МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

Методы решения

обыкновенных дифференциальных уравнений.

Аналитическая теория уравнений второго порядка. Асимптотические методы.

учебно-методическое пособие

Новосибирск

2012

Настоящее пособие является пятой частью цикла пособий, отражающих многолетний опыт проведения авторами практических занятий по курсу «Методы математической физики» на втором курсе отделения физической информатики физического факультета НГУ.

Разнообразные примеры и комментарии к ним знакомят студентов с идеями, лежащими в основе различных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, и помогают осваивать алгоритмы решения типовых задач.

Каждый параграф пособия является методической разработкой двухчасового занятия. В конце занятия предлагаются вопросы для самостоятельной работы и список задач для дальнейшего закрепления полученных практических навыков. Нумерация занятий единая для всего цикла пособий.

Целевая аудитория: студенты 2-го курса отделения физической информатики физического факультета и отделения геофизики и геомеханики геолого-геофизического факультета НГУ.

Авторы

Михайлова Т. Ю., Доманова Е. Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации

Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.г.

Занятие 25

Решение дифференциальных уравнений в виде степенных рядов.

Напомним, что функция $y(x)$ называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки $|x - x_0| < R$ она допускает представление в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{25.1}$$

Коэффициенты c_k можно вычислить по формуле $c_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Известно, что если функция $f(x; y)$ является аналитической в точке $(x_0; y_0)$, то есть в некоторой окрестности этой точки допускает представление

$$f(x; y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{mn}(x - x_0)^m (y - y_0)^n,$$

то задача Коши для уравнения $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ имеет единственное аналитическое решение, то есть решение, представимое в виде (25.1).

Наша ближайшая цель — научиться строить это решение.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.

Мы уже обращались к этому примеру на занятии 5 и строили решение методом последовательных приближений, сводя дифференциальное уравнение к интегральному. Уже на втором шаге итерационного процесса мы получили приближение $y^{[2]}(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$.

Сейчас мы попробуем получить первые несколько членов степенного ряда (25.1), исходя из того, что коэффициенты c_k выражаются через производные $y^{(k)}(x_0)$.

Подставляя в уравнение $y'(x) = x^2 + y^2(x)$ значение $x = 0$ и учитывая начальное условие $y(0) = 0$, получаем $y'(0) = 0$.

Дифференцируя правую и левую части уравнения по x и опять полагая $x = 0$, получаем $y''(x) = 2x + 2y \cdot y'(x)$, $y''(0) = 0$.

Повторяем этот процесс:

$y'''(x) = 2 + 2(y'(x))^2 + 2y \cdot y''(x)$, $y'''(0) = 2$.

$y^{IV}(x) = 4y'(x) \cdot y''(x) + 2y' \cdot y''(x) + 2y \cdot y'''(x) = 6y' \cdot y''(x) + 2y \cdot y'''(x)$,

$y^{IV}(0) = 0$.

$y^{V}(x) = 6(y''(x))^2 + 8y' \cdot y'''(x) + 2y \cdot y^{IV}(x)$, $y^{V}(0) = 0$.

$y^{VI}(x) = 20y''(x) \cdot y'''(x) + 10y' \cdot y^{IV}(x) + 2y(x) \cdot y^{V}(x)$, $y^{VI}(0) = 0$.

$y^{VII}(x) = 20(y'''(x))^2 + 30y'' \cdot y^{IV}(x) + 2y(x) \cdot y^{VI}(x)$, $y^{VII}(0) = 80$.

Таким образом,

$$y(x) = \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{VII}(0)}{7!}x^7 + o(x^7) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + o(x^7). \quad \square$$

Метод последовательных приближений привел нас к этому результату гораздо быстрее. В чем же тогда преимущество рассмотренного сейчас способа? Дело в том, что иногда удается получить простые рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда (25.1) или даже вывести их общую формулу. Тогда мы получаем решение в виде «полного» ряда, а не только его отрезок. Рассмотрим простой пример.

Пример 2. Решить задачу Коши $y' = 2xy$, $y(0) = 1$.

Дифференцируя обе части уравнения $(n-1)$ раз и применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения, легко показать, что производные от решения связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$y^{(n)}(x) = 2xy^{(n-1)}(x) + 2(n-1)y^{(n-2)}(x), \quad n = 2,\ 3, \ldots$$

Подставляя $x = 0$, получим $y^{(n)}(0) = 2(n-1)y^{(n-2)}(0)$.

Поскольку $c_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$, то для коэффициентов c_n также получим рекуррентную формулу $c_n = \dfrac{2}{n}c_{n-2}$.

Поскольку из начальных данных $y(0) = 1$, а из уравнения $y'(0) = 0$, то $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Таким образом, $c_{2k-1} = 0$, $c_{2k} = \dfrac{1}{k!}$ для всех натуральных k. Выпишем несколько членов ряда:

$$y(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + ... + \frac{1}{k!}x^{2k} + ...$$

Мы легко узнаем в этой формуле разложение в ряд функции $y = e^{x^2}$. Заметим, что мы легко могли проинтегрировать уравнение методом разделения переменных, однако нас сейчас интересует метод получения решения в виде ряда.

Сейчас мы получили рекуррентные формулы, связывающие коэффициенты разложения (25.1), дифференцируя исходное уравнение. Можно сделать это еще проще. Если решение представлено в виде степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, то на интервале его сходимости производную от решения можно получить почленным дифференцированием ряда: $y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}$.

Подставим эти разложения в дифференциальное уравнение $y' = 2xy$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1} = 2x \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k-1} x^k.$$

Полученное равенство должно выполняться на всем интервале сходимости, следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в правой и левой его частях должны совпадать. Отсюда $c_1 = 0$, и $kc_k = 2c_{k-2}$ для $k \geqslant 2$.

Из начальных данных $c_0 = y(0) = 1$. Таким образом, мы получили те же рекуррентные формулы для коэффициентов ряда, но более удобным способом. Именно так мы и будем поступать в дальнейшем. $\square$

Перейдем к построению аналитических решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y = 0 \tag{25.2}$$

Как обычно, начнем с примера.

Пример 3. Найти аналитическое решение задачи Коши

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Ищем решение в виде ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$. Дифференцируем ряд два раза почленно и подставляем в уравнение:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0$$

Сдвинем индекс в первой сумме на две единицы:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\Big((k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k\Big)x^k = 0$$

Все коэффициенты разложения тождественно нулевой функции в ряд равны нулю. Отсюда получаем рекуррентную формулу $(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k = 0$ или

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+1)} \tag{25.3}$$

Из начальных условий $c_0 = y(0) = 0$, $c_1 = y'(0) = 1$. Поэтому все коэффициенты с четными номерами равны нулю, а для нечетных

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Выпишем получившийся ряд:

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + ...$$

Нетрудно узнать в нем ряд Тейлора для функции $y = \sin x$.

Если бы мы решали задачу Коши с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, рекуррентная формула (25.3) осталась бы прежней, но изменились бы коэффициенты $c_0 = y(0) = 1$ и $c_1 = y'(0) = 0$. Тогда все нечетные коэффициенты обратятся в ноль, а четные определяются формулой

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Решение новой задачи Коши представляется рядом:

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + ...$$

Это разложение в ряд Тейлора функции $y = \cos x$.

Итак, мы получили два частных решения уравнения $y'' + y = 0$. Очевидно, что они образуют ФСР, так как в точке $x_0 = 0$ определитель Вронского $\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Если для уравнения второго порядка нужно построить ФСР в виде рядов, то обычно поступают так же, как мы сделали в этом примере: решают две задачи Коши с начальными данными $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ и $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$. Тогда общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Сформулируем общую теорему.

Если коэффициенты уравнения $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x) = 0$ являются аналитическими функциями в окрестности точки x_0, имеющими общий интервал сходимости $|x - x_0| < R$, то уравнение имеет аналитическое решение, определенное в той же области.

Вернемся к уравнению (25.2). Допустим, что все его коэффициенты являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки x_0. Можно ли сделать вывод о существовании в этой окрестности аналитического решения? Нет! Во-первых, нужно потребовать, чтобы $a_0(x_0) \neq 0$, иначе точка x_0 окажется особой точкой уравнения. Во-вторых, если это условие выполнено, область сходимости ряда для решения может сузиться до интервала $|x - x_0| < \rho$, где ρ — расстояние от точки x_0 до ближайшего нуля функции $a_0(x)$ (при этом надо рассматривать и комплексные нули этой функции).

Поясним сказанное на примерах.

Пример 4. Имеет ли уравнение $(x^2+1)y''+y'+y=0$ аналитическое решение в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$? Найти это решение, указать область сходимости полученного ряда.

Так как все коэффициенты уравнения — аналитические функции и $a_0(0) \neq 0$, то аналитическое решение существует. Область сходимости соответствующего ряда: $|x| < 1$, поскольку функция z^2+1 имеет нули в точках $z = \pm i$.

Ищем решение в виде ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$. Продифференцируем его почленно и подставим в уравнение:

$$(x^2+1)(\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}) + (\sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k-1}) + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0$$

Приводя подобные слагаемые, мы получим степенной ряд, который должен быть равен нулю тождественно на интервале $|x| < 1$. Следовательно, все его коэффициенты равны нулю, откуда получаем:

$$2c_2 + c_1 + c_0 = 0$$

$$6c_3 + 2c_2 + c_1 = 0$$

....

$$k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+1)c_{k+1} + c_k = 0$$

Таким образом, зная c_0 и c_1, можно из рекуррентной формулы

$$c_{k+2} = -\frac{(k+1)c_{k+1} + k^2 c_k}{(k+2)(k+1)}$$

определить все остальные коэффициенты.

Так, решая задачу Коши $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, придем к $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1/2$, $c_3 = 0$, $c_4 = -1/6$ и т.д. Следовательно,

$$y_1(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \ldots$$

Решая задачу Коши $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, придем к $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = -1/2$, $c_3 = 1/6$, $c_4 = 1/4$ и т.д. Следовательно,

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Хотя нам не удалось получить общую формулу для коэффициентов и тем более свернуть ряд, задачу можно считать полностью решенной.

Далее, не ограничивая общности, мы будем рассматривать только точку $x_0 = 0$.

В приложениях часто встречаются уравнения вида

$$x^2 y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{25.4}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — функции, аналитические в окрестности нуля. В этом случае точку $x = 0$ называют регулярной особой точкой. Найти решение в виде степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ в таком случае, вообще говоря, нельзя. Но можно попробовать искать решение в виде так называемого обобщенно-степенного ряда

$$y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{25.5}$$

где λ может быть любым (в том числе и комплексным) числом.

Если уравнение (25.4) имеет решение в виде ряда (25.5), то λ должно быть корнем *определяющего* уравнения $\lambda(\lambda-1)+\lambda P(0)+Q(0)=0$.

Точка $x=0$ является *регулярной* особой точкой, если функция $P(x)$ имеет в этой точке полюс порядка не выше первого, а функция $Q(x)$ — полюс порядка не выше второго. Определяющее уравнение в этом случае имеет вид $\lambda(\lambda-1)+\lambda p+q=0$, где $p=\lim\limits_{x\to 0} xP(x)$, $q=\lim\limits_{x\to 0} x^2Q(x)$.

Если определяющее уравнение имеет комплексные корни $\lambda=\alpha+i\beta$, то функцию x^λ следует определить (при $x>0$) следующим образом:

$$x^\lambda = e^{(\alpha+i\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x}\cdot e^{i\beta\ln x} = x^\alpha\cdot(\cos\beta\ln x + i\sin\beta\ln x).$$

Вещественные функции, образующие ФСР, будут такими:

$$y_1(x) = x^\alpha\cdot\cos(\beta\ln x)\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad c_0\neq 0$$

$$y_2(x) = x^\alpha\cdot\sin(\beta\ln x)\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k, \quad d_0\neq 0$$

Если λ_1, λ_2 — корни определяющего уравнения и $\lambda_2-\lambda_1$ — не целое число, то уравнение (25.4) имеет два решения в виде обобщенных степенных рядов, и эти решения образуют ФСР.

Если λ_1, λ_2 — корни определяющего уравнения и $\lambda_2-\lambda_1=n$, $n\in\mathbb{N}$, то уравнение (25.4) имеет решение в виде обобщенного степенного ряда с показателем $\lambda=\lambda_2$. Второе линейно независимое решение может также быть рядом, а может иметь в точке $x=0$ логарифмическую особенность.

Пример 5. Имеет ли уравнение $x^2y''+x(x+1)y'-y=0$ решение в виде обобщенного степенного ряда?

Определяющее уравнение $\lambda(\lambda-1)+\lambda-1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm 1$, их разность — целое число. Согласно общей теории, уравнение имеет решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего большему корню: $y(x)=x\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+1}$.

Подставляя этот ряд в дифференциальное уравнение, мы получим рекуррентные формулы для коэффициентов:

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k+2}, \quad \text{откуда } c_k = 2\frac{(-1)^k c_0}{(k+2)!}.$$

Положив $c_0 = 1/2$, получим решение

$$y_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3!} + ... + \frac{(-1)^k x^{k+1}}{(k+2)!} + ...$$

Можно выразить эту функцию через элементарные, если заметить, что

$$xy_1 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^k x^{k+2}}{(k+2)!} + ... = e^{-x} - 1 + x$$

Таким образом, $y_1(x) = \dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x}$.

Отметим, что найти это решение методами, которые мы обсуждали ранее (занятие 21), было бы затруднительно.

Теория не гарантирует нам возможность построения второго частного решения в виде ряда

$$y(x) = x^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k-1}$$

Попробуем все же это сделать. Подставим этот ряд в уравнение:

$$x^2\Big(\frac{2c_0}{x^3} + \sum_{k=3}^{+\infty}(k-1)(k-2)c_k x^{k-3}\Big) +$$
$$+ (x^2 + x)\Big(-\frac{c_0}{x^2} + \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)c_k x^{k-2}\Big) - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k-1} = 0.$$

Коэффициент при c_0 обратился ноль, и это следствие того, что $\lambda = -1$ является корнем определяющего уравнения.

Далее, $c_1 = -c_0$ и $(k-1)(k-2)c_k + (k-1)c_k + (k-2)c_{k-1} - c_k = 0$ для $k \geqslant 2$. Отсюда $k(k-2)c_k + (k-2)c_{k-1} = 0$.

При $k = 2$ это соотношение не определяет значения c_2, и мы можем выбрать его произвольно, например, положить $c_2 = 0$. Тогда при $k > 2$ все коэффициенты также будут равны нулю. Положив $c_0 = 1$, мы получим решение

$$y_2(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Заметим, что $y_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - (\dfrac{1}{x} - 1) = \dfrac{e^{-x}}{x} - y_2(x)$, то есть мы могли бы выбрать функции $\dfrac{e^{-x}}{x}$ и $(\dfrac{1}{x} - 1)$ в качестве ФСР, однако обе они имеют особенности в нуле, в то время как построенная выше функция $y_1(x)$ имела в этой точке ноль первого порядка, как и было обещано теорией.

Пример 6. Имеет ли уравнение $x^2y'' + xy' + (x-1)y = 0$ решение в виде обобщенного степенного ряда?

Определяющее уравнение $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = 0$ имеет те же корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, их разность — целое число.

Ищем решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего большему корню:

$$y(x) = x\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+1}, \quad c_0 \neq 0.$$

Подставляя этот ряд в дифференциальное уравнение, мы получим рекуррентные формулы для коэффициентов:

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k(k+2)}.$$

Если положить $c_0 = 1$, то

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!(k+2)!}$$

и мы получим решение

$$y_1(x) = x - \frac{x^2}{6} + ... + \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k!(k+2)!} + ... \tag{25.6}$$

Второе частное решение ищем в виде

$$y_2(x) = \frac{c_0}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0, \tag{25.7}$$

и приходим к рекуррентным соотношениям $k(k-2)c_k + c_{k-1} = 0$, $k \geqslant 1$.

При $k = 2$ получаем $0 \cdot c_2 + c_1 = 0$, но $c_1 = c_0 \neq 0$, и эти два условия несовместны. Таким образом, найти второе линейно-независимое решение в виде обобщенного степенного ряда нам не удалось.

Но, имея одно решение линейного однородного уравнения (оно представлено рядом (25.6)), мы можем построить второе с помощью формулы Лиувилля:

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{W(x)}{y_1^2(x)},$$

где $\dfrac{dW}{dx} = -\dfrac{x}{x^2}W$, то есть $W = \dfrac{C}{x}$. Таким образом,

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{1}{xy_1^2(x)}. \tag{25.8}$$

Правую часть уравнения разложим в ряд Лорана:

$$\frac{1}{xy_1^2(x)} = \frac{1}{x(x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{2!4!} + \ldots)^2} = \frac{1}{x^3}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 можно определить из равенства

$$1 = (1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{2!4!} + \ldots)^2 \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$

Отсюда $a_0 = 1$, $a_1 = 1/6$, $a_2 = -1/12$. Значения остальных коэффициентов для нас сейчас не существенны.

Интегрируя равенство (25.8) и положив константу интегрирования равной нулю, получим

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = -\frac{a_0}{2x^2} - \frac{a_1}{x} + a_2 \ln|x| + \ldots$$

Обозначенные точками слагаемые представляют собой некоторый степенной ряд. Здесь важно, что $a_2 \neq 0$, то есть в разложении присутствует логарифм. Поэтому

$$y_2(x) = -\frac{1}{12}\ln x \cdot y_1(x) + (-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x} + ...) \cdot y_1(x)$$

Теперь стало понятно, почему нам не удалось найти второе частное решение в виде (25.7). Как видим, решение $y_2(x)$ имеет логарифмическую особенность в точке $x = 0$.

Самостоятельная работа

1. Найдите решение задачи Коши $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$ в виде степенного ряда до x^4 включительно.

2. Найдите ФСР уравнения $(1-x^2)y''-2xy'+2y = 0$ в виде функций, аналитических в окрестности нуля.

3. найдите рекуррентные соотношения для коэффициентов c_k аналитических решений уравнения $y'' = xy$.

4. Можно ли для уравнения $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$ найти ФСР в виде обобщенных степенных рядов? Укажите вид этих рядов.

5. Укажите вид решений уравнения $x^2y'' + xy' + (4 - x)y = 0$ в виде обобщенных степенных рядов.

Домашняя работа

№№ 1106, 1110, 1113, 1118, 1120.

Ответы к самостоятельной работе

2. $y_1 = x$, $y_2 = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}$.

$c_{k+2} = \frac{c_k(k-1)}{(k+1)}$, $c_k = \frac{1}{k}$ при k четном, $c_k = 0$ при k нечетном.

3. $c_k = \dfrac{c_{k-3}}{k(k-1)}$.
$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = 0$ и $c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0$

4. $\lambda_1 = 1/3,\ \lambda_2 = 2/3,$

5. $y = A\cos(2\ln x)\cdot\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k + B\sin(2\ln x)\cdot\sum\limits_{k=0}^{+\infty} d_k x^k.$

Занятие 26

Функции Бесселя. Разложение в ряды Фурье-Бесселя.

Рассмотрим уравнение

$$xy''(x) + y'(x) + xy = 0 \tag{26.1}$$

Это уравнение можно также записать в виде $x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y = 0$, из которого видно, что точка $x = 0$ является регулярной особой точкой. Определяющее уравнение $\lambda(\lambda - 1) + \lambda = 0$ имеет кратный корень $\lambda = 0$.

Такой случай мы не рассматривали на прошлом занятии и у нас нет общих утверждений о виде решений. Попробуем все же искать решение в виде степенного ряда $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

Подставляя его в уравнение, получим $c_1 = 0$, $c_0 + 4c_2 = 0$ и далее $k^2 c_k + c_{k-2} = 0$ для $k \geqslant 2$. Из этих соотношений следует, что $c_{2m-1} = 0$ для всех $m \geqslant 1$, а $c_{2m} = \dfrac{(-1)^m c_0}{2^{2m}(m!)^2}$

Если положить $c_0 = 1$, то мы получим решение уравнения (26.1) в виде степенного ряда. Эта функция так часто встречается в различных приложениях, что имеет смысл дать ей название и специальное обозначение. Итак, функция

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{26.2}$$

называется функцией Бесселя нулевого порядка. Ряд (26.2), определяющий эту функцию, сходится при всех x. Нет никакой необходимости запоминать разложение (26.2), достаточно твердо усвоить, что уравнение Бесселя (26.1) имеет одно решение в виде степенного ряда, и это решение называется функцией Бесселя нулевого порядка.

Из проведенной выше выкладки следует, что второго решения в виде ряда мы найти не сможем. Поэтому для построения ФСР снова воспользуемся формулой Лиувилля. Из уравнения $\frac{dW}{dx} = -\frac{W}{x}$ получаем $W = \frac{B}{x}$. Тогда второе частное решение можно определить из формулы

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)' = \frac{B}{xJ_0^2(x)} \tag{26.3}$$

Заметим, что $J_0(0) = 1$, поэтому $\frac{1}{J_0^2(x)} = 1 + a_1 x + ...$ и правая часть уравнения (26.3) имеет вид $\frac{B}{x} + Ba_1 + ...$ (обозначенные точками слагаемые представляют собой некоторый степенной ряд). Интегрируя (26.3), получим

$$y_2(x) = J_0(x)(B \ln|x| + ...).$$

Таким образом, второе решение уравнения (26.1) имеет логарифмическую особенность. При специальном выборе константы функцию $y_2(x)$ называют функцией Неймана нулевого порядка. Она равна (при $x > 0$)

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)(\ln\frac{x}{2} + C) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{26.4}$$

Здесь C — константа Эйлера, $C = 0,577215...$.

Понятно, что запоминать формулу (26.4) нет никакой необходимости, достаточно знать, что общее решение уравнения (26.1) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Несмотря на устрашающие выражения в виде степенных рядов, функции $J_0(x)$ и $N_0(x)$ в определенном смысле не сложнее привычных нам синуса и косинуса (рис. 26.1, 26.2).

Здесь мы столкнулись с чрезвычайно принципиальным вопросом — как в математической физике возникают новые функции, которые принято называть специальными. Ответ очень прост — они возникают как решения дифференциальных уравнений. Если мы можем выразить ре-

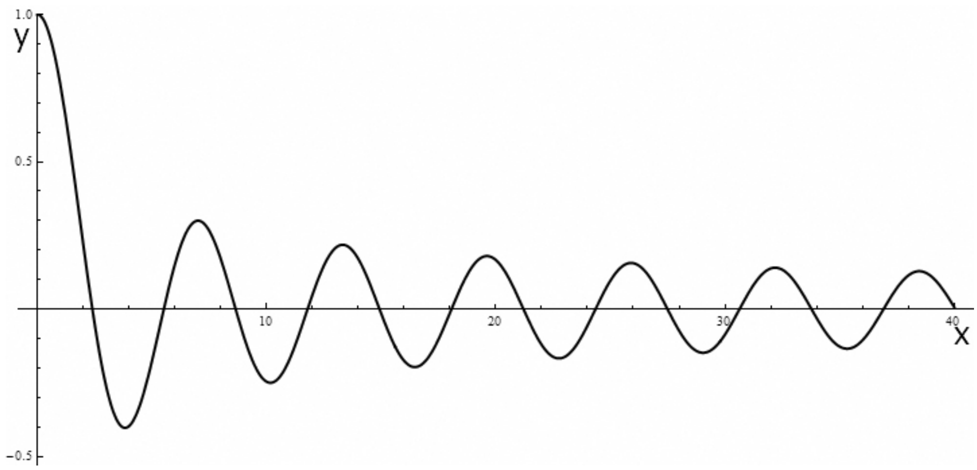

Рис. 26.1. Функция Бесселя $J_0(x)$.

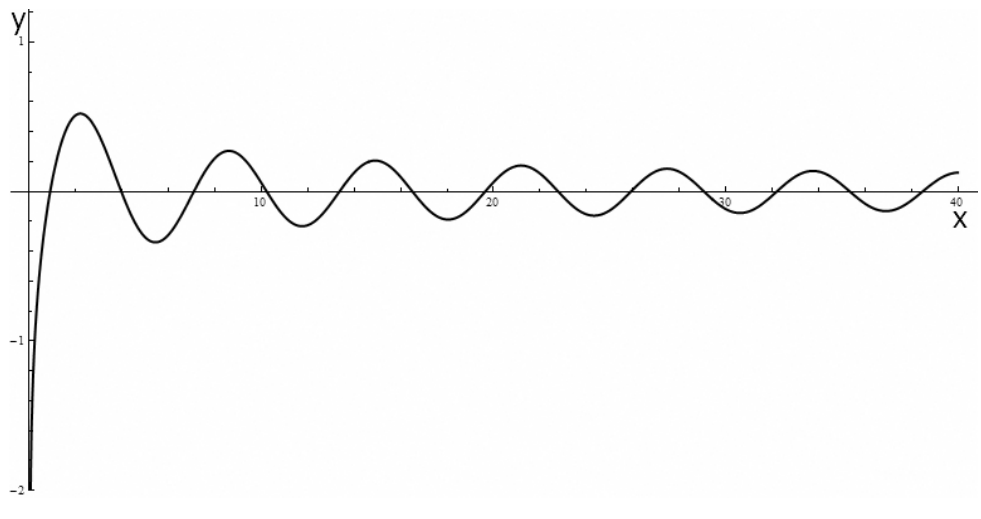

Рис. 26.2. Функция Бесселя $N_0(x)$.

шение уравнения через те функции, которые мы уже знаем — прекрасно, а если не можем, то вводим для новых функций обозначения и названия. Главное — сохранить чувство меры. Теперь, когда мы стоим на этих ясных позициях, сформулируем некоторые утверждения.

Уравнение

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{26.5}$$

называется уравнением Бесселя порядка n ($n \in \mathbb{N}$). Одно решение этого уравнения представляется в виде степенного ряда и называется функцией Бесселя порядка n:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

а второе решение имеет логарифмическую особенность и называется функцией Неймана порядка n (обозначается $N_n(x)$). Общее решение уравнения (26.5) имеет вид

$$y(x) = C_1J_n(x) + C_2N_n(x)$$

Как это часто бывает, возникшие в одном контексте специальные функции начинают появляться в совершенно неожиданных на первый взгляд формулах. Так, можно показать, что

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z) \tag{26.6}$$

Это разложение в ряд Лорана. Параметр z здесь считают комплексным числом, но при действительном z коэффициенты этого разложения являются нашими знакомыми — функциями Бесселя порядка n.

Из (26.6) легко получить, что

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{26.7}$$

Для этого заменим в (26.6) t на $-1/t$. Тогда

$$\exp(\frac{z}{2}(-\frac{1}{t}+t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1/t)^n J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(z)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t^n, придем к требуемому соотношению.

Покажем, что

$$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z) \tag{26.8}$$

Для этого в тождестве (26.6) положим $t = z\tau$ и продифференцируем это выражение по z:

$$\exp(\frac{1}{2}(z^2\tau - \frac{1}{\tau})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n z^n J_n(z)$$

$$z\tau\exp(\frac{1}{2}(z^2\tau - \frac{1}{\tau})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n \frac{d}{dz}(z^n J_n(z))$$

С другой стороны, домножая на $z\tau$, получим

$$z\tau\exp(\frac{1}{2}(z^2\tau - \frac{1}{\tau})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^{n+1} z^{n+1} J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau^n z^n J_{n-1}(z)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ^n, приходим к (26.8).

Также можно показать, что

$$\frac{d}{dz}(z^{-n} J_n(z)) = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

В дальнейшем мы часто будем использовать это соотношение при $n = 0$:

$$J_0'(z) = -J_1(z)$$

Рассмотрим теперь уравнение Бесселя с параметром:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (a^2x^2 - n^2)y = 0, \quad a \neq 0 \tag{26.9}$$

Легко видеть, что замена $t = ax$ приводит его к уравнению

$$t^2\ddot{y}(t) + t\dot{y}(t) + (t^2 - n^2)y = 0$$

Следовательно, решением уравнения (26.9) является функция

$$y(x) = C_1 J_n(ax) + C_2 N_n(ax).$$

Рассмотрим случай чисто мнимого значения параметра: $a = ib$. Тогда уравнение (26.9) примет вид

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - (b^2x^2 + n^2)y = 0, \quad b \in \mathbb{R} \tag{26.10}$$

Его решение можно записать через знакомые функции

$$y(x) = C_1 J_n(ibx) + C_2 N_n(ibx),$$

но лучше ввести новые вещественные функции о вещественных аргументов. Положим $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$, тогда

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \tag{26.11}$$

Эта функция называется модифицированной функцией Бесселя порядка n. (рис. 26.3)

Аналогичным образом можно ввести и модифицированную функцию Неймана. Однако мы не будем этого делать, так как в дальнейшем нас будут интересовать только ограниченные в нуле решения уравнения (26.10).

Итак, решением уравнения (26.10), ограниченным в нуле, является функция $y(x) = I_n(bx)$.

Интересно провести аналогию с хорошо знакомыми вам функциями — тригонометрическими и гиперболическими:

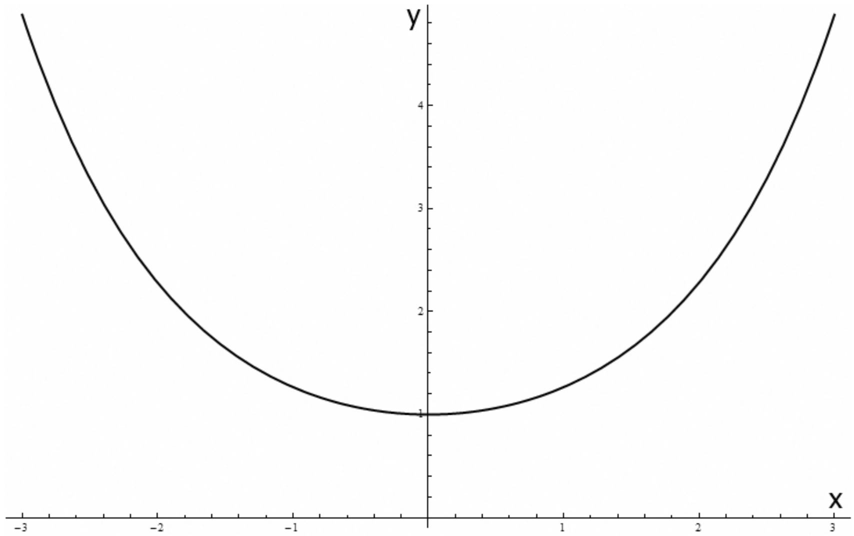

Рис. 26.3. Функция Бесселя $N_0(x)$.

$$y'' + a^2 y = 0 \qquad\qquad y'' - a^2 y = 0$$
$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax \qquad\qquad y = C_1 \operatorname{sh} ax + C_2 \operatorname{ch} ax$$

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x; \qquad \cos(ix) = \operatorname{ch} x$$

Уравнение

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (a^2 x^2 - \nu^2) y = 0, \quad a \neq 0 \tag{26.12}$$

называется уравнением Бесселя порядка ν. Точка $x = 0$ является регулярной особой точкой. Определяющее уравнение $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\nu$. Далее будем считать $a = 1$.

Если разность корней 2ν не является целым числом, то это уравнение имеет ФСР, состоящую из двух функций Бесселя $J_\nu(ax)$ и $J_{-\nu}(ax)$.

Если $\nu = n \in \mathbb{N}$, то уравнение имеет ФСР, состоящую из функции Бесселя $J_n(ax)$ и функции Неймана $N_n(ax)$.

Осталось только разобраться со случаем, когда $\nu = \dfrac{2n+1}{2}$ (в этом случае говорят, что ν является полуцелым числом).

Рассмотрим простейший случай $\nu = \dfrac{1}{2}$. Уравнение (26.11) имеет вид

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \frac{1}{4}) y = 0$$

Сделаем замену $y(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$. Она приведет нас к уравнению, не содержащему первой производной от u (на занятии 21 мы обсуждали этот прием). Тогда

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{x}} - \frac{u}{2x\sqrt{x}}$$

$$xy' = u'\sqrt{x} - \frac{u}{2\sqrt{x}}$$

Дифференцируя последнее равенство и умножая его на x, получим

$$x^2y'' + xy' = u''x\sqrt{x} + \frac{u}{4\sqrt{x}}.$$

Таким образом, уравнение приводится к виду $u''+u = 0$. Его общее решение $u(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Возвращаемся к функции $y(x)$ и получаем общее решение

$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Если бы мы искали решение в виде обобщенных степенных рядов, то получили бы решение соответствующее $\lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$y_1(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3!}x^{5/2} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+\frac{1}{2}} + ... = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

и, несмотря на отсутствие гарантий, решение, соответствующее $\lambda = -\dfrac{1}{2}$:

$$y_2(x) = x^{-1/2} - \frac{1}{2!}x^{3/2} + ... + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k-\frac{1}{2}} + ... = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Вообще говоря, решения представлены через известные функции, и нет необходимости вводить новые обозначения, тем не менее вводят функции Бесселя (рис. 26.4, 26.5)

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Заметим, что функция $J_{1/2}(x)$ ограничена в нуле, а функция $J_{-1/2}(x)$ — неограничена.

Для других полуцелых значений $\nu = n + \dfrac{1}{2}$ также можно показать,

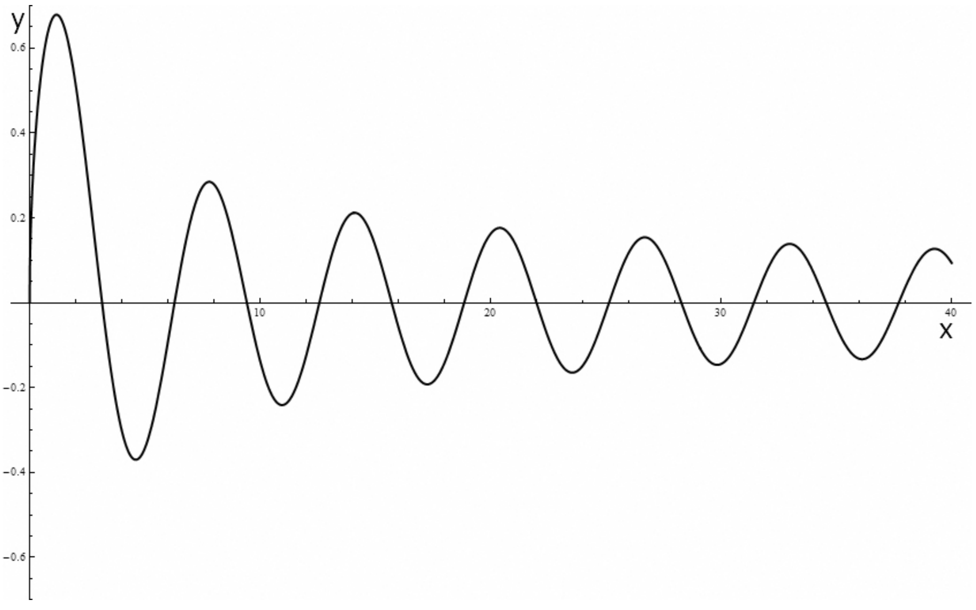

Рис. 26.4. Функция Бесселя $J_{1/2}(x)$.

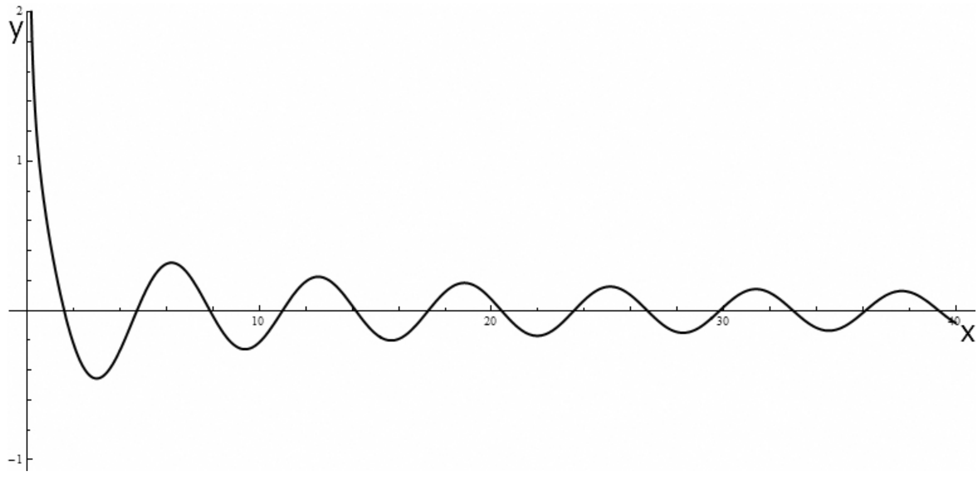

Рис. 26.5. Функция Бесселя $J_{-1/2}(x)$.

что уравнение Бесселя (26.11) имеет два линейно независимых решения в виде обобщенных степенных рядов и его общее решение

$$y(x) = C_1 J_{n+1/2}(ax) + C_2 J_{-(n+1/2)}(ax).$$

Первая функция не имеет особенностей в нуле и представляется рядом

$$J_{n+1/2}(x) = x^{n+1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

вторая — неограничена в нуле и представляется рядом

$$J_{-(n+1/2)}(x) = x^{-(n+1/2)} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k$$

Рассмотрим на отрезке $[0; l]$ задачу Штурма–Лиувилля для оператора $L[y] = y'' + \frac{1}{x} y'$ с граничными условиями $y(0)$ — ограничено, $y(l) = 0$.

Другими словами, требуется найти решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{x} y' = \lambda y, \tag{26.13}$$

удовлетворяющее указанным краевым условиям.

Пусть $\lambda = 0$, тогда

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln x.$$

Ограниченным в нуле является решение $y(x) = C_1$, но из условия $y(l) = 0$ следует, что $C_1 = 0$, то есть $y \equiv 0$. Это означает, что $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $L[y]$, то есть оператор не вырожден.

Далее, рассмотрим случай $\lambda > 0$, тогда $\lambda = a^2$, $a \in \mathbb{R}$. Уравнение (26.12) принимает вид

$$y'' + \frac{1}{x} y' - a^2 y = 0.$$

Умножив обе части на x^2, его легко привести к виду (26.10) при $n = 0$. Как мы помним, решением, ограниченным в нуле, является модифицированная функция Неймана $I_0(ax)$, но, как видно из рис. (26.3), она нигде не обращается в ноль. Следовательно, решение $y(x) = CI_0(ax)$ можно подчинить краевому условию $y(l) = 0$ только при $C = 0$. Таким образом, $\lambda > 0$ также не являются собственными числами оператора $L[y]$.

Рассмотрим случай $\lambda < 0$, тогда $\lambda = -a^2$, $a \in \mathbb{R}$. Уравнение (26.12) принимает вид

$$y'' + \frac{1}{x}y' + a^2y = 0.$$

Умножив обе части на x^2, мы увидим, что это уравнение Бесселя порядка 0, и оно имеет ограниченное в нуле решение $y(x) = CJ_0(ax)$.

Для выполнения второго краевого условия необходимо, чтобы

$$J_0(al) = 0.$$

Функция Бесселя $J_0(x)$ имеет счетное число нулей. Договоримся обозначать их μ_k, то есть $J_0(\mu_k) = 0$, $k = 1,\ 2\ ,\ldots$ Тогда $J_0(al) = 0$ при $a_k = \frac{\mu_k}{l}$.

Таким образом, $\lambda_k = -(\frac{\mu_k}{l})^2$ являются собственными числами поставленной задачи Штурма-Лиувилля, а $e_k = J_0(\frac{\mu_k}{l}x)$ — собственными функциями.

Выясним, с каким весом ортогональны эти функции. Приведем оператор к самосопряженному виду:

$$xy'' + y' = \lambda xy \quad \text{или} \quad (xy')' = \lambda xy$$

Таким образом, вес $\rho(x) = x$, и

$$\int\limits_0^l xJ_0(\frac{\mu_k}{l}x)J_0(\frac{\mu_n}{l}x)\,dx = 0, \quad k \neq n.$$

Сформулируем теорему Стеклова для нашей задачи.

Если функция $f(x) \in C^2(0;l)$ ограничена в нуле и $f(l) = 0$, то она допускает на отрезке $[0;l]$ разложение в равномерно сходящийся ряд

Фурье–Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k J_0(\frac{\mu_k}{l}x),$$

где

$$c_k = \frac{\int\limits_0^l x f(x) J_0(\frac{\mu_k}{l}x)\,dx}{\int\limits_0^l x J_0^2(\frac{\mu_k}{l}x)\,dx}.$$

Самостоятельная работа

Напишите формулу общего решения следующих дифференциальных уравнений:

1. $x^2y'' + xy' - 25x^2y - \frac{9}{4}y = 0.$

2. $x^2y'' + xy' - 5y + 16x^2y = 0.$

3. $x^2y'' + xy' + (2x^2 - 1)y = 0.$

4. Найдите общее решение уравнения $x^2y''+2xy'-n(n+1)y+x^2y = 0.$

Указание: заменой $y = \dfrac{u}{\sqrt{x}}$ сведите это уравнение к уравнению Бесселя.

5. Решите задачу Штурма–Лиувилля $\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' = \lambda y \\ y(0) \text{— ограничено} \\ y'(l) = 0 \end{cases}$

и сформулируйте теорему Стеклова

Указание: обозначьте через μ_k^1 нули функции Бесселя $J_1(x)$ и воспользуйтесь тем, что $J_0'(x) = -J_1(x)$ (рис. 26.6, рис. 26.7).

Домашняя работа

Предлагаются задачи из месячного задания.

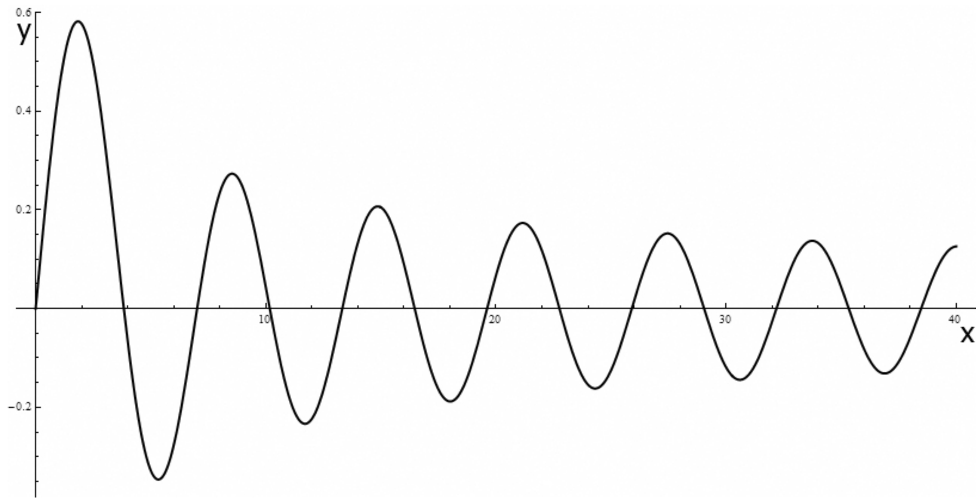

Рис. 26.6. Функция Бесселя $J_1(x)$.

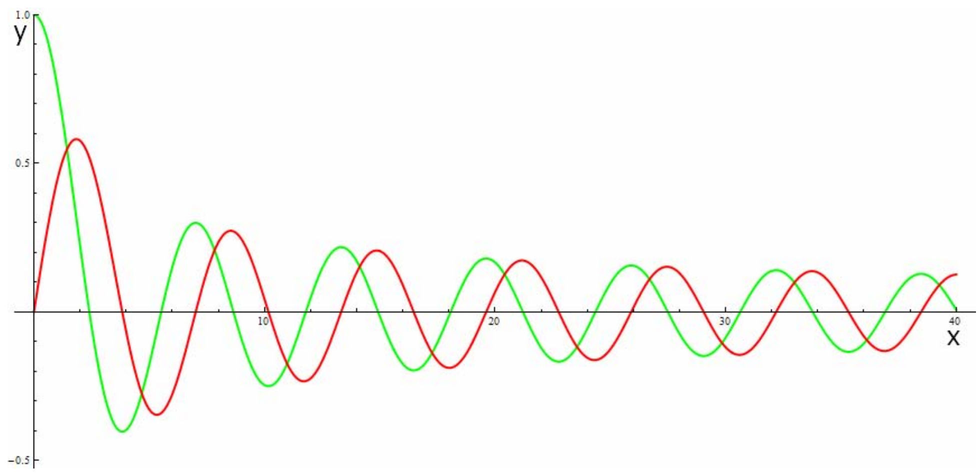

Рис. 26.7. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Ответы к самостоятельной работе

1. $y(x) = C_1 J_{3/2}(5x) + C_2 J_{-3/2}(5x)$.
2. $y(x) = C_1 J_{\sqrt{5}}(4x) + C_2 J_{-\sqrt{5}}(4x)$.
3. $y(x) = C_1 J_1(\sqrt{2}x) + C_2 N_1(\sqrt{2}x)$.
4. $y(x) = C_1 \frac{J_{n+1/2}(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{J_{-(n+1/2)}(x)}{\sqrt{x}}$.
5. $\lambda_0 = 0$, $e_0 = 1$;

   $\lambda_k = -(\frac{\mu_k^1}{l})^2$, $e_k = J_0(\frac{\mu_k^1}{l}x)$.

Занятие 27

Разделение переменных в уравнениях Лапласа и Гельмгольца и краевые задачи.

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{27.1}$$

Функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются гармоническими. Попробуем найти у этого уравнения решения очень простого вида

$$u(x; y) = f(x) \cdot g(y).$$

Тогда для функций $f(x)$ и $g(y)$ мы получим уравнения

$$f'' + \lambda f = 0 \text{ и } g'' - \lambda g = 0.$$

На плоскости xOy рассмотрим прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Допустим, что мы хотим найти такие решения уравнения (27.1), что

$$u(x, y)\Big|_{x=0} = 0 \text{ и } u(x, y)\Big|_{x=a} = 0.$$

Это приведёт нас к задаче Штурма-Лиувилля для функции $f(x)$:

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \\ f(0) = 0, f(a) = 0 \end{cases}$$

Мы решали эту задачу на 24 занятии и получили, что она имеет решения только при

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \text{ и эти решения } f_n = C \sin\frac{\pi n}{a} x.$$

Тогда уравнение для функции $g(y)$ принимает вид

$$g''(y) - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 g(y) = 0.$$

Тогда

$$g(y) = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y + C_2 \operatorname{ch} \frac{\pi n}{a} y.$$

Можно добиться того, чтобы функция $g(y)$ обращалась в ноль или при $y = 0$, или при $y = b$. В первом случае следует рассмотреть $g(y) = C_1 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y$, а во втором $g(y) = C_2 \operatorname{ch} \frac{\pi n}{a} y$.

Получить ненулевое решение, которое обращается в ноль на всех сторонах прямоугольника, невозможно, так как гармоническая в некоторой области функция, равная нулю на её границе, тождественно равна нулю, если требовать естественное условие непрерывности функции $u(x, y)$ вплоть до границы.

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varkappa^2 u = 0.$$

Вопрос: при каких значениях параметра $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет частные решения вида $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, обращающиеся в ноль на границах прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant y \leqslant b$?

Разделение переменных приведёт нас к уравнениям на $f(x)$ и $g(y)$.

$$f'' + \alpha f = 0,$$
$$g'' + \beta g = 0.$$

При этом, $\varkappa^2 = \alpha + \beta$. Краевые условия позволяют говорить, что мы имеем на каждую функцию f и g задачи Штурма-Лиувилля

$$f''(x) + \alpha f(x) = 0\,, \quad f(0) = 0\,, \quad f(a) = 0,$$
$$g''(y) + \beta g(y) = 0\,, \quad g(0) = 0\,, \quad g(b) = 0.$$

Решения этих задач нам уже известно. Итак, при

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\,, \quad n, m \in \mathcal{N},$$

мы имеем частные решения

$$u_{nm}(x,y) = \sin\frac{\pi n x}{a}\cdot\sin\frac{\pi m y}{b},$$

которые равны нулю на границе прямоугольника.

Теперь рассмотрим уравнение Гельмгольца в полярной системе координат и будем искать, при каких $\varkappa$ это уравнение имеет частные решения, обращающиеся в ноль на границе круга $x^2+y^2=\rho_0^2$. Совершенно естественно, чтобы эти функции были однозначными и ограниченными. Итак, если $u(\rho,\varphi)=F(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$, то

$$\begin{aligned}&\Phi''+\lambda\Phi=0,\\&\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dF}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2}\lambda F+\varkappa^2F=0.\end{aligned}$$

Требования однозначности приводят нас к тому, что функция $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π. Покажем, что условия $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$ и $\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$ позволяют нам определить константу разделения λ. Таким образом, на функцию $\Phi(\varphi)$ мы имеем следующую задачу Штурма-Лиувилля с нестандартными краевыми условиями:

$$\Phi''+\lambda\Phi=0\,,\quad \Phi(0)=\Phi(2\pi)\,,\quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi).$$

Если $\lambda=0$, то $\Phi=C_1+C_2\varphi$, откуда $\Phi_0=1$.

Если $\lambda=-a^2,\ a\neq 0$, то $\Phi=C_1\operatorname{sh}a\varphi+C_2\operatorname{ch}a\varphi$. Периодических функций мы в этом случае не найдём.

Если $\lambda=a^2,\ a\neq 0$, то $\Phi=C_1\sin a\varphi+C_2\cos a\varphi$ и на константы C_1, C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases}C_2=C_1\sin 2\pi\beta+C_2\cos 2\pi\beta,\\ \beta C_1=\beta C_1\cos 2\pi\beta-\beta C_2\sin 2\pi\beta.\end{cases}$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} \sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta - 1 \\ \cos 2\pi\beta - 1 & -\sin 2\pi\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $(\cos 2\pi\beta - 1)^2 + \sin^2 2\pi\beta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\pi\beta = 1,\ 2\pi\beta = 2\pi n$. Таким образом, $a = n$ и

$$\Phi(\varphi) = C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi.$$

Рассмотренная задача Штурма-Лиувилля появляется всегда, когда мы имеем в исходном уравнении осевую симметрию. Поэтому мы запомним полученный результат и будем ссылаться на него.

Обратимся к уравнению на функцию $F(\rho)$ с уже найденным значением λ.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dF}{d\rho} + \frac{n^2}{\rho^2}F + \varkappa^2 F = 0, \text{ или}$$

$$F'' + \frac{1}{\rho}F' + \frac{n^2}{\rho^2}F + \varkappa^2 F = 0.$$

Это знакомое нам уравнение Бесселя. Его ограниченное решение — функция Бесселя порядка n. Таким образом,

$$F = CJ_n(\varkappa\rho).$$

Осталось определить параметр $\varkappa$ из условия $J_n(\varkappa\rho_0) = 0$. Договоримся обозначать нули функции $J_n(x)$ через μ_k^n, то есть

$$J_n(\mu_k^n) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

тогда $\varkappa\rho_0 = \mu_k^n$.

Итак, однозначные и ограниченные частные решения уравнения $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$, обращающиеся в ноль на границе круга радиуса ρ_0, имеют вид

$$u_{nk}(\rho, \varphi) = (C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) \cdot J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots\ ,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Займёмся теперь трёхмерными уравнениями Лапласа и Гельмгольца. Разделение переменных $u = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$ в декартовой системе координат для уравнения (27.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

приведёт нас к трём обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X'' + \alpha X = 0\,, \quad Y'' + \beta Y = 0\,, \quad Z'' + \gamma Z = 0,$$

при условии, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Область, в которой мы рассматриваем решение, является прямоугольным параллелепипедом. Дополнительные краевые условия должны позволить нам сформулировать задачи Штурма-Лиувилля для любых двух функций из трёх. При этом определяется две константы разделения, а третья найдётся из условия $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Простейший вариант следующий: найти частные решения уравнения Лапласа, обращающиеся в ноль на гранях параллелепипеда.

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=a} = 0\,, \quad u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=b} = 0 \quad \text{и } u\Big|_{z=0} = 0$$

Анализируя поставленные условия, мы видим, что на функции $X(x)$ и $Y(y)$ можно сформулировать задачи Штурма-Лиувилля, а на функцию $Z(z)$ это сделать нельзя. Таким образом,

$$X'' + \alpha X = 0\,, \quad X(0) = X(a) = 0,$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\,, \quad X_n = \sin\frac{\pi n x}{a},\ n = 1, 2, \ldots.$$

$$Y'' + \beta Y = 0\,, \quad Y(0) = Y(b) = 0,$$

$$\beta = \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\,, \quad Y_m = \sin\frac{\pi m y}{b},\ m = 1, 2, \ldots.$$

Определяем γ:

$$\gamma = -\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2,\ n, m = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$Z'' - \left(\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right) Z = 0.$$

Решение, обращающееся в ноль при $z = 0$, есть

$$Z(z) = \operatorname{sh} \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} z.$$

Итак,

$$u_{nm}(x, y, z) = \sin\frac{\pi n x}{a} \cdot \sin\frac{\pi m y}{b} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} z,\ n, m = 1, 2, \ldots .$$

Конечно, краевые условия могут быть и более сложного вида, тогда функции $u(x, y, z)$ будут весьма громоздкие, но главное, что нужно усвоить это то, что краевые условия на функцию $u(x, y, z)$ приводят к постановке задач Штурма-Лиувилля, которые в свою очередь позволяют определить константы разделения.

Рассмотрим уравнение Лапласа в цилиндре $0 \leqslant z \leqslant h$, $x^2 + y^2 \leqslant \rho_0^2$. Разделение переменных в цилиндрической системе координат

$$u = F(z) \cdot \Phi(\varphi) \cdot G(\rho)$$

приведёт нас к

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dG}{d\rho}\frac{1}{G} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{F''}{F} = 0.$$

Функции Φ, F, G должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} &\Phi'' + \alpha\Phi = 0, \\ &F'' + \beta F = 0, \\ &\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\frac{dG}{d\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}G - \beta G = 0 \end{aligned}$$

Мы сможем определить параметр β из того уравнения, для которого краевые условия позволят поставить задачу Штурма-Лиувилля.

Допустим, что мы ищем частные решения, обращающиеся в ноль на верхнем и нижнем основаниях цилиндра, то есть при $z = 0$ и при $z = h$. Тогда есть возможность сформулировать задачу Штурма-Лиувилля на функцию $F(z)$. Имеем

$$F'' + \beta F = 0\,, \quad F(0) = 0\,, \quad F(h) = 0,$$

$$\beta = \left(\frac{\pi m}{n}\right)^2\,, \quad F_m = \sin\frac{\pi m}{n}z,\ m = 1, 2, \dots .$$

Уравнение на G приняло вид

$$G'' + \frac{1}{\rho}G' - \frac{n^2}{\rho^2}G - \left(\frac{\pi m}{n}\right)^2 G = 0.$$

Решением этого уравнения, ограниченными при $\rho = 0$, является модифицированная функция Бесселя порядка n

$$G(\rho) = I_n(\frac{\pi m}{n}\rho).$$

Итак, мы получили следующие частные решения:

$$u_{nm} = (C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) \cdot \sin\frac{\pi m z}{n} \cdot I_n(\frac{\pi m}{n}\rho),\ m = 1, 2, \dots .$$

Напомним, что функция $I_n(\frac{\pi m}{n}\rho)$ не обращается в ноль ни при каком $\rho \neq 0$.

Будем теперь искать частные решения (по-прежнему ограниченные и однозначные), обращающиеся в ноль на боковой поверхности цилиндра, то есть при $\rho = \rho_0$. Теперь у нас нет возможности определить параметр β из уравнения на функцию F, так как мы не имеем для постановки задачи Штурма-Лиувилля надлежащих краевых условий.

Обратимся к уравнению на функцию G. Условия ограниченности решения при $\rho = 0$ и $u\Big|_{\rho=\rho_0} = 0$ позволяют нам поставить задачу Штурма-Лиувилля для функции $G(\rho)$:

$$G'' + \frac{1}{\rho}G - \frac{n^2}{\rho^2} - \beta G = 0\,, \quad G(0) \text{ — ограниченна}\,, \quad G(\rho_0) = 0.$$

Мы решали эту задачу на предыдущем занятии и пришли к

$$\beta = -\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2\,, \quad G_k(\rho) = J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Теперь, зная значения β, обратимся к уравнению на функцию F.

$$F'' - \left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2 F = 0.$$

Его общее решение

$$F = C_1 \operatorname{sh}\frac{\mu_k^n}{\rho_0}z + C_2 \operatorname{ch}\frac{\mu_k^n}{\rho_0}z.$$

Отсюда можно выбрать, например, такое $F(z)$, что $F\Big|_{z=0} = 0$.

Таким образом, частные решения уравнения Лапласа, обращающиеся в ноль на боковой поверхности цилиндра и на его нижнем основании, имеют вид

$$u_{nk}(\varphi, \rho, z) = (C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) \cdot J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right) \cdot \operatorname{sh}\frac{\mu_k^n}{\rho_0}z.$$

Ограниченность и периодичность по φ при этом подразумеваются совершенно естественными и эти факты обычно не упоминаются. Заметим, что $u_{nk}\Big|_{z=h} \neq 0$ ни при каком h.

Нам осталось найти, при каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца $\Delta u + \varkappa^2 u = 0$ имеет частные решения, обращающиеся в ноль на поверхности цилиндра. Разделяем переменные в уравнении

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varkappa^2 u = 0,$$

то есть ищем решения в виде

$$u = F(z) \cdot G(\rho) \cdot \Phi(\varphi).$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dF}{d\rho}\right)\frac{1}{F}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi}+\frac{F''}{F}+\varkappa^2=0.$$

Мы уже знаем, что требование периодичности по φ приведёт нас к тому, что

$$\Phi(\varphi)=C_1\sin n\varphi+C_2\cos n\varphi.$$

С учётом этого, запишем уравнения на F и G.

$$\begin{aligned}&F''+\alpha F=0,\\&G''+\frac{1}{\rho}G'-\frac{n^2}{\rho^2}G+\beta G=0,\end{aligned}$$

где $\varkappa^2=\alpha+\beta$.

Поставленные краевые условия позволяют сформулировать задачу Штурма-Лиувилля и на функцию F

$$F''+\alpha F=0\,,\quad F(0)=0\,,\quad F(h)=0,$$

и на функцию G

$$G''+\frac{1}{\rho}G'-\frac{n^2}{\rho^2}G+\beta G=0\,,\quad G(0)-\text{ограниченна}\,,\quad G(\rho_0)=0.$$

Откуда

$$\alpha=\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2\,,\quad F_m(z)=\sin\frac{\pi m}{h}z,$$

$$\beta=\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2\,,\quad G_{nk}(\rho)=J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right),$$

$$\text{и }\varkappa^2=\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2+\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2.$$

Можно сформулировать следующую многомерную задачу Штурма-Лиувилля. Найти однозначные и ограниченные собственные функции оператора Лапласа, обращающиеся в ноль на поверхности цилиндра $0\leqslant z\leqslant h$, $x^2+y^2\leqslant\rho_0^2$. Мы нашли собственные функции

$$u_{nmk}(\varphi,\rho,z)=\left\{\begin{matrix}1\\ \cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}\right\}\cdot J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right)\cdot\sin\frac{\pi m z}{h},$$

$$n=0,1,\ldots,\ m=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots$$

и соответствующие им собственные значения $\varkappa_{nmk}$.

Заметим, что во всех задачах, связанных с цилиндром, возникает уравнение Бесселя целого порядка n. Поэтому часто функции Бесселя $J_n(\rho)$ и $I_n(\rho)$ называют цилиндрическими функциями Бесселя.

Самостоятельная работа

1. Найти гармонические функции на плоскости такие, что

$$u\Big|_{x=0}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0.$$

2. Найти гармонические функции в цилиндре, не зависящие от угла φ, такие, что

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h}=0.$$

3. Найти гармонические функции в параллелепипеде такие, что

$$u\Big|_{x=a}=0\,,\quad u\Big|_{y=0}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0\,,\quad u\Big|_{z=c}=0.$$

4. При каких значениях параметра $\varkappa$ можно найти решения уравнения Гельмгольца $\Delta u+\varkappa^2u=0$, не зависящие от угла φ и такие, что на границе цилиндра

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h}=0\,,\quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_0}=0.$$

Занятие 28

Разделение переменных в уравнениях Лапласа и Гельмгольца в сферической системе координат. Функции Лежандра.

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Если мы ищем гармонические функции ($\Delta u = 0$) специального вида

$$u(r,\theta,\varphi) = G(r)F(\theta)\Phi(\varphi),$$

то, разделяя переменные

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial G}{\partial r})}{G} + \frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta})}{F} + \frac{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}}{\Phi} = 0,$$

мы получим для каждого множителя обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}(r^2\frac{dG}{dr}) - \beta G = 0\\
&\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dF}{d\theta} - \frac{\alpha}{\sin^2\theta}F) + \beta F = 0\\
&\Phi'' + \alpha\Phi = 0
\end{aligned}$$

Естественно, мы хотим получить однозначные и ограниченные решения. Требование однозначности, как мы помним, приводит к тому, что функция $\Phi(\varphi)$ должна быть периодической с периодом $T = 2\pi$. Следовательно, $\alpha = m^2$, $m = 0$, 1, ..., и

$$\Phi_m(\varphi) = C_1\sin m\varphi + C_2\cos m\varphi.$$

Для функции $F(\theta)$ мы получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}) + (\beta - \frac{m^2}{\sin^2\theta})F = 0, \tag{28.1}$$

с которым нам раньше не приходилось встречаться. Познакомимся с ним поближе.

Сделаем замену $\tau = \cos\theta$. Для этого сначала преобразуем первое слагаемое. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{d\tau}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{d\tau} = -\frac{d}{d\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dF}{d\theta}) = \frac{d}{d\cos\theta}(\sin^2\theta\frac{dF}{d\cos\theta})$$

Тогда

$$\frac{d}{d\tau}((1-\tau^2)\frac{dF}{d\tau}) + (\beta - \frac{m^2}{1-\tau^2})F = 0,$$

или в развернутом виде

$$(1-\tau^2)F'' - 2\tau F' + (\beta - \frac{m^2}{1-\tau^2})F = 0. \tag{28.2}$$

Точки $\tau = \pm 1$ являются для этого уравнения особыми (соответственно для уравнения (28.1) особыми являются точки $\theta = 0$ и $\theta = \pi$).

Потребуем ограниченности функции F в этих точках. Мы должны выяснить, при каких значениях β уравнение (28.2) имеет решение, ограниченное на отрезке $[-1;1]$. Другими словами, мы должны решить задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} L[F] = (1-\tau^2)F'' - 2\tau F' - \dfrac{m^2}{1-\tau^2}F = -\beta F \\ F(-1) \text{— ограничено} \\ F(1) \text{— ограничено} \end{cases}$$

Рассмотрим случай $m = 0$. Уравнение (28.2) в этом случае называется уравнением Лежандра и имеет вид

$$(1-\tau^2)F'' - 2\tau F' + \beta F = 0. \tag{28.3}$$

Хотя уравнение выглядит довольно просто, у нас нет оснований надеяться на то, что его решение выражается через известные функции. Но мы можем попробовать найти решение в виде степенного ряда. Итак, ищем решение уравнения (28.3) в виде ряда

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \tau^k. \tag{28.4}$$

Подставляем (28.4) в уравнение:

$$(1-\tau^2)\sum_{k=2}^{+\infty} c_k k(k-1)\tau^{k-2} - 2\tau \sum_{k=1}^{+\infty} c_k k \tau^{k-1} + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \tau^k = 0.$$

Приводим подобные слагаемые и приравниваем коэффициенты к нулю:

$$2c_2 + \beta c_0 = 0$$

$$-k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k + \beta c_k = 0.$$

таким образом, коэффициенты могут быть найдены из рекуррентных соотношений

$$c_{k+2} = \frac{(k(k+1)-\beta)c_k}{(k+2)(k+1)}. \tag{28.5}$$

Рассмотрим точку $\tau = 1$. Если $\beta \neq n(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, то при достаточно больших k ряд $F(1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k$ становится знакопостоянным, и применяя признак Гаусса, можно показать, что он расходится.

Если же найдется $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $\beta = n(n+1)$, то из (28.5) следует, что $c_{n+2} = 0$ и все дальнейшие коэффициенты $c_{n+2k} = 0$.

Если n — четное ($n = 2m$), то коэффициенты c_2, c_4, ... , c_{2m} определяются через c_0, а следующие за ними коэффициенты c_{2p}, $p > m$, обращаются в ноль. Полагая $c_1 = 0$, мы получим, что все коэффициенты $c_{2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Если n — нечетное ($n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), то коэффициенты c_3, c_5, ... , c_{2m+1} определяются через c_1, а следующие за ними коэффициенты c_{2p+1}, $p > m$, обращаются в ноль. Полагая $c_0 = 0$, мы получим, что все коэффициенты $c_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, при $\beta = n(n+1)$ уравнение (28.3) имеет решение в виде многочлена, а второе линейно независимое с ним решение останется рядом, расходящимся по крайней мере при $\tau = 1$.

Так, при $\beta = 0$ ($n = 0$) уравнение $(1-\tau^2)F'' - 2\tau F' = 0$ легко решить, понижая порядок. Его ФСР состоит из функции $y_1 \equiv 1$, ограниченной на отрезке $[-1; 1]$, и функции $y_2 = \ln\dfrac{1+\tau}{1-\tau}$ неограниченной в точках $\tau = \pm 1$.

При $\beta = 2$ ($n = 1$) уравнение $(1-\tau^2)F'' - 2\tau F' + 2F = 0$ имеет решение $y_1 = \tau$, ограниченное на отрезке $[-1; 1]$. Второе решение $y_2 = 2 - \tau \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ можно достроить, пользуясь формулой Лиувилля. Как и в случае $n = 0$, оно неограниченно в точках $\tau = \pm 1$.

С увеличением номера n второе решение становится все более сложным, но его явный вид нас совершенно не интересует. Достаточно понимать, что оно неограниченно при $\tau = \pm 1$.

Итак, при $\beta = n(n+1)$ уравнение (28.3) имеет решение в виде многочлена степени n. Это решение, определенным образом нормированное, называется многочленом Лежандра. Найти многочлены Лежандра при любом значении n можно по формуле Родрига:

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(\tau^2-1)^n}{d\tau^n}.$$

Приведем формулы $P_n(\tau)$ для небольших значений n:

$$P_0(\tau) = 1,\ \ P_1(\tau) = \tau,\ \ P_2(\tau) = \frac{1}{2}(3\tau^2 - 1),\ \ P_3(\tau) = \frac{1}{2}(5\tau^2 - 3\tau).$$

Из общей теории следует, что многочлены Лежандра ортогональны на интервале $(-1;1)$ с весом $\rho = 1$, то есть

$$\int_{-1}^{1} P_n(\tau)P_m(\tau)\,d\tau = 0, \quad m \neq n,$$

и имеет место теорема Стеклова:

Если функция $f(\tau) \in C^2(-1;l)$ ограничена в точках $\tau = \pm 1$, то она допускает на отрезке $[-1;1]$ разложение в равномерно сходящийся ряд Фурье–Лежандра

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k P_0(\tau),$$

где

$$c_k = \frac{\int\limits_{-1}^{1} f(\tau)P_k(\tau)\,d\tau}{\int\limits_{-1}^{1} P_k^2(\tau)\,d\tau}.$$

Вернемся к уравнению (28.2) с произвольным $m \in \mathbb{N}$. Оно также имеет ограниченные в точках $\tau = \pm 1$ решения только при $\beta = n(n+1)$, где $n = 0, 1, \ldots$. Эти решения называются присоединенными функциями Лежандра и могут быть получены из многочленов Лежандра по формулам

$$P_{nm}(\tau) = (1-\tau^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(\tau)}{d\tau^m}.$$

Здесь $n = 0, 1, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots n$.

Если фиксировать m и рассматривать функции $P_{nm}(\tau)$ при $n \geqslant m$, то они будут решениями задачи Штурма–Лиувилля, и следовательно, образуют полную ортогональную систему:

$$\int_{-1}^{1} P_{nm}(\tau)P_{km}(\tau)\,d\tau = 0, \quad k \neq n.$$

Подведем промежуточный итог. Мы искали гармонические функции специального вида

$$u(r,\theta,\varphi)=G(r)F(\theta)\Phi(\varphi),$$

и нашли функции $F(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$, определяющие зависимость функции u от углов $(\theta;\varphi)$. Введем обозначение

$$Y_n^m(\theta,\varphi)=(C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi)\cdot\sin^m\theta\cdot P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где $P_n^{(m)}(\tau)=\dfrac{d^mP_n(\tau)}{d\tau^m}$. Функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ называются сферическими гармониками и играют в задачах, связанных со сферой, ту же роль, что функции $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ в задачах, связанных с окружностью.

Функция

$$Y_n(\theta,\varphi)=a_0P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)\cdot\sin^m\theta\cdot P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

называется сферической функцией порядка n. Для лучшего понимания структуры сферических функций расположим их в таблице:

В центральном столбце таблицы стоят многочлены Лежандра от $\cos\theta$, в соседних столбцах слева и справа от него мы видим первую присоединенную функцию Лежандра $P_{n1}(\cos\theta)$, умноженную на $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ соответственно. В следующем столбце находится вторая присоединенная функция Лежандра $P_{n2}(\cos\theta)$, умноженная на $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$ соответственно, и так далее.

В n–ной строке расположено $(2n+1)$ функций, и сферическая функция $Y_n(\theta,\varphi)$ является их линейной комбинацией.

Продолжим построение гармонической функции $u=G(r)F(\theta)\Phi(\varphi)$. Нам осталось найти множитель $G(r)$. Для этого у нас есть уравнение $(r^2G')'-\beta G=0$, в котором значение β уже определено и равно $n(n+1)$.

Раскрыв скобки, мы увидим, что это уравнение Эйлера:

$$r^2G''+2rG'-n(n+1)G=0$$

			$P_0(\cos\theta)$			
		$\cos\varphi \cdot P_1'(\cos\theta)\sin\theta$	$P_1(\cos\theta)$	$\sin\varphi \cdot P_1'(\cos\theta)\sin\theta$		
	$\cos 2\varphi \cdot P_2''(\cos\theta)\sin^2\theta$	$\cos\varphi \cdot P_2'(\cos\theta)\sin\theta$	$P_2(\cos\theta)$	$\sin\varphi \cdot P_2'(\cos\theta)\sin\theta$	$\sin 2\varphi \cdot P_2''(\cos\theta)\sin^2\theta$	
$\ldots$		$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$
$\ldots$		$\cos\varphi \cdot P_n'(\cos\theta)\sin\theta$	$P_n(\cos\theta)$	$\sin\varphi \cdot P_n'(\cos\theta)\sin\theta$		$\ldots$

Таблица 1. Сферические гармоники

Его определяющее уравнение $\lambda(\lambda-1)+2\lambda-n(n+1)=0$, или $\lambda(\lambda+1)=n(n+1)$. Корни $\lambda_1=n$ и $\lambda_2=-(n+1)$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$G_n(r)=C_1r^n+C_2\frac{1}{r^{n+1}}.$$

Таким образом, гармонические функции вида $u=G(r)F(\theta)\Phi(\varphi)$, ограниченные в начале координат, задаются формулой

$$u_n(r,\theta,\varphi)=r^nY_n(\theta,\varphi),$$

а гармонические функции вида $u=G(r)F(\theta)\Phi(\varphi)$, ограниченные на бесконечности, задаются формулой

$$u_n(r,\theta,\varphi)=r^{-(n+1)}Y_n(\theta,\varphi).$$

Теперь зададимся вопросом: при каких значениях параметра $\varkappa$ уравнение Гельмгольца $\Delta u+\varkappa^2u=0$ имеет нетривиальное решение вида $u(r,\theta,\varphi)=G(r)F(\theta)\Phi(\varphi)$, обращающиеся в нуль на сфере $x^2+y^2+z^2=r_0^2$?

При разделении переменных в уравнении Гельмгольца мы получили для функций $F(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$ те же самые уравнения, что и при разделении переменных в уравнении Лапласа. Требования однозначности и ограниченности приведут нас к тем же самым задачам Штурма–Лиувилля, и мы увидим, что зависимость о углов θ и φ в этой задаче та же, что и в предыдущей. Этот замечательный факт имеет глубокую связь с симметрией рассматриваемых задач и мы поймем это, когда будем изучать теорию представлений групп вращений.

Уравнение для функции $G(r)$ получится более сложным:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial G}{\partial r})-\frac{n(n+1)}{r^2}G+\varkappa^2G=0$$

Сделав замену $y(r)=\sqrt{r}G(r)$, для функции $y(r)$ получим уравнение

$$r^2y''(r)+ry'(r)+(\varkappa^2r^2-(n+\frac{1}{2})^2)y(r)=0$$

Это уравнение Бесселя порядка $\dfrac{2n+1}{2}$. Его общее решение

$$y(r) = C_1 J_{n+1/2}(\varkappa r) + C_2 J_{-(n+1/2)}(\varkappa r).$$

Следовательно,

$$G(r) = C_1 \frac{J_{n+1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} + C_2 \frac{J_{-(n+1/2)}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}.$$

Если мы ищем решение в внутри шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r_0^2$, то следует положить $C_2 = 0$, так как функция $\dfrac{J_{-(n+1/2)}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}$ не ограничена в нуле, а если нас интересует решение вне шара, то надо положить $C_1 = 0$, чтобы решение было ограниченным на бесконечности.

Итак, внутри шара мы получили частные решения вида

$$u_{nm}(r, \theta, \varphi) = Y_n^m(\theta, \varphi) \cdot \frac{J_{n+1/2}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}$$

Теперь найдем $\varkappa$ из условия $u\big|_{r=r_0} = 0$, то есть $J_{n+1/2}(\varkappa r_0) = 0$. Тогда

$$\varkappa_k = \frac{\mu_k^{n+1/2}}{r_0} \quad \text{и} \quad u_{nmk}(r, \theta, \varphi) = Y_n^m(\theta, \varphi) \cdot \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{n+1/2}}{r_0} r\right)}{\sqrt{r}}$$

При рассмотрении уравнения Гельмгольца в сферической системе координат мы получили частные решения, в которых фигурируют функции Бесселя полуцелого порядка. По этой причине функции

$$J_{n+1/2}(x) \text{ и } J_{-(n+1/2)}(x)$$

часто называют сферическими функциями Бесселя.

Самостоятельная работа

1. Покажите, что уравнение Гельмгольца имеет следующее сферически симметричное решение

$$u(r) = C_1 \frac{\sin \varkappa r}{r} + C_2 \frac{\cos \varkappa r}{r}.$$

Как эти функции связаны с функциями Бесселя?

2. При каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет ограниченное сферически симметричное решение внутри шара, обращающееся в ноль на его границе?

3. При каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет ограниченное сферически симметричное решение внутри шара радиуса r_0, такое что $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0$?

4. При каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет сферически симметричное решение, обращающееся в ноль на границе сферического слоя $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$?

Домашняя работа

1. При каких значениях $\varkappa$ уравнение Гельмгольца имеет ограниченные решения внутри шара радиуса r_0, такие что $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0$?

Занятие 29

Теорема Штурма и нули решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$y_1'' + y_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2'' - y_2 = 0$$

Решения их нам хорошо известны. Это

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \text{ и } y = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x$$

Мы видим, что любое решение первого на отрезке, длина которого больше π, обязательно обратится в ноль хотя бы два раза. Решения второго уравнения могут обратиться в ноль не более одного раза на отрезке любой длины.

Если решение дифференциального уравнения обращается в ноль на данном интервале не более одного раза, оно называется *неколеблющимся* на этом интервале. В противном случае оно называется *колеблющимся.*

Важно понимать, что если ненулевое решение дифференциального уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ обращается в ноль в точке x_0, то оно обязательно меняет знак в этой точке. Поэтому колебательный характер решения связан с наличием у него нулей.

Мы знаем (см. занятие 21), что заменой $y(x) = \rho(x)u(x)$ уравнение $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ можно привести к виду

$$u''(x) + Q(x)u = 0. \tag{29.1}$$

При этом функция $\rho(x)$ может быть найдена из уравнения $2\rho'(x) + a(x)\rho(x) = 0$, а функция $Q(x)$ — из уравнения $Q(x) = -\frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}a'(x) +$

$b(x)$. Может сложиться обманчивое представление, что колебательный характер решения связан с тем, является ли функция $Q(x)$ знакопостоянной на каком-то отрезке, и с тем, каков этот знак. Однако, это не так.

Пример 1. Изучим поведение решений уравнения Эйлера

$$y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$$

на интервале $(0; +\infty)$. Определяющее уравнение $\lambda(\lambda - 1) + a^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$.

Если $a^2 = \frac{1}{4}$, то общее решение $y(x) = C_1\sqrt{x} + C_2 \ln x\sqrt{x}$. Как видим, любое решение является неколеблющимся.

Если $a^2 < \frac{1}{4}$, то корни $\lambda_{1,2}$ вещественные, и общее решение $y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$. Мы опять видим неколеблющиеся решения.

Если же $a^2 > \frac{1}{4}$, то корни $\lambda_{1,2}$ комплексно-сопряженные, и общее решение

$$y(x) = C_1\sqrt{x}\cos(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}\ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}\ln x).$$

Очевидно, на интервале $(0; +\infty)$ эти функции являются колеблющимися.

Таким образом, из положительности функции $Q(x)$ нельзя сделать вывод о колебательном характере решений. Но можно показать, что если $Q(x) \leqslant 0$ на интервале $(a; b)$, то на этом интервале любое решение уравнения (29.1) будет неколеблющимся.

Следующая теорема, называемая теоремой сравнения, занимает центральное место при исследовании колебательного характера решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим два уравнения:

$$u''(x) + A(x)u = 0$$

$$v''(x) + B(x)v = 0$$

Функции $A(x)$ и $B(x)$ определены и непрерывны на интервале $(a;b)$. Будем говорить, что эти уравнения образуют штурмову пару, если $\forall x \in (a;b)$ выполняется $A(x) \leqslant B(x)$.

Если функция $u(x)$, являющаяся решением первого уравнения, колеблется на интервале $(a;b)$ и x_1, x_2 — какие-либо два последовательных нуля этой функции, то *любое* решение $v(x)$ второго уравнения обращается в ноль хотя бы один раз на интервале $(x_1;x_2)$.

Если обозначить через $d_u(a;b)$ расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции $u(x)$ на интервале $(a;b)$, а через $d_v(a;b)$ — расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции $v(x)$, то теорема сравнения может быть кратко записана следующим образом: если $A(x) \leqslant B(x)$ на интервале $(a;b)$, то $d_v(a;b) < d_u(a;b)$.

Или, переходя на сленг, говорят, что функция $v(x)$ колеблется на интервале $(a;b)$ чаще, чем функция $u(x)$.

Из теоремы сравнения следует, что если $m \leqslant Q(x) \leqslant M$ на $(a;b)$, то расстояние между любыми двумя последовательными нулями любого решения уравнения (29.1) заключено в пределах от $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ до $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

Вернемся к примеру 1. Уравнения $u''(x) + a^2u = 0$ и $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ образуют штурмову пару на интервале $(\varepsilon;1)$ $(\varepsilon > 0)$. Расстояние между любыми двумя последовательными нулями любого решения первого уравнения равно $\frac{\pi}{a}$, и для того чтобы они попадали на интервал $(\varepsilon;1)$, необходимо, чтобы $\frac{\pi}{a} < 1-\varepsilon$, то есть $a^2 > (\frac{\pi}{1-\varepsilon})^2$.

Таким образом, при достаточно больших a все решения уравнения $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ имеют хотя бы один ноль на интервале $(\varepsilon;1)$.

Уравнения $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ и $v''(x) + a^2v = 0$ образуют штурмову пару на интервале $(1;+\infty)$. Если мы уже знаем, что решения первого уравнения колеблются, то эта пара дает возможность оценить снизу расстояние между двумя последовательными нулями решения первого уравнения величиной $\frac{\pi}{a}$. Если же мы не знаем, что первое уравнение имеет колеблющиеся решения, то на основании этой пары сделать вывод о колебательном характере решений мы не можем.

Наконец, на интервале $(1; M)$ уравнения $u'' + \frac{a^2}{M^2}u = 0$ и $y'' + \frac{a^2}{x^2}y = 0$ образуют штурмову пару. Расстояние между двумя последовательными нулями любого решения первого уравнения равно $\frac{M\pi}{a}$, и можно выбрать достаточно большое значение M, чтобы на интервале $(1; M)$ решения первого уравнения были колеблющимися. Но тогда будут колеблющимися и решения второго уравнения, причем расстояние между двумя последовательными нулями любого его решения оценивается сверху числом $\frac{M\pi}{a}$.

Сравнивая результаты проведенного анализа с точным решением, полученным ранее, мы видим, что теорема Штурма дает скорее качественную оценку колебательного характера решений, но зато освобождает нас от необходимости искать точное решение.

Пример 2. Оценить сверху и снизу расстояние d между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $y'' + (1 + x)y = 0$ на отрезке $[24; 80]$.

На этом отрезке $25 \leqslant Q(x) \leqslant 81$, следовательно, для расстояния d получаем оценку $\frac{\pi}{9} \leqslant d \leqslant \frac{\pi}{5}$.

Можно оценить и число нулей N на этом отрезке. Длина отрезка равна 56, поэтому $5\frac{56}{\pi} \leqslant N \leqslant 9\frac{56}{\pi}$, или $90 \leqslant N \leqslant 160$.

Пример 3. Покажем, что уравнение $y'' + xy = 0$ имеет на отрезке $[-25; 25]$ не менее 15 нулей.

Рассмотрим отрезок $[\varepsilon^2; 25]$. На нем расстояние d между двумя последовательными нулями любого решения заключено в пределах от $\frac{\pi}{5}$ до $\frac{\pi}{\varepsilon}$. Число нулей $N \geqslant \frac{(25 - \varepsilon^2) \cdot \varepsilon}{\pi}$.

Найдем такое ε, чтобы функция $f(\varepsilon) = \frac{(25-\varepsilon^2)\cdot\varepsilon}{\pi}$ принимала максимальное значение. $f'(\varepsilon_0) = 0$ при $\varepsilon_0^2 = \frac{25}{3}$. При этом $f(\varepsilon_0) \approx 15,3$. Таким образом, на отрезке $[\frac{25}{3}; 25]$ любое решение имеет не менее 15 нулей.

Пример 3. Доказать, что расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $y'' + x^2 y = 0$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$

Мы должны показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что на интервалах $(\delta; +\infty)$ и $(-\infty; -\delta)$ расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения меньше ε.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим штурмову пару

$$u''(x) + a^2 u = 0 \text{ и } y'' + x^2 y = 0.$$

На интервале $|x| > |a|$ расстояние между двумя последовательными нулями любого решения второго уравнения оценивается сверху числом $\frac{\pi}{|a|}$. Если $\varepsilon = \frac{\pi}{|a|}$, то $|a| = \frac{\pi}{\varepsilon}$, и следовательно надо взять $\delta = |a| = \frac{\pi}{\varepsilon}$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ полагаем $\delta = \frac{\pi}{\varepsilon}$, тогда при $|x| > \delta$ расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения меньше ε.

Исследуем колебательный характер функций Бесселя. Рассмотрим уравнения Бесселя порядка ν

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Сделаем замену $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{x}}$. Она приведет уравнение к виду

$$z'' + \Big(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\Big) z = 0.$$

Если $\nu^2 = \frac{1}{4}$, то общее решение этого уравнения

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

и расстояние между двумя последовательными нулями любого решения равно π.

Пусть $\nu^2 = \dfrac{9}{4}$. Покажем сначала, что любое решение уравнения

$$z'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)z = 0$$

действительно является колеблющимся на интервале $(0; +\infty)$.

Для этого рассмотрим штурмову пару

$$u'' + (1-\varepsilon)u = 0 \text{ и } z'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)z = 0$$

При этом необходимо, чтобы $1 - \varepsilon \geqslant 1 - \dfrac{2}{x^2}$, то есть $x \in [\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}; +\infty)$. Решения первого уравнения, очевидно, являются колеблющимися при $\varepsilon < 1$, и расстояние между любыми двумя нулями любого решения равно $\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$.

Следовательно на интервале $x \geqslant \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$ расстояние d между любыми двумя нулями функции $z(x)$, являющейся решением второго уравнения, допускает оценку $d < \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} < \pi(1 + \dfrac{\varepsilon}{2})$.

Зная теперь, что решение $z(x)$ имеет колебательный характер, рассмотрим штурмову пару

$$z'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)z = 0 \text{ и } v'' + v = 0,$$

и сделаем вывод, что $d > \pi$.

Итак, мы показали, что $\pi < d < \pi(1 + \dfrac{\varepsilon}{2})$ при $x \geqslant \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$. Полученный результат означает, что расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции Бесселя $J_{3/2}(x)$ всегда больше, чем π, и стремится к π при $x \to +\infty$.

Функция $J_{3/2}(x)$ имеет достаточно простой вид:

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x}{x} - \cos x).$$

Но получить отсюда оценку расстояния между ее нулями (и даже сделать вывод о ее колебательном характере!) затруднительно.

Рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y = 0.$$

Замена $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}}$ приведет уравнение к виду

$$z'' + \big(1 + \frac{1}{4x^2}\big)z = 0.$$

Из теоремы сравнения для пары уравнений

$$u'' + u = 0 \text{ и } z'' + \big(1 + \frac{1}{4x^2}\big)z = 0$$

сразу следует и то, что решения $z(x)$ колеблющиеся, и оценка расстояния между любыми двумя последовательными нулями $d < \pi$.

Теперь составим штурмову пару

$$z'' + \big(1 + \frac{1}{4x^2}\big)z = 0 \text{ и } v'' + (1+\varepsilon)v = 0, \text{ где } x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Отсюда можно получить оценку для расстояния между любыми двумя последовательными нулями снизу: $\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} < d$

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ для достаточно малых ε, то можно упростить оценку, и окончательно получить

$$\pi(1 - \frac{\varepsilon}{2}) < d < \pi$$

Таким образом, расстояние между любыми двумя последовательными нулями функции Бесселя $J_0(x)$ меньше π, и стремится к π при $x \to +\infty$.

Теперь можно немного по-другому взглянуть на график функции $J_0(x)$ (рис. 26.1 занятия 26)) Получить информацию о колебательном характере этой функции из степенного ряда совершенно невозможно (впрочем, то же самое можно сказать про ряды для функций $\sin x$ и $\cos x$). Именно дифференциальное уравнение явилось для нас источником новых сведений о его решениях.

Модифицированная функция Бесселя $I_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - y = 0,$$

которое заменой $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}}$ приводится к виду

$$z'' + \Big(-1 + \frac{1}{4x^2}\Big)z = 0.$$

Если $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, то $Q(x) \leqslant 0$. Следовательно, никакое решение не может иметь более одного нуля на этом интервале. Можно показать, что на отрезке $[\varepsilon; \frac{1}{2}]$ при любом ε функция $I_0(x)$ также не имеет нулей (еще раз посмотрите на рис. 26.3)

Таким образом, модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ являются неколеблющимися, а функции Бесселя $J_\nu(x)$ — колеблющимися. Некоторые студенты употребляют именно такие термины: «колеблющиеся функции Бесселя» для $J_\nu(x)$ и «неколеблющиеся функции Бесселя» для $I_\nu(x)$. Нам кажется, что такая терминология не только допустима, но и более информативна, чем нейтральное название «модифицированная функция Бесселя».

Самостоятельная работа

1. Покажите, что функция $y = \sin(2\ln x)$, $x > 0$, является решением уравнения Эйлера $x^2y'' + xy' + 4y = 0$. Сделайте выводы о расстоянии между нулями решения при $x \to +\infty$ и при $x \to +0$. Можно ли получить ту же информацию, не находя решения, а делая оценки с помощью теоремы Штурма?

2. К какому пределу стремится расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $y'' + (1 + e^{-x})y = 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$?

3. Покажите, что расстояние между двумя последовательными нулями любого решения уравнения $x^2y'' - 2xy' + (3 + 4x^2)y = 0$ меньше π и при $x \to \infty$ как угодно близко к π.

4. Покажите, что любое решение уравнения $y'' + e^{-x}y = 0$ является колеблющимся на интервале $[0; +\infty)$. Покажите, что расстояние между последовательными нулями любого решения больше, чем π, и увеличивается с ростом x.

Домашняя работа

№№ 727, 728, 729, 730, 732, 733

Занятие 30

Асимптотические методы.

Асимптотические методы широко применяются в математической физике. В любом справочнике вы найдете многочисленные асимптотические формулы. Поэтому, возможно, важнее понимать, что же такое «асимптотика», чем уметь получать соответствующие разложения.

С другой стороны, если дифференциальное уравнение описывает реальный физический процесс, и можно поставить эксперимент, *иллюстрирующий* эту модель, то экспериментатор, как правило, знает закон изменения величины в начале и в конце процесса (то есть при $t \to 0$ и $t \to +\infty$). Тогда можно рассмотреть асимптотическое поведение решения дифференциального уравнения вблизи нуля и на бесконечности и сравнить с ожидаемым.

Напомним определения.

Последовательность функций $\varphi_n(x)$ называется *асимптотической* при $x \to x_0$, если $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} = 0$.

Простейшие асимптотические последовательности — это, конечно, степенные: $\varphi_n(x) = (x - x_0)^n$ при $x \to x_0$, и $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ при $x \to \infty$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет асимптотическое разложение, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$$

и пишут

$$f(x) \sim a_0\varphi_0(x) + ... + a_n\varphi_n(x)$$

Важно понимать, что в асимптотических разложениях, вообще говоря, не идет речь о сходимости соответствующих рядов (в отличие от знакомых вам асимптотических формул Тейлора для e^x, $\sin x$, и т.д.)

Пример 1. Найти асимптотическое разложение вблизи нуля функции $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$.

(Заметим, что этот интеграл сходится при любом $x > 0$)

Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{1+xt} = \sum_{k=0}^{n} (-xt)^k + \frac{(-xt)^{n+1}}{1+xt}$$

и проинтегрируем это равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt + (-x)^{n+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-t}}{1+xt}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k k! + r_n(x), \quad \text{где}$$

$$r_n(x) = (-x)^{n+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-t}}{1+xt}\,dt.$$

Если мы докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0$, то есть $\lim\limits_{x\to 0} x \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-t}}{1+xt}\,dt = 0$, то тем самым мы получим асимптотическое разложение в нуле

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^k$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k! x^k$ расходится при любом $x \neq 0$.

Одним из самых простых и распространенных способов получения асимптотических формул для интегралов является интегрирование по частям.

Пример 2. Интеграл $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ называется функцией ошибок, а интеграл $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ — дополнительной функцией ошибок. Ясно, что $\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1$ (интеграл Эйлера–Пуассона).

Найдем асимптотику $\operatorname{erfc}(x)$ при $x \to +\infty$. Выполним интегрирование по частям:

$$\int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{de^{-t^2}}{2t} = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\bigg|_x^{+\infty} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt$$

Таким образом,

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt$$

Покажем, что это асимптотическое разложение, то есть второе слагаемое мало по сравнению с первым:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt}{\frac{e^{-x^2}}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{e^{-x^2}}{2x^2}\,dt}{\frac{e^{-x^2}(-2x^2) - e^{-x^2}}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2(2x^2+1)} = 0$$

Таким образом, можно утверждать, что при $x \to +\infty$

$$\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x},$$

и следовательно

$$\operatorname{erf}(x) \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}.$$

Очевидно, при $x \to 0$

$$\operatorname{erf}(x) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}x.$$

Интегралом Лапласа называется функция

$$F(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} A(t)e^{xB(t)}dt.$$

Здесь $A(t)$ и $B(t)$ — вещественнозначные функции, определенные на $[\alpha;\beta]$ и достаточно гладкие. Имеют место следующие утверждения:

1) Если $A(\alpha) \neq 0$, а $B(t)$ монотонно убывает на $[\alpha;\beta]$ и $B'(t) \neq 0$ на $[\alpha;\beta]$, то при $x \to +\infty$

$$F(x) \sim -\frac{A(\alpha)e^{xB(\alpha)}}{xB'(\alpha)}.$$

2) Если $A(\alpha) \neq 0$, а $B(t)$ монотонно убывает на $[\alpha;\beta]$, $B'(\alpha) = 0$ и $B''(\alpha) < 0$, то при $x \to +\infty$

$$F(x) \sim A(\alpha)e^{xB(\alpha)}\sqrt{\frac{-\pi}{2xB''(\alpha)}}.$$

3) Если $B(t)$ имеет максимум в точке $t_0 \in [\alpha;\beta]$, $B'(t_0) = 0$, $B''(t_0) < 0$ и $A(t_0) \neq 0$, то при $x \to +\infty$

$$F(x) \sim A(t_0)e^{xB(t_0)}\sqrt{\frac{-2\pi}{xB''(t_0)}}.$$

Продемонстрируем применение этих формул.

Пример 3. Найти асимптотику при $x \to +\infty$ интеграла

$$F(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^{\alpha}}\,dt$$

Введем функции $B(t) = -t^2$ и $A(t) = \dfrac{1}{1+t^{\alpha}}$. Все условия пункта 2 выполнены, $A(0) = 1$, $B(0) = B'(0) = 0$, $B''(0) = -2$. Поэтому при $x \to +\infty$

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{4x}}.$$

Пример 4. Можно показать, что модифицированная функция Бесселя $I_n(x)$ выражается интегралом

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos nt e^{x\cos nt} dt.$$

Найти асимптотику $I_n(x)$ при $x \to +\infty$.

Полагаем $B(t) = \cos t$ и $A(t) = \cos nt$. В точке $t = 0$ $B'(0) = 0$, $B''(0) = -1$, поэтому по формуле из пункта 2

$$I_n(x) \sim \frac{1}{\pi} e^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Пример 5. Найти асимптотику при $x \to +\infty$ интеграла

$$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(xt+\frac{1}{t})}\, dt, \quad x > 0.$$

Мы не можем сразу воспользоваться сформулированными утверждениями, так как если выбрать $B(t) = -t$ и $A(t) = e^{-\frac{1}{t}}$, то $A(t)$ не определена в точке $t = 0$. Если же доопределить ее по непрерывности справа, то $A(+0) = 0$.

Преобразуем интеграл, сделав замену $(x;t)$ на $(y;\tau)$ по правилу

$$\frac{1}{t} = \frac{y}{\tau}, \quad xt = \tau y$$

Тогда $x = y^2$ и $t = \dfrac{\tau}{y}$, и мы получим

$$F(x) = G(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\tau y+\frac{y}{\tau})}\frac{d\tau}{y} = \frac{1}{y}\int\limits_0^{+\infty} e^{-y(\tau+\frac{1}{\tau})}\, d\tau$$

Теперь положим $A(\tau) = 1$, $B(\tau) = \tau + \frac{1}{\tau}$, $B'(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^2}$, и в точке $\tau_0 = 1$ $B(\tau)$ имеет максимум. Далее, $B''(1) = -2$, $B(1) = -2$ и можно воспользоваться третьим утверждением.

$$G(y) \sim \frac{1}{y}e^{-2y}\sqrt{\frac{2\pi}{2y}} = \sqrt{\pi}\,\frac{e^{-2y}}{y^{3/2}}$$

Возвращаясь к исходной функции, получаем при $x \to +\infty$

$$F(x) \sim \sqrt{\pi}\,\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{x^{3/4}}.$$

Методом стационарной фазы называется метод получения асимптотических формул при $x \to +\infty$ для интегралов вида

$$F(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} A(t)e^{ixB(t)}dt.$$

Пусть функция $B(t)$ имеет экстремум в точке $t_0 \in [\alpha;\beta)$. Тогда

$$F(x) \sim A(t_0)e^{ixB(t_0)}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi}{xB''(t_0)}}, \quad \text{если} \quad B''(t_0) > 0,$$

и

$$F(x) \sim A(t_0)e^{ixB(t_0)}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi}{-xB''(t_0)}}, \quad \text{если} \quad B''(t_0) < 0.$$

Если функция $B(t)$ имеет на промежутке $(\alpha;\beta)$ несколько экстремумов, то для получения асимптотики надо сложить соответствующие формулы.

Пример 6. Можно показать, что функция Бесселя $J_n(x)$ выражается интегралом

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-int+ix\sin t}dt.$$

Найти асимптотику $J_n(x)$ при $x \to +\infty$.

Для получения асимптотики применим метод стационарной фазы, полагая $A(t)=e^{-int}$, $B(t)=\sin t$. Функция $\sin t$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ имеет один максимум в точке $\pi/2$ и один минимум в точке $-\pi/2$. Поэтому при $x\to+\infty$

$$J_n(x)\sim\frac{1}{2\pi}e^{-in\frac{\pi}{2}}e^{ix}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}+\frac{1}{2\pi}e^{in\frac{\pi}{2}}e^{-ix}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\Big(e^{i(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}+e^{-i(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\Big)=\frac{2}{\sqrt{\pi x}}\cos(x-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4})$$

Сравните полученные асимптотики с явным видом функций Бесселя, например

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\quad\text{и}\quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Для получения асимптотики решений дифференциальных уравнений часто пользуются преобразованием Лиувилля, которое позволяет привести уравнение $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ к специальному виду. Опишем алгоритм этого преобразования.

1) Подбираем замену независимой переменной $t=\varphi(x)$ так, чтобы уравнение привелось к виду $\ddot{y}+b(t)\dot{y}\pm y=0$.

2) Заменой $y(t)=\rho(t)u(t)$ добиваемся того, что в уравнении не останется слагаемого, содержащего первую производную и уравнение преобразуется к виду

$$\ddot{u}+(1+f(t))u=0\quad\text{или}\quad\ddot{u}-(1-f(t))u=0$$

Если функция $f(t)$ такова, что $\displaystyle\int\limits_{t_0}^{+\infty}f(t)\,dt$ сходится, то можно показать, что первое уравнение имеет два линейно независимых решения таких, что при $x\to+\infty$

$$u_1(t)\sim\sin t\quad\text{и}\quad u_2(t)\sim\cos t$$

Соответственно, второе уравнение имеет ФСР, обладающих следующими асимптотиками при $x\to+\infty$:

$$u_1(t) \sim e^t \quad \text{и} \quad u_2(t) \sim e^{-t}$$

Пример 7. Найти асимптотики решений дифференциального уравнения $y'' + x^2 y = 0$.

Сделаем в уравнении замену независимой переменной. Если $t = \varphi(x)$, то $y' = \dot{y} \cdot \varphi'(x)$, $y'' = \ddot{y} \cdot (\varphi')^2(x) + \dot{y} \cdot \varphi''(x)$. Подставим в уравнение:

$$\ddot{y} \cdot (\varphi')^2 + \dot{y} \cdot \varphi'' + x^2 y = 0$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условию $(\varphi')^2 = x^2$. Например, можно взять $t = \varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, тогда уравнение примет вид

$$\ddot{y} + \frac{1}{2t}\dot{y} + y = 0.$$

Теперь следует найти $\rho(t)$. Подставляя $y(t) = \rho(t)u(t)$ в уравнение получим

$$\ddot{\rho}u + 2\dot{\rho}\dot{u} + \rho\ddot{u} + \frac{1}{2t}(\dot{\rho}u + \rho\dot{u}) + \rho u = 0$$

Необходимо, чтобы $2\dot{\rho} + \frac{1}{2t}\rho = 0$, тогда мы исключим из уравнения первую производную. Таким образом, $\rho = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$, и мы привели уравнение к виду

$$\ddot{u} + (1 + \frac{3}{16t^2})u = 0$$

Поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ сходится, то уравнение имеет два линейно независимых решения таких, что при $x \to +\infty$

$$u_1(t) \sim \sin t \quad \text{и} \quad u_2(t) \sim \cos t$$

Следовательно, исходное уравнение имеет два линейно независимых решения с асимптотиками

$$y_1(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{x^2}{2} \quad \text{и} \quad y_2(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{x^2}{2}$$

Самостоятельная работа

1. Интегрируя по частям, получите при $x \to +\infty$ асимптотику интеграла $\Gamma(a;x) = \int\limits_x^{+\infty} e^{-t}t^{a-1}\,dt$ (при $a < 2$) .

2. Покажите, что при $x \to +\infty$ $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2+xt}\,dt \sim \sqrt{\pi}e^{\frac{x^2}{4}}$.

3. Сделайте преобразование Лиувилля и укажите, какие асимптотики при $x \to +\infty$ имеют решения уравнения $y'' + x^4y = 0$, образующие его ФСР.

Домашняя работа

№№ 739, 742, 744.