' - 6y = 5x^3$.

Домашняя работа

№№ 577, 610, 827, 843, 846.