

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

**Методы решения
обыкновенных дифференциальных уравнений.**

**Нелинейные уравнения и системы.
Устойчивость решений.**

учебно-методическое пособие

Новосибирск

2012

Настоящее пособие является третьей частью цикла пособий, отражающих многолетний опыт проведения авторами практических занятий по курсу «Методы математической физики» на втором курсе отделения физической информатики физического факультета НГУ.

Разнообразные примеры и комментарии к ним знакомят студентов с идеями, лежащими в основе различных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и помогают осваивать алгоритмы решения типовых задач.

Каждый параграф пособия является методической разработкой двухчасового занятия. В конце занятия предлагаются вопросы для самостоятельной работы и список задач для дальнейшего закрепления полученных практических навыков. Нумерация занятий единая для всего цикла пособий.

Целевая аудитория: студенты 2-го курса отделения физической информатики физического факультета и отделения геофизики и геомеханики геолого-геофизического факультета НГУ.

Авторы

Михайлова Т. Ю., Доманова Е. Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации

Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

Занятие 14

Траектории линейных систем второго порядка.

Рассмотрим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (14.1)$$

Если трактовать переменную t как время, то решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ описывает закон движения точки $(x; y)$ на плоскости xOy , называемой *фазовой плоскостью*. Кривая, по которой движется точка, называется *траекторией*, а уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ задают параметризацию этой кривой.

Система (14.1) имеет тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$. Это означает, что если в момент времени $t = t_0$ точка находилась в начале координат, то с течением времени она не меняет своего положения. Таким образом, точка $(0; 0)$ представляет собой целую траекторию, которая называется точкой покоя или положением равновесия.

Наша ближайшая цель — описать все возможные виды траекторий системы (14.1) в случае $\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$. В силу невырожденности матрицы \mathbf{A} других точек покоя у системы (14.1) нет. Поэтому точка, в момент времени $t = t_0$ находившаяся не в начале координат, начинает свое движение по некоторой траектории на плоскости xOy .

Пример 1. Пусть система (14.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0.)$$

По сути, система распалась на два независимых уравнения, и выписать

ее общее решение не представляет труда: $x = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $y = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

Значениям $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ соответствует точка покоя $(0; 0)$.

Если $C_1 = 0$, $C_2 > 0$, то точка $(x; y)$ движется по лучу $x = 0$, $y > 0$. Направление движения определяется знаком λ_2 : при $\lambda_2 > 0$ с ростом t точка удаляется от начала координат, а при $\lambda_2 < 0$ — приближается к нему. Причем, при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка пробегает весь луч.

Аналогично, если $C_1 = 0$, $C_2 < 0$, то точка $(x; y)$ движется по лучу $x = 0$, $y < 0$. Таким образом, прямая $x = 0$ состоит из трех непересекающихся траекторий — точки покоя и двух открытых лучей.

Значения $C_2 = 0$, $C_1 \neq 0$ дают нам еще две траектории-луча, лежащих на прямой $y = 0$.

Если же $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, исключая из уравнений движения параметр t , мы получим уравнение траекторий в виде $y = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$. Графики этих степенных функций имеют существенные различия в зависимости от знака показателя λ_2/λ_1 .

Пусть λ_1 и λ_2 имеют одинаковый знак ($\lambda_2 \cdot \lambda_1 > 0$), тогда $\lambda_2/\lambda_1 > 0$. График функции $y = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$ проходит через точку $(0; 0)$ и касается в этой точке оси Ox при $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, либо оси Oy при $|\lambda_2| < |\lambda_1|$. Точка $(0; 0)$ разбивает каждую параболу на две траектории.

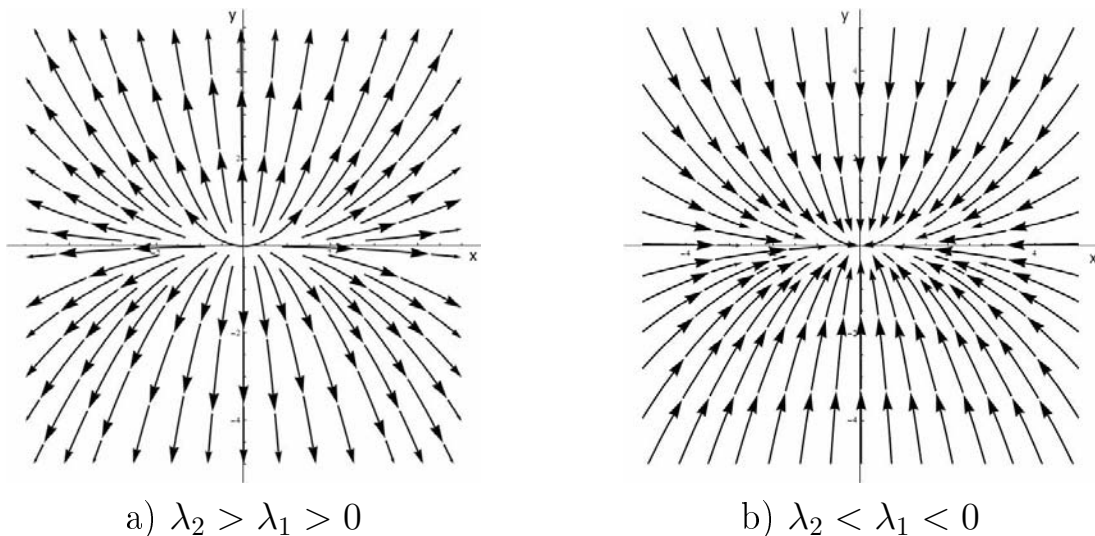


Рис. 14.1. Траектории в примере 1 (собственные значения одного знака).

На рис. 14.1a, 14.1b изображены траектории рассматриваемой системы в случае $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Стрелками указано направление движения точки при возрастании параметра t . Такую картину траекторий и точку $(0; 0)$ называют узлом. В случае $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ узел называется неустойчивым (рис. 14.1a), в случае $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ — устойчивым (рис. 14.1b).

Точная формулировка понятия устойчивости будет дана позднее, сейчас же нам достаточно интуитивного понимания того, что в первом случае точки, отличные от $(0; 0)$, с ростом времени удаляются от начала координат, а во втором случае — притягиваются к нему.

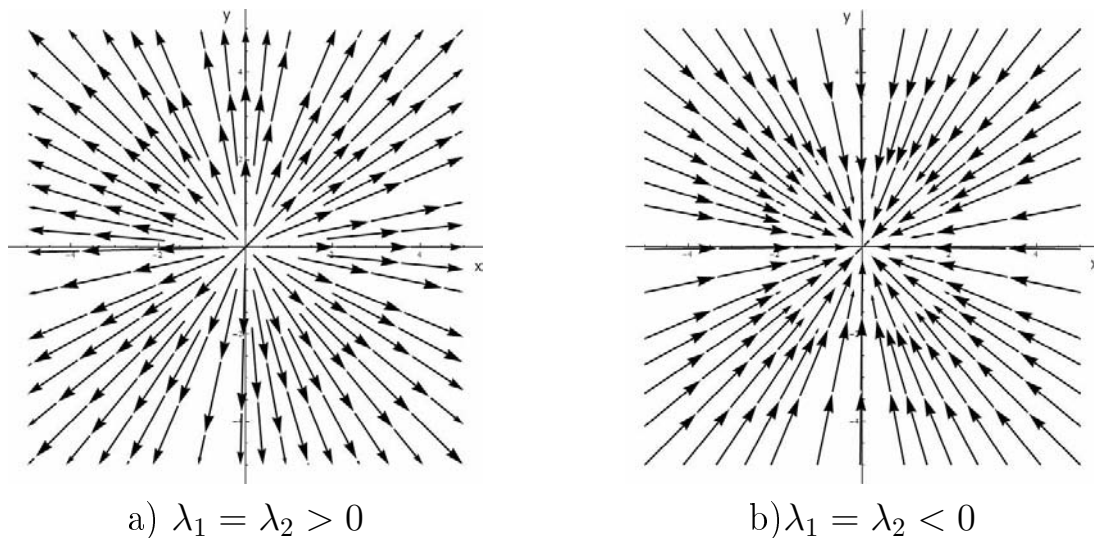


Рис. 14.2. Траектории в примере 1 (равные собственные значения).

В частном случае $\lambda_1 = \lambda_2$ все траектории, отличные от положения равновесия, являются лучами. Такая картина траекторий называется дикритическим или звездным узлом (рис 14.2a, 14.1b).

Если λ_1 и λ_2 разных знаков ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то графиком функции $y = Cx^{\lambda_2/\lambda_1}$ является гипербола с асимптотами $x = 0$ и $y = 0$.

На рис. 14.3 изображены траектории в случае $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. При движении по траектории $y = 0$ ($x > 0$ или $x < 0$) точка приближается к началу координат. При движении по остальным траекториям при $t \rightarrow +\infty$ точка удаляется от точки покоя. В такой ситуации точка $(0; 0)$ называется седлом. \square

Пример 2. Нарисовать траектории системы

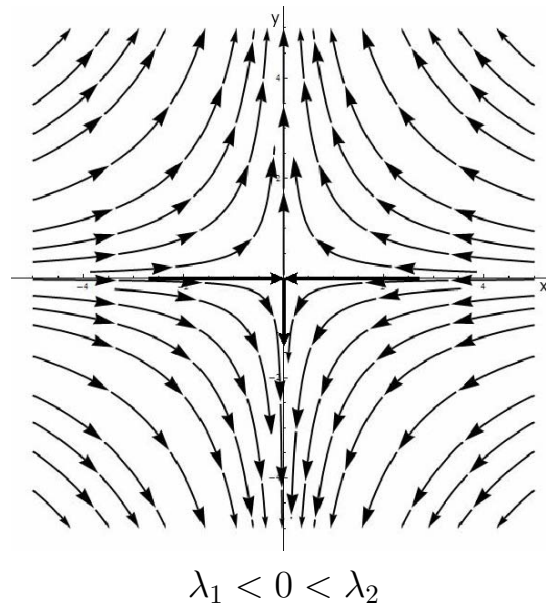


Рис. 14.3. Траектории в примере 1 (собственные значения разных знаков).

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases} \quad (\lambda \neq 0). \quad (14.2)$$

Мы не будем искать решения этой системы $x = x(t)$, $y = y(t)$, а сразу получим уравнение траекторий. Для этого исключим параметр t , деля одно уравнение системы на другое:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\lambda x + y}{\lambda y}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\lambda y dx = (\lambda x + y) dy \quad \text{или} \quad \lambda(y dx - x dy) = y dy.$$

Отсюда либо $y \equiv 0$, либо $\lambda \frac{y dx - x dy}{y^2} = \frac{dy}{y}$, то есть $\lambda d\left(\frac{x}{y}\right) = d(\ln |y|)$.

Общее решение этого уравнения $\lambda \frac{x}{y} = \ln |y| + C$ можно переписать в виде $x = \frac{y}{\lambda} \ln Cy$ и построить траекторию как график функции $x = x(y)$ (рис. 14.4).

В точке $(0; 0)$ все траектории касаются оси Ox . Определить направление движения по траектории можно из первого уравнения системы: в

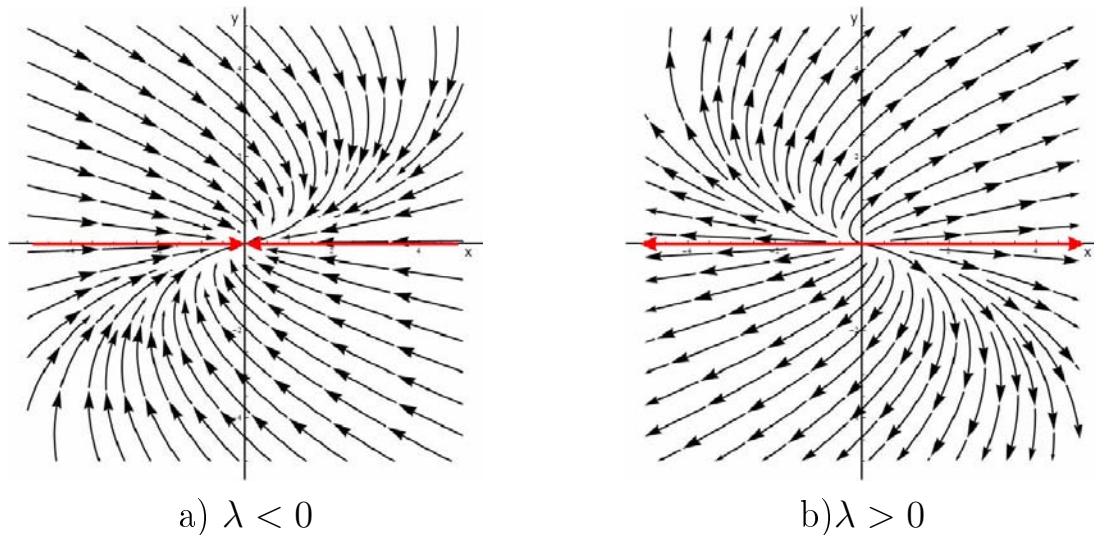


Рис. 14.4. Траектории в примере 2.

точке $(x; 0)$ вектор скорости $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}$

Точка $(0; 0)$ называется вырожденным узлом: устойчивым, если $\lambda < 0$, и неустойчивым, если $\lambda > 0$. \square

Пример 3. Нарисовать траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases} \quad \beta \neq 0. \quad (14.3)$$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$ имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Исключим параметр t из уравнений (14.3):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha x + \beta y}{-\beta x + \alpha y}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(-\beta x + \alpha y) dx = (\alpha x + \beta y) dy \quad \text{или}$$

$$\alpha(y dx - x dy) = \beta(x dx + y dy).$$

Перейдем в полярную систему координат, положив
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Тогда $\rho^2 = x^2 + y^2$ и

$$x dx + y dy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}d\rho^2 = \rho d\rho$$

$$y dx - x dy = -x^2 \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = -\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi d\varphi = -\rho^2 d\varphi$$

Подставляя эти выражения в уравнение, получим

$$-\alpha \rho^2 d\varphi = \beta \rho d\rho.$$

Решение $\rho = 0$ — это точка покоя $(0; 0)$. Если же $\rho > 0$, то

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{\beta}\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}.$$

Траектории, соответствующие этим решениям, являются спиралями. Если $\alpha/\beta > 0$, то с ростом φ расстояние ρ от точки на траектории до начала координат уменьшается, то есть спираль сужается при движении по ней в направлении против часовой стрелки. Если $\alpha/\beta < 0$, то спираль расширяется.

Чтобы определить направление движения точки при возрастании параметра t , вспомним, что решение системы (14.3) можно записать через матричную экспоненту:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Множитель e^{at} показывает, что точка $(x; y)$, двигаясь по траектории, с ростом t удаляется от положения равновесия, если $\alpha > 0$, и приближается к нему, если $\alpha < 0$. На рис. 14.5 ($a - d$) изображены траектории системы (14.3) при различных значениях α и β . Точка $(0; 0)$ в таком случае называется фокусом, устойчивым, если $\alpha < 0$, или неустойчивым,

если $\alpha > 0$. \square

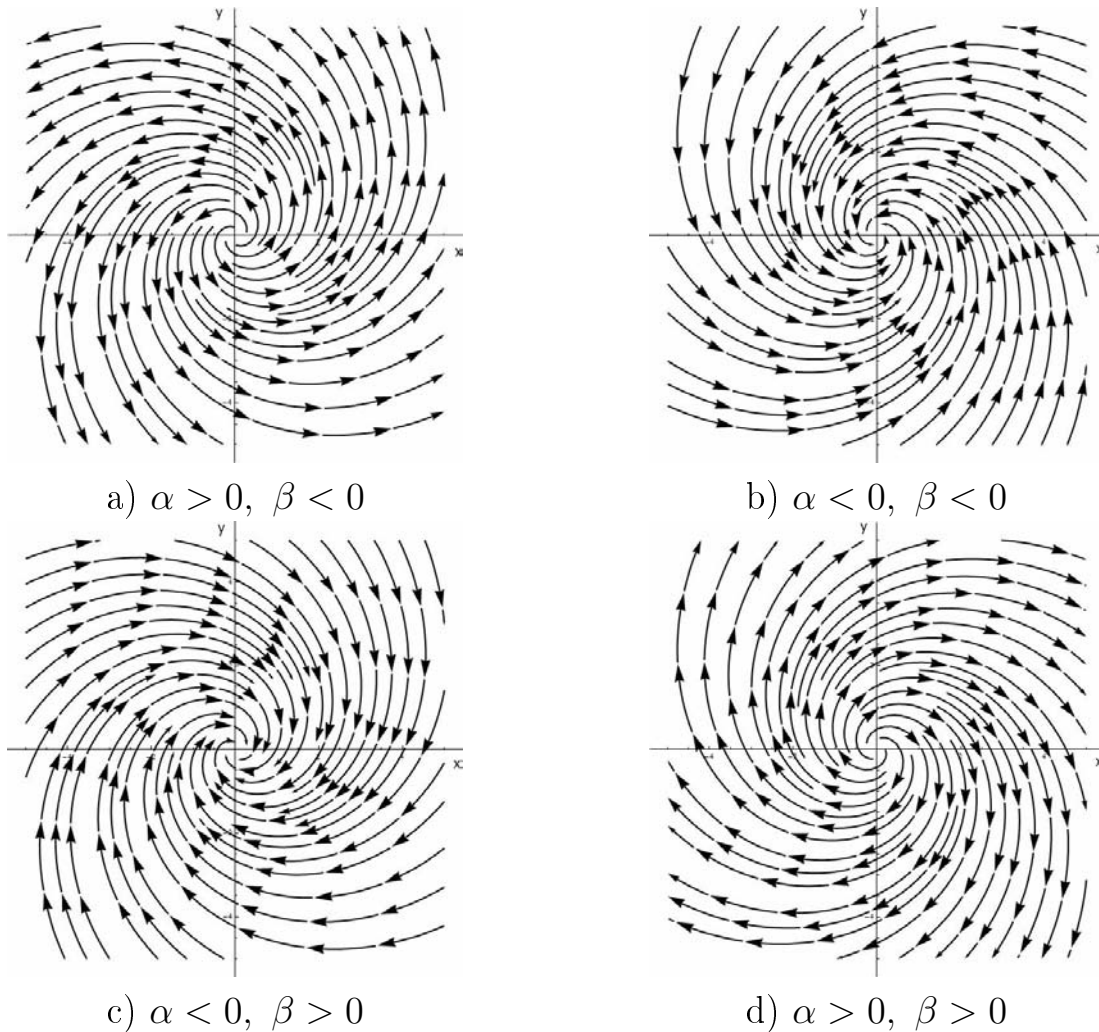


Рис. 14.5. Траектории в примере 3.

Пример 4. Нарисовать траектории системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y \\ \dot{y} = -\beta x \end{cases} \quad \beta \neq 0. \quad (14.4)$$

Можно рассматривать ее как частный случай системы (14.3), однако проще сразу получить уравнение траекторий

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-x} \quad \text{или} \quad x dx + y dy = 0.$$

Таким образом, все траектории являются окружностями $x^2 + y^2 = C$. Причем, как видно из общего решения системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

движение имеет периодический характер, и точка пробегает окружность бесконечно много раз. Соответствующие траектории являются замкнутыми. Точка $(0; 0)$ для системы (14.3) называется центром.

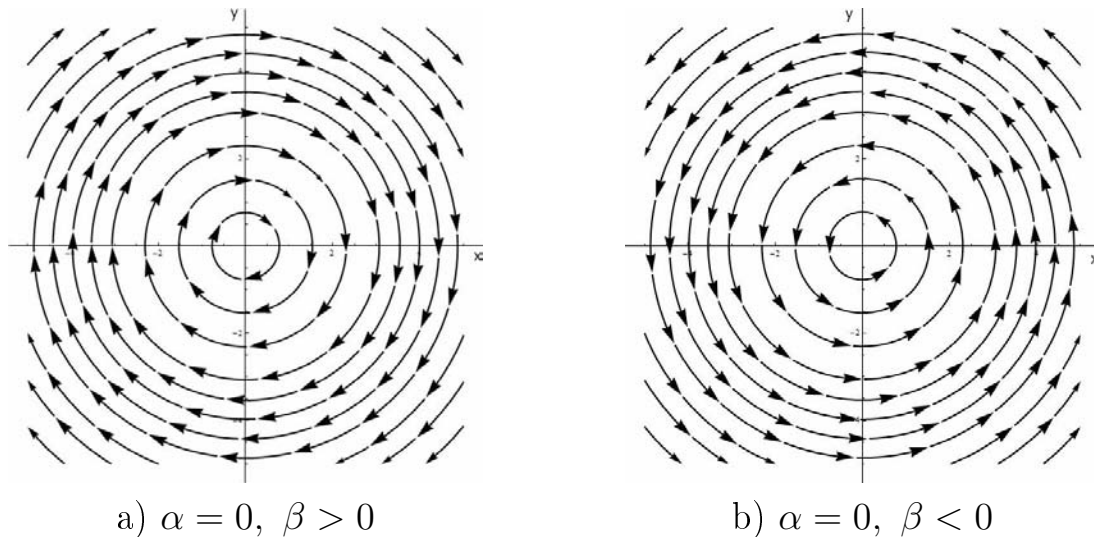


Рис. 14.6. Траектории в примере 4.

Направление движения по окружностям определяется знаком β . Чтобы увидеть это направление, построим вектор скорости в произвольной точке, например $x = 0, y > 0$. Из системы (14.4) получаем $\dot{x} = \beta y, \dot{y} = 0$, то есть движение происходит против часовой стрелки, если $\beta > 0$, и по часовой стрелке, если $\beta < 0$ (рис. 14.6а и 14.6б). \square

Рассмотренные примеры охватывают все разнообразие поведения траекторий, если $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Если же $\det \mathbf{A} = 0$, но $\text{rank } \mathbf{A} = 1$, то система (14.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1(ax + by) \\ \dot{y} = k_2(ax + by) \end{cases}.$$

Все точки, лежащие на прямой $ax + by = 0$, являются точками покоя. Уравнение траекторий $\frac{dx}{dy} = \frac{k_1}{k_2}$ имеет общее решение $k_1 y - k_2 x = C$.

На рис. 14.7 показано, как могут выглядеть траектории системы в

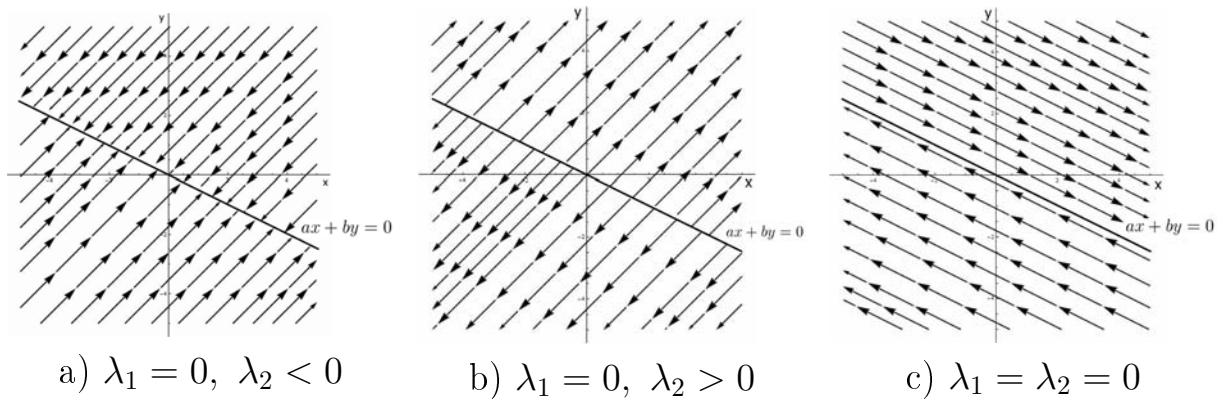


Рис. 14.7. Примеры траекторий в случае вырожденной матрицы \mathbf{A} .

зависимости от собственных чисел матрицы \mathbf{A} .

Далее мы рассмотрим, как можно определить характер точки покоя для произвольной системы вида (14.1).

Пример 5. Нарисовать траектории системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. Следовательно, матрица \mathbf{A} подобна диагональной. Найдем собственные векторы: $\vec{u}^{[1]}|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}^{[2]}|_{\lambda=5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Составим из этих векторов матрицу перехода $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и сделаем замену переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Итак, в базисе из собственных векторов система распалась на два уравнения. И мы знаем, как должны выглядеть траектории в новой системе координат — это неустойчивый узел (см. пример 1, рис. 14.1а). Линейная замена переменных всего лишь осуществляет поворот и растяжение

плоскости, поэтому в старой системе координат картина траекторий будет выглядеть похожим образом. Отметим ее основные черты.

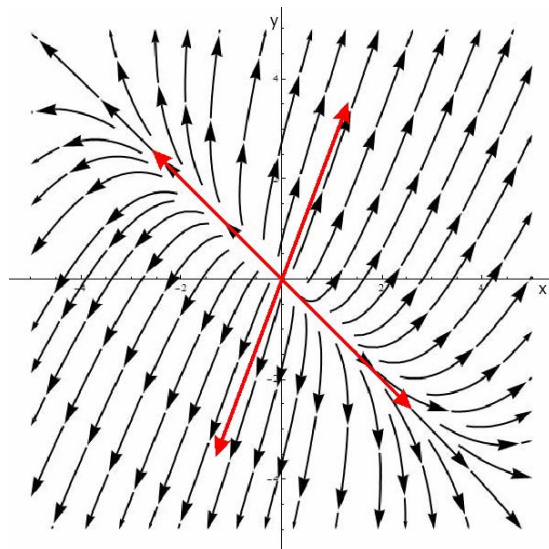


Рис. 14.8. Траектории в примере 5.

Новые координатные оси, если их изобразить в исходной системе координат, направлены вдоль собственных векторов $\vec{u}^{[1]}$ и $\vec{u}^{[2]}$. Прямолинейные траектории, исходящие из начала координат в направлении собственных векторов, остаются прямолинейными. Остальные траектории в точке $(0; 0)$ касаются направления, соответствующего меньшему по модулю собственному числу. Картина траекторий рассматриваемой системы показана на рис. 14.8. \square

Пример 6. Нарисовать траектории системы
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Собственные векторы: $\vec{u}^{[1]}|_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}^{[2]}|_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

В базисе из собственных векторов система распадется на два уравнения, и картина траекторий в новой системе координат — это седло (см. пример 1, рис. 14.3). Прямолинейные траектории, входящие и исходящие из начала координат, направлены вдоль собственных векторов $\vec{u}^{[1]}$ и $\vec{u}^{[2]}$:

положительному собственному числу соответствует уходящая траектория, отрицательному — входящая. Направление движения по остальным траекториям восстанавливается без труда (рис. 14.9). \square

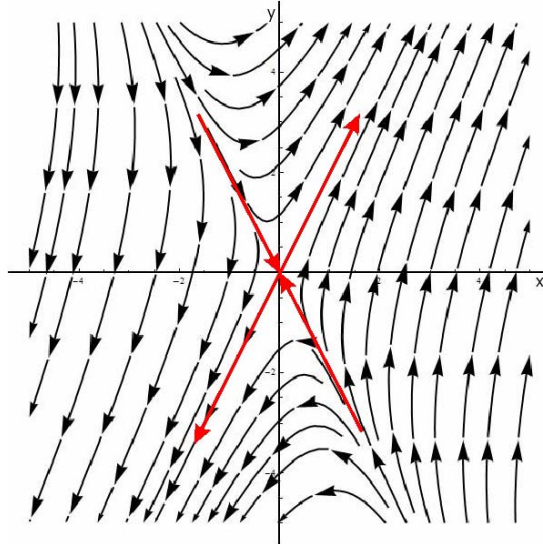


Рис. 14.9. Траектории в примере 6.

Пример 7. Нарисовать траектории системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = (\lambda - 3)^2$ имеет кратный корень $\lambda_{1,2} = 3$, причем $\text{rank}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 1$. Это означает, что мы можем найти только один собственный вектор $\vec{u}|_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. В курсе линейной алгебры доказывается, что матрица \mathbf{A}

подобна жордановой клетке $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, и можно найти базис, в котором система примет вид (14.2) (см. пример 2).

Однако мы не будем этого делать. Мы знаем, что картина траекторий — вырожденный неустойчивый узел. Прямолинейные траектории, исходящие из начала координат, направлены вдоль собственного вектора. Осталось только выяснить, в какую сторону закручены остальные траектории. Для этого достаточно построить вектор скорости. Например, в точке $(0; 1)$ он равен $(1; 4)$ (рис. 14.10). \square

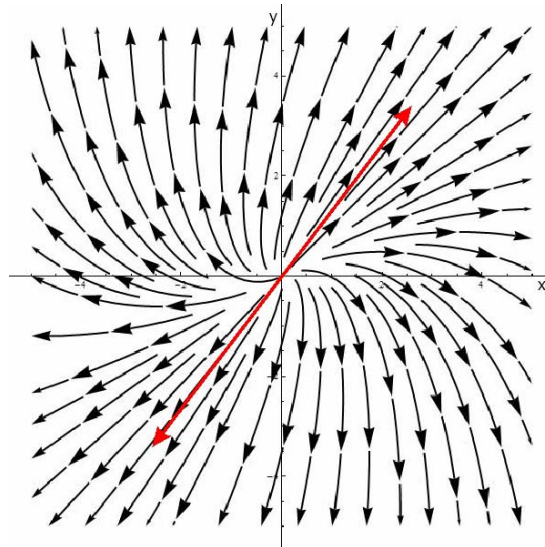


Рис. 14.10. Траектории в примере 7.

Пример 8. Нарисовать траектории системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Это означает, что существует невырожденное линейное преобразование, приводящее нашу систему к виду (14.3) с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

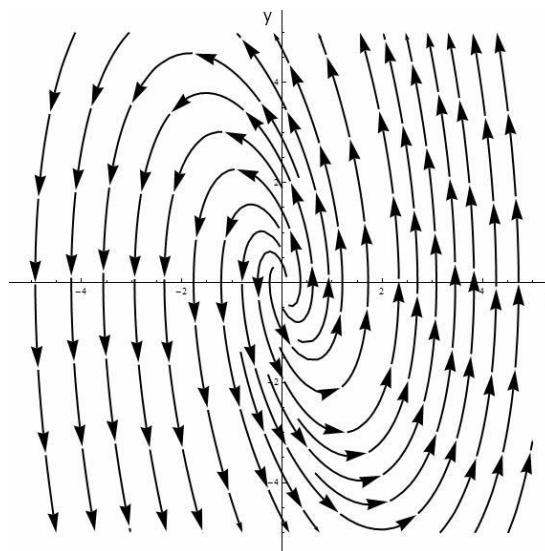


Рис. 14.11. Траектории в примере 8.

Следовательно, точка $(0; 0)$ является неустойчивым фокусом, а траектории будут спиралями. Нам достаточно выяснить ориентацию этих спиралей — в каком направлении они закручиваются. И опять на помощь нам придет вектор скорости. Например, в точке $(1; 0)$ он равен $(0; 5)$, в точке $(0; 1)$ — $(-1; 7)$ (рис. 14.11). \square

Пример 9. Нарисовать траектории системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

Матрица системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

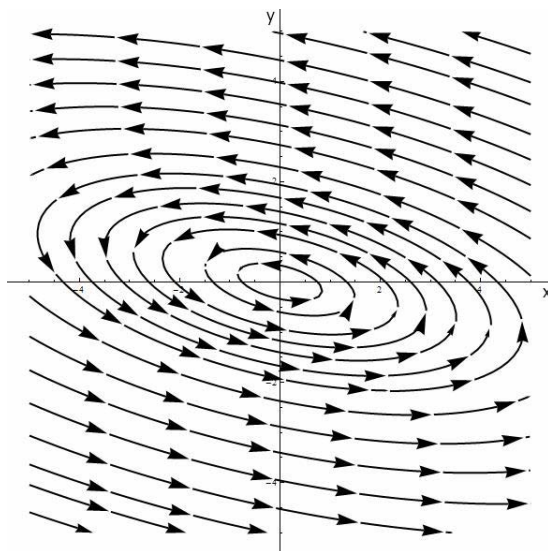


Рис. 14.12. Траектории в примере 9.

В случае чисто мнимых собственных чисел точка $(0; 0)$ является центром, то есть в должным образом выбранной системе координат траектории являются окружностями. Следовательно, в исходной системе координат траектории будут эллипсами. Мы не будем уточнять, как расположены оси этих эллипсов. Достаточно построить вектор скорости в какой-либо точке, чтобы выяснить направление движения по этим эллипсам. Например, в точке $(0; 1)$ он равен $(-5; 1)$ (рис. 14.12). \square

Наконец, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}, \quad (a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0. \quad (14.5)$$

Точка $(0; 0)$ является для него особой, поскольку в этой точке уравнение не определяет значение производной y' . Можно сопоставить этому уравнению систему вида (14.1), введя параметр t следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_2x + b_2y \\ \frac{dy}{dt} = a_1x + b_1y \end{cases}$$

Как мы видели, точка $(0; 0)$ является точкой покоя этой системы, а интегральные линии уравнения (14.5) содержат в себе целые траектории системы. Таким образом, вместе с классификацией точки покоя системы (14.1) мы получили классификацию особой точки для уравнения (14.5). Заметим только, что на интегральных линиях уравнения не имеет смысла определять направление движения, поскольку параметр t был введен произвольно и может быть заменен параметром $\tau = -t$.

Домашняя контрольная работа

В домашнюю работу входят задачи из (*)

№№ 962, 963, 965, 967, 975.

(*) Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие для вузов. — 6-е изд., стер. — М.: Наука. 1985. — 128 стр.

Занятие 15

Автономные уравнения и системы второго порядка и их траектории. Линеаризация.

Система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если в нее явно не входит независимая переменная. Мы будем рассматривать нормальные автономные системы, т.е. системы вида $\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y})$. Если трактовать переменную t как время, то автономность системы означает, что описываемый ею закон не меняется с течением времени, что часто бывает в физических задачах.

Каждому решению автономной системы можно поставить в соответствие кривую $\vec{y} = \vec{y}(t)$ в пространстве \mathbb{R}^n , называемую *траекторией*, и понимать решение системы как закон движения точки \vec{y} по этой кривой, а саму траекторию — как «дорогу», по которой движется точка, или «след», который она оставляет за собой.

Хотя при рассмотрении траекторий закон движения отступает на второй план, картина их расположения в *фазовом пространстве* \mathbb{R}^n — *фазовый портрет* системы — может быть не менее выразительной, чем картина интегральных линий, особенно если указать на траекториях направление движения точек при возрастании параметра t .

Как мы увидим далее, иногда построить фазовый портрет проще, чем найти закон движения. Тем не менее, даже если мы не можем проинтегрировать систему, фазовый портрет может многое рассказать о поведении решений.

Начнем в рассмотрении простейших примеров.

Пример 1. Рассмотрим два уравнения первого порядка: $\dot{y} = y$ и $\dot{y} = y^3$. Нетрудно найти общее решение каждого из них: $y = Ce^t$ и $y^2 = -\frac{1}{2(t+C)}$ соответственно. Помимо этого, второе уравнение имеет частное решение $y \equiv 0$ (для первого уравнения решение $y \equiv 0$ получает-

ся из общей формулы при $C = 0$).

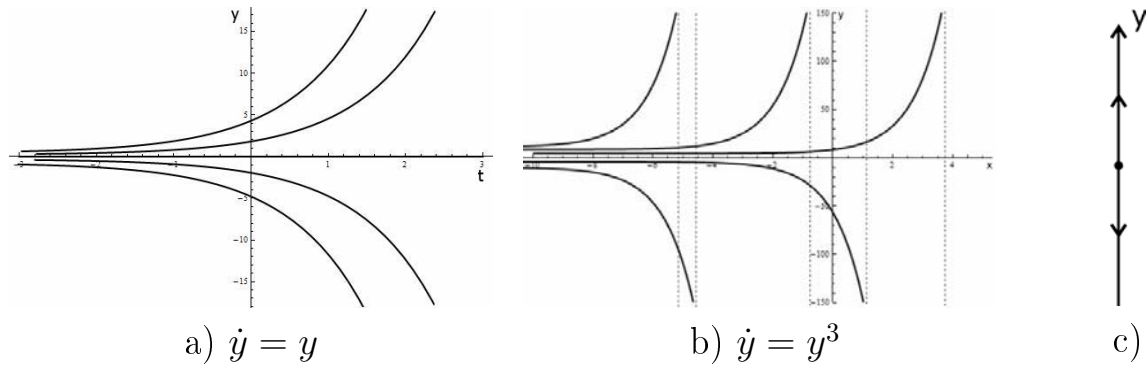


Рис. 15.1. Иллюстрации к примеру 1.

Каждое непродолжаемое решение первого уравнения существует на всей прямой $(-\infty; +\infty)$, а для второго уравнения каждое непродолжаемое решение, кроме $y \equiv 0$, существует только на луче $(-\infty; -C)$ (рис. 15.1 *a* и 15.1 *b*).

Тем не менее, интегральные кривые этих уравнений имеют не только указанные различия, но и много общего. Так, прямая $y = 0$ делит плоскость $(t; y)$ на две полосы, в каждой из которых все интегральные кривые можно получить параллельным переносом одной из них вдоль оси t . Все линии «стягиваются» к прямой $y = 0$ при $t \rightarrow -\infty$ и удаляются от нее с ростом t .

Замеченное сходство в поведении решений станет еще более явным, если нарисовать движение точки $y(t)$ по оси Oy , указав направление движения при возрастании параметра t (рис. 15.1 *c*). Решению $y \equiv 0$ при этом соответствует единственная точка $y = 0$, а остальным решениям — лучи $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$, причем движение по этим лучам происходит в направлении *от* точки $y = 0$. Фактически, мы получили траектории, спроектировав интегральные линии на ось Oy .

Как видим, *фазовые портреты* рассматриваемых уравнений совпадают: имеется одна точка покоя, разбивающая фазовую прямую на два луча, движение по которым происходит в направлении *от* нее. Причем эту картину можно получить, не решая самих уравнений, а лишь рассматривая функции, стоящие в правой части каждого из них.

Действительно, если трактовать переменную t как время, то $\dot{y}(t)$ означает скорость движения точки по оси Oy . Заметим, что эта скорость в точке y определяется уравнением $\dot{y} = f(y)$, и, в силу его автономности, зависит только от значения y .

Так, если $f(a) = 0$, то уравнение имеет решение $y \equiv a$ и, при выполнении в окрестности точки a условия единственности решения задачи Коши, ни одно другое решение не может пройти через точку $y = a$. Таким образом, решения уравнения $f(y) = 0$ задают на фазовой прямой неподвижные точки, соответствующие решениям $y \equiv const$.

Если же во всех точках некоторого интервала $U \subset R$ функция $f(y)$ сохраняет знак, то этот интервал является частью траектории, вдоль которой все точки y смещаются в одном и том же направлении. Так, если $f(y) > 0$, то есть $\dot{y} > 0$, то движение происходит в сторону возрастания y . Если же $f(y) < 0$, то в сторону убывания y .

Нетрудно видеть, что функции $f(y) = y$ и $f(y) = y^3$ обращаются в ноль в одной и той же точке $y = 0$ и имеют одинаковые знаки на интервалах $y < 0$ и $y > 0$, что и определяет идентичность фазовых портретов рассмотренных уравнений. \square

Если уравнение имеет много изолированных точек покоя, то они разбивают прямую y на конечное или счетное множество интервалов $(a_i; a_{i+1})$, каждый из которых является целой траекторией (среди этих интервалов обязательно есть два луча). Можно говорить о характере отдельной точки покоя, так как каждая такая точка имеет окрестность, в которой она является единственной, и в этой окрестности фазовый портрет уравнения выглядит одним из четырех возможных образов (рис. 15.2 a–d).

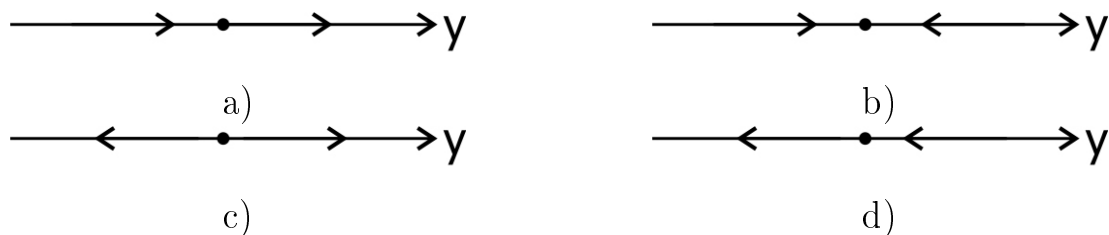


Рис. 15.2. Фазовый портрет уравнения в окрестности точки покоя.

Итак, фазовый портрет автономного уравнения первого порядка определяется набором и характером его неподвижных точек. Говорят, что два автономных дифференциальных уравнения $\dot{y} = f(y)$ *качественно эквивалентны*, если они имеют равное количество точек покоя одинакового характера, расположенных на фазовой прямой в одинаковом порядке.

Например, уравнения $\dot{y} = (y + 1)^2$ и $\dot{y} = \operatorname{ch} y - 1$ качественно эквивалентны, а уравнения $\dot{y} = y^2 - 1$ и $\dot{y} = 1 - y^2$ — не являются качественно эквивалентным.

Как мы увидим далее, для автономных систем ситуация гораздо сложнее. Чтобы уверенно строить и «читать» их фазовые портреты, вспомним некоторые свойства траекторий автономных систем (в предположении выполнения условий теоремы существования и единственности задачи Коши).

1. Траектории, соответствующие разным решениям системы, либо не пересекаются, либо совпадают.

Действительно, если $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ — решение автономной системы с областью определения $t \in I$ и множеством значений $D \subset R^n$, то $\vec{y} = \vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t + C)$ при любом значении C также является решением этой системы с областью определения $t + C \in I$ и тем же множеством значений D .

Это означает, что интегральная кривая $\vec{y} = \vec{\psi}(t)$ получается из интегральной кривой $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ сдвигом по t на величину C . Поскольку через каждую точку полосы $D' = R \times D$ проходит только одна интегральная кривая, то все интегральные кривые в этой полосе можно получить сдвигом единственной кривой $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$.

Если траектории имеют хотя бы одну общую точку, то есть $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\psi}(t_2)$, то $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t + C)$, где $C = t_2 - t_1$. Таким образом, точки, соответствующие решениям $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$, описывают одну и ту же траекторию, но только с постоянной разницей $C = t_2 - t_1$ во времени.

2. Если траектория пересекла саму себя, то есть $\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ определено при всех $t \in R$ и возможны только два взаимоисключающих случая:

1) $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{a} = const$,

2) существует $T > 0$, такое что $\vec{\varphi}(t + T) \equiv \vec{\varphi}(t)$, но $\vec{\varphi}(t_1) \neq \vec{\varphi}(t_2)$ при $|t_2 - t_1| < T$.

В первом случае точка \vec{a} в фазовом пространстве представляет собой целую траекторию и называется *точкой покоя* (неподвижной точкой или положением равновесия системы).

Во втором случае решение является периодическим с периодом T и ему соответствует замкнутая траектория, называемая *циклом*.

Подведем итог: если в некоторой области $D \subset R^n$ для системы $\frac{d\vec{y}}{dt} = f(\vec{y})$ выполнены условия теоремы существования и единственности задачи Коши, то через каждую точку этой области проходит единственная траектория системы. Это может быть точка покоя или кривая без самопересечений (среди которых особо выделим замкнутые кривые, или циклы, соответствующие периодическим решениям системы).

Заметим, что в случае неавтономной системы также можно говорить о траектории как о проекции интегральной линии на фазовое пространство. Однако, в отличие от автономных систем, траектории могут, и как правило будут, пересекаться.

Пример 2. Рассмотрим систему
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2t \end{cases}$$

Ее решение $x = t + C_1$, $y = t^2 + C_2$. Исключая t , получим уравнение траекторий $y = (x - C_1)^2 + C_2$. Любые две параболы этого семейства $y = (x - C_1)^2 + C_2$ и $y = (x - C'_1)^2 + C'_2$ пересекаются в одной точке, если $C_1 \neq C'_1$ (рис. 15.3).

Интегральные линии в пространстве $(x; y; t)$ не пересекаются, поскольку выполняются условия теоремы существования и единственности

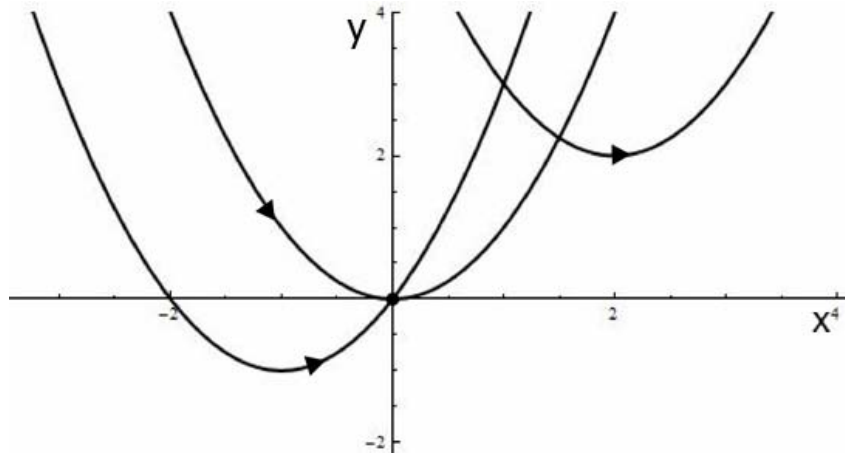


Рис. 15.3. Траектории неавтономных систем могут пересекаться (пример 2).

решения задачи Коши.

Например, поставив задачу Коши $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, мы получим решение $x = t$, $y = t^2$. Траектория этого движения $y = x^2$ проходит через точку $(0; 0)$ на плоскости xOy . Но через эту же точку проходит траектория решения другой задачи Коши: $x(1) = 0$, $y(1) = 0$. Закон движения этой точки $x = t - 1$, $y = t^2 - 1$, а траектория описывается уравнением $y = (x - 1)^2 - 1$. \square

Теперь перейдем к системам второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x; y) \\ \dot{y} = Q(x; y) \end{cases} \quad (15.1)$$

На предыдущем занятии мы уже рассматривали простейшие автономные системы второго порядка — линейные однородные системы, и познакомились с их траекториями. Для нахождения траекторий произвольных автономных систем также удобно перейти от системы к уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x; y)}{P(x; y)}$, или в симметричной форме $P(x; y)dy = Q(x; y)dx$.

Между траекториями системы и интегральными кривыми уравнения существует определенная связь: каждая траектория системы целиком лежит на интегральной линии уравнения, хотя интегральная линия может состоять из нескольких траекторий.

Чтобы восстановить направление движения по траектории, нужно в произвольной ее точке $(x_0; y_0)$ построить вектор скорости $\vec{v} = (\dot{x}; \dot{y}) = (P; Q)|_{(x_0; y_0)}$. Этот вектор является касательным к траектории и указывает направление движения при возрастании параметра t . \square

Пример 3. Рассмотрим две системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x} = -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Обе системы имеют одно и то же уравнение траекторий $x dx + y dy = 0$. Его общее решение дается формулой $x^2 + y^2 = C^2$, которая описывает на плоскости $(x; y)$ семейство окружностей. Система имеет единственную точку покоя — начало координат. Следовательно, движение по окружностям имеет периодический характер. Соответствующие траектории являются замкнутыми. Точка $(0; 0)$ для обеих систем является центром.

Однако закон движения по траекториям для этих систем различается. Из общего решения первой системы $\begin{cases} x = C \cos(t + \alpha) \\ y = C \sin(t + \alpha) \end{cases}$ видно, что период один и тот же для всех решений. Общее решение второй системы — $\begin{cases} x = C \cos(Ct + \alpha) \\ y = C \sin(Ct + \alpha) \end{cases}$. Отсюда видно, что период тем меньше, чем больше радиус окружности. \square

Пример 4. Нарисовать фазовый портрет системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x^3 \end{cases}$.

Система сводится к уравнению $2x^3 dx + y dy = 0$, общее решение которого легко найти: $x^4 + y^2 = C$. При $C = 0$ мы получаем на фазовой плоскости $(x; y)$ точку покоя $(0; 0)$, а при $C > 0$ — семейство замкнутых кривых, каждая из которых является целой траекторией — циклом. Как и в случае линейных систем, точка покоя, имеющая такой фазовый портрет, называется *центром*.

Для определения направления движения выберем точку $(0; 1)$. В ней

вектор скорости $\vec{v} = (1; 0)$, следовательно, движение по замкнутой траектории происходит по часовой стрелке (рис. 15.4).

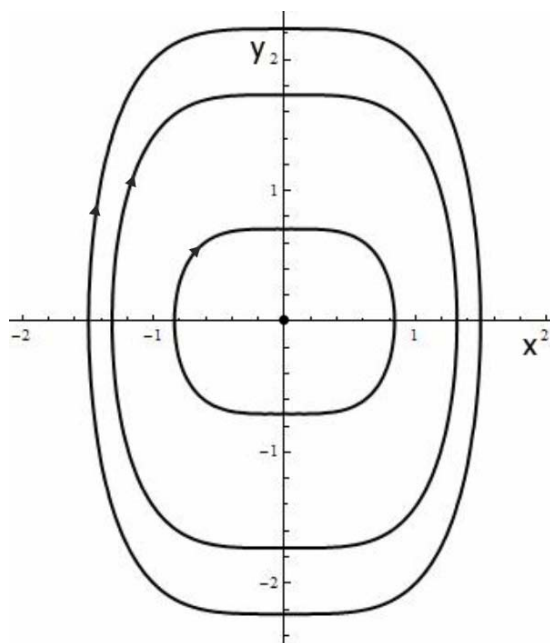


Рис. 15.4. Траектории в примере 4.

Зная общий интеграл системы $x^4 + y^2 = C$, можно было бы попытаться восстановить закон движения. Например, выразив из общего интеграла y через x , и подставив его в первое уравнение системы, получим уравнение $\dot{x} = \pm\sqrt{C - x^4}$, определяющее зависимость $x(t)$. Хотя мы получили уравнение с разделяющимися переменными, проинтегрировать его в элементарных функциях невозможно. Кроме того, при таком подходе довольно сложно разглядеть периодический характер решения.

Как видно из этого примера, сведя систему к уравнению и найдя его общий интеграл, мы смогли довольно быстро определить вид траекторий и направление движения по ним, а вот отыскать закон движения так легко и просто не удастся. Поэтому разумно в таких случаях удовлетвориться только описанием фазового портрета. \square

Фазовый портрет нелинейной системы может быть довольно сложным и вовсе не похожим на портрет линейной системы, даже если точка покоя всего одна.

Пример 5. Нарисовать фазовый портрет системы
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y^2. \end{cases}$$

Приравняв правые части системы к нулю, мы видим, что система имеет единственную точку покоя $(0; 0)$.

Система сводится к уравнению с разделяющимися переменными $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2}$. Проинтегрировав его, получаем общее решение: $x = Ce^{-1/y}$ (прямая $x = 0$ входит в него при $C = 0$). Заметим, что прямая $y = 0$ также является интегральной линией этого дифференциального уравнения и делит плоскость $(x; y)$ на две полуплоскости, в которых картины интегральных линий принципиально различны (рис. 15.5)

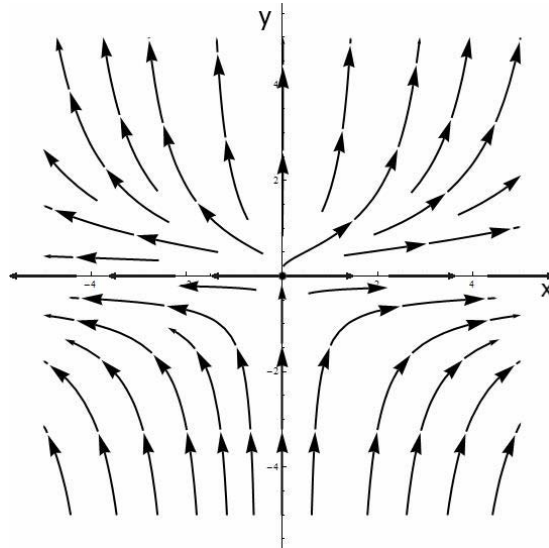


Рис. 15.5. Фазовый портрет системы в примере 5.

Если $y > 0$, то $e^{-1/y} \rightarrow +0$ при $y \rightarrow +0$. Интегральные линии «веером» расходятся от точки $(0; 0)$ и картина в малой ее окрестности напоминает узел. Однако при больших значениях y картина отлична от узла: $e^{-1/y} \rightarrow 1$ при $y \rightarrow +\infty$, и каждая кривая $x = Ce^{-1/y}$ имеет свою асимптоту $x = C$.

При $y \rightarrow -\infty$ кривая $x = Ce^{-1/y}$ также имеет асимптоту $x = C$. Но в малой окрестности точки $(0; 0)$ картина интегральных линий напоминает седло, так как $e^{-1/y} \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow -0$.

Замечание: исходная система распадается на независимые уравнения,

поэтому можно проинтегрировать их, восстановив таким образом закон движения, и убедиться в правильности сделанных выводов. \square

Пример 6. Нарисовать фазовый портрет системы
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

Заметим, что $(0; 0)$ — единственная точка покоя системы. Для поиска других траекторий решим уравнение $y dy + x^2 dy - 2yx dx = 0$. Его нетрудно преобразовать к виду $y dy + (x^2 dy - y dx^2) = 0$. Убедившись, что $y \equiv 0$ является решением, поделим это уравнение на y^2 , и получим общее решение $\ln |y| - \frac{x^2}{y} = C$.

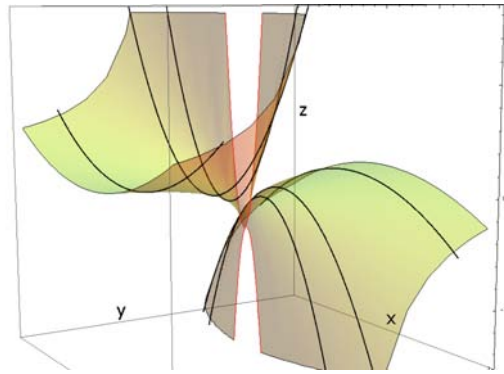
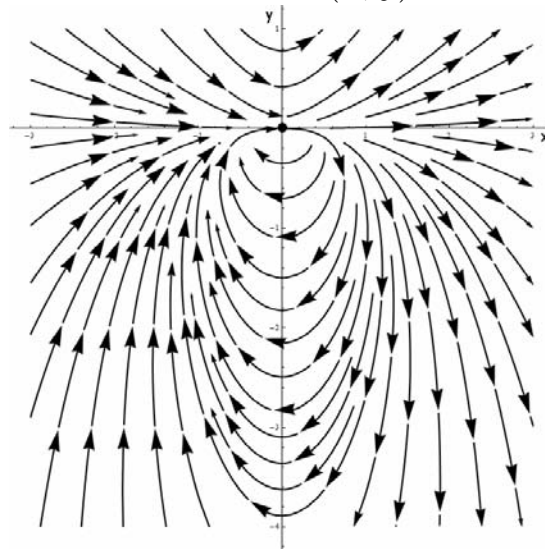
В отличие от предыдущих примеров, нарисовать это семейство кривых не так-то просто. Но нам поможет "выход в третье измерение". Поскольку интересующие нас кривые являются линиями уровня функции $F(x; y) = \ln |y| - \frac{x^2}{y}$, мы попробуем представить поверхность $z = F(x; y)$. Заметим, что относительно переменной x функция $F(x; y)$ является квадратичной, поэтому в каждом сечении $y = y_0$, за исключением $y = 0$, мы увидим параболу (рис. 15.6а). Теперь осталось представить сечение полученной поверхности плоскостями $z = C$ (рис. 15.6 б). \square

Пример 7. Нарисовать фазовый портрет системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

Решая систему
$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$
, мы обнаружим, что система имеет четыре точки покоя: $(\pm 1; 0)$ и $(0; \pm 1)$.

Уравнение траекторий $(1 - x^2 - y^2) dy = 2xy dx$ является уравнением в полных дифференциалах, и в нем легко выделить интегрируемые комбинации: $(1 - y^2) dy - (x^2 dy + y dx^2) = 0$. Следовательно, общий интеграл имеет вид $(y - \frac{y^3}{3}) - x^2 y = C$.

Как и в предыдущем примере, можно представить поведение траекторий, рассматривая их как линии уровня функции $F(x; y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} - y$.

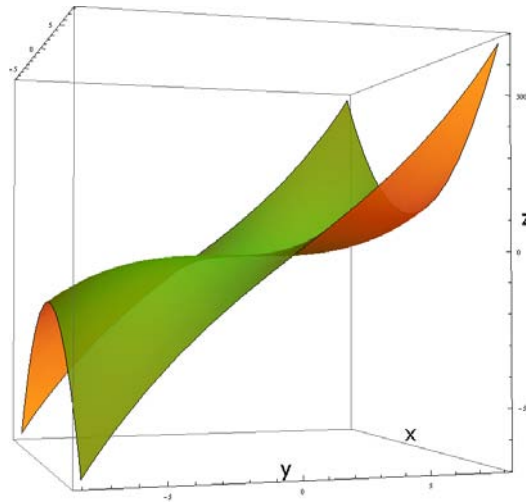
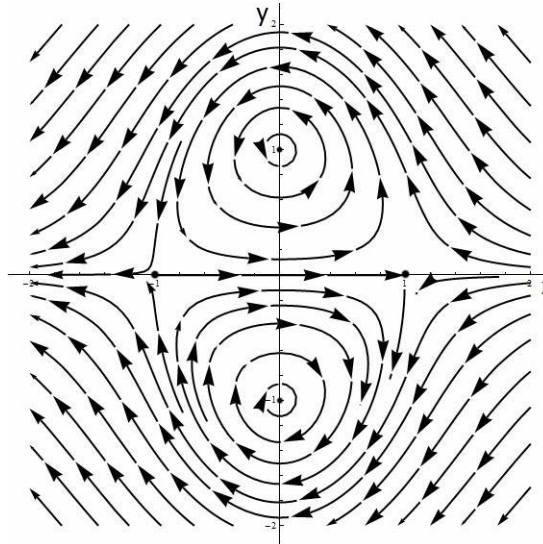
а) Сечения поверхности $z = F(x; y)$ плоскостями $y = y_0$ 

б) Фазовый портрет

Рис. 15.6. Построение фазового портрета в примере 6.

Изобразить график этой функции нам помогут современные компьютерные программы (рис. 15.7 а). Проводя сечение полученной поверхности плоскостями $z = C$, мы получим следующую картину (рис. 15.7 б).

Обратим внимание на следующие особенности. Прямая $y = 0$ является решением уравнения траекторий $(1 - x^2 - y^2) dy = 2xy dx$. Однако точки покоя $(\pm 1; 0)$ разбивают ее на несколько траекторий. Также мы видим замкнутую линию, проходящую через точки $(\pm 1; 0)$, которая разбивается этими точками на две траектории, движение по каждой из них происходит от точки $(1; 0)$ к точке $(-1; 0)$. Это еще раз иллюстрирует тот факт, что линия уровня функции $F(x; y)$ может состоять из нескольких траекторий. Все описанные выше траектории лежат на линии $F(x; y) = x^2y + \frac{y^3}{3} - y = 0$.

а) Поверхность $z = F(x; y)$ 

б) Фазовый портрет системы

Рис. 15.7. Построение фазового портрета в примере 7.

Отметим также, что локальные портреты точек $(\pm 1; 0)$ обладают всеми свойствами седла: две траектории входят в точку, две — выходят из нее, остальные точки сначала приближаются к точке покоя вдоль входящей траектории, а затем удаляются от точки покоя вдоль уходящей траектории. Поэтому точки $(\pm 1; 0)$ мы тоже назовем седлом.

Точки $(0; \pm 1)$ окружены замкнутыми траекториями, поэтому их локальный портрет мы назовем центром. \square

Как показывает последний пример, в нелинейном случае поведение траекторий в некоторой окрестности точки покоя может обладать теми

же существенными чертами, какие мы отмечали у траекторий линейной системы, то есть выглядеть как седло, узел, фокус или центр (в таком случае говорят, что фазовые портреты точек покоя качественно эквивалентны). И это приводит нас к мысли, что можно попытаться заменить нелинейную автономную систему линейной, имеющей точку покоя того же типа.

Допустим для простоты, что система (15.1) имеет точку покоя $(0; 0)$. Если правые части системы можно записать в виде

$$P(x; y) = a_{11}x + a_{12}y + g_1(x; y), \quad Q(x; y) = a_{21}x + a_{22}y + g_2(x; y),$$

где $g_i(x; y) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ при $(x^2 + y^2) \rightarrow 0$, то система

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (15.2)$$

называется *линеаризацией* системы (15.1) в точке $(0; 0)$.

Линеаризацию системы можно провести в любой точке покоя $(x_0; y_0)$, введя локальные координаты $(\xi; \eta)$ по правилу $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$. При такой замене переменных точка покоя будет иметь координаты $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Более эффективным методом построения линеаризации является разложение правых частей системы по формуле Тейлора в окрестности точки покоя. Из этой формулы сразу следует, что матрица линеаризованной системы имеет вид

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{array} \right) \Big|_{(x_0; y_0)}$$

Теорема о линеаризации устанавливает связь фазового портрета нелинейной системы (15.1) в окрестности точки покоя с фазовым портретом ее линеаризации. Эта теорема утверждает, что в невырожденном случае $(\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0)$ их фазовые портреты качественно эквива-

лентны, если только точка покоя линеаризованной системы не является центром.

Другими словами, центр является единственным исключением. Если же точка покоя линеаризованной системы является седлом, узлом, вырожденным узлом или фокусом, то такой же характер имеет и точка покоя нелинейной системы.

Вернемся к примеру 7.

В точках $(\pm 1; 0)$ линеаризованная система имеет матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mp 2 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$. И в той, и в другой точке собственные числа этой матрицы имеют разные знаки, следовательно, по теореме о линеаризации, у нелинейной системы каждая точка является седлом.

В точках $(0; \pm 1)$ линеаризованная система имеет матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$, и для нее эти точки являются центрами. В этом случае теорема не позволяет сделать вывод о характере поведения траекторий нелинейной системы. Хотя по линиям уровня первого интеграла $F(x; y)$ мы видели, что эти точки действительно являются центрами.

Вообще, изучение линий уровня первого интеграла — один из эффективных способов определения центра, поскольку линеаризация в таком случае не работает. Так, в примере 4 матрица линеаризованной системы в точке $(0; 0)$ имеет вид $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, но мы поняли, что точка покоя является центром, нарисовав линии уровня первого интеграла $F(x; y) = x^4 + y^2$.

Автономное уравнение второго порядка $\ddot{x} = f(x; \dot{x})$ можно свести к автономной системе, положив $y = \dot{x}$. Фазовым пространством уравнения второго порядка, таким образом, следует считать плоскость $(x; \dot{x})$.

Пример 8. Нарисовать фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Положив $y = \dot{x}$, перейдем к системе
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

Точки покоя системы $(\pi k; 0)$, $k \in \mathbb{N}$. Матрица линеаризованной системы в точке $(\pi k; 0)$ имеет вид $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \pi k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$.

Если k — нечетное число, то $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm 1$, следовательно, точка $(\pi k; 0)$ при нечетном k является седлом. Собственные векторы $\vec{u}^{[1]}|_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}^{[2]}|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. По этим направлениям траектории входят и выходят из точки покоя.

Если k — четное число, то $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Для линеаризованной системы точка покоя является центром, следовательно, определить характер этой точки для нелинейной системы таким способом нельзя.

Запишем уравнение траекторий: $y dy = -\sin x dx$. Его общий интеграл $y^2 - 2 \cos x = C$ перепишем в виде $y^2 = C + 2 \cos x$.

На рис. 15.8 изображены траектории рассматриваемого уравнения. Точки $(\pi k; 0)$ при четном k являются центром. \square

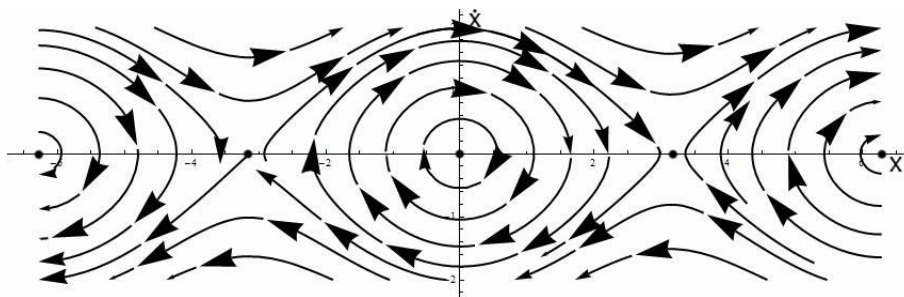


Рис. 15.8. Фазовый портрет в примере 8.

Самостоятельная работа

1. Найти стационарные решения и нарисовать траектории уравнения $\dot{x} = \sin x$

Определить характер точек покоя автономных систем с помощью линеаризации.

$$2. \begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$$

Найти стационарные решения и указать их тип.

$$4. \ddot{x} + e^{\dot{x}} - x^2 = 0$$

$$5. \ddot{x} - \cos \dot{x} + \sin x + 1 = 0$$

$$6. \text{ Нарисовать траектории системы } \begin{cases} \dot{x} = -y^2 \\ \dot{y} = x^2. \end{cases}$$

Домашняя работа

№№ 1007, 1018, 1024, 1025, 1026.

Занятие 16

Автономные системы высокого порядка и их траектории. Неавтономные системы.

Рассмотрим автономную систему уравнений общего вида

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}), \text{ где } \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (16.1)$$

Каждой такой системе можно сопоставить систему в симметричном виде

$$\frac{dy_1}{f_1(\vec{y})} = \frac{dy_2}{f_2(\vec{y})} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(\vec{y})} \quad (16.2)$$

Каждое решение системы (16.1) мы можем трактовать как движение точки \vec{y} в фазовом пространстве \mathbb{R}^n . Нас интересуют траектории этой системы, то есть кривые, по которым движутся точки. Система (16.2) определяет эти траектории, но не позволяет установить закон движения по ним.

Функция $F(\vec{y})$, отличная от тождественно постоянной, называется *первым интегралом* системы (16.1), если при подстановке в $F(\vec{y})$ решение системы $\vec{y}(t)$ она обращается в тождественно постоянную функцию. Другими словами, если подставить в $F(\vec{y})$ решение $\vec{y}(t)$ и вычислить производную по t (так называемую производную вдоль решения или производную в силу системы), то производная будет равна нулю:

$$\frac{d}{dt}F(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) \equiv 0$$

Если найдено k первых интегралов системы (16.1), возникает вопрос об их функциональной независимости.

Пример 1. Проверим, что функции $F_1 = x^2 + y^2 + z^2$, $F_2 = x + y + z$ и $F_3 = xy + yz + zx$ являются первыми интегралами системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = z - x \\ \dot{z} = x - y \end{cases} \quad (16.3)$$

Действительно,

$$\frac{dF_1}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 2x(y - z) + 2y(z - x) + 2z(x - y) = 0$$

$$\frac{dF_2}{dt} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = (y - z) + (z - x) + (x - y) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_3}{dt} &= (y + z)\dot{x} + (z + x)\dot{y} + (x + y)\dot{z} = \\ &= (y + z)(y - z) + (z + x)(z - x) + (x + y)(x - y) = 0 \end{aligned}$$

В данном случае нетрудно заметить, что $F_2^2 = F_1 + 2F_3$. В общем же случае имеет место следующее утверждение:

k первых интегралов F_1, F_2, \dots, F_k функционально независимы, если и только если ранг матрицы Якоби $\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}$ равен k .

В рассмотренном выше примере

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y + z & z + x & x + y \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы тождественно равен нулю, следовательно F_1, F_2, F_3 функционально зависимы, что мы и видели выше. \square

Теорема. Если функции $f_i(\vec{y})$ и их частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, то система (16.2) имеет $(n - 1)$ функционально независимых первых интегралов. Система

уравнений $\begin{cases} F_1(\vec{y}) = C_1 \\ \vdots \\ F_{n-1}(\vec{y}) = C_{n-1} \end{cases}$ определяет в пространстве \mathbb{R}^n некоторую

кривую γ , которая и является траекторией автономной системы (16.1).

Так, в примере 1 первые интегралы F_1 и F_2 функционально независимы, следовательно, траекториями системы (16.3) в трехмерном пространстве являются окружности, возникающие при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$ и плоскости $x + y + z = C_2$.

С другой стороны, система (16.3) — линейная, с постоянными коэффициентами, и мы можем найти ее общее решение методами, изученными ранее:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \sqrt{3}t - \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t & \sqrt{3} \cos \sqrt{3}t + \sin \sqrt{3}t \\ 1 & -2 \cos \sqrt{3}t & -2 \sin \sqrt{3}t \\ 1 & \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t & -\sqrt{3} \cos \sqrt{3}t + \sin \sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Как видно, формула общего решения достаточно громоздка, и требуются некоторые усилия, чтобы ее получить. Найти траектории было технически намного проще, да и характер движения точки в пространстве они иллюстрируют гораздо лучше, чем эта формула.

Наша ближайшая цель — овладеть техникой построения первых интегралов симметрических систем вида (16.2).

Пример 2. Найти первые интегралы системы $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$.

Система имеет два функционально независимых первых интеграла. Первое равенство системы дает нам уравнение $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x}$ и первый интеграл $x^2 - 2y = C_1$.

Используя его, исключим y из уравнения $\frac{dx}{z} = \frac{dz}{y}$. Получим $\frac{dx}{z} = \frac{2dz}{x^2 - C_1}$ или $(x^2 - C_1)dx = 2zdz$. Отсюда $\frac{x^3}{3} - C_1x - z^2 = C_2$. Подставляя сюда $C_1 = x^2 - 2y$, получим $-\frac{2}{3}x^3 + 2xy - z^2 = C_2$.

Система уравнений $\begin{cases} x^2 - 2y = C_1 \\ 2x^3 - 6xy + 3z^2 = C_2 \end{cases}$ определяет в пространстве $(x; y; z)$ семейство кривых, являющихся траекториями исходной симметрической системы (функциональная независимость найденных

первых интегралов очевидна). \square

Описанный прием можно назвать «методом исключения».

В многих случаях удастся найти первые интегралы путем подбора интегрируемых комбинаций. При этом «работает» основное свойство пропорций:

если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k} = \theta$, то для любых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ верно

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k} = \theta$$

При этом, поскольку речь идет о пропорциях, обращение в нуль знаменателя означает, что числитель также равен нулю.

Вернемся к примеру 1 и покажем, как можно найти уже знакомые нам первые интегралы системы (16.3) методом интегрируемых комбинаций.

Перейдем от (16.3) к симметрической системе $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$. Полагая все коэффициенты $\lambda_i = 1$, получим

$$\theta = \frac{dx + dy + dz}{(y-z) + (z-x) + (x-y)} = \frac{d(x+y+z)}{0},$$

откуда $x + y + z = C_1$.

Полагая $\lambda_1 = x, \lambda_2 = y, \lambda_3 = z$, получим

$$\theta = \frac{xdx + ydy + zdz}{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)} = \frac{0,5d(x^2 + y^2 + z^2)}{0},$$

откуда $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Пример 3. Найти первые интегралы системы $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$.

В данной системе легко выделить уравнения $\frac{dx}{z} = \frac{dz}{x}$ и $\frac{dy}{u} = \frac{du}{y}$, которые дают первые интегралы $x^2 - z^2 = C_1$ и $y^2 - u^2 = C_2$.

Также, используя основное свойство пропорции, легко получить урав-

нение $\frac{d(x+z)}{x+z} = \frac{d(y+u)}{y+u}$, откуда $\frac{x+z}{y+u} = C_3$.

Если взять комбинацию с коэффициентами $y, x, -u, -z$, то получим

$$\frac{ydx + xdy - udz - zdu}{yz + xu - xu - zy} = \frac{d(xy) - d(zu)}{0} \Rightarrow xy - zu = C_4.$$

Мы «перевыполнили план» и нашли четыре первых интеграла, хотя для описания траектории в четырехмерном пространстве достаточно трех функционально независимых первых интегралов. Например,

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = C_1 \\ y^2 - u^2 = C_2 \\ xy - zu = C_3 \end{cases}, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} 2x & 0 & -2z & 0 \\ 0 & 2y & 0 & -2u \\ y & x & -u & -z \end{pmatrix} = 3. \quad \square$$

Пример 4. Найти первые интегралы системы $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$.

Уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ сразу же дает первый интеграл $\frac{x}{y} = C_1$.

Далее можно пойти стандартным путем и исключить x из уравнения $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$, пользуясь найденным первым интегралом: $x = C_1 y$.

Тогда $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{C_1 y^2 + z}$ или $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} + C_1 y$.

Остается только решить это линейное уравнение: $z = C_2 y + C_1 y^2$ и исключить константу C_1 : $z = C_2 y + xy$. Следовательно, $\frac{z - xy}{y} = C_2$.

Этот же первый интеграл можно получить гораздо быстрее, подобрав интегрируемую комбинацию:

$$\frac{ydx + xdy - dz}{2xy - (xy + z)} = \frac{d(xy - z)}{xy - z} = \frac{dy}{y}.$$

Но этот путь требует некоторого навыка и сообразительности. \square

Знание первых интегралов помогает не только описать траектории, но и решить автономную систему.

Пример 5. Найти решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ \dot{y} = xy - 2z^2 \\ \dot{z} = xz \end{cases}$$

Заметим, что в первое уравнение входит только переменная x , и оно легко решается: $x = \frac{1}{t + C_1}$. Третье уравнение является линейным относительно z , а второе — линейным относительно y . Поэтому, подставляя $x(t)$ в третье уравнение, можно найти $z(t)$, а затем, подставляя $x(t)$ и $z(t)$ во второе уравнение, найти $y(t)$. Однако можно поступить немного по-другому.

Запишем симметрическую систему

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}.$$

Из нее можно выделить уравнение $\frac{dx}{-x^2} = \frac{dz}{xz}$, которое легко интегрируется: $xz = C_2$. Отсюда находим $z = \frac{C_2}{x} = C_2(t + C_1)$.

Составим интегрируемую комбинацию с коэффициентами y , x , $2z$:

$$\frac{ydx + xdy + 2zdz}{-yx^2 + x^2y - 2xz^2 + 2xz^2} = \frac{d(xy + z^2)}{0} \Rightarrow xy + z^2 = C_3$$

Отсюда $y = \frac{C_3 - z^2}{x} = (C_3 - C_2^2(t + C_1)^2)(t + C_1)$.

Таким образом, мы смогли с помощью первых интегралов быстро восстановить закон движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. \square

Этот же прием можно использовать при решении неавтономных систем.

Пример 6. Найти решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x - y}{z - t} \\ \dot{y} = \frac{x - y}{z - t} \\ \dot{z} = x - y + t \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим $\frac{d(x - y)}{dt} = 0$. Следовательно, $x - y = C_1$. Тогда последнее уравнение превратится в $\dot{z} = C_1 + t$,

$$\text{и } z = C_1 t + \frac{t^2}{2} + C_2.$$

Теперь, преобразовав первое уравнение к виду $\dot{x} = \frac{C_1}{C_1 t + \frac{t^2}{2} + C_2 - t}$, можно определить $x(t)$. Мы не будем выписывать первообразную, пусть $x(t) = \varphi(t; C_1; C_2; C_3)$. Тогда из соотношения $x - y = C_1$ легко найти $y(t)$, и задача решена. \square

Пример 7. Найти решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2}{y-t} \\ \dot{y} = x+1 \end{cases}$$

Сведем систему к уравнению, исключив x :

$$\ddot{y} = \dot{x} = \frac{x^2}{y-t} = \frac{(\dot{y}-1)^2}{y-t}$$

Сделаем замену $u(t) = y - t$, тогда $\dot{y} - 1 = \dot{u}$, $\ddot{y} = \ddot{u}$, и уравнение преобразуется в $\ddot{u} = \frac{\dot{u}^2}{u}$. Переписав последнее уравнение в виде $\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{\dot{u}}{u}$ или $\frac{d(\ln \dot{u})}{dt} = \frac{d(\ln u)}{dt}$, проинтегрируем его: $\dot{u} = C_1 u$.

Интегрируя еще раз, получим $u = C_2 e^{C_1 t}$, откуда $y = C_2 e^{C_1 t} + t$ и $x = \dot{y} - 1 = C_1 C_2 e^{C_1 t}$. \square

Самостоятельная работа

Найти первые интегралы автономных систем.

1.
$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$$

2.
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{du}{v} = \frac{dv}{-u}$$

3. Найти траекторию системы $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{xy}$, проходящую через точку $(1; 1; 0)$.

4. Решить неавтономную систему
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{t} \\ \dot{y} = \frac{x}{t} \end{cases}$$

5. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = xz + y^2, & x(1) = 2 \\ \dot{y} = e^{t^2}y, & y(1) = 0 \\ \dot{z} = -z^2 + y, & z(1) = 1 \end{cases}$$

(Указание: определяйте значения констант по мере их возникновения)

Домашняя работа

№№ 1145, 1151, 1155, 1156, 1159.

Занятие 17

Устойчивость решений линейных уравнений и систем

Мы уже говорили, что все линейные однородные системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad (\det A \neq 0)$$

можно разбить на группы, положив в основу классификации поведение их траекторий. При этом в центре внимания оказывается нулевое решение (или положение равновесия $(0, 0)$). Анализируя ситуацию, мы видим, что возможны три принципиально различных случая:

1. существуют траектории, двигаясь по которым точка при $t \rightarrow +\infty$ «уходит» от положения равновесия (неустойчивые узлы, седло, неустойчивые фокусы)
2. двигаясь по любой траектории, точка остаётся в некоторой окрестности (может быть, достаточно большой) точки равновесия, не стремясь к ней при $t \rightarrow +\infty$ (центр)
3. двигаясь по любой траектории, точка при $t \rightarrow +\infty$ стремится к положению равновесия (устойчивые узлы и фокусы)

В первом случае говорят, что нулевое решение неустойчиво, во втором — устойчиво, и в третьем — асимптотически устойчиво.

Дадим строгое определение этого важного понятия для нелинейной неавтономной системы

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y}) \tag{17.1}$$

Рассмотрим некоторое решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ системы (17.1), определённое $\forall t \geq t_0$. Пусть $\vec{y} = \vec{y}(t)$ — любое другое решение той же системы.

Решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\|\vec{y}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < \delta$ следует, что $\forall t \geq t_0$ выполнено неравенство $\|\vec{y}(t) - \vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon$.

Если решение устойчиво по Ляпунову и существует такое число $h > 0$, что при $\|\vec{y}(t_0) - \vec{\varphi}(t_0)\| < h$ имеем $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{y}(t) - \vec{\varphi}(t)\| = 0$, то решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Исследование на устойчивость решения $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$ системы (17.1) можно свести к исследованию на устойчивость тривиального, то есть тождественно равного нулю решения другой системы того же вида. Для этого достаточно перейти к новой искомой функции $\vec{z} = \vec{y} - \vec{\varphi}(t)$.

Устойчивость тривиального решения допускает удобную геометрическую интерпретацию не только в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных (t, \vec{y}) , но и в n -мерном пространстве переменных \vec{y} . Интегральная линия $\vec{y}(t) \equiv 0$ проектируется в начало координат. Устойчивость нулевого решения означает, что если выбрать начальные данные в окрестности $\|\vec{y}(t_0)\| < \delta$, то траектория соответствующего решения не выйдет из окрестности начала координат $\|\vec{y}(t)\| < \varepsilon$.

Пример 1. Исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения $\dot{x} = -\sin^2 x$.

Сразу отметим, что уравнение имеет стационарные решения $x = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. Остальные решения даются общим интегралом $\operatorname{ctg} x = t + C$. Если поставить задачу Коши $x|_{t=0} = x_0 \neq \pi k$, то ее решение дается формулой $\operatorname{ctg} x = t + \operatorname{ctg} x_0$. Картина интегральных линий показана на рис. 17.1.

На этой картине хорошо видно, что если выбрать начальные данные $x_0 \in (0; \pi)$, соответствующее решение $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Однако если $x_0 \in (-\pi; 0)$, то $x(t) \rightarrow -\pi$ при $t \rightarrow +\infty$.

Другими словами, если положить $\varepsilon = \pi/2$, то каким бы маленьким ни было значение $\delta > 0$, можно указать $x_0 \in (-\pi; 0)$ такое, что $|x_0| < \delta$, но $|x(t)| > \varepsilon$ начиная с некоторого момента $t = t_1$.

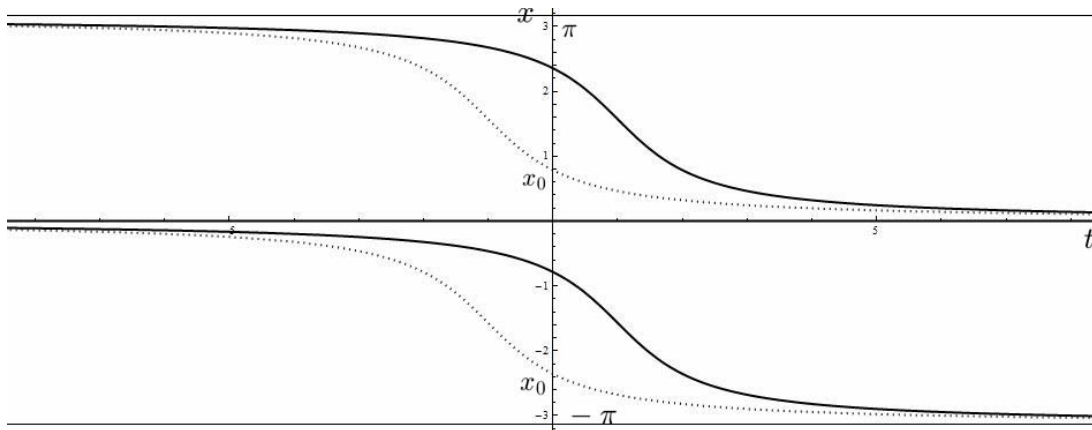


Рис. 17.1. В примере 1 нулевое решение неустойчиво.

Таким образом, нулевое решение неустойчиво, как, впрочем, и все другие стационарные решения этого уравнения.

Тот же самый вывод можно было сделать гораздо быстрее, если нарисовать фазовую прямую. Как мы помним, движение точки по этой прямой определяется знаком правой части уравнения. В нашем случае $-\sin^2 x < 0$, если $x \neq \pi k$. Таким образом, движение происходит в направлении уменьшения значения x . Поэтому, начав движение в левой полукрестности нуля, точка удаляется от него, притягиваясь к соседней стационарной точке $x = -\pi$. \square

Пример 2. Покажем, что положение равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x^3. \end{cases}$$

устойчиво, но не асимптотически.

На занятии 15 (см. пример 4) мы получили первый интеграл системы $x^4 + y^2 = C$. Его линии уровня задают на фазовой плоскости траектории системы. Мы видим, что эти траектории являются замкнутыми линиями, что соответствует периодическим решениям.

Рассмотрим изменение функции $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ вдоль траектории. На компакте $x^4 + y^2 = C$ она достигает максимального значения $M(C)$ и минимального значения $m(C)$. Причем, поскольку траектории образуют вложенную систему, функции $M(C)$ и $m(C)$ являются монотонно возрастающими.

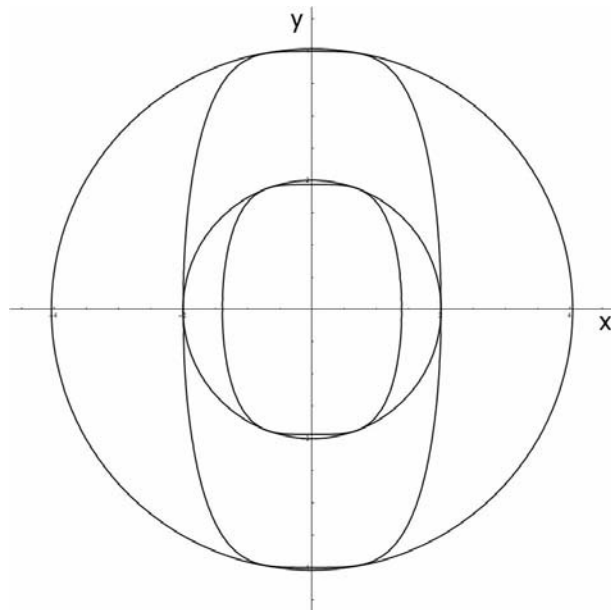


Рис. 17.2. Отсутствие асимптотической устойчивости в примере 2.

Выбрав произвольное значение $\varepsilon > 0$, найдем траекторию, для которой $M(C) = \varepsilon$. Найдя для нее значение $m(C)$, положим $\delta = m(C)$. Тогда в силу монотонности функций $M(C)$ и $m(C)$, все траектории, начинающиеся в указанной δ -окрестности начала координат, не выйдут из ε -окрестности $\forall t$ (рис. 17.2).

С другой стороны, для каждого решения $\forall t \|(x(t); y(t))\| > m(C)$, поэтому асимптотической устойчивости нет. \square

Для нелинейных систем устойчивость решения — это свойство самого решения. Так, у системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases} \quad (\text{см. пример 7 занятия 15})$$
 четыре положения равновесия — два неустойчивых (седло) и два устойчивых (центр).

Для линейных уравнений и систем ситуация гораздо проще.

1) любое решение неоднородной линейной системы (или уравнения) будет устойчивым (асимптотически устойчивым, неустойчивым), если и только если таковым является нулевое решение однородной системы.

2) устойчивость нулевого решения однородной системы зависит от структуры фундаментальной матрицы (или фундаментальной системы

решений в случае уравнения).

Если фундаментальная матрица состоит из ограниченных при $t \rightarrow +\infty$ функций, то нулевое решение будет устойчивым.

Если фундаментальная матрица состоит из функций, которые стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то нулевое решение будет асимптотически устойчивым.

Если существует решение, которое является неограниченным при $t \rightarrow +\infty$, то нулевое решение будет неустойчивым.

Поясним сказанное на примерах.

Пример 3. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение $\dot{x} + x = 2e^t$. Покажем, что его частное решение $\varphi(t) = e^t$ асимптотически устойчиво (хотя и неограничено!)

Общее решение уравнения имеет вид $x = Ce^{-t} + e^t$, поэтому для любого решения $|x(t) - \varphi(t)| = |C| \cdot e^{-t}$. Достаточно положить в определении устойчивости и асимптотической устойчивости $\delta = \varepsilon$, и убедиться в том, что эти определения выполняются. \square

Пример 4. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -tx \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

Эта линейная однородная система имеет частное решение $x = 0$, $y = Ce^t$, которое является бесконечно большим при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, нулевое решение неустойчиво. \square

Пример 5. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y + e^t z \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

Решим эту систему. Из последнего уравнения найдём $z = C_1 e^{-t}$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y + C_1 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Однородная система

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Следовательно, если $y = C_2 e^{-t} \sin t + C_3 e^{-t} \cos t$, то $x = -\dot{y} = C_2 e^{-t} (\sin t - \cos t) + C_3 e^{-t} (\cos t + \sin t)$.

Частное решение неоднородной системы ищем в виде $x = A$, $y = B$. Тогда

$$\begin{cases} -2A + 2B + C_1 = 0, \\ -A = 0. \end{cases}$$

Отсюда $B = -0,5C_1$, $A = 0$. Итак,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t}(\sin t - \cos t) & e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ -0,5 & e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \\ e^{-t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Анализируя функции, образующие фундаментальную матрицу, мы видим, что элемент $a_{21} = -0,5$ является ограниченной функцией и при $t \rightarrow +\infty$ не стремится к нулю. Все остальные элементы при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю. Следовательно, нулевое решение будет устойчивым, но не асимптотически. \square

Пример 6. Исследовать на устойчивость нулевое решение.

$$t^2 \ddot{y} + 4t \dot{y} + 2y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Ищем его частные решения в виде $y = t^k$ и приходим к формуле общего решения

$$t = C_1 \frac{1}{t} + C_2 \frac{1}{t^2}$$

Так как при $t \rightarrow +\infty$ функции, образующие ФСР стремятся к нулю, то нулевое решение будет асимптотически устойчиво. \square

Обратимся теперь к линейным уравнениям и системам с постоянными коэффициентами. Для построения ФСР уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0 \quad (17.2)$$

надо знать корни характеристического уравнения

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n. \quad (17.3)$$

Анализируя классическую ФСР, изученную на занятии 9, приходим к следующим утверждениям.

1. Если характеристический многочлен имеет все корни с отрицательной вещественной частью, то нулевое решение асимптотически устойчиво. В этом случае говорят, что «многочлен $P_n(\lambda)$ устойчив».
2. Если характеристический многочлен имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нулевое решение не устойчиво.
3. Если характеристический многочлен имеет чисто мнимые, но однократные корни, при этом все остальные корни имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.
4. Если характеристический многочлен имеет кратные чисто мнимые корни, то нулевое решение не устойчиво.

Изобразим точками на комплексной плоскости корни многочлена (17.3). Тогда каждому многочлену будет соответствовать некоторый «спектральный портрет». Если все точки лежат строго в левой полуплоскости ($\forall j \operatorname{Re} \lambda_j < 0$), то это «портрет» устойчивого многочлена и нулевое решение соответствующего уравнения асимптотически устойчиво. Если есть точки в правой полуплоскости ($\exists j \operatorname{Re} \lambda_j > 0$), то нулевое

решение не устойчиво. Если же точки попадают на мнимую ось, то надо разбираться с кратностью соответствующих собственных чисел.

Для многочлена второго порядка $P_2(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ необходимым и достаточным условием того, что все его корни лежат строго в левой полуплоскости является условие $a > 0$, $b > 0$.

Для многочлена $P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ необходимым условием того, что все корни лежат строго в левой полуплоскости, является условие положительности всех коэффициентов: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, \dots , $a_n > 0$.

Необходимые и достаточные условия довольно громоздки. Приведём одно из них — критерий Рауса-Гурвица. Введем в рассмотрение матрицу Гурвица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Чтобы правильно «сконструировать» эту матрицу, следует поставить на главную диагональ числа a_1, a_2, \dots, a_n . Затем разместить числа a_j в строках по следующему правилу: двигаясь от числа a_k , стоящего на диагонали, вправо по строке следует уменьшать индекс каждого следующего числа на единицу до a_0 , а оставшиеся места заполнить нулями. Двигаясь от a_k влево по строке, следует увеличивать индекс на единицу и, дойдя до a_n , заполнить оставшиеся места нулями. Процесс заполнения, конечно, может оборваться и раньше, если Вы дошли до конца (или начала) строки.

Все корни уравнения $P_n(\lambda) = 0$ имеют отрицательную вещественную часть, если и только если все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Мы будем называть это первым критерием Гурвица.

Вторым критерием Гурвица (или критерием Ленара-Шипара) называется следующее утверждение: все корни многочлена $P_n(\lambda)$ лежат строго в левой полуплоскости, если и только если $\forall j \ a_j > 0$ и $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$, \dots , где Δ_j — те же диагональные миноры матрицы Гурвица.

Пример 7. Исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение уравнения $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0$.

Характеристический многочлен

$$P_5(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda + 4$$

и $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 7$, $a_4 = 4$, $a_5 = 4$. Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 53,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -20, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-20) = -80$$

Здесь хорошо видно, что пользоваться вторым вариантом критерия удобнее. Мы сразу обнаруживаем, что $\Delta_4 < 0$ и делаем вывод о том, что есть корни, лежащие в правой полуплоскости или на мнимой оси, то есть в любом случае у нас нет асимптотической устойчивости нулевого решения. \square

Для многочлена третьей степени

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

необходимые и достаточные условия того, что корни лежат строго в левой полуплоскости следующие: $a_1 > 0$, $a_1a_2 > a_3$, $a_3 > 0$. Эти неравенства легко следуют из условий Гурвица.

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

Обратим внимание на случай, когда $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, но $a_1a_2 = a_3$. Тогда

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_1a_2 = \lambda^2(\lambda + a_1) + a_2(\lambda + a_1) = (\lambda + a_1)(\lambda^2 + a_2).$$

Таким образом, мы имеем один отрицательный вещественный корень и два чисто мнимых. Решение соответствующего уравнения будет устойчивым, но не асимптотически.

Займёмся изучением устойчивости нулевого решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y}$.

Этот вопрос прямо связан с расположением на комплексной плоскости корней характеристического многочлена

$$P_n(\lambda) = \det |A - \lambda E|.$$

Нулевое решение асимптотически устойчиво, если все корни лежат строго в левой полуплоскости (в этом случае говорят, что матрица A устойчивая). Нулевое решение не устойчиво, если есть корень, лежащий в правой полуплоскости. Если характеристический многочлен имеет чисто мнимые корни, то асимптотической устойчивости нет.

Для систем уравнений есть одна тонкость: если характеристический многочлен имеет кратные чисто мнимые корни, то нельзя сразу сделать вывод о неустойчивости нулевого решения (в отличие от уравнения). Может случиться, что и в случае кратных чисто мнимых корней фундаментальная матрица состоит только из ограниченных функций, и нулевое решение будет устойчивым. Это произойдёт, если алгебраическая кратность соответствующего корня совпадёт с его геометрической кратностью. В противном случае возникнут неограниченные решения и нулевое решение будет неустойчивым.

Пример 8. Рассмотрим две системы уравнений.

$$\text{I.} \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 \\ \dot{y}_3 = -y_4 \\ \dot{y}_4 = y_3 \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + y_3 \\ \dot{y}_2 = -y_1 - y_4 \\ \dot{y}_3 = -y_4 \\ \dot{y}_4 = y_3 \end{cases}$$

Несмотря на то, что матрицы у этих систем различны, характеристический многочлен обеих имеет вид $P_4(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$. Первая система имеет общее решение

$$\begin{aligned}
 y_1 &= C_1 \sin t + C_2 \cos t \\
 y_2 &= C_1 \cos t - C_2 \sin t \\
 y_3 &= C_3 \sin t + C_4 \cos t \\
 y_4 &= -C_3 \cos t + C_4 \sin t
 \end{aligned}$$

Фундаментальная матрица состоит из ограниченных функций и, следовательно, нулевое решение устойчиво. Вторая же система имеет неограниченное решение $y_1 = t \cos t$, $y_2 = -t \sin t$, $y_3 = \cos t$, $y_4 = \sin t$ и, следовательно, нулевое решение не устойчиво. \square

Пример 9. Определить (не находя решений) характер точки покоя для систем.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} & A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \lambda^2 - \lambda + 3 = 0 & \text{неустойчива} \\
 \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \lambda^2 - 4 = 0 & \text{неустойчива} \\
 \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases} & A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 & \text{асимптотически} \\
 & & & \text{устойчива} \\
 \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -5x - 2y \end{cases} & A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} & \lambda^2 + 1 = 0 & \text{устойчива, не} \\
 & & & \text{асимптотически}
 \end{cases}$$

В этих примерах мы воспользовались критерием расположения корней квадратного уравнения.

Пример 10. Исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z \\ \dot{y} = -x - 3y + 5z \\ \dot{z} = x + 4y + 8z \end{cases}$$

Напомним, что характеристический многочлен для матриц порядка 3 имеет вид

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr} \mathbf{A} \lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det \mathbf{A}$$

Так как в нашем случае $\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2 - 3 + 8 = 7$, то очевидно, что характеристический многочлен имеет коэффициенты разных знаков, и необходимое условие асимптотической устойчивости нулевого решения не выполнено.

Пример 11. Исследовать на устойчивость периодическое (с периодом 2π) решение уравнения

$$y''' + 2y'' + 3y' + y = \sin x$$

Мы знаем, что характер устойчивости периодического решения (как и любого другого) зависит от устойчивости нулевого решения однородного уравнения

$$y''' + 2y'' + 3y' + y = 0$$

В характеристическом многочлене $P_3(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1$ имеем $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$. Так как $\forall j a_j > 0$ и $a_1 \cdot a_2 > a_3$, то все корни этого уравнения лежат в левой полуплоскости. Следовательно, нулевое решение однородного уравнения асимптотически устойчиво, а вместе с ним устойчиво и периодическое решение. (Заметим, что мы не искали это решение!)

Самостоятельная работа

Исследовать на устойчивость нулевое решение систем

$$1. \begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = -2y - 4z \\ \dot{z} = -x + z \end{cases} \quad (\lambda_1 = -3, \lambda_{2,3} = 0)$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 2x + y - 2z \\ \dot{z} = 3x + 2y - 3z \end{cases} \quad (\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm i)$$

3. Найти стационарные решения уравнения $2t\dot{x} = x - x^3$. Пользуясь определением, выяснить, устойчивы ли они.

4. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$

Домашняя работа

№№ 887, 891, 913, 933, 934

Занятие 18

Исследование устойчивости по первому приближению. Функция Ляпунова.

На занятии 15 мы познакомились с понятием линеаризации системы и увидели, что если точка покоя линеаризованной системы является седлом, узлом, вырожденным узлом или фокусом, то такой же характер имеет и точка покоя нелинейной системы. Если перед нами не стоит задача нарисовать фазовый портрет, а нужно исследовать положение равновесия системы на устойчивость, то достаточно более грубой классификации.

Пусть \mathbf{A} — матрица линеаризованной системы. Если все собственные числа матрицы \mathbf{A} имеют отрицательную вещественную часть, то положение равновесия асимптотически устойчиво. Если же хотя бы одно собственное число имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия неустойчиво.

В случае чисто мнимых собственных чисел никакого вывода об устойчивости исходной системы по ее линеаризации (первому приближению) сделать невозможно.

Пример 1. Рассмотрим систему
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$(0; 0)$ — единственная точка покоя системы. Линеаризация системы в этой точке $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$. Матрица линейной системы $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет чисто мнимые собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm i$. Таким образом, положение равновесия линейной системы — центр — является устойчивым, но не асимптотически (рис 18.1 а).

В полярных координатах исходная система принимает вид
$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Заметим, что в точке $r > 0$ знак производной \dot{r} совпадает со знаком ε . Следовательно, при $\varepsilon > 0$ траектории — раскручивающиеся при возрастании t спирали, точка покоя — неустойчивый фокус, а при $\varepsilon < 0$ траектории — закручивающиеся спирали, точка покоя — устойчивый фокус, который является и асимптотически устойчивым (рис. 18.1 *b*, 18.1 *c*). \square

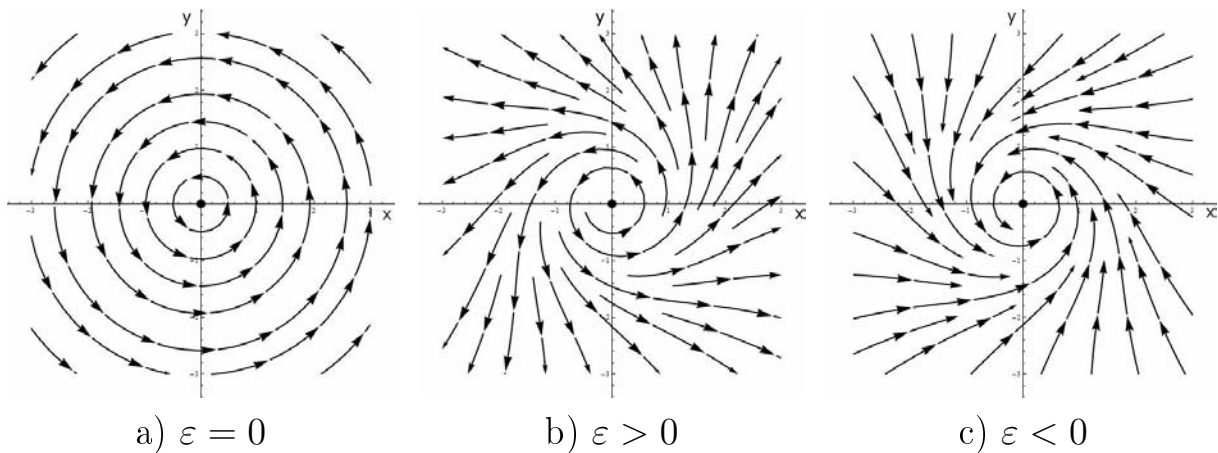


Рис. 18.1. Траектории в примере 1.

Пример 2. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z} \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x + y) \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x) \end{cases}$$

В данном случае линеаризацию можно быстро получить, используя формулу Тейлора:
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3z \\ \dot{y} = 4z - 3(x + y) \\ \dot{z} = z - 3x \end{cases} .$$

Матрица линеаризованной системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ее характеристический многочлен $P_3(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda - 30$.

Заметим, что матрица \mathbf{A} имеет собственное число $\lambda_1 = -3$, поэтому многочлен можно разложить на множители

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30 = (\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 10).$$

Отсюда $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i$. Поскольку у матрицы \mathbf{A} есть собственные числа в правой полуплоскости, положение равновесия исходной системы неустойчиво. \square

Пример 3. Найти положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y) \\ \dot{y} = -y(1 - x) \end{cases}$$

Система имеет две неподвижные точки: $(0; 0)$ и $(1; 1)$. Линеаризация в точке $(0; 0)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Одно из собственных чисел положительно, следовательно, положение равновесия неустойчиво (точка $(0; 0)$ — седло).

Гораздо интереснее изучить точку $(1; 1)$. Линеаризация в этой точке имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ее собственные числа $\pm i$, и вывод об устойчивости нелинейной системы по первому приближению мы сделать не можем.

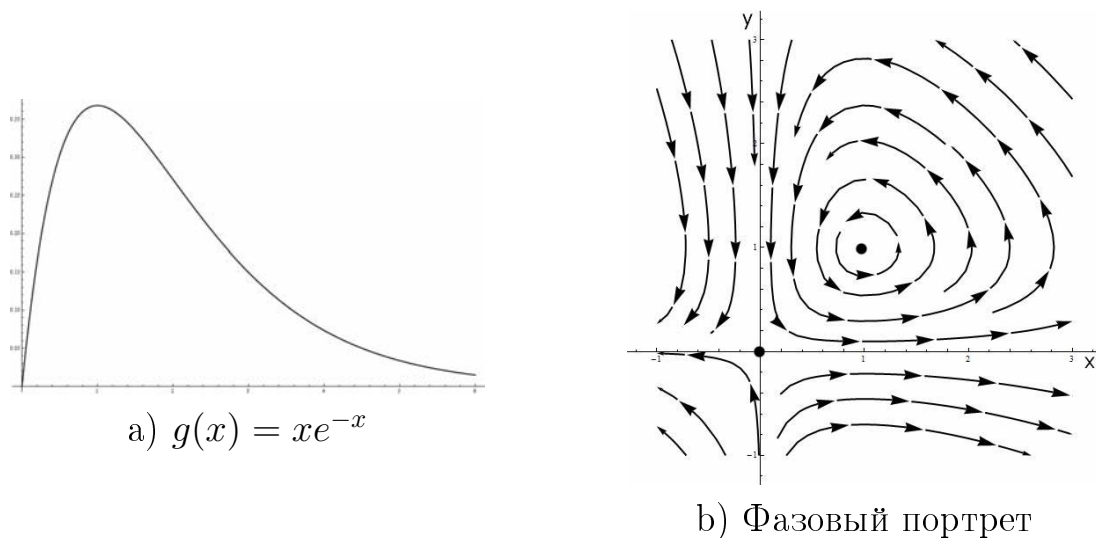


Рис. 18.2. Траектории в примере 3.

Уравнение траекторий является уравнением с разделяющимися переменными и его общий интеграл имеет вид $xe^{-x} \cdot ye^{-y} = C$, то есть $g(x) \cdot g(y) = C$, где $g(x) = xe^{-x}$. График этой функции при $x \geq 0$ изображен на рис. 18.2 *a*. Она имеет единственную точку максимума при $x = 1$. Это значит, что первый интеграл $F(x; y) = g(x) \cdot g(y)$ имеет максимум в точке $(1; 1)$. Следовательно, в некоторой ее окрестности линии уровня замкнуты. И поскольку они не содержат точек покоя, то эти линии уровня являются целыми траекториями (рис. 18.2 *b*). Таким образом, точка $(1; 1)$ — это центр, и положение равновесия устойчиво. \square

Заметим, что даже зная локальные фазовые портреты всех точек покоя, не всегда можно однозначно нарисовать глобальный фазовый портрет системы.

Пример 4. Рассмотрим систему
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

Она имеет две точки покоя $(\pm 1; 0)$. Выпишем матрицу линеаризованной системы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_0; y_0)} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \Big|_{(x_0; y_0)}$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A} \Big|_{(1; 0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ разных знаков, следовательно по теореме о линеаризации, точка $(1; 0)$ исходной системы является седлом. Аналогично, в точке $(-1; 0)$ линеаризованная система имеет матрицу $\mathbf{A} \Big|_{(-1; 0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и точка $(-1; 0)$ также является седлом.

Попробуем нарисовать глобальную картину поведения интегральных линий. Можно представить два фазовых портрета (рис. 18.3 *a* и 18.3 *b*), согласующихся с локальным поведением в точках $(\pm 1; 0)$. Однако эти картины качественно отличаются. Если на первой из них траектория, выходящая из точки $(-1; 0)$, входит в точку $(1; 0)$, то на второй эти траектории (сепаратрисы) не совпадают. И не существует взаимно однозначного непрерывного преобразования, переводящего эти портреты

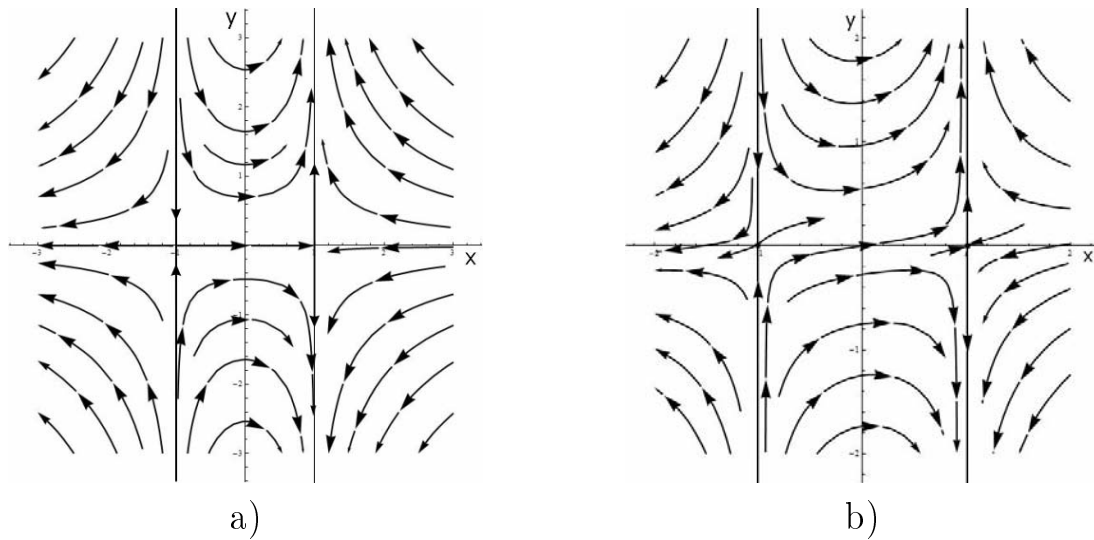


Рис. 18.3. Два фазовых портрета в примере 4.

друг в друга.

Заметим, что в нашем случае $\dot{y} = 0$ при $y = 0$, и прямая $y = 0$ содержит целые траектории. Это означает, что рис. 18.3a дает качественно правильный глобальный портрет системы. \square

Пример 5. Выясним, имеет ли уравнение $\ddot{x} + x - x^3 = 0$ устойчивые стационарные решения.

Сведем уравнение к системе $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 \end{cases}$. Эта система дает нам в фазовой плоскости $(x; \dot{x})$ три точки покоя: $(0; 0)$ и $(\pm 1; 0)$, соответствующие стационарным решениям $x \equiv 0$, $x \equiv \pm 1$.

Линеаризация системы в точках $(\pm 1; 0)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 - 2$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Следовательно, эти точки являются седлами и решения $x \equiv \pm 1$ неустойчивы.

Линеаризация системы в точке $(0; 0)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку ее определитель равен нулю, исследовать устойчивость этой точки по первому приближению не удастся.

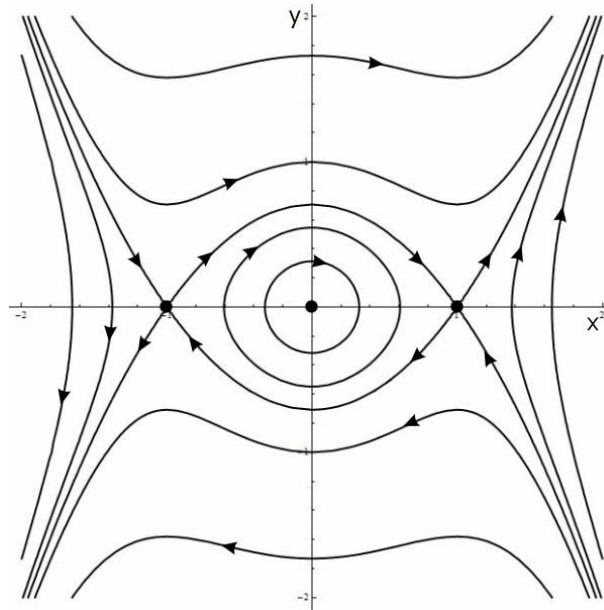


Рис. 18.4. Траектории в примере 5.

Однако, переходя к уравнению траекторий, несложно найти первый интеграл системы $F(x; y) = x^2 - 0,5x^4 + y^2$. Каждая его линия уровня содержит целые траектории системы. В окрестности точки $(0; 0)$ главная часть функции $F(x; y)$ равна $x^2 + y^2$, поэтому в точке $(0; 0)$ первый интеграл имеет минимум. Следовательно, в некоторой окрестности точки покоя линии уровня первого интеграла замкнуты и являются целыми траекториями системы (рис. 18.4). Таким образом, точка $(0; 0)$ — центр, и стационарное решение $x \equiv 0$ устойчиво. \square

Итак, как мы убедились, исследование устойчивости по первому приближению является простым и эффективным методом, но работает только в случае, когда точка покоя является невырожденной (определитель матрицы не равен нулю) и не является центром. В сложных ситуациях нас не раз выручало знание первого интеграла.

Есть еще один метод, позволяющий выяснить, является ли положение равновесия системы устойчивым, асимптотически устойчивым или неустойчивым. Этот метод связан с построением так называемой функции Ляпунова и исследованием ее поведения вдоль решения системы.

Пример 6. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y^3 \end{cases}$$

Посмотрим, как изменяется расстояние от точки $(x; y)$ до начала координат, когда точка движется по траектории. Для этого рассмотрим функцию $H(x; y) = x^2 + y^2$. Вычислим ее производную вдоль решения, то есть

$$\frac{d}{dt}H(x(t); y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = 2x(-x^3) + 2y(-y^3) = -2(x^4 + y^4)$$

Значение производной отрицательно во всех точках плоскости xOy за исключением начала координат. Следовательно, расстояние до начала координат уменьшается. И можно показать, что оно стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то есть нулевое решение является асимптотически устойчивым. \square

Приведенное выше исследование является простейшим примером применения функции Ляпунова. Приведем строгую формулировку этого понятия.

Непрерывно дифференцируемая функция $H(\vec{y})$ называется функцией Ляпунова для системы $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$, если

1) $H(\vec{y})$ положительно определена, то есть $H(\vec{y}) > 0$ при $\vec{y} \neq 0$, $H(\vec{y}) = 0$ при $\vec{y} = 0$

2) Производная в силу системы отрицательно полуопределена:

$$\frac{d}{dt}H(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) \leq 0$$

Если система $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$ имеет точку покоя в начале координат и в некоторой окрестности начала координат обладает функцией Ляпунова, то начало координат является устойчивым положением равновесия.

Если же выполняется более сильное условие

$$\frac{d}{dt}H(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) < 0,$$

то начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия.

Пример 7. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^5 \end{cases}$$

Поскольку функция Ляпунова должна быть положительно определена, самое простое, что можно предложить — искать ее в виде суммы четных степеней x и y . Например, в данном случае можно взять функцию $H(x; y) = x^2 + y^4$.

Ее производная в силу системы строго отрицательно определена:

$$\frac{d}{dt}H(x(t); y(t)) = 2x(2y^3 - x^5) + 4y^3(-x - y^5) = -(2x^6 + 4y^8) < 0$$

Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво. \square

Пример 8. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $\ddot{x} + (\dot{x})^3 + x = 0$.

Перейдем от уравнения к системе $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$ и рассмотрим

функцию $H(x; y) = x^2 + y^2$. Ее производная в силу системы отрицательно полуопределена: $\dot{H} = 2xy + 2y(-x - y^3) = -2y^4 \leq 0$. Следовательно, нулевое решение системы (и уравнения) устойчиво.

Но можно пойти дальше и заметить, что на прямой $y = 0$, где производная \dot{H} обращается в ноль, вектор скорости $(\dot{x}; \dot{y}) = (0; -x)$ перпендикулярен этой прямой. То есть траектория пересекает эту прямую, и функция \dot{H} обращается в ноль только для отдельных значений t , то есть $H(x; y) = x^2 + y^2$ монотонно убывает (рис. 18.5). Это позволяет утвер-

ждать, что нулевое решение не только устойчиво, но и асимптотически устойчиво (рис. 18.5). \square

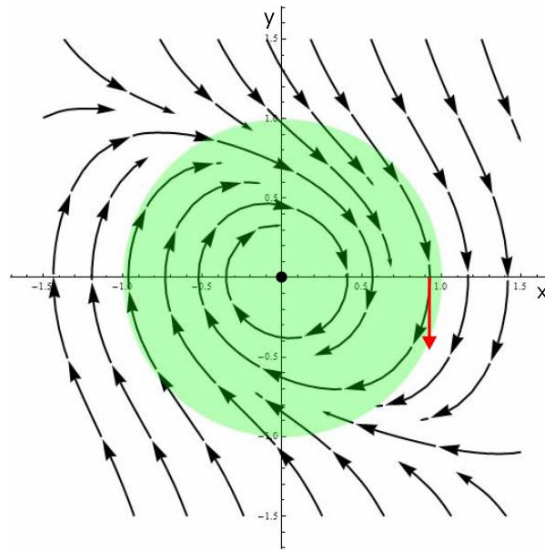


Рис. 18.5. Траектории в примере 8.

Для установления неустойчивости нулевого решения системы $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$ надо построить так называемую функцию Четаева $V(\vec{y})$, которая должна удовлетворять следующим условиям:

1) $V(\vec{y})$ непрерывно дифференцируема в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $V(\vec{y}) = 0$ на границе области D , и точка $(0; 0)$ принадлежит этой границе,

2) В области D функция $V(\vec{y}) > 0$ и ее производная в силу системы также положительно определена:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(\vec{y}) > 0$$

Если система $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$ имеет точку покоя в начале координат и в некоторой окрестности начала координат обладает функцией Четаева, то начало координат является неустойчивым положением равновесия.

Пример 9. Покажем, что нулевое решение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$
 неустойчиво.

Рассмотрим функцию $V(x; y) = 3xy^2 - x^3 = x(3y^2 - x^2)$. В качестве области D можно взять сектор $0 < x < \sqrt{3}y$ (рис. 18.6). Производная от $V(x; y)$ в силу системы строго положительно определена:

$$\dot{V}(x; y) = 9x^4 + 3y^4 > 0$$

Следовательно, нулевое решение неустойчиво. \square

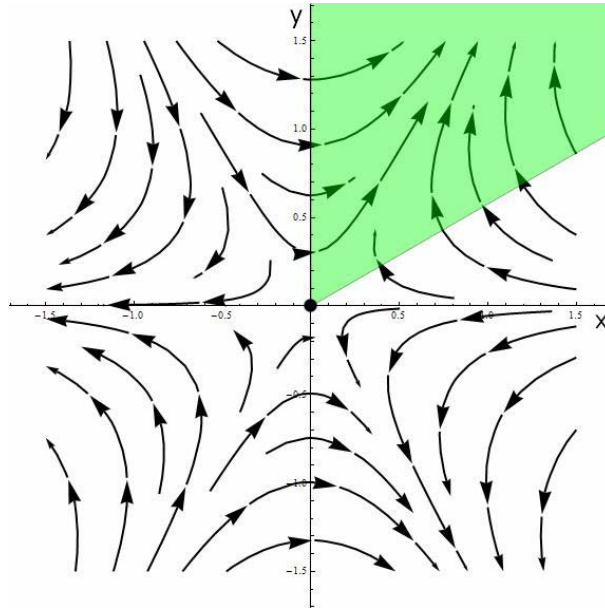


Рис. 18.6. Траектории и область D в примере 9.

Подчеркнем, что требуется строгая положительная определенность производной, иначе вывод о неустойчивости будет просто неверен.

Самостоятельная работа

1. Найти все положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y + \sin x) \\ \dot{y} = 2 + \sqrt{3 \sin x - 8} \end{cases}$$

2. Показать, что нулевое решение уравнения $\ddot{x} + \dot{x} \sin(\dot{x})^2 + x = 0$ асимптотически устойчиво.

3. Исследовать на устойчивость точку покоя $(1; 0; 1)$ системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + \sin y^2 + \ln x - z^2 \\ \dot{y} = -xy \\ \dot{z} = x^2 - z^2 + \cos y - 1 \end{cases}$$

4. Найти положение равновесия системы $\begin{cases} \dot{x} = y(1 + z) \\ \dot{y} = x(z - 1) \\ \dot{z} = -z - 2xy \end{cases}$ и исследовать его на устойчивость. (Указание: постройте функцию Ляпунова)

5. Показать, что нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x} = y(1 + z) \\ \dot{y} = x(z - 1) \\ \dot{z} = -z - 2xy \end{cases}$ неустойчиво. (Указание: постройте функцию Четаева в виде $V(x; y) = ax + by$.)

Домашняя работа

№№ 901, 918, 927, 929

Занятие 19

Метод малого параметра

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y}, \varepsilon) \quad (19.1)$$

с начальными условиями $\vec{y}(t_0) = \vec{a}(\varepsilon)$. Здесь ε является параметром. Если вектор-функции \vec{f} и \vec{a} можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{f}(t, \vec{y}, \varepsilon) &= \vec{f}_0(t, \vec{y}) + \varepsilon \vec{f}_1(t, \vec{y}) + \dots + \varepsilon^m \frac{\vec{f}_m(t, \vec{y})}{m!} + o(\varepsilon^m), \\ \vec{a}(\varepsilon) &= \vec{a}_0 + \varepsilon \vec{a}_1 + \dots + \varepsilon^m \frac{\vec{a}_m}{m!} + o(\varepsilon^m), \end{aligned}$$

то решение задачи Коши (19.1) также можно представить в виде

$$\vec{y}(t, \varepsilon) = \vec{y}^{[0]}(t) + \vec{y}^{[1]}(t)\varepsilon + \dots + \frac{\vec{y}^{[m]}(t)}{m!}\varepsilon^m + o(\varepsilon^m).$$

Заметим, что, очевидно, $\vec{y}^{[0]}(t) = \vec{y}(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$, $\vec{y}^{[1]}(t) = \left. \frac{\partial \vec{y}(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ и так далее.

Таким образом, функция $\vec{y}^{[0]}(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\vec{y}}^{[1]}(t) &= \vec{f}(t, \vec{y}^{[0]}, 0) \\ \vec{y}^{[0]}(t_0) &= \vec{a}(0). \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнение на функцию $\vec{y}_1^{[1]}(t)$, следует продифференцировать равенство (19.1) по ε и положить $\varepsilon = 0$. Рассмотрим примеры, а затем сформулируем общие утверждения.

Пример 1.

$$\dot{y} = 2t + \varepsilon y^2, \quad y(0) = \varepsilon - 1 \quad (19.2)$$

$$y = y(t, \varepsilon) = y_0(t) + y_1(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Функция $y_0(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{y}_0(t) = 2t, \quad y_0(0) = -1.$$

Отсюда $y_0(t) = t^2 - 1$. Продифференцируем уравнение (19.2) по ε .

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \varepsilon} = y^2 + \varepsilon \frac{\partial y^2}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{y(0)}{\partial \varepsilon} = 1.$$

Полагаем $\varepsilon = 0$. Тогда, так как $\left. \frac{y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = y_1(t)$, $\dot{y}_1 = y_0^2$, $y_1(0) = 1$. Заметим, что соответствующая теорема позволяет утверждать, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}.$$

Таким образом, $\dot{y}_1 = (t^2 - 1)^2$, $y_1(0) = 1$, откуда $y_1 = \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + 1$.

$$\text{Итак, } y(t, \varepsilon) = t^2 - 1 + \varepsilon \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t + 1 \right) + o(\varepsilon).$$

Пример 2.

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad x(0) = \varepsilon, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (19.3)$$

Эта задача описывает колебания математического маятника при «малых» начальных отклонениях. Ищем решение в виде

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} x_2(t) + \frac{\varepsilon^3}{3!} x_3(t) + o(\varepsilon^3).$$

Функция $x_0(t)$ удовлетворяет задаче

$$\ddot{x}_0 + \sin x_0 = 0, \quad x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = 0.$$

Решением поставленной задачи Коши является, очевидно, функция $x_0(t) \equiv 0$. (Эта функция удовлетворяет уравнению и начальным условиям, а так как все условия теоремы единственности для уравнения выполнены, то других решений нет).

Дифференцируем (19.3) по ε

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right) + \cos x \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial x(0)}{\partial \varepsilon} = 1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (19.4)$$

и полагаем $\varepsilon = 0$. Вспоминая, что $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = x_1(t)$ и $x_0(t) \equiv 0$, получим

$$\ddot{x}_1 + (\cos x_0)x_1 = 0, \quad x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0.$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0.$$

Решением получившейся задачи Коши является функция $x_1(t) = \cos t$.

Дифференцируем уравнения (19.4) ещё раз по ε

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} \right) - \sin x \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \cos x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 x(0)}{\partial \varepsilon^2} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} &= 0. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Полагаем $\varepsilon = 0$, так как $\ddot{x}_2(t) - \sin x_0 \cdot x_1^2 + \cos x_0 \cdot x_2 = 0$. Учитывая, что $x_0 \equiv 0$, приходим к $\ddot{x}_2(t) + x_2 = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Таким образом, $x_2 \equiv 0$.

Дифференцируем уравнения (19.5) по ε

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3} \right) - \cos x \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right)^3 - \sin x \cdot 2 \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} - \sin x \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} + \cos x \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3} &= 0, \\ \frac{\partial^3 x(0)}{\partial \varepsilon^3} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3} &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $x \Big|_{\varepsilon=0} = x_0 \equiv 0$, имеем

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = x_1(t) = \cos t, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2} = x_2(t) \equiv 0.$$

Получаем задачу на функцию $x_3(t) = \frac{\partial^3 x}{\partial \varepsilon^3} \Big|_{\varepsilon=0}$.

$$\ddot{x}_3 - \cos x_0 \cdot x_1^3 - 3 \sin x_0 \cdot 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + \cos x_0 \cdot x_3 = 0$$

$$\ddot{x}_3 + x_3 - \cos^3 t = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad \dot{x}_3(0) = 0.$$

Это — линейное неоднородное уравнение с правой частью. Решением поставленной задачи Коши является функция

$$x_3(t) = \frac{1}{16} \sin t \cdot \sin 2t + \frac{3}{8} t \sin t.$$

Обычно, конечно, вполне удовлетворяются первым или вторым приближением. Мы продемонстрировали на этом примере, что в принципе можно продвинуться как угодно далеко. Итак,

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \cos t + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left(\frac{1}{16} \sin t \cdot \sin 2t + \frac{3}{8} t \sin t \right) + o(\varepsilon^3).$$

Заметим, что задача Коши для уравнения

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = \varepsilon, \quad \dot{x}(0) = 0$$

имеет решение $x = \varepsilon \cos t$, что в точности совпадает с первым приближением, полученным выше.

Пример 3. Найти разложение по степеням малого параметра ε периодического (с периодом равным 2π) решения уравнения

$$\ddot{x} + 3x = 2 \sin t + \varepsilon \dot{x}^2. \quad (19.6)$$

Ищем решение в виде

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon).$$

Функция $x_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_0 + 3x_0 = 2 \sin t.$$

Периодическое решение этого уравнения, имеющее период 2π есть

$$x_0(t) = \sin t.$$

Дифференцируем уравнение (19.6) по ε и полагаем $\varepsilon = 0$.

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + 3 \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \dot{x}^2 + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{x}^2$$

Учитывая, что $x|_{\varepsilon=0} = x_0(t)$ и $\left. \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = x_1(t)$, получим

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 = \dot{x}_0^2$$

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 = \cos^2 t$$

Представив $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$, можно найти периодическое с периодом 2π решение методом неопределённых коэффициентов.

$$x_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2t$$

Итак, $x(t) = \sin t + \varepsilon \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) + o(\varepsilon)$.

Пример 4. Зная, что нулевые приближения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ суть константы, найти первые приближения.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \ln x + \sin y - z^2 + \cos t \varepsilon, \\ \dot{y} &= xy, \\ \dot{z} &= x^2 - z^4 + \cos y - e^{\varepsilon^2}, \\ x(0) &= \cos \varepsilon, \quad y(0) = \sin \varepsilon, \quad z(0) = -1 + \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{19.7}$$

Положим в начальных условиях $\varepsilon = 0$. Тогда $x_0(0) = 1$, $y_0(0) = 0$, $z_0(0) = -1$. Так как нам известно, что нулевое приближение, то есть функции $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$, суть константы, то мы должны проверить, что эти функции $x_0 \equiv 1$, $y_0 \equiv 0$, $z_0 \equiv -1$ действительно являются решением системы (19.7) при $\varepsilon = 0$, то есть

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= \ln x_0 + \sin y_0 - z_0^2 + 1, \\ \dot{y}_0 &= x_0 y_0, \\ \dot{z}_0 &= x_0^2 - z_0^4 + \cos y_0 - 1.\end{aligned}$$

Представим функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon), \\ y(t) &= \varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon), \\ z(t) &= -1 + \varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в систему (19.7), воспользуемся тейлоровскими разложениями и оставим только слагаемые, содержащие первую степень параметра ε . Для первого уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon)) &= \ln(1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon)) + \\ &+ \sin(\varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon)) - (-1 + \varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon))^2 + 1 - \frac{t^2 \varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) = \\ &= \varepsilon x_1(t) + \varepsilon y_1(t) + 2\varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon) \\ \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + y_1(t) + 2z_1(t)\end{aligned}$$

Для второго уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon)) &= (1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon))(\varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon)) \\ \dot{y}_1(t) &= y_1(t)\end{aligned}$$

Для третьего уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(-1 + \varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon)) &= (1 + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon))^2 - (-1 + \varepsilon z_1(t) + o(\varepsilon))^4 + \\ &+ \cos(\varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon)) - (1 - \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)) = \\ &= 1 + 2\varepsilon x_1(t) - 1 + 4\varepsilon z_1(t) + 1 - 1 + o(\varepsilon) \\ \dot{z}_1(t) &= 2x_1(t) + 4z_1(t)\end{aligned}$$

Начальные условия представим в виде

$$\begin{aligned}
1 + x_1(0)\varepsilon + o(\varepsilon) &= \cos \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \\
y_1(0)\varepsilon + o(\varepsilon) &= \sin \varepsilon = \varepsilon + o(\varepsilon) \\
-1 + z_1(0)\varepsilon + o(\varepsilon) &= -1 + \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Откуда $x_1(0) = 0$, $y_1(0) = 1$, $z_1(0) = 0$. Итак, для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мы получили

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + y_1(t) + 2z_1(t) & x_1(0) &= 0 \\
\dot{y}_1(t) &= y_1(t) & y_1(0) &= 1 \\
\dot{z}_1(t) &= 2x_1(t) + 4z_1(t) & z_1(0) &= 0
\end{aligned} \tag{19.8}$$

Решением этой задачи Коши будут функции

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12}e^{5t} - \frac{3}{4}e^t, \\
y_1 &= e^t, \\
z_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{5t} - \frac{1}{2}e^t.
\end{aligned}$$

В этом примере при получении системы на функции x_1 , y_1 , z_1 мы воспользовались известным разложением функций в ряды Тейлора. Очевидно, что систему (19.8) можно было получить из (19.7) дифференцированием по ε , как мы это делали в предыдущих примерах. Выбор техники в таких случаях — дело вкуса.

Пример 5. Найти $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=1}$, где $x(t, \mu)$ - решение задачи Коши

$$\ddot{x} = \frac{2}{t} - \frac{2}{x}, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = \mu$$

Представим решение в виде $x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)(\mu - 1) + o(\mu - 1)$. При этом, $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = x_1(t)$ и есть искомая функция. Функция $x_0(t)$ является решением задачи Коши

$$\ddot{x}_0 = \frac{2}{t} - \frac{2}{x_0}, \quad x_0(1) = 1, \quad \dot{x}_0(1) = 1.$$

Очевидно, что функция $x_0(t)$ удовлетворяет уравнению и дополнитель-

ным условиям. На функцию $x_1(t)$ получим уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) = \frac{2}{x^2} \frac{\partial x}{\partial \mu} \quad \ddot{x}_1 = \frac{2}{x_0^2} x_1 \quad \dot{x}_1 = \frac{2}{t^2} x_1$$

и начальные условия $x_1(1) = 0$, $\dot{x}_1(1) = 1$. В этом примере более естественно дифференцирование исходного уравнения и начальных условий по μ . Решение поставленной задачи Коши для уравнения Эйлера приведёт к

$$x_1 = C_1 t^2 + C_2 t^{-1}, \quad \dot{x}_1 = \frac{2}{3} t^2 - \frac{1}{3t}. \quad \square$$

Проанализировав рассмотренные примеры, легко видеть, что если система для функций $x_0(t)$, $y_0(t)$ и т. д. является нелинейной и, как правило, мы находили её решение пользуясь теми или иными подсказками, то для функций, которые дают первое приближение мы всегда получаем линейную систему (уравнение). Это важное обстоятельство и делает метод малого параметра столь эффективным. Покажем это в общем виде.

Если $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y}, \varepsilon)$, $\vec{y}(t_0) = \vec{b}(\varepsilon)$, то для $i = 1 \dots n$

$$\dot{y}_i = f_i(t, y_1, \dots, y_n, \varepsilon)$$

$$y_i(t_0) = b_i(\varepsilon)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial \varepsilon} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon}$$

Полагаем $\varepsilon = 0$.

$$\frac{d}{dt} y_i^{[1]} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \vec{y}^{[0]}, 0) \cdot y_j^{[1]} + \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon}(t, \vec{y}^{[0]}, 0)$$

$$y_i^{[1]}(t_0) = \left. \frac{\partial b_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

Таким образом, на функции $y_i^{[1]}$ имеем линейную систему

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{y}^{[1]} &= A(t) \cdot \vec{y}^{[1]} + \vec{F}(t), \\ \vec{y}^{[1]}(t_0) &= \vec{b}_0,\end{aligned}$$

которую называют «системой в вариациях».

Самостоятельная работа

1. Найти разложение по степеням ε до второго порядка.

$$\dot{x} + e^{\varepsilon x} = 1, \quad x(0) = \sin \varepsilon$$

2. Найти разложение по степеням ε периодического решения.

$$\ddot{x} + x^3 = 1 + \varepsilon \sin t$$

3. Найти $\left. \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$, $\left. \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy & x(0) &= 1 \\ \dot{y} &= x^4 + y^2 - 1 & y(0) &= \varepsilon\end{aligned}$$

4. Найти функции $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ при $\varepsilon = 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \ln(1 + y + \sin x) & x(0) &= \varepsilon \\ \dot{y} &= \sqrt[3]{8 + 3 \sin z} - 2 & y(0) &= \varepsilon^2 \\ \dot{z} &= x^3 - y^2 + \cos z - 1 & z(0) &= \varepsilon^3\end{aligned}$$

Домашняя работа

№№ 1071, 1077, 1082, 1068