

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет  
Кафедра общей физики

С. А. Дзюба, В. П. Замураев, А. П. Калинина

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

Учебно-методический комплекс

Новосибирск

2012

Учебно-методический комплекс «Молекулярная физика» предназначен для студентов первого курса Физического факультета. В состав комплекса включены: программа курса лекций и практических занятий, структура курса, семестровые задания, методические указания и список рекомендованной литературы. Кроме того, даны примеры вариантов контрольных работ, домашних заданий, экзаменационных вопросов и задач.

Составили:

докт. физ.-мат. наук, проф. С. А. Дзюба,  
канд. физ.-мат. наук, доц. В. П. Замураев  
канд. физ.-мат. наук, доц. А. П. Калинина

Учебно-методический комплекс подготовлен в рамках реализации  
*Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 годы.*

Рецензент

д-р физ.-мат. наук, проф. С. С. Кацнельсон

© Новосибирский государственный университет, 2012  
© Дзюба С. А., Замураев В. П., Калинина А. П., 2012

<b>Содержание</b>	
Аннотация рабочей программы.....	4
<b>1. Цели освоения дисциплины.....</b>	<b>5</b>
<b>2. Место дисциплины в структуре ООП.....</b>	<b>7</b>
<b>3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.....</b>	<b>8</b>
<b>4. Структура и содержание дисциплины.....</b>	<b>10</b>
Программа курса лекций.....	12
Молекулярно-кинетическая теория.....	12
Законы термодинамики.....	27
Реальные газы, жидкости, фазовые переходы.....	40
Примерный план семинарских занятий.....	47
<b>5. Образовательные технологии.....</b>	<b>50</b>
<b>6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.....</b>	<b>51</b>
Рекомендованная литература к теоретическому курсу.....	53
Домашние задания по курсу «Молекулярная физика».....	54
Учебно-методическое обеспечение дисциплины. Примеры задач и вопросов на контрольных работах и на экзамене .....	61
1-я контрольная работа.....	61
2-я контрольная работа.....	62
Образцы вопросов для подготовки к экзамену.....	63
Примеры экзаменационных задач .....	64
Решения	
Первая контрольная работа.....	65
Вторая контрольная работа.....	70
Решения примерных задач к экзамену.....	77
<b>7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....</b>	<b>88</b>
<b>8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....</b>	<b>88</b>

### Аннотация рабочей программы

Программа курса «**Молекулярная физика**» составлена в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного специалиста «бакалавр» по **профессиональному циклу дисциплин (Б.3)** по направлению «**011200 Физика**», а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ. Дисциплина реализуется на Физическом факультете Федерального государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования Новосибирский государственный университет (НГУ) кафедрой Общей физики. Дисциплина изучается студентами первого курса физического факультета.

Цели курса – дать представление об основных методах и подходах, а также базовых понятиях классической равновесной термодинамики и молекулярной физики, научить решать широкий класс задач, подготовить понятийную базу для освоения различных курсов теоретической физики, сформировать общекультурные и профессиональные навыки.

Дисциплина нацелена на формирование у выпускника общекультурных компетенций: ОК-1, ОК-5, ОК-17, ОК-18, ОК-20, ОК-21 и профессиональных компетенций ПК-1 –ПК-4 , ПК-5, ПК-10.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, семинарские занятия, контрольные работы, домашние задания, консультации, сдача экзамена, самостоятельная работа студента.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля:

Текущий контроль. В течение семестра студенты проходят следующие контрольные точки: пишут две контрольные работы, сдают 2 домашних задания. Домашние задания нацелены на то, чтобы привить студенту навыки самостоятельного изучения физических явлений. Кроме того, преподаватель оценивает уровень подготовки студента к каждому семинарскому занятию. Все контрольные точки оцениваются по пятибалльной системе, в результате чего к концу семестра каждый студент должен получить допуск к экзамену и предварительную оценку, являющуюся суммарным итогом оценок на всех контрольных точках. Необходимым условием получения допуска является обязательная сдача домашних заданий. Если они не сданы, допуска нет.

Итоговый контроль. Итоговую оценку за учебный семестр студент получает на устном экзамене в конце семестра. Данная оценка является суммарным итогом его предварительной оценки и оценки при сдаче экзамена.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 академических часа (из них 96 аудиторных). Программой дисциплины предусмотрены 32 часа лекционных и 64 часа практических занятий, а также 48 часов самостоятельной работы.

### 1. Цели освоения дисциплины (курса)

Курс «Молекулярная физика» предназначен для обучения студентов-физиков и построен по принципу укрупнения наблюдаемого масштаба физического явления. Это связано с необходимостью обеспечить преемственность с курсом «Механика», читаемом в первом семестре. Сначала изучаются статистические распределения молекул по различным параметрам, любое из которых характеризуется средним значением физической величины и ее дисперсией. При построении статистических распределений в основном используется модель молекулы, уже изученная в курсе «Механика», а именно представление о молекуле как о материальной точке. Затем осуществляется переход к рассмотрению явлений переноса, в разреженных и в плотных средах. В последнем случае используется гипотеза о локальном термодинамическом равновесии, то есть о постоянстве средних значений в пределах некоторого объема. Изучается эволюция средних значений молекулярных характеристик во времени и их распределение в пространстве. После чего масштаб, в котором можно наблюдать явление, становится еще крупнее: изучается классическая термодинамика, одним из основных представлений которой является понятие равновесного термодинамического состояния. В этом случае уже рассматривается одно среднее значение термодинамического параметра для любой точки обобщенной координаты.

В первой части курса рассматриваются молекулярные представления в рамках модели идеального газа. Рассмотрение разделов построено на постепенном усложнении материала. Целью этой части курса является обучение созданию описания физического явления в рамках статистических распределений Максвелла по скоростям в сосуде и молекулярном потоке и в рамках распределения Больцмана в конфигурационном пространстве. Особенностью этой части курса является рассмотрение молекулярных систем с дискретным энергетическим спектром, что помогает не только глубже понять смысл статистических распределений и температурную зависимость теплоемкости, но и заложить начальное понимание квантовой природы атомно-молекулярных систем, которая более подробно будет изучаться в соответствующих курсах. В курсе даны также простейшие элементы физической кинетики, такие как столкновения в газах и связанные с ними явления переноса (теплопроводность, вязкость, диффузия, ионная и электронная электропроводность).

Курс заканчивается изучением классической термодинамики; сначала вводятся частично известные ещё со школы понятия теплоты и работы и термодинамических переменных, фигурирующих в термическом уравнении состояния на примере газов (температуры, давления, объёма). Даются физические представления о функциях состояния и функциях процесса, которые органически увязываются с известными из математических курсов первого семестра понятиями полного дифференциала функций двух переменных. На этой основе в связи с изучением теоретических основ работы тепловых машин осуществляется введение дополнительного термодинамического параметра – энтропии (функции состояния) и формулируются основные термодинамические принципы, составляющие суть второго начала термодинамики. На ознакомительном уровне даются основы построения термодинамики произвольных термодинамических систем, чтобы облегчить освоение данных тем на старших курсах.

Далее в этой части курса читаются уже устоявшиеся традиционные разделы равновесной термодинамики, такие как охлаждение газов и фазовое равновесие.

Курс в целом даёт достаточно цельное представление о протекании физических процессов, связанных с молекулярной структурой вещества, и является базисной основой для более глубокого изучения статистической физики, физической кинетики и других разделов физики.

Основной целью освоения дисциплины является усвоение студентами основных положений молекулярно-кинетической теории и классической термодинамики, умение пользоваться ими и на этой основе – понимание студентами сложных физических задач и проблем.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

- **иметь представление о том, что лежит в основе молекулярно-кинетической теории и классической термодинамики и ориентироваться в соответствующей учебной и научной литературе;**
- **знать основные понятия и законы молекулярно-кинетической теории и классической термодинамики и методы решения задач;**
- **уметь решать сравнительно несложные задачи.**

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Программа курса «Молекулярная физика» составлена в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного специалиста «бакалавр» по **профессиональному циклу дисциплин (Б.3)** по направлению «011200 Физика». Курс «Молекулярная физика» читается в весеннем семестре первого курса.

Необходимыми предпосылками для успешного освоения курса являются следующие дисциплины:

В цикле математических дисциплин:

- теория вероятности (основные понятия)
- математический анализ (умение грамотно оперировать с функциями двух и трех переменных, дифференциальное и интегральное исчисление, решение простых дифференциальных уравнений)
- линейная алгебра (системы линейных уравнений)

В цикле общефизических дисциплин

- классическая механика (знание и умение применять основные законы (уравнения Ньютона), наличие представлений о силе, массе, импульсе и моменте импульса, кинетической и потенциальной энергии, опыт решения задач о колебаниях одномерных систем, движении заряда в электрическом поле)

Результаты освоения дисциплины «Молекулярная физика» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- Статистическая физика
- Квантовая механика

Результаты освоения дисциплины «Молекулярная физика» особенно необходимы в следующих профилях подготовки бакалавров по направлению «Физика» в рамках Физического факультета НГУ

- Химическая и биологическая физика
- Физика низких температур
- Физика неравновесных процессов
- Физика сплошных сред
- Аэрофизика и газовая динамика

### **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Молекулярная физика»**

В процессе изучения дисциплины формируются следующие общекультурные компетенции: ОК-1, ОК-5, ОК-18, ОК-20, ОК-21:

- способностью использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук (ОК-1);
- способностью выстраивать и реализовывать перспективные линии интеллектуального, культурного, нравственного, физического и профессионального саморазвития и самосовершенствования (ОК-5);

- способностью применить основные методы защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий, катастроф, стихийных бедствий (ОК-18);
- способностью использовать нормативные правовые документы в своей деятельности (ОК-20);
- способностью понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознавать опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдать основные требования информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны (ОК-21).

В процессе изучения дисциплины формируются следующие профессиональные компетенции: ПК-1 –ПК-4, ПК-5, ПК-10, ПК-11:

- способностью использовать базовые теоретические знания для решения профессиональных задач (ПК-1);
- способностью применять на практике базовые профессиональные навыки (ПК-2);
- способностью эксплуатировать современную физическую аппаратуру и оборудование (ПК-3);
- способностью использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин (в соответствии с профилем подготовки) (ПК-4);
- способностью применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории и методов физических исследований (в соответствии с профилем подготовки) (ПК-5);
- способность проводить научно-исследовательскую деятельность самостоятельно и в коллективе (ПК-10);
- владеет методами отбора материала для теоретических занятий и лабораторных работ (ПК-11).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- **Знать:** основные молекулярные распределения и получаемые на их основе средние значения физических величин, природу теплоёмкости и молекулярные основы явлений переноса в плотных и разреженных газах; знать первое, второе и третье начала термодинамики, понимать принципы термодинамики и физические основы работы тепловых и охлаждающих машин, смысл термодинамических потенциалов и условия равновесия фаз.

- **Владеть:** техникой расчёта равновесных и кинетических параметров молекулярных систем на основе молекулярных распределений; техникой расчета уравнений и физических характеристик (коэффициент полезного действия и холодильный коэффициент, теплоёмкости) различных термодинамических процессов для различных термодинамических систем.
- **Уметь:** предсказывать и объяснять наиболее вероятные направления развития процессов с применением современных статистических и термодинамических методов.

#### 4. Структура и содержание дисциплины курса «Молекулярная физика»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, **144** часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости
		Лекции	Семинары	Самостоятельная работа студентов (в т.ч. время, предусмотренное на сдачу семестровых домашних заданий)	
1	Статистические распределения. Распределение Максвелла. Распределение по скоростям в потоке. Распределение Больцмана. Введение в теорию теплоемко-	8	20	12	Прием заданий

	сти.				
2	Физическая кинетика. Сечение столкновений, частота столкновений, средняя длина свободного пробега в смеси газов.	3	4	4	Прием заданий
3	Явления переноса. Явления переноса в плотных средах. Явления переноса в ультраразреженных газах.	5	12	10	Прием заданий <b>Контрольная работа</b>
4	Введение в термодинамику. Первое начало термодинамики. Второе начало термодинамики.	10	14	12	Прием заданий
5	Реальные газы и жидкости. Химический потенциал. Фазовые переходы. Поверхностное натяжение	6	14	10	Прием заданий <b>Контрольная работа</b> Коллоквиум
					<b>Экзамен</b>
<b>Итого за курс</b>		<b>32</b>	<b>64</b>	<b>48</b>	
<b>Всего</b>		<b>144</b>			

**Экзамен проводится только после полной сдачи заданий.**

### **Программа курса лекций**

#### **Молекулярно-кинетическая теория**

1. Введение. Агрегатные состояния и характер движения в газах, жидкостях и твердых телах. Идеальный газ. Давление идеального газа. Температура и кинетическая энергия. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева). Постоянная Больцмана, число Авогадро.

Представление о молекуле как единице структуры вещества. Масштабы молекулярной физики. Единицы измерения – ангстрем и углеродные единицы массы. Число Авогадро как характерный масштаб со-

отношения масс молекулярных и обычных объектов. Связь агрегатного состояния вещества с межмолекулярным потенциалом взаимодействия. Агрегатное состояние вещества в основном определяется соотношением средней кинетической энергии молекулы и глубиной потенциальной ямы в межмолекулярном потенциале для парного взаимодействия молекул. В качестве примера межмолекулярного потенциала рассматривается потенциал Леннарда – Джонса, зависящий от расстояния между двумя частицами:

$$U_{12} = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{d}{r_{12}} \right)^{12} - \left( \frac{d}{r_{12}} \right)^6 \right].$$

Представление об агрегатном и фазовом состоянии вещества.

Агрегатное состояние как характеристика вещества по отношению к нагрузке на сжатие – сохранение или не сохранение формы и объема массивом вещества. Агрегатное состояние вещества в основном определяется соотношением средней кинетической энергии молекулы при расстояниях, соответствующих минимуму потенциала и величиной этого самого минимума.

Фазовое состояние вещества как характеристика внутренней надатомной или надмолекулярной структуры вещества. В пределах одного агрегатного состояния может существовать множество различных фаз. Представление о жидких кристаллах и о белках. Связь внутренней структуры вещества с анизотропной зависимостью межмолекулярных потенциалов:

$$U_i = \sum_{j=1}^N 4\varepsilon_{ij} \left[ \left( \frac{d_{ij}}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{d_{ij}}{r_{ij}} \right)^6 \right],$$

где  $U_i$  – потенциальная энергия взаимодействия  $i$ -ой частицы со всеми окружающими ее частицами в количестве  $N$ .

Модель идеального газа. Представление об идеальном газе как о хаотически движущихся материальных точках, взаимодействующих при столкновении как абсолютно упругие шары. Хорошим приближе-

нием к модели идеального газа является любой разреженный в достаточной степени реальный газ.

Гипотеза о молекулярном хаосе. Распределение молекул в пространстве и по скоростям определяется гипотезой о молекулярном хаосе. В отсутствие внешних массовых сил (или если они малы и ими можно пренебречь) газ в сосуде равномерно распределен по всему объему, т. е. число молекул в единице объема постоянно по всему сосуду. Это подтверждается опытом. Молекулы газа движутся с различными скоростями. По указанной гипотезе все направления движения равноправны. Это предположение соответствует опытным данным. Если бы существовало направление преимущественного движения молекул, то в замкнутом сосуде возник бы стационарный поток газа.

Определение вероятности для вектора скорости  $\vec{v}$ , модуля скорости  $v$  и направления движения молекул (в сферических координатах  $\theta, \varphi$ ) как доли соответствующих частиц от общего их числа  $N$ :

$$d\omega(\vec{v}) = \frac{dN(\vec{v})}{N}, \quad d\omega(v) = \frac{dN(v)}{N}, \quad d\omega(\theta, \varphi) = \frac{dN(\theta, \varphi)}{N}.$$

Представление о плотности вероятности. Представление об общем виде функции распределения по скоростям: постоянство плотности вероятности для любого направления движения для одного и того же модуля скорости. Получение зависимости давления идеального газа как функции кинетической энергии частицы:

$$p = mn \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 d\omega(\vec{v}) = mn \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left( \overline{\frac{mv^2}{2}} \right) = \frac{2}{3} n \overline{E_k},$$

$$p = \frac{2}{3} \overline{E_k} n,$$

где  $\overline{E_k}$  – средняя кинетическая энергия частиц, а  $n$  – их концентрация. Закон Клапейрона – Менделеева. Введение понятия температуры в рамках экспериментальной процедуры через показания газового тер-

мометра. Сравнение полученной формулы с экспериментальной зависимостью – законом Клапейрона – Менделеева

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{NkT}{V} = nkT,$$

и определение температуры как меры средней кинетической энергии вещества:

$$T = \frac{2}{3} \frac{\overline{E_k}}{k},$$

где вводится коэффициент пропорциональности  $k$  – постоянная Больцмана. Задача о взаимодействии различных газов с поршнем, когда они находятся по разные стороны от поршня. Решается на основе модели идеального газа.

2. Распределение молекул по скоростям. Одномерное и трёхмерное распределение Максвелла. Средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорости молекул. Число столкновений со стенкой. Распределение по скоростям молекул в потоке, средняя скорость и энергия частиц в потоке. Экспериментальная проверка распределения Максвелла.

Распределение молекул по скоростям. Вывод распределения молекул по скоростям основан на гипотезе о молекулярном хаосе. Для идеального газа оно было получено Максвеллом в 1859 г. Одномерное и трёхмерное распределение Максвелла:

$$dw(v_x) = \sqrt{\alpha / \pi} \exp(-\alpha v_x^2) dv_x, \quad dw(\vec{v}) = (\alpha / \pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2) d\vec{v},$$

где параметр  $\alpha = m / 2kT$ .

Распределение по величине скорости

$$dw(v) = 4\pi(\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2) v^2 dv.$$

Средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорости молекул:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v dw(v) = \sqrt{8kT / \pi m}, \quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3kT / m}, \quad v_m = \sqrt{2kT / m}.$$

Число столкновений со стенкой: число молекул, падающих в единицу времени на единицу площади стенки, и плотность потока молекул в пучке, вылетающих через малое отверстие в стенке, вычисляется по одной и той же формуле:

$$dj(\vec{v}) = v_x n dw(\vec{v}) = v \cos \theta n dw(v) d\Omega / 4\pi, \quad j = n\bar{v} / 4,$$

где ось  $x$  перпендикулярна стенке (плоскости отверстия),  $\theta$  – угол с нормалью к стенке (осью  $x$ ),  $d\Omega$  – элемент телесного угла;  $n$  – концентрация молекул в сосуде.

Распределение по скоростям молекул в потоке определяется по формуле

$$dw_j(\vec{v}) = dj(\vec{v}) / j.$$

В сферических координатах распределение по скоростям в пучке имеет вид

$$dw_j(\vec{v}) = dw_j(v) dw_j(\Omega),$$

$$dw_j(v) = v / \bar{v} dw(v) = 2\alpha^2 \exp(-\alpha v^2) v^3 dv, \quad dw_j(\Omega) = \cos \theta d\Omega / \pi.$$

Средняя скорость и энергия частиц в потоке:

$$\bar{v}_j = \int v dw_j(v) = \bar{v}^2 / \bar{v} = 3\pi / 8 \cdot \bar{v}, \quad \bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{2} m \int v^2 dw_j(v) = 2kT.$$

Экспериментальная проверка распределения Максвелла. Опыты О. Штерна (1920 г.), Дж. Элдриджа (1927 г.).

3. Барометрическая формула и атмосфера Земли. Распределение Больцмана. Опыты Перрена по определению постоянной Больцмана и числа Авогадро. Центрифугирование, разделение изотопов.

Барометрическая формула ( $z$  – высота):

$$p(z) = p(0) \exp(-mgz/kT).$$

Воздух представляет собой смесь газов, молекулы которых имеют различную массу. В соответствии с барометрической формулой состав атмосферы должен резко изменяться с высотой. Измерения состава воздуха на разных высотах не подтвердили этого вывода. Интенсивная конвекция в пределах тропосферы приводит к известному выравниванию состава воздуха по высоте. Общеизвестно также падение температуры с высотой. Атмосфера Земли не находится в состоянии статистического равновесия.

Распределение Больцмана. В общем виде оно имеет вид

$$dW(\vec{r}) = 1/Z \exp(-u(\vec{r})/kT) d\vec{r},$$

где  $d\vec{r}$  – элемент объема. В декартовой системе координат

$$d\vec{r} = dx dy dz.$$

Постоянная  $Z$  находится из условия, что полная вероятность обнаружить молекулу  $\int dW(\vec{r})$  равна единице, т.е.

$$Z = \int \exp(-u(\vec{r})/kT) d\vec{r}.$$

Опыты Перрена по определению постоянной Больцмана и числа Авогадро.

Центрифугирование, разделение изотопов.

В системе отсчета, связанной с центрифугой, объект исследования находится в равновесии, и к нему можно применить распределение Больцмана. Соответственно потенциальная энергия частицы равна

$$u = -\int_0^r m\omega^2 r dr = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$$

Распределение Больцмана принимает вид

$$dw(r) = 1/Z \exp(m\omega^2 r^2 / 2kT) 2\pi r dr.$$

Для концентрации частиц получается формула

$$n(r) = N dw(r) / (2\pi r dr) = n(0) \exp(m\omega^2 r^2 / (2kT)).$$

Из формулы следует, что концентрация тяжелых частиц у боковой стенки центрифуги относительно выше, что используется для разделения смесей.

4. Распределение Максвелла-Больцмана. Электростатическая поляризация газов. Нахождение средней энергии с помощью Z-суммы. Теория теплоемкостей. Число степеней свободы. Закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Вымораживание степеней свободы. Характеристические температуры для колебательного, вращательного и поступательного движений.

Распределения молекул по координатам и скоростям не зависят друг от друга. Вероятность того, что молекула находится в данном положении и одновременно имеет данную скорость, в соответствии с теоремой умножения вероятностей определяется распределением Максвелла-Больцмана

$$dw(\vec{r}, \vec{v}) = dw_B(\vec{r}) dw_M(\vec{v}) = 1/Z \exp(-\epsilon / kT) d\vec{r} d\vec{v},$$

$$Z = Z_M Z_B = \int \exp(-mv^2 / 2kT) d\vec{v} \int \exp(-u / kT) d\vec{r},$$

где  $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + u$  – полная энергия молекулы. Распределением Максвелла–Больцмана полностью определяется вероятность данного состояния молекулы, т. е. вероятность ее положения в шестимерном пространстве координат и скоростей. Однако это распределение связано только с поступательным движением молекулы и дает достаточную информацию лишь в случае одноатомного газа с нулевыми электрическими и магнитными моментами.

Электростатическая поляризация газов.

Поляризации газа, состоящего из полярных (дипольных) молекул. Вероятность данной ориентации диполя (от азимутального угла  $\varphi$  энергия не зависит) дается выражением:

$$dw(\theta) = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{qE}{kT} \cos \theta\right) \sin \theta d\theta.$$

Равновесная поляризация газа (суммарный дипольный момент молекул в единице объема):

$$\bar{Q} = nqk \int \cos \theta dw(\theta) = nqkL(\alpha),$$

где  $L(\alpha) = \text{cth } \alpha - 1/\alpha$  – функция Ланжевена.

Нахождение средней энергии с помощью Z-суммы. Получение формулы

$$\bar{\varepsilon} = kT^2 \partial \ln Z / \partial T.$$

Теория теплоемкостей. Число степеней свободы. Закон равнораспределения энергии по степеням свободы.

Статистическая сумма поступательного движения по одной координате и соответствующая средняя энергия:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-p_x^2 / 2mkT) dp_x = \sqrt{2\pi mkT}, \quad \bar{\varepsilon}_n = kT / 2.$$

Для гармонических колебаний двухатомной молекулы (одна степень свободы) энергия:

$$\varepsilon_{\text{кол}} = p^2 / 2\mu + \chi q^2 / 2,$$

(Два квадратичных слагаемых.)

Статистическая сумма и среднее значение энергии колебаний двухатомной молекулы:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-p^2 / 2\mu kT) dp \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\chi q^2 / 2kT) dq = 2\pi \sqrt{\mu / \chi kT},$$

$$\varepsilon_{\text{кол}} = kT.$$

Вымораживание степеней свободы. Характеристические температуры для колебательного, вращательного и поступательного движений. Энергия, статистическая сумма и среднее значение энергии квантового осциллятора:

$$\varepsilon_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right) / kT) =$$

$$= \exp(-h\nu / 2kT) / (1 - \exp(-h\nu / kT));$$

$$\bar{\varepsilon} = h\nu / 2 \cdot \text{cth}(h\nu / 2kT) = kT_e / 2 \text{cth}(T_e / 2T),$$

где  $T_e = h\nu/k$  – характеристическая температура колебательного движения.

Вклад в теплоемкость колебательного движения равен

$$c_V = R(T_g/2T)^2 / \text{sh}^2(T_g/2T).$$

5. Столкновения молекул в газе. Частота соударений, длина свободного пробега и эффективное сечение. Рассеяние молекулярных пучков, распределение по длинам пробега и средняя длина свободного пробега. Химические превращения и химическая кинетика.

Установление равновесия, теплопередача и т. д. – все эти процессы осуществляются в результате взаимодействия молекул. Для столкновения важны не скорости молекул сами по себе, а скорость их относительного движения:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Для идеального газа распределение молекул по относительным скоростям является максвелловским (только вместо массы молекулы в него входит приведенная масса):

$$dW(\vec{v}_0) = (\mu / 2\pi kT)^{3/2} \exp(-\mu v_0^2 / 2kT) d\vec{v}_0.$$

Средняя скорость относительного движения равна

$$\bar{v}_0 = \sqrt{8kT / (\pi\mu)}.$$

Частота соударений, длина свободного пробега и эффективное сечение. В смеси идеальных газов частота столкновений данной молекулы равна

$$\nu = \sum_i n_i \bar{v}_0 \sigma_i.$$

В случае однородного по составу газа формула принимает вид

$$\nu = \sqrt{2} n \bar{v} \sigma,$$

где  $\bar{v}$  – средняя скорость теплового движения молекул,  
 $\sigma = \pi d^2$  – газодинамическое сечение столкновения,  $d$  – диаметр.

Средняя длина свободного пробега

$$\bar{\lambda} = \bar{v} / \nu = 1 / (\sqrt{2}n\sigma).$$

Рассеяние молекулярных пучков, распределение по длинам пробега и средняя длина свободного пробега.

Вероятность пролететь некоторое расстояние без столкновения:

$$N(x)/N(0) = w(x) = \exp(-ax).$$

Вероятность данного значения длины свободного пробега  $x$  (в интервале  $x \div x + dx$ ):

$$dP(x) = w(x)(1 - w(dx)) = a \exp(-ax)dx.$$

Средняя длина свободного пробега вычисляется обычным образом:

$$\bar{\lambda} = \int_0^{\infty} x dP(x) = 1/a.$$

Экспериментальное определение длины свободного пробега.

Химические превращения и химическая кинетика.

6. Явления переноса. Принцип локального равновесия. Диффузия, теплопроводность и вязкость газов. Связь между коэффициентами переноса и их зависимость от температуры и плотности. Течение вязкой жидкости. Формулы Пуазейля и Стокса. Процессы переноса в ультра-разреженном газе.

Принцип локального равновесия. Для установления равновесного распределения молекул по скоростям поступательного движения. достаточно, чтобы каждая из них испытала одно-два соударения. Это дает возможность ввести гипотезу локального термодинамического равно-

веса. Суть ее состоит в следующем: предполагается, что все молекулы, попавшие в объем, размеры которого порядка  $\bar{\lambda}$ , испытают в нем соударения и в объеме установится локальное равновесие с некоторой температурой, плотностью и т. д. В другом подобном объеме также устанавливается равновесное состояние, но параметры среды, вообще говоря, другие. Среда (газ) в целом не находится в равновесии. При длине свободного пробега молекул (размере объема) малом по сравнению с характерным размером задачи такие объемы можно считать точками, в которых определены температура и другие параметры среды. От точки к точке эти параметры меняются. В рамках этого приближения возможно непрерывное распределение параметров (кусочно-непрерывное распределение имеет место непременно).

Диффузия, теплопроводность и вязкость газов. Связь между коэффициентами переноса и их зависимость от температуры и плотности.

Под диффузией понимается проникновение одного вещества в другое в результате теплового движения молекул. Элементарная кинетическая теория дает для диффузионного потока примеси в одномерном случае выражение (закон Фика):

$$j = -Ddn / dx,$$

где  $n$  – концентрация молекул примеси,  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$  – коэффициент диффузии.

Согласно закону Фурье, полученному экспериментально, плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры и направлена против него. Для одномерного случая закон имеет вид

$$q = -\chi dT / dx.$$

Кинетической теории позволяет рассчитать коэффициент теплопроводности

$$\chi = \frac{1}{3} n c_V / N_A \bar{v} \bar{\lambda}$$

и установить его зависимость от различных параметров газа (температуры, плотности и т. д.). Оказалось, в частности, что  $\chi$  не зависит от плотности газа ( $n\bar{\lambda} = \text{const}$ ). В первом приближении коэффициент теплопроводности можно считать пропорциональным корню квадратному из температуры.

Тепловое движение молекул отвечает за внутреннее трение, или вязкость газов. Для напряжения трения (силы трения, действующей на единичную площадку в сечении между слоями газа или жидкости):

$$\tau = -\eta du / dx, \quad \text{где} \quad \eta = \frac{1}{3} m n \bar{v} \bar{\lambda}.$$

Течение вязкой жидкости. Формулы Пуазейля и Стокса. Профиль скорости ламинарного стационарного течения несжимаемой жидкости в длинном цилиндрическом канале (течение Пуазейля) имеет вид

$$u = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Объемный расход жидкости определяется по формуле Пуазейля

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4.$$

Сила сопротивления  $F$ , испытываемая шаром радиусом  $R$ , движущегося в вязкой жидкости со скоростью  $u$ , определяется формулой Стокса

$$F = 6\pi \eta R u.$$

Процессы переноса в ультраразреженном газе.

Гипотеза локального термодинамического равновесия оказывается неприменимой, когда длина свободного пробега, вычисленная по формуле

$$\bar{\lambda} = 1 / (\sqrt{2} n \sigma),$$

оказывается сравнимой с характерным размером  $h$  задачи. При низких давлениях

$$p \ll p_0 = kT / (\sqrt{2}\sigma h)$$

следует пользоваться приближением ультраразреженного газа. Установление равновесия в таком ультраразреженном газе (физическом вакууме) осуществляется в результате неупругих столкновений его молекул со стенками. Плотность потока тепла от одной стенки к другой вычисляется по формуле

$$q = \alpha / (2 - \alpha) \cdot n \bar{v}_1 \bar{v}_2 / (2(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)) \cdot (c_V / N_A + k / 2) (T_1 - T_2),$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – температуры стенок,  $\alpha$  – коэффициент аккомодации, определяющий долю прилипающих (и испаряющихся) молекул при ударе о стенку.

В случае молекулярного течения между двумя параллельными пластинами площадью  $S$ , движущихся вдоль самих себя в одном направлении, для силы трения получается выражение

$$F = \alpha / (2 - \alpha) \cdot n \bar{v} / 4 \cdot m(u_1 - u_2)S.$$

Истечение газа из сосуда через малое отверстие. В случае, когда размеры отверстия (его диаметр и толщина стенки сосуда) малы, столкновения молекул в окрестности отверстия практически не происходят. Возникающий поток молекул газа называют эффузионным потоком. Его величина определяется формулой

$$j = Sn\bar{v} / 4,$$

где  $S$  – площадь отверстия.

Если газ по обе стороны от малого отверстия поддерживается при разных температурах, то давление по обе стороны от отверстия будет разное:

$$p_1 / p_2 = \sqrt{T_1 / T_2}.$$

Это явление называют тепловой эффузией, или эффектом Кнудсена. В рамках сплошной среды ( $\bar{\lambda} \ll \sqrt{S}$ ) условием механического равновесия является равенство давлений. Демонстрационный опыт Поля.

7. Подвижность. Связь между коэффициентами подвижности и диффузии. Броуновское движение, формула Эйнштейна – Смолуховского.

Пусть частицы имеют малые размеры (броуновских частицы или частицы молекулярных размеров). На них действует постоянная сила  $\vec{F}$ . При движении частицы испытывают столкновения с окружающими молекулами. В результате частицы приобретают скорость  $\vec{v}$  регулярного движения в сторону действия силы  $\vec{F}$ . Если внешнее силовое поле не очень сильное, то установившаяся скорость частиц пропорциональна приложенной к ним силе  $\vec{F}$

$$\vec{v} = B\vec{F} .$$

Коэффициент пропорциональности называют подвижностью частицы. Коэффициент диффузии и подвижность частиц связаны соотношением :

$$D = kTB .$$

### Законы термодинамики

8. Термодинамический подход к описанию молекулярных явлений. Термодинамическое равновесие. Уравнение состояния. Работа, внутренняя энергия, количество теплоты. Первое начало термодинамики. Обратимые и необратимые процессы. Теплоёмкость. Изотермическое, изобарическое и адиабатическое расширение и сжатие идеальных газов, политропический процесс. Скорость звука в идеальном газе.

Основное содержание термодинамики составляет рассмотрение закономерностей теплового движения в макроскопических системах, находящихся в равновесии. Пространственные размеры изучаемых систем много больше размеров частиц, из которых они состоят, а число этих частиц огромно. Численные примеры. Опыт показывает, что поведение макроскопической системы вполне характеризует сравнительно небольшое число параметров. Основные макроскопические параметры – объем системы, давление, температура. Макроскопическая система

может включать и силовые поля, например электрическое и магнитное. Есть и другие важные параметры.

Состояние системы называется стационарным, если ее макроскопические параметры с течением времени не изменяются. Если, кроме того, в системе нет никаких потоков массы, энергии, импульса и т. д. в результате действия каких-либо внешних источников, то такое состояние системы называется равновесным (состояние термодинамического равновесия). В состоянии термодинамического равновесия температура во всех частях системы одна и та же. Равновесные значения параметров термодинамической системы с молекулярной точки зрения.

Термостат. Виды взаимодействия термодинамической системой с термостатом или в общем случае между термодинамическими системами. Изолированная система.

Постулат: изолированная макроскопическая система с течением времени приходит в состояние термодинамического равновесия и никогда самопроизвольно выйти из него не может.

Свойство транзитивности термодинамического равновесия и температура.

Классическая термодинамика рассматривает только такие изменения состояния системы, в которых начальное и конечное состояния являются равновесными. Равновесные (квазистатические) и неравновесные процессы. Условия их протекания. Релаксация.

Интенсивные и экстенсивные параметры.

Уравнение состояния.

Опыт показывает, что для газов и жидкостей в равновесном состоянии давление, объем и температура находятся в функциональной зависимости

$$f(p, V, T) = 0.$$

Это термическое уравнение состояния (или просто уравнение состояния) сжимаемых сред в общем виде. Для идеального газа термическим уравнением состояния является уравнение Клапейрона–Менделеева

$$pV = NkT, \text{ или } pV = m/\mu RT, \text{ или } pV = \nu RT.$$

Работа, внутренняя энергия, количество теплоты. Первое начало термодинамики.

Внутренняя энергия термодинамической системы определяется как полная энергия, заключенная в системе – за вычетом кинетической и потенциальной энергии ее центра масс. С точки зрения молекулярных представлений, внутренняя энергия системы равна сумме кинетической энергии теплового движения молекул и энергии их взаимодействия. Внутренняя энергия  $U$  является функцией температуры  $T$  и внешних параметров – калорическое уравнение состояния. Газы – простые системы, состояние которых описывается двумя термодинамическими параметрами. Если использовать как параметры температуру  $T$  и объем  $V$ , то калорическое уравнение состояния для газов имеет вид

$$U = U(T, V).$$

Внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема – закон Джоуля. Для одноатомного газа

$$U = \nu \frac{3}{2} RT.$$

Для многоатомных идеальных газов коэффициент при температуре может быть больше, чем  $\frac{3}{2}R$ , этот коэффициент называют теплоемкостью при постоянном объеме  $c_V$ :

$$U = \nu c_V RT.$$

Важнейшие свойства внутренней энергии (функция состояния, ее дифференциал полный, аддитивная функция).

Элементарная работа газа (и вообще сжимаемой среды)

$$\delta A = p dV$$

(предполагается, что других внешних сил, кроме сил давления, нет). При изменении объема от  $V_1$  до  $V_2$  работа сжимаемой среды в равновесном процессе выражается интегралом

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Элементарная работа в общем случае не является полным дифференциалом какой-либо функции состояния. Поэтому для дифференциально малой работы используется специальное обозначение, отличающее ее от полных дифференциалов. Интерпретация работы на  $(p, V)$ -диаграмме. Вычисление работы в изотермическом, изобарическом и других равновесных процессах.

Энергия, передаваемая системе при тепловом контакте, называется теплотой. Количество теплоты считается положительным, если система ее получает, и отрицательным, если она ее отдает. Количество теплоты зависит от процесса. Ее элементарное количество  $\delta Q$  не является полным дифференциалом.

Первое начало термодинамики.

Первое начало термодинамики по существу является законом сохранения энергии. Формулировка его: при переходе системы из начального состояния 1 в конечное состояние 2 изменение внутренней энергии является разностью получаемой системой от окружающей среды теплоты и произведенной этой системой работы, т.е.

$$U_2 - U_1 = Q - A,$$

или

$$Q = U_2 - U_1 + A.$$

В дифференциальной форме первое начало имеет вид

$$dU = \delta Q - \delta A = \delta Q - p dV.$$

Если в систему включить и окружающую среду, то полная система является изолированной (замкнутой) системой. Ее энергия остается постоянной. Система, заключенная в адиабатическую оболочку, называется адиабатически изолированной. В этом случае подвод теплоты отсутствуют (как отсутствует и материальное взаимодействие).

Обратимые и необратимые процессы.

Процесс перехода изолированной системы из состояния 1 в состояние 2 называется обратимым, если возвращение этой системы в исходное состояние 1 можно осуществить без каких-либо изменений в окружающих, внешних телах. В противном случае процесс называется необратимым. Примеры необратимого процесса (переход теплоты от более нагретого тела к менее нагретому телу при тепловом контакте между ними; процесс получения теплоты трением; расширение газа в пустоту; диффузия).

В термодинамике обычно рассматриваются обратимые процессы в узком смысле слова, когда система при возвращении в исходное состояние проходит ту же последовательность состояний, что и в прямом процессе. Такие процессы должны быть квазистатическими (равновесными). Деление процессов на обратимые и необратимые относится к процессам, испытываемым изолированной системой в целом; разделение процессов на равновесные и неравновесные (или, что то же, квазистатические и неквазистатические) с этим не связано.

Понятие обратимого процесса очень важно в термодинамике. В частности, всякий квазистатический круговой процесс может происходить как в прямом, так и обратном направлениях. В этом случае говорят об обратимом цикле.

Теплоёмкость. При подводе теплоты  $\delta Q$  увеличивается температура системы на  $dT$ . Величину

$$c_x = \delta Q/dT$$

называют теплоемкостью системы для такого процесса. Удельная, молярная теплоемкости. Теплоемкость зависит от процесса. Диапазон значений теплоемкости. Общее выражение для теплоемкости

$$c_x = (\partial U/\partial T)_V + ((\partial U/\partial V)_T + p)(\partial V/\partial T)_x.$$

Частные случаи для изохорического и изобарического процессов. Соотношение Майера

$$c_p - c_v = R.$$

Изотермическое, изобарическое и адиабатическое расширение и сжатие идеальных газов, политропический процесс. Скорость звука в идеальном газе.

9. Циклические процессы. Преобразование теплоты в работу, КПД циклов. Цикл Карно. Второе начало термодинамики. Эквивалентность различных формулировок второго начала термодинамики. Теорема Карно.

Тепловая машина.

Тепловой машиной называется устройство, позволяющее производить работу за счет потребляемого тепла. Работа может производиться за счет расширения рабочего тела (обычно газа). Так как машина должна многократно воспроизводить рабочий процесс, то расширению должно последовать сжатие до прежнего объема – то есть машина должна быть циклической. тепловая машина должна иметь, по крайней мере, два тепловых резервуара: нагреватель и холодильник. От нагревателя рабочее тело получает количество теплоты  $Q_1$ , часть этой теплоты  $|Q_2|$  отдает холодильнику, а разность  $Q_1 - |Q_2|$  превращает в работу  $A$ :

$$A = Q_1 - |Q_2| = Q_1 + Q_2.$$

Коэффициент полезного действия.

Эффективность работы тепловой машины определяется коэффициентом полезного действия (сокращенно КПД). КПД тепловой машины целесообразно определить как отношение совершенной работы  $A$  к полученному от нагревателя количеству теплоты  $Q_1$ :

$$\eta = A/Q_1 = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 + Q_2/Q_1.$$

В зависимости от того, обратимым или необратимым является цикл, тепловая машина будет обратимой или необратимой.

Цикл Карно. Второе начало термодинамики. Эквивалентность различных формулировок второго начала термодинамики. Теорема Карно.

Особое значение для термодинамики имеет тепловая машина, у которой один нагреватель и один холодильник с постоянными температурами. Единственно возможный здесь квазистатический цикл – это обратимый цикл Карно. Он состоит из двух изотермических и двух адиабатических процессов. КПД обратимого цикла Карно с идеальным газом в качестве рабочего тела равен

$$\eta = 1 - T_2/T_1.$$

Формулировка второго начала Вильяма Томсона: "Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счет охлаждения теплового резервуара".

Воображаемый круговой процесс, единственным результатом которого является производство работы за счет внутренней энергии теплового резервуара, называется процессом Томсона. Второе начало утверждает невозможность процесса Томсона. Под тепловым резервуаром понимают тело или систему тел, находящихся в состоянии термодинамического равновесия и обладающих запасом внутренней энергии. Тепловой резервуар сам работы не совершает, а может только передавать внутреннюю энергию в виде теплоты другому телу или системе тел. Если последняя система производит работу за счет внутренней энергии теплового резервуара, то она называется рабочим телом. В формулировке существенно указано, что процесс должен быть круговым.

Формулировка второго начала Клаузиуса: "Теплота не может самопроизвольно переходить от тела менее нагретого к телу более нагретому".

Любой воображаемый процесс, в котором осуществляется такая передача теплоты, называется процессом Клаузиуса. Под теплотой здесь понимается внутренняя энергия. В формулировке имеет значение слово "самопроизвольно". Оно содержит тот же смысл, что и словосочетание "без каких-либо изменений во всех остальных телах". Если допустить другие процессы, то передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому возможна. Такие процессы являются компенсирующими процессами (кратко – компенсациями).

Эквивалентность формулировок второго начала.

Принцип (теорема) Карно.

КПД тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, не зависит от природы рабочего вещества и устройства машины, а определяется только температурами нагревателя и холодильника. КПД необратимой тепловой машины, имеющей те же самые тепловые резервуары, меньше КПД обратимого цикла Карно.

$$\eta = \eta(t_1, t_2), \eta' < \eta.$$

Здесь  $\eta$  – КПД обратимого цикла Карно,  $\eta'$  – КПД необратимого цикла,  $t_1$  и  $t_2$  – температуры нагревателя и холодильника соответственно, измеренные каким-либо термометром.

Метод циклов. На принципе Карно основан метод циклов. Суть его в следующем. Исследуемая система используется в качестве рабочего вещества в обратимой машине Карно. Разница между температурами

нагревателя и холодильника берется бесконечно малой. Применение принципа Карно позволяет получить информацию о системе.

10. Теорема о приведённых теплотах. Неравенство Клаузиуса. Термодинамическая шкала температур и ее тождественность с идеально-газовой шкалой. Энтропия – функция состояния. Закон возрастания энтропии. Тепловые насосы, холодильная машина.

Теорема о приведённых теплотах. Неравенство Клаузиуса.

С помощью принципа Карно второму началу термодинамики можно придать следующую количественную формулировку.

Если система, совершая циклический процесс, получает теплоту  $Q_i$  от теплового резервуара  $R_i$  с температурой  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n Q_i / T_i \leq 0.$$

Это неравенство Клаузиуса. В случае двух тепловых резервуаров оно следует непосредственно из теоремы Карно:

$$\eta = 1 + Q_2/Q_1 \leq 1 - T_2/T_1 \rightarrow Q_1/T_1 + Q_2/T_2 \leq 0.$$

Неравенство Клаузиуса в интегральном виде

$$\oint \delta Q / T_e \leq 0.$$

Здесь индекс  $e$  у температуры указывает, что это температура окружающей среды, а не системы (в случае обратимого цикла обе температуры при тепловом контакте равны, и индекс  $e$  можно опустить). Знак равенства имеет место для обратимого циклического процесса, неравенства – для необратимого процесса.

Абсолютная термодинамическая шкала температур (температура  $T$ , показываемая идеально-газовым термометром, совпадает с абсолютной термодинамической температурой; для обозначения последней используется символ  $T$ ).

Энтропия – функция состояния. Закон возрастания энтропии. Тепловые насосы, холодильная машина.

Из равенства Клаузиуса следует, что для всякого квазистатического, не циклического процесса значение интеграла  $\int \delta Q/T$  не зависит от пути, по которому происходит процесс. Количество теплоты, полученное системой, деленное на температуру, при которой оно было получено, иногда называют приведенным количеством теплоты. Пользуясь этой терминологией, можно сказать: приведенное количество теплоты, квазистатически полученное системой, не зависит от пути перехода, а определяется лишь начальным и конечным состояниями системы. Приведенная теплота термин исторический. Тот факт, что при квазистатическом переходе значение интеграла  $\int \delta Q/T$  не зависит от пути перехода, а определяется лишь начальным и конечным равновесными состояниями системы, означает существование однозначной функции состояния – энтропии

$$S = S_0 + \int \delta Q/T .$$

Энтропия определяется с точностью до произвольной постоянной. Однако в термодинамике смысл имеет не сама энтропия, а ее изменение (разность значений энтропии в двух состояниях). Приращение энтропии

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

в отличие от  $\delta Q$  является полным дифференциалом: Данное выражение является математической формулировкой второго начала термодинамики для равновесных процессов. В сочетании с первым началом оно дает

$$TdS = dU + pdV.$$

Это фундаментальное уравнение, объединяющее первое и второе начала термодинамики для равновесных процессов.

Для нахождения энтропии произвольной системы в некотором состоянии можно систему перевести в это состояние каким-либо равновесным путем, безразлично каким именно, из состояния, в котором энтропия известна.

Для любого равновесного циклического процесса

$$\oint dS = 0.$$

Энтропия относится к экстенсивным величинам. Если система состоит из термически равновесных подсистем, то ее энтропия равна сумме энтропий подсистем (энтропия – аддитивная функция состояния).

Холодильной машиной является любая тепловая машина, работающая в обратном цикле. Эффективность ее работы характеризуется холодильным эффектом (коэффициентом)  $K$ , являющимся отношением тепла, отнятого от холодильника  $Q_0$ , к затраченной на это работе  $A$ :

$$K = \frac{Q_0}{A}, \quad A = |Q_1| - Q_0.$$

Холодильный коэффициент обратимо работающей машины связан с КПД этой же машины, достигаемом в прямом цикле:

$$K = \frac{1 - \eta}{\eta}.$$

В тепловом насосе за счет произведенной работы также происходит перенос тепла от источника с низкой температурой к резервуару с более высокой температурой. От холодильной машины тепловой насос отличается тем, что целью работы здесь служит не охлаждение тела путём отбора теплоты, а нагревание полезного пространства (обычно помещения). При этом охлаждается какой-либо значительный по массе объект (например, грунт вокруг дома, близлежащий водоем).

11. Энтропия идеального газа. Изменение энтропии в неравновесных процессах (контакт тел с разными температурами, смешение газов, парадокс Гиббса, расширение в пустоту). Физический (статистический) смысл энтропии, формула Больцмана.

Энтропия идеального газа:

$$S = S_0 + \nu c_V \ln (pV^\gamma/p_0V_0^\gamma).$$

Изменение энтропии в неравновесных процессах (контакт тел с разными температурами, смешение газов, парадокс Гиббса, расширение в пустоту).

Неравенство Клаузиуса при использовании понятия энтропии дает математическое выражение второго начала термодинамики как для равновесных, так и неравновесных процессов:

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \delta Q / T_e.$$

Для адиабатически изолированной системы  $\delta Q = 0$  и из неравенства следует закон возрастания энтропии:

$$S_2 \geq S_1.$$

Переход без подвода теплоты из состояния 1 в состояние 2 происходит с неубыванием энтропии. В равновесных процессах без подвода теплоты энтропия не изменяется, в неравновесных процессах она возрастает. Контакт тел с разными температурами, смешение газов, парадокс Гиббса, расширение в пустоту.

Закон возрастания энтропии в дифференциальной форме имеет вид

$$dS \geq 0.$$

Неравенство

$$TdS \geq dU + pdV$$

объединяет в дифференциальной форме первое и второе начала термодинамики как для равновесных, так и неравновесных процессов.

Физический (статистический) смысл энтропии, формула Больцмана.

Энтропия системы в данном состоянии характеризует вероятность этого состояния:

$$S = k \ln W.$$

где  $S$  – энтропия системы;  $k$  – постоянная Больцмана;  $W$  – термодинамическая вероятность состояния, определяемая числом микросостояний, реализующих данное макросостояние. Соотношение выражает принцип Больцмана. Односторонний характер изменения энтропии изолированной системы определяется переходом системы из менее вероятного состояния в более вероятное состояние.

12. Термодинамические потенциалы и условия термодинамической устойчивости.

Теория термодинамических потенциалов базируется на использовании основного уравнения термодинамики

$$TdS = dU + pdV.$$

Для некоторых пар независимых переменных достаточно к этому уравнению добавить только одну функцию состояния. Она вместе с основным уравнением термодинамики полностью описывает систему. Эта функция и есть термодинамический потенциал, а соответствующие независимые параметры являются естественными переменными для него. Термодинамические потенциалы являются однозначными функциями состояния. Они относятся к экстенсивным параметрам. Удельный потенциал может зависеть только от интенсивных параметров и величин, рассчитанных на единицу массы. Дифференциалы термодинамических потенциалов полные. Задание термодинамического потенциала в естественных переменных содержит полную информацию как о термических, так и калорических свойствах вещества. Убыль термодинамического потенциала при некоторых условиях определяет работу системы против действующих на нее сил.

К числу термодинамических потенциалов относятся: внутренняя энергия, заданная как функция энтропии и объема  $U = U(S, V)$ ; энтальпия  $H = U + pV$ , заданная как функция энтропии и давления  $H(S, p)$ ; свободная энергия  $F = U - TS$ , заданная как функция температуры и объема  $F = F(T, V)$ ; термодинамический потенциал Гиббса  $G = U - TS + pV = H - TS = F + pV$ , заданный как функция температуры и давления  $G = G(T, p)$ .

Первые (полные) дифференциалы потенциалов:

$$dU = TdS - pdV, dH = TdS + Vdp,$$

$$dF = -SdT - pdV, dG = -SdT + Vdp.$$

Соотношения взаимности (Максвелла)

$$(\partial T/\partial V)_S = -(\partial p/\partial S)_V, (\partial T/\partial p)_S = (\partial V/\partial S)_p,$$

$$(\partial S/\partial V)_T = (\partial p/\partial T)_V, -(\partial S/\partial p)_T = (\partial V/\partial T)_p.$$

Уравнения Гиббса–Гельмгольца

$$U = F - T(\partial F/\partial T)_V, H = G - T(\partial G/\partial T)_p.$$

Метод термодинамических потенциалов. В основе этого метода лежит применение соотношений Максвелла. Они используются для получения различных соотношений между величинами, характеризующими равновесные состояния системы.

Система может быть неустойчивой, если небольшие флуктуации ее параметров (температуры, плотности, давления и др.) приведут к необратимому переходу в другое состояние. Примеры. Условия устойчивости следуют из второго начала термодинамики. Для системы в термостате с температурой  $T$  условие устойчивости в случае постоянного объема  $V$  принимает вид

$$F_2 \leq F_1.$$

Если поддерживается постоянным давление термостата  $p$  (температура, как и в предыдущем случае, также является постоянной), то условие устойчивости имеет вид

$$G_2 \leq G_1.$$

### Реальные газы, жидкости, фазовые переходы

13. Реальные газы. Межмолекулярное взаимодействие. Газ Ван-дер-Ваальса. Уравнение состояния, сжимаемость газов.

Термодинамика газа Ван-дер-Ваальса. Термическое уравнение состояния

$$p = vRT/(V - vb) - av^2/V^2,$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные, различные для разных газов,  $\nu$  – число молей. Эта модель приближенно описывает жидкое и газообразное состояния вещества и переход из одного состояния в другое.

Критическая точка. Значения критических параметров

$$V_k = 3\nu b, T_k = 8a/(27Rb), p_k = a/(27b^2).$$

Теплоемкость  $c_V$  газа Ван-дер-Ваальса не зависит от объема:

$$(\partial c_V / \partial V)_T = 0.$$

Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса равны

$$U = \nu \left( \int c_V(T) dT - a\nu/V + \text{const} \right),$$

$$S = \nu \left( \int c_V(T) dT / T + R \cdot \ln(V/\nu - b) + \text{const} \right).$$

14. Охлаждение газов. Процессы Гей–Люссака и Джоуля–Томсона. Изохорическое расширение газа Ван-дер-Ваальса. Кривая инверсии. Температура инверсии и температура Бойля для газа Ван-дер-Ваальса. Методы получения низких температур и сжижение газов.

Совместные опыты Джоуля и Томсона. Цель опытов: ответить на вопрос о зависимости внутренней энергии газа от объема. Открытие физического явления, получившего название эффекта Джоуля–Томсона.

В процессе Джоуля–Томсона энтальпия газа сохраняется, энтропия возрастает. Эффект Джоуля–Томсона определяется величиной

$$(\partial T / \partial p)_H = -\lambda c_p^{-1} (\partial V / \partial p)_T.$$

где  $\lambda = T(\partial p / \partial T)_V + V(\partial p / \partial V)_T$ . В случае идеального газа эффект Джоуля–Томсона отсутствует, т. е.  $(\partial T / \partial p)_H = 0$ . Для реальных газов знак  $(\partial T / \partial p)_H$  совпадает со знаком  $\lambda$  ( $(\partial V / \partial p)_T < 0$ ). При  $\lambda < 0$  эффект Джоуля–Томсона отрицательный (газ при продавливании сквозь пробку нагре-

вается); при  $\lambda > 0$  эффект положительный (газ охлаждается). В точке инверсии ( $\lambda = 0$ ) происходит смена знака эффекта.

Для газа Ван-дер-Ваальса кривая инверсии ( $\lambda = 0$ ) описывается уравнением

$$x^2 - 4x/3 + (1 + b^2p/a)/3 = 0,$$

где  $x = \sqrt{RT_i b / 2a}$ .

при заданном не слишком высоком давлении существует две температуры инверсии. Для большинства газов одна из них выше комнатной температуры, другая в области жидких состояний, что позволяет использовать процесс Джоуля–Томсона для сжижения газов.

15. Фазовые равновесия и превращения. Условие равновесия фаз химически однородного вещества. Фазовые переходы первого рода. Зависимость давления насыщенных паров от температуры. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Правило Максвелла. Теплоемкость насыщенного пара. Термодинамическое понятие о фазовых переходах второго рода. Тройные точки, диаграммы состояния. Метастабильные состояния (перегрев, переохлаждение).

Фазой называется физически однородная часть системы, отличающаяся своими физическими свойствами от других ее частей и отделяющаяся от них четко выраженной границей. Переход из одной фазы в другую называется фазовым превращением, или фазовым переходом. Фаза и агрегатное состояние вещества – разные понятия. Различают твердое, жидкое, газообразное и плазменное агрегатные состояния. Фаз же может быть много: возможны различные кристаллические модификации одного вещества.

Условием равновесия фаз химически однородного вещества является равенство химических потенциалов фаз:

$$\mu_1(T, p) = \mu_2(T, p).$$

При фазовых переходах первого рода скачком изменяется молярный объем и поглощается или выделяется теплота, т. е. терпят разрыв производные от термодинамического потенциала Гиббса:

$$(\partial G / \partial p)_T = V, (\partial G / \partial T)_p = -S.$$

Примеры фазовых переходов первого рода. Скрытая теплота перехода из фазы 1 в фазу 2 равна

$$\lambda = \int TdS = T(S_2 - S_1).$$

Уравнение кривой фазового равновесия в дифференциальной форме – уравнение Клапейрона–Клаузиуса связывает изменение равновесного давления с непосредственно измеряемыми величинами

$$dp/dT = (S_2 - S_1)/(V_2 - V_1), \text{ или } dp/dT = \lambda/(T(V_2 - V_1)).$$

Интегрирование для случая равновесия между конденсированной фазой (жидкостью, кристаллом) и паром дает уравнение Кирхгофа

$$\ln p = A - B/T + C \ln T.$$

16. Поверхностное натяжение жидкости. Краевой угол. Капиллярные явления. Формула Лапласа. Термодинамика поверхностного натяжения. Давление пара над искривленной поверхностью.

Физическая природа поверхностного натяжения. Термодинамика поверхностных явлений (развита Гиббсом). Гиббс принимал поверхностный слой за новую "поверхностную фазу", отличную от объемных фаз тем, что ее толщина мала, и поэтому рассматривал поверхностный слой как геометрическую разделяющую поверхность, применяя к ней термодинамические уравнения. Изменение площади поверхности фазы  $\Sigma$  сопровождается работой

$$\delta A = -\sigma d\Sigma$$

Величина  $\sigma$  называется коэффициентом поверхностного натяжения. Из опыта известно, что  $\sigma$  зависит от жидкости и среды, с которой жидкость граничит, и является функцией температуры (с ростом температуры убывает).

Основное уравнение термодинамики для поверхности раздела сред

$$dU_\Sigma = TdS_\Sigma + \sigma d\Sigma.$$

Поскольку коэффициент поверхностного натяжения для данной системы зависит только от температуры  $\sigma = \sigma(T)$  (это фактически термическое уравнение состояния поверхности раздела), то выполняются равенства

$$U_{\Sigma} = (\sigma - T \cdot d\sigma/dT) \cdot \Sigma, S_{\Sigma} = - d\sigma/dT \cdot \Sigma.$$

Теплота образования единицы поверхности раздела при изотермическом изменении площади равна

$$q = - T \cdot d\sigma/dT.$$

При рассмотрении явлений поверхностного натяжения условия теплового и материального равновесия системы остаются прежними:

$$T_1 = T_2 = T, \mu_1 = \mu_2.$$

Условие механического равновесия изменится. С учетом сил поверхностного натяжения возникает перепад давления. Он описывается формулой Лапласа

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \sigma (1/r_1 + 1/r_2).$$

17. Растворы. Растворимость тел. Кипение и замерзание растворов. Ионная сила растворов. Осмос и осмотическое давление. Закон Рауля. Значение осмоса для живых организмов.

Растворами называют физически однородные смеси двух или нескольких веществ. Физическая однородность достигается равномерным перемешиванием молекул. В этом отношении растворы отличаются от механических смесей, в которых перемешаны не молекулы, а макроскопические частицы вещества. Но растворы не являются и просто механическими смесями молекул. По некоторым признакам растворы приближаются к химическим соединениям. Так, при смешении спирта с водой наблюдается уменьшение объема.

Существуют перегородки, называемые полупроницаемыми. Они проницаемы для молекул растворителя и непроницаемы для молекул растворенного вещества. К ним относятся различные оболочки и ткани растительного и животного происхождения. Для опытов удобны искус-

ственные полупроницаемые перегородки. Когда раствор отделен от растворителя полупроницаемой перегородкой, то через нее молекулы чистого растворителя переходят в область, занятую раствором. Это явление называется осмосом. В результате осмоса возникает разность давлений между раствором и чистым растворителем. Когда она достигнет определенного значения, осмос прекратится. Соответствующая разность давлений называется осмотическим давлением. Физическая природа осмотического давления.

Согласно термодинамической теории осмотического давления, предложенной Вант Гоффом,

$$\mu_1(T, p_1) = \mu_2(T, p_2, c),$$

где  $c = N/(N_2 + N)$  – концентрация раствора в объеме 2;  $N$  и  $N_2$  – число молекул растворенных веществ и растворителя соответственно; давление по обе стороны от перегородки разное. Химический потенциал растворителя в объеме 2 зависит от концентрации раствора, но не зависит от  $N_2$  и  $N$ . Это равенство определяет осмотическое давление

$$p_{осм} = p_2 - p_1.$$

Для слабых растворов ( $c \ll 1$ ) осмотическое давление определяется законом Вант Гоффа

$$p_{осм} = NkT/V = \nu RT/V,$$

Формула Вант Гоффа справедлива и для растворов электролитов, если учитывать ионы обоих знаков и нейтральные молекулы растворенного вещества. В электролитах растворенное вещество диссоциирует на положительные и отрицательные ионы. Степень диссоциации вводится как доля диссоциированных молекул

$$\alpha = n/N,$$

где  $N$  – полное число молекул растворенного вещества,  $n$  – число диссоциированных молекул этого вещества. В случае слабого раствора концентрация растворенного вещества приближенно равна

$$c \approx N/N_0$$

( $N_0$  – число молекул растворителя). Из закона действующих масс следует закон разведения Оствальда

$$\alpha^2 \cdot c / (1 - \alpha) = K,$$

где  $K$  – константа диссоциации. В очень слабых растворах, когда  $c \rightarrow 0$ , степень диссоциации  $\alpha \rightarrow 1$ , т. е. почти все молекулы растворенного вещества диссоциированы.

18. Жидкости, кристаллы, аморфные тела, пластические кристаллы, жидкие кристаллы. Коллоиды и аэрозоли. Межмолекулярные и специфические взаимодействия в биологии, явление узнавания Самоорганизующиеся системы. Пленки Ленгмюра-Блоджетт, мицеллы, биологические мембраны.

### Примерный план семинарских занятий

(номера задач даются по ссылке [14] из списка литературы, см. раздел 11 настоящей Программы)

#### Молекулярно-кинетическая теория

1. *Распределение Максвелла по скоростям. Системы координат: декартовая, цилиндрическая, сферическая. Графики функций распределения молекул по компоненте скорости  $v_x$  и по абсолютной величине скорости. Распределение молекул по энергиям.*  
Задачи: № 2.6, 2.8.
2. *Средние значения скорости и энергии молекул. Флуктуации параметров. Доля молекул, скорости которых больше заданной.*  
Задачи: № 2.7, 2.9, 2.10, 2.12.
3. *Давление идеального газа. Распределение молекул по скоростям в потоке. Средняя скорость и энергия частиц в потоке.*  
Задачи: № 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.30, 4.28.
4. *Силовое воздействие молекулярного потока.*  
Задачи: № 2.28, 2.32, 4.27.
5. *Распределения в потоке для различных физических систем.*

Задачи: № 2.24, 2.25, 2.27, 2.29, 2.31, 2.33, 4.26.

6. *Применение статистических методов для анализа физических систем.*

Задачи: № 2.13, 4.23, 4.24, 4.25, 2.14, 2.34.

7. *Распределение Больцмана для различных физических систем в поле тяжести.*

Задачи:

Найти распределение газа в “толстой” изотермической атмосфере планеты (толщина атмосферы сравнима с радиусом планеты). Исследовать предельный случай тонкой атмосферы.

№ 2.37, 2.36, 2.38, 4.30, 2.39, 2.40, 2.43, 4.31, 2.48, 4.32.

8. *Распределение частиц по радиусу в центрифуге. Распределение Максвелла-Больцмана. Формула для средней энергии. Полная средняя энергия частиц.*

Задачи: № 2.44, 4.33, 2.41, 2.49.

9. *Теплоемкость одноатомного и многоатомного газов в классическом приближении. Расчет теплоемкости для системы с произвольным сплошным энергетическим спектром.*

Задачи: № 2.53, 2.54, 4.34, 2.55, 2.56, 2.60, 2.61

10. *Теплоемкости квантовых систем (низкие температуры). Определение температур вымораживания колебательных и вращательных степеней свободы для двухатомных молекул.*

Задачи: № 2.63, 2.64, 2.66, 2.67, 2.70, 2.71

11. *Одноатомный газ. Распределение по относительным скоростям. Столкновение молекул. Длина свободного пробега.*

Задачи: № 3.2-3.4.

12. *Столкновение молекул. Смесь газов. Распределение по длинам свободного пробега.*

Задачи: № 4.35, 4.36, 3.5, 3.7, 4.37.

13. *Явления переноса в плотном газе: диффузия, теплопроводность, вязкость. Оценочные значения коэффициентов переноса. Диффузия.*

Задачи: № 3.8, 3.12, 3.9.

14. *Стационарный теплообмен и ламинарное течение.*

Задачи: № 3.13, 3.15, 3.16, 3.18, 3.21, 3.22.

15. *Явления переноса в ультраразреженных газах. Нестационарные процессы.*

Задачи: № 3.24, 3.25, 3.26, 3.28, 3.29.

16. *Явления переноса в ультраразреженных газах. Стационарные процессы.*

Задачи: №3.34—3.36, 3.38.

17. *Броуновское движение и подвижность.*

Задачи: № 3.42 — 3.45.

18. *Контрольная работа (2 часа).*

### **Законы термодинамики**

19. *Работа и количество теплоты. Внутренняя энергия системы. Первое начало термодинамики. Равновесные процессы. Теплоемкость.*

Задачи:

Для одного моля идеального газа рассмотреть следующие равновесные процессы: изохорический, изобарический, изотермический, адиабатический и политропический. Получить уравнение каждого процесса в переменных  $p, V$ . Вычислить: работу  $A$ , совершенную газом; количество теплоты  $Q$ , полученное им; изменение внутренней энергии  $U$ ; теплоемкость  $C$ . Получить соотношение Майера. Считать молярные теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  известными и постоянными.

№ 1.8, 1.12, 1.14.

20. *Работа и количество теплоты. Внутренняя энергия системы. Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Неравновесные процессы.*

Задачи: № 1.22, 4.4, 1.17, 1.20.

21. *Циклические процессы. Цикл Карно.*

Задачи: № 1.23, 1.24, 1.25, 4.6, 4.8.

22. *Цикл Карно. Неравенство Клаузиуса. Получение максимальной работы.*

Задачи: № 1.27, 1.28, 1.29, 1.30, 1.31.

23. *Неравенство Клаузиуса. Метод циклов.*

Задачи: № 1.35, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42.

24. *Энтропия — функция состояния.*

Задачи:

Для одного моля идеального газа рассмотреть следующие равновесные процессы: изохорический, изобарический, изотермический, адиабатический и политропический. Вычислить изменение энтропии  $S$ .

№ 1.43, 1.44.

25. *Энтропия системы. Второе начало термодинамики. Изменение энтропии в неравновесных процессах без подвода тепла*

Задачи: № 1.45, 1.46, 1.47.

26. *Энтропия системы. Второе начало термодинамики. Вычисление изменения энтропии в сложных процессах.*

Задачи: № 1.48, 1.51, 1.52.

### **Реальные газы, жидкости, фазовые переходы**

27. *Определение критических параметров для газа Ван-дер-Ваальса. Термодинамические свойства газа Ван-дер-Ваальса.*

Задачи №1.1, 1.2, 1.77, 1.79.

28. *Химический потенциал.*

Задачи: № 1.99 – 1.101.

29. *Процесс Джоуля-Гомсона. Равновесие фаз.*

Задачи: № 1.62, 1.103, 1.106, 1.108, 1.109, 1.110.

30. *Поверхностное натяжение. Давление под искривленной поверхностью.*

Задачи: № 1.113 – 1.117.

31. *Термодинамика поверхности. Метод циклов. Давление насыщенного пара над искривленной поверхностью.*

Задачи: № 1.118, 1.121, 1.122, 1.123.

32. *Контрольная работа (2 часа).*

## 5. Образовательные технологии

Образовательные технологии представляют собой три составляющие части: чтение курса лекций, интерактивное взаимодействие студентов и преподавателей во время семинарских занятий и в процессе приема домашних заданий: каждый студент должен самостоятельно решить 24 задачи (2 задания). Задание сдается устно.

Наличие обязательных для итоговой аттестации студента контрольных точек принуждает к активной работе студента в течение всего семестра. Для того чтобы заинтересовать студента в подготовке к каждому семинарскому занятию, каждое семинарское занятие часто начинается с экспресс – мини-контрольной работы, результат которой может существенным образом повлиять на итоговую оценку студента. Семинарские занятия проходят в форме дискуссии преподавателя со студентами (аналог «круглого стола», преподавателю в котором отводится роль ведущего), в ходе которых каждый из участников – студенты или преподаватель имеют право задавать вопросы и участвовать в выработке альтернативных решений разбираемых задач. Таким образом, на семинарских занятиях реализуется интерактивная форма обучения.

Важной формой обучения являются приемы домашних заданий, проводимые в форме беседы преподавателя со студентом. Здесь (а не только на семинарских занятиях) студент может получить ответы на все интересующие его вопросы по предмету.

Следует отметить, что практически все преподаватели, участвующие в курсе «Молекулярная физика» являются профессиональными исследователями в области физики и химии.

Преподаватели, участвующие в проведении курса, регулярно готовят и издают учебно-методические пособия, посвященные различным разделам курса. Эти пособия размещаются и в электронном виде на сайте Физического факультета.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Использование модульной системы и качественно различных способов контроля успеваемости в курсе «Молекулярная физика» дает возможность студенту проявить максимальную самостоятельность и инициативность в

учебном процессе, а преподавателям – объективно оценить знания студента.

Она позволяет студенту получить навыки работы с учебными пособиями, монографиями и справочной литературой по данной дисциплине, выработать самостоятельный научно-исследовательский подход к решению задач и физических проблем и в конечном итоге достичь желаемого профессионального уровня.

Система контроля построена таким образом, чтобы охватить все разделы курса. Однако экзамен в конце курса является обязательным. Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех задач из домашних заданий. Достаточным условием допуска является сдача домашних заданий и обеих контрольных работ на положительную оценку. В случае неудовлетворительной оценки хотя бы по одной из контрольных работ студент имеет возможность получить допуск на основе тестирования, проводимого преподавателем семинарских занятий.

Каждая обязательная контрольная точка проходит в установленный срок, который связан со временем изложения материала и проведением контрольной. Задача из домашнего задания должна быть сдана не позже, чем через 2 недели после разбора подобных задач, указанных после каждой задачи из задания. При прохождении контрольной точки за пределами установленного срока (без уважительной причины) она принимается со «штрафом», т. е. на 3.

Контрольные точки, не пройденные в срок по уважительной причине (при наличии медицинской справки), принимаются в течение недели после окончания действия справки без штрафа, а далее (в течение одной следующей недели) – со штрафом (см. выше). Все контрольные точки, не пройденные в срок (без уважительной причины), в виде исключения могут быть сданы в течение двух недель за пределами установленного срока (со штрафом).

Работа студента на семинарах оценивается преподавателем, ведущим семинары, по теме текущего семинара, поэтому студенту следует заранее прорабатывать материал к семинару.

Оценка на экзамене по курсу «Молекулярная физика» выставляется после устного ответа с учетом решения экзаменационной задачи и предварительной отметки:

□ оценки, выставляемой преподавателем за работу в семестре с учетом своевременной сдачи заданий, активности на семинарах и результатов двух контрольных работ и коллоквиума.

При проверке задач на всех этапах существенными будут следующие факторы:

□ понимание физической сущности задач, области применимости решения, контроль получения решения по размерности, с помощью предельных или частных случаев, где найти решение особенно просто;

□ рациональное использование математического аппарата, нахождение наилучшего из возможных путей к решению с указанием вариантов решения;

□ получение как точного результата, так и, в необходимом случае, оценки;

умение довести решение до конца, грамотно и разумно использовать системы единиц.

Для данного курса издан в печатном виде и размещается на сайте общей физики учебно-методический материал как в виде теоретического материала к курсу лекций и семинаров, так и в виде задач с решениями, который непрерывно обновляется в связи с модернизациями программы.

#### Рекомендуемая литература к теоретическому курсу

1. Бурштейн А. И. Молекулярная физика. Новосибирск: Наука, 1986.
2. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: М.: Наука, 1972.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. М.: Наука, 1979.
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1977. Т. 1, вып. 3 – 4.
4. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М.: Иностран. лит., 1955.
5. Кубо Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1967.
6. Докторов А. Б., Бурштейн А. И. Термодинамика и молекулярная физика. Курс лекций. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2010.
7. Базаров И. П. Термодинамика. Высшая школа, М. 1976.
8. Толкачев В. А. Термодинамика и статистическая физика. Новосибирск: НГУ, 1996.
9. Замураев В. П., Калинина А. П. Термодинамика и молекулярная физика. Новосибирск. Изд. НГУ. 2007.
10. Замураев В. П., Калинина А. П. Термодинамика и молекулярная физика // Новосибирск. Изд. НГУ. 2007.
11. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: Изд. НГУ, 2003.
12. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: Изд. НГУ, 2008.

### Домашние задания по курсу «Молекулярная физика»

Контрольные задания для самостоятельной работы (в объеме часов, предусмотренных образовательным стандартом и рабочим учебным планом данной дисциплины).

*Замечание.* После каждой задачи в скобках указаны номера задач [14], которые должны быть решены на семинарах перед сдачей данной задачи. В скобках после номера задачи указан номер соответствующего семинара.

#### Задание 1 (Молекулярно-кинетическая теория)

1. Пользуясь табличными значениями и асимптотическим ( $x \gg 1$ ) представлением интеграла  $\text{erf}(x) = 1 - 1/(\pi^{1/2} x) \cdot \exp(-x^2)$ , рассчитать:

а) долю частиц, у которых  $|v_x| \geq v_m$ ;

б) долю частиц, у которых  $v \geq v_m$ ;

в) долю частиц в атмосфере Земли, скорость которых превосходит вторую космическую  $v_2 = 11,2$  км/с.  $T = 300$  К,  $\mu = 29$ .

(№ 2.10, 2.12 (2))

2. Пленки некоторых нерастворимых органических кислот и спиртов можно моделировать идеальным двумерным газом. Считая, что такой идеальный газ находится в неравновесном состоянии, в котором все молекулы имеют одинаковые по модулю скорости  $v$  и изотропно распределены по направлениям движения в плоскости пленки, найти распределение для проекций скоростей на некоторую ось в плоскости пленки. С его помощью рассчитать давление газа и число ударов молекул о единичный отрезок границы пленки. Концентрация газа  $n$ , масса молекулы  $m$ .

(№ 2.15, 2.16 (3))

3. В эксперименте с молекулярным пучком ртути получена следующая зависимость числа частиц  $\Delta N$ , попавших на экран за постоянное время

$t \gg \omega^{-1}$ , от скорости (определяемой как  $v = \omega l/a$ ):

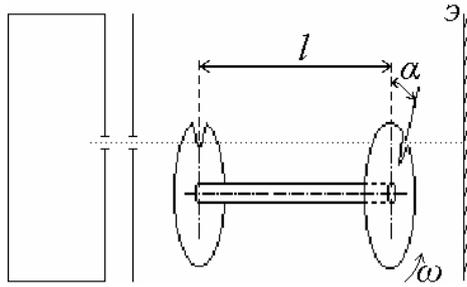
$v$  м/с = 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700.

$\Delta N \cdot 10^{-9} = 61 195 415 664 856 915 835 663 417 287 155 70$ .

Построить график распределения молекул ртути по скоростям в печи. Какова приблизительно температура паров ртути в печи? В процессе измерений  $\omega = \text{const}$ ,  $l = \text{const}$ . Обратите внимание на то, что интервал

скоростей молекул, проходящих через вертушку, не остается постоянным.

(№ 2.18 (3), 2.25 (5))



4. Из сосуда объемом  $V$  газ истекает в вакуум через малые отверстия общей площадью  $S$ . Как во времени нужно подводить тепло к газу, чтобы его температура оставалась неизменной? Как будет изменяться температура газа в адиабатически изолированном сосуде? Начальная плотность газа  $n_0$ .

(№ 2.18 (3), 3.24, 3.29 (15))

5. Два полых цилиндра с поперечными сечениями  $S$  и  $2S$  и одинаковой высоты  $h$  соединены встык и образуют замкнутый сосуд. В его объем закачан идеальный газ при температуре  $T$ . Найти относительное изменение давления в нижней части сосуда при его переворачивании, возникающее при учете неравномерности распределения газа по высоте. Оценить его для условий Земли.

(№ 2.38, 2.43 (7))

6. В центрифуге радиуса  $R$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , находится смесь двух газов с молекулярными весами  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и количеством молекул  $N_1$  и  $N_2$ . Найти отношение плотностей газов у внешней стенки и на оси центрифуги. Сделать оценки для смесей  $H_2 - D_2$  и  $U^{235} - U^{238}$ ;  $R = 10$  см,  $\omega = 10^4$  с $^{-1}$ .

(№ 2.44 (8))

7. Рассчитать распределение по скоростям точечных частиц после упругого столкновения с бесконечно тяжелой сферой. До столкновения все частицы имеют одинаковую скорость  $v$ .

(№ 3.3, 3.4 (11))

8. Молекулы реального газа взаимодействуют друг с другом по закону  $u = -a/r^6$  при  $r > d$ , где  $d$  – эффективный диаметр молекулы. Найти зависимость сечения соударений  $\sigma$  от температуры (поправка Сезерленда), считая соударением соприкосновение частиц.

(№ 3.3, 3.4 (11))

9. Оценить время испарения воды из трубки длиной 10 см, запаянной с одного конца. Температура комнатная. Первоначально вода заполняла трубку наполовину. Относительная влажность воздуха 50 %, давление насыщенных паров 27 мм рт. ст. Длина свободного пробега молекул в системе воздух–пар порядка  $10^{-5}$  см. Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

(№3.8, 3.9 (13))

10. Определить, на какой угол  $\varphi$  повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии  $h = 1$  см вращается второй такой же диск с угловой скоростью  $\omega = 50$  с $^{-1}$ . Радиус дисков  $R = 10$  см, модуль кручения нити  $f = 100$  дин·см/рад. Между дисками находится аргон (газокинетический диаметр атома  $3,6$  Å). Рассмотреть случаи различных давлений и построить график зависимости угла поворота  $\varphi$  от давления  $P$ .

(№3.21 (14), 3.35 (16))

11. Для измерения теплопроводности газа им заполняется пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами радиуса  $r_1$  и  $r_2$ . Заполнение производится при невысоком давлении ( $\sim 10$  мм рт. ст.), чтобы исключить конвекцию. Внутренний цилиндр нагревается источником тепла с удельной мощностью  $Q$ , установившиеся температуры цилиндров  $t_1$  и  $t_2$  измеряются. Рассчитать коэффициент теплопроводности и газокинетический диаметр молекулы для азота, если  $r_1 = 0,5$  см,  $r_2 = 2$  см,  $Q = 0,038$  вт/см,  $t_1 = 93$  °C,  $t_2 = 0$  °C.

(№ 3.13, 3.15 (14))

12. В сферическом реакторе радиуса  $R$ , заполненном газообразной смесью реагентов, идет химическая реакция. Тепловой эффект реакции в расчете на единичный объем равен  $Q$ . Какой поток тепла следует снимать с поверхности реактора, если ее температура поддерживается равной  $T_0$ ? Найти распределение температуры в реакторе. Учесть зависимость коэффициента теплопроводности от температуры.

(№ 3.15, 3.16 (14))

**Задание 2 (законы термодинамики; реальные газы, жидкости, фазовые переходы)**

1. Из сосуда, в котором находится газ при комнатной температуре и под давлением  $P_1$ , большим атмосферного  $P_0$ , приоткрыв кран, выпускают газ, пока избыток давления не исчезнет. Затем кран закрывают и, после того как температура в сосуде вновь станет комнатной, измеряют давление в сосуде  $P_2$ . Как по этим данным найти показатель адиабаты газа  $\gamma$ ? Тот же вопрос для случая, когда в сосуде вначале был воздух под давлением  $P_1 < P_0$ . Истечение считать квазистационарным.

(№ 1.8, 1.14 (19))

2. Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящее в окружающую среду тепло равно изменению внутренней энергии газа. Определить работу, затраченную на сжатие моля газа при изменении объема в два раза. Чему равна теплоемкость в этом процессе? Начальная температура газа  $T_0$ .

(№ 1.14 (19))

3. Один моль  $H_2O$  с температурой  $25^\circ C$  охлаждается до  $0^\circ C$  и замерзает. Все тепло, полученное охлаждающей машиной, работающей с максимальной теоретически допустимой эффективностью, передается другому молю  $H_2O$  при  $25^\circ C$ , в результате чего его температура повышается до  $100^\circ C$ . Сколько молей  $H_2O$  переходит в пар при  $100^\circ C$ ? Теплота испарения при  $100^\circ C$  равна  $9730 \text{ кал/моль}$ . Теплота плавления льда при  $0^\circ C$  равна  $1438 \text{ кал/моль}$ .

(№ 1.29, 1.30 (22))

4. Идея динамического отопления, высказанная В. Томсоном (1852 г.), заключается в следующем. Тепловой двигатель, в топке которого сжигается уголь, приводит в действие холодильную машину. Холодильная машина отнимает теплоту от природного резервуара воды (например, от грунтовой воды) и отдает ее воде в отопительной системе. Одновременно вода в отопительной системе служит холодильником теплового двигателя. Определить теоретическое количество тепла, которое получает отапливаемое помещение от сжигания  $1 \text{ кг}$  каменного

угля. Удельная теплота сгорания угля  $q = 8000 \text{ ккал/кг}$ , температура в котле паровой машины  $t_1 = 210^\circ \text{C}$ , температура воды в отопительной системе  $t_2 = 60^\circ \text{C}$ , а грунтовой воды  $t_3 = 15^\circ \text{C}$ .

(№ 1.35 (23))

5. Найти работу, совершаемую произвольным рабочим телом за цикл, состоящий из адиабаты, политропы и изотермы.

(№ 1.43 (24))

6. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен поршнем пренебрежимо малой массы на две равные части. По одну сторону поршня находится идеальный газ с массой  $M$ , молекулярным весом  $\mu$  и молярными теплоемкостями  $C_V$  и  $C_P$ , не зависящими от температуры, а по другую сторону поршня создан высокий вакуум. Начальная температура и давление газа  $T_0$  и  $P_0$ . Поршень отпускают, и он, свободно двигаясь, дает возможность газу заполнить весь объем цилиндра. После этого, постепенно увеличивая давление на поршень, медленно доводят объем газа до первоначальной величины. Найти изменение внутренней энергии и энтропии газа при таком процессе.

(№ 1.44 (24))

7. Выразить изменение температуры свободно расширяющегося одноатомного газа через начальный и конечный объемы и константы уравнения Ван-дер-Ваальса для газа. Оценить изменение энтропии и энтальпии.

(№ 1.44 (24), 1.62 (29))

8. Серебряная проволока диаметром  $d = 1 \text{ мм}$  адиабатически нагружается при комнатной температуре силой  $F = 10 \text{ Н}$ . Полагая, что удельная теплоемкость  $c = 234 \text{ Дж/(К} \cdot \text{кг)}$ , плотность  $\rho = 10 \text{ г/см}^3$ , а температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ , определить изменение температуры проволоки. Коэффициент линейного теплового расширения показывает относительное изменение длины тела при нагревании на температуру  $\Delta T$  при постоянной нагрузке. Работа по растяжению проволоки определяется выражением:  $dA = Fdl$ , где  $dl$  – бесконечно малое удлинение проволоки.

(№ 1.48 (26), предварительный разбор подхода к решению\*)

9. Определить точку кипения воды на вершине холма высотой  $300 \text{ м}$  над уровнем моря. Изменением температуры с высотой пренебречь. Удель-

ная теплота парообразования при нормальных условиях равна  $540 \text{ кал/г}$ , пар подчиняется уравнению состояния идеального газа.

(№ 2.38 (7), 1.103(29) )

10. Теплота плавления льда при  $0^\circ \text{C}$  и давлении  $1 \text{ атм}$  равна  $80 \text{ кал/г}$ , а отношение удельного объема воды к удельному объему льда равно  $1:1,091$ . Давление насыщенного пара и теплоты парообразования при  $0^\circ \text{C}$  составляет  $4,58 \text{ мм рт. ст.}$  и  $600 \text{ кал/г}$ . По приведенным данным оценить температуру тройной точки.

(№ 1.103, 1.106 (29))

11. Капля жидкости находится в равновесии с паром при давлении  $P_1$ , которое из-за поверхностного натяжения в капле больше давления  $P_2$  насыщенного пара над плоской поверхностью при той же температуре. Найти критический (равновесный) радиус капли в предположении  $|P_1 - P_2| \ll P_2$ . Известны  $T$  – температура системы,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\mu$  – молярная масса вещества,  $\rho$  – плотность жидкости. Пар считать идеальным газом и пренебречь молярным объемом жидкости по сравнению с молярным объемом пара.

(№ 1.101(28), 1.113 (30), предварительный разбор подхода к решению\*)

12. Определить, какое количество энергии освобождается при слиянии мелких водяных капель радиусом  $2 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$  в одну большую каплю радиусом  $2 \text{ мм}$ . Насколько при этом повышается температура воды?

(№ 1.121 (31))

---

\*Тема «Метод якобианов» представлена в курсе на ознакомительном уровне в программе лекций и не имеет значительной практики в практических занятиях. Изложение ее преследует пропедевтические цели. Поэтому конкретные подходы к решению данных задач должны быть предварительно показаны преподавателем.

## Учебно-методическое обеспечение дисциплины

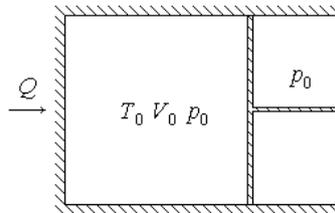
## Примеры задач и вопросов на контрольных работах и на экзамене

## 1-я контрольная работа

1. Найти плотность потока молекул идеального двумерного газа через малое отверстие.
2. По плоской поверхности из источника радиуса  $r$  разлетаются молекулы массы  $m$  и оседают на окружности радиуса  $R$ , расположенной concentrically с источником. Мощность источника  $j$ , распределение молекул по скоростям  $dj \sim \exp(-v/v_0)dv$ . Найти силу, действующую на единицу длины окружности. Столкновениями молекул между собой пренебречь.
3. На какой высоте содержание водорода в воздухе удваивается по сравнению с содержанием углекислого газа? Среднюю по высоте температуру считать равной  $20^\circ\text{C}$ .
4. Внутри цилиндрического объема радиуса  $R$  с теплоизолированными торцами выделяется теплота. Причем плотность выделения ее в единицу времени зависит от расстояния от оси цилиндра по закону  $\beta = ar$ , где  $a$  – постоянная. Найти распределение температуры в объеме. Температура внешней боковой поверхности объема поддерживается постоянной, равной  $T_0$ . Коэффициент теплопроводности  $\chi$  постоянный.
5. В тонкостенном сосуде с гелием объема  $V$  имеется малое отверстие площадью  $s$ . Как будет изменяться давление внутри сосуда, если вначале оно равно давлению окружающего воздуха?

## 2-я контрольная работа

1. Идеальный газ с постоянным показателем адиабаты  $\gamma$ , находившийся при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$  в объеме  $V_0$ , изобарически нагрели, сообщив ему количество теплоты  $Q$ . Как изменится объем газа и его энтропия?



2. Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящее в окружающую среду тепло равно изменению внутренней энергии газа. Определить работу, затраченную на сжатие моля газа при изменении объема в два раза. Чему равна теплоемкость в этом процессе? Начальная температура газа  $T_0$

3. Одноатомный идеальный газ адиабатически расширился от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Как изменится средняя скорость молекул газа?

4. Пусть сосуд с жесткими адиабатическими стенками разделен перегородкой на объемы  $V_1$  и  $V_2$ , в которых находятся различные идеальные газы при одинаковых температуре и давлении. Перегородка убирается, происходит диффузия. Показать, что этот процесс неравновесный. Рассмотреть парадокс Гиббса.

5. Теплоемкость некоторого вещества в твердом состоянии равна  $C_m$ , в жидком –  $C_{ж}$ . При переходе из твердого состояния в жидкое, происходящим при температуре  $T_0$ , поглощается скрытая теплота  $q_0$ . Полагая, что все удельные теплоемкости не зависят от температуры, вычислить скрытую теплоту перехода при температуре  $T_1 (< T_0)$

### Экзамен

#### Образцы вопросов для подготовки к экзамену

1. Давление идеального газа. Температура и кинетическая энергия. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева)
2. Распределение молекул по скоростям. Одномерное и трёхмерное распределение Максвелла.
3. Средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятная скорости молекул. Число столкновений со стенкой.
4. Распределение по скоростям молекул в потоке, средняя скорость и энергия частиц в потоке. Экспериментальная проверка распределения Максвелла.
5. Барометрическая формула и атмосфера Земли. Распределение Центрифугирование, разделение изотопов.
6. Распределение Максвелла-Больцмана.
7. Закон равнораспределения энергии по степеням.
8. Вымораживание степеней свободы. Характеристические температуры для колебательного, вращательного и поступательного движений.
9. Столкновения молекул в газе. Частота соударений, длина свободного пробега и эффективное сечение.

10. Рассеяние молекулярных пучков, распределение по длинам пробега и средняя длина свободного пробега.
11. Явления переноса. Принцип локального равновесия. Диффузия, теплопроводность и вязкость газов. Связь между коэффициентами переноса и их зависимость от температуры и плотности.
12. Течение вязкой жидкости. Формулы Пуазейля и Стокса.
13. Процессы переноса в ультраразреженном газе.
14. Подвижность. Связь между коэффициентами подвижности и диффузии. Броуновское движение, ф-ла Эйнштейна-Смолуховского.
15. Уравнение состояния. Идеальный газ и газ Ван-дер-Ваальса.
16. Теплоемкость. Соотношение Майера и обобщенное соотношение Майера.
17. Понятие внутренней энергии системы. Первое начало термодинамики.
18. Первое начало термодинамики.
19. Термодинамика идеального газа.
20. Политропический процесс для идеального газа.
21. Циклические процессы. КПД тепловой машины. Цикл Карно. Принцип Карно.
22. Теорема о приведенных теплотах. Энтропия.
23. Второе начало термодинамики для обратимых процессов. Эквивалентность его различных формулировок.
24. Второе начало термодинамики для неравновесных процессов и определение для энтропии в этом случае.
25. Третье начало термодинамики (принцип Нернста) и его следствия. Невозможность достижения абсолютного нуля.
26. Охлаждение в процессе Гей-Люссака идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса.
27. Термодинамика поверхностного натяжения.
28. Рост энтропии в процессах смешения. Парадокс Гиббса.
29. Химический потенциал. Условие равновесия фаз. Фазовые переходы первого рода.
30. Кривая сосуществования. Уравнение Клайперона-Клаузиуса.

### Примеры экзаменационных задач

1. Рассчитать силу, с которой вытекающий из малого отверстия в вакуум молекулярный пучок давит на пластинку радиуса  $r$ , расположенную на расстоянии  $l$  от отверстия и центрированную с ним. Площадь отверстия  $S$ .
2. Во вращающейся центрифуге находится смесь изотопов водорода  $D_2$  и  $H_2$  в пропорции  $N_{D_2}/N_{H_2} = \beta$ . Во сколько раз можно увеличить соот-

ношение компонент в смеси, если ее отбор производить с боковой поверхности центрифуги?

3. На поверхности площадью  $S$  находится двумерный идеальный газ из  $N$  молекул. Найти частоту столкновений молекулы такого газа ( $d$  – диаметр молекулы).

4. Найти профиль скорости  $v$  и расход жидкости  $j$  (вытекающий за единицу времени объем) при ламинарном течении жидкости в трубе. Радиус трубы  $r_0$ , длина  $l$ , на концах трубы поддерживается разность давлений  $\Delta p$ .

5. Два тела с постоянными (конечными) теплоемкостями  $C_1$  и  $C_2$  нагреты до разных температур  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Найти максимальную работу, которую можно получить, используя эти тела в качестве нагревателя и холодильника в тепловой машине.

6. В цилиндрическом сосуде находится поршень, который может перемещаться без трения. Первоначально поршень делит сосуд на части объемом  $V_0$  каждая. Обе половины сосуда заполнены идеальным газом до давления  $p_0$ . Найти работу, которую нужно совершить, чтобы, медленно двигая поршень, сжать газ в одной из частей сосуда вдвое. Сосуд теплоизолирован. Рассмотреть случаи: а) поршень не проводит тепло; б) поршень проводит тепло.

## Решения

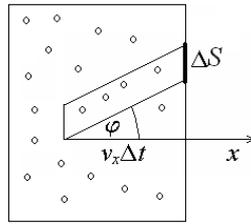
### 1-я контрольная работа

1. Пусть в некоторой области на плоскости находится идеальный двумерный газ при температуре  $T$ . На рисунке двумерная область изображена схематически прямоугольником, а молекулы – окружностями малого радиуса. Эти молекулы движутся хаотически в соответствии с распределением Максвелла. Через участок длиной  $\Delta S$  границы области за малый промежуток времени  $\Delta t$  пролетят все молекулы со скоростью  $\vec{v}$ , которые в момент времени  $t = 0$  находились в параллелограмме с основанием  $\Delta S$  и стороной, равной  $v\Delta t$  и сонаправленной со скоростью молекул  $\vec{v}$ .

Количество подобных молекул  $dN$  равно произведению объема косоугольного цилиндра  $V$  на концентрацию подобных молекул в этом цилиндре  $dn(\vec{v})$ , или

$$dN = Vdn(\vec{v}) = v\cos\varphi\Delta t\Delta Sndw(\vec{v}).$$

В приведенной формуле  $dw(\vec{v})$  – максвелловская вероятность иметь скорость  $\vec{v}$ , а  $n$  – полная концентрация молекул в сосуде.



Плотность потока вылетающих через малое отверстие  $\Delta S$  молекул с данной скоростью  $\vec{v}$  равна

$$dj = \frac{dN}{\Delta S \Delta t} = v \cos \varphi n dw(\vec{v}).$$

Плотность потока всех вылетающих молекул:

$$j = \int v \cos \varphi n dw(\vec{v}) = n \frac{m}{2\pi kT} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -2 \frac{n}{\pi} \alpha \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \exp(-\alpha v^2) dv = -2 \frac{n}{\pi} \alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{n\bar{v}}{\pi}.$$

2. Прежде всего заданное распределение следует нормировать. Для этого оно записывается следующим образом:

$$dj = A \exp(-v/v_0) dv.$$

Постоянная  $A$ , входящая в данное выражение, находится по известной мощности источника  $j$ :

$$j = A \int_0^\infty \exp(-v/v_0) dv = A v_0, \quad A = j/v_0.$$

Сила, действующая на единицу длины окружности со стороны осаждающихся молекул, летящих со скоростью  $v$  – это импульс, получаемый от этих молекул единицей длины окружности в единицу времени. Каждая молекула со скоростью  $v$  передает импульс  $mv$ , всего таких молекул в единицу времени на единицу длины падает  $dj/2\pi R$ , так что полный передаваемый импульс или давление равно произведению этих величин:

$$dp = mv \frac{dj}{2\pi R}.$$

Чтобы определить силу, создаваемую всеми молекулами, необходимо проинтегрировать по скоростям (интеграл вычисляется с помощью дифференцирования по параметру  $\alpha = 1/v_0$ ):

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\pi R} \int mv dj = \frac{mj}{2\pi R v_0} \int_0^{\infty} \exp(-v/v_0) v dv = \\ &= -\frac{mj}{2\pi R v_0} \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha v) dv = -\frac{mj}{2\pi R v_0} \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} = \frac{mv_0 j}{2\pi R}. \end{aligned}$$

3. В соответствии с распределением Больцмана концентрация молекул водорода и углекислого газа меняется с высотой по формуле

$$n_i = n_{i0} \exp(-\mu_i gh/RT),$$

где  $i = 1, 2$  (соответственно для  $H_2$  с  $\mu_1 = 2$  и  $CO_2$  с  $\mu_2 = 44$ ).

Изменение относительного содержания  $H_2$  и  $CO_2$  с высотой будет определяться равенством

$$n_1/n_2 = n_{10}/n_{20} \exp((\mu_2 - \mu_1)gh/RT),$$

откуда  $h = RT \ln 2 / (\mu_2 - \mu_1)g \approx 4$  км.

4. Благодаря цилиндрической симметрии задачи плотность потока тепла  $q$  не зависит от угла, она – функция только радиуса  $r$ . Поэтому полный поток тепла через боковую поверхность произвольного цилиндра радиуса  $r$  ( $r < R$ ) равен произведению площади этой поверхности на плотность потока тепла  $2\pi r l q$ . Из закона сохранения энергии в стационарном случае

полный поток тепла через боковую поверхность равен полному теплу, которое выделяется в единицу времени внутри выбранного цилиндра. В противном случае температура внутри цилиндра будет изменяться. Итак,

$$2\pi rlq = \int \beta dV = 2\alpha\pi l \int_0^r r^2 dr = \frac{2\alpha\pi lr^3}{3},$$

откуда

$$q = \frac{\alpha r^2}{3}.$$

По закону Фурье

$$q = -\chi \frac{dT}{dr}.$$

В результате для нахождения температуры получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\alpha r^2}{3\chi}.$$

Интегрирование его при условии  $r = R, T = T_0$  приводит к искомому распределению температуры в объеме

$$T = T_0 + \frac{\alpha}{9\chi}(R^3 - r^3).$$

5. Размеры отверстия малы по сравнению с длиной свободного пробега:

$$\sqrt{S} \ll \bar{\lambda}.$$

Молекулы пролетают через отверстие, не испытывая столкновений друг с другом. Потоки молекул различных газов не связаны друг с другом. Изменение числа частиц одного газа в сосуде равно разности влетающих и вы-

летающих частиц этого газа. Снаружи гелий отсутствует. Поэтому балансовое уравнение для гелия имеет вид:

$$V \frac{dn_{\text{He}}}{dt} = -\frac{1}{4} n_{\text{He}} \bar{v}_{\text{He}} S,$$

где  $n_{\text{He}}, \bar{v}_{\text{He}}$  – концентрация и средняя скорость атомов гелия в сосуде. Сосуд тонкостенный, поэтому температуру гелия можно считать постоянной и равной температуре наружного воздуха. Уравнение решается методом разделения переменных:

$$\frac{dn_{\text{He}}}{n_{\text{He}}} = -\frac{\bar{v}_{\text{He}} S}{4V} dt.$$

Начальное условие:  $n_{\text{He}} = n_0$  при  $t = 0$ . Решение имеет вид:

$$n_{\text{He}} = n_0 \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{He}} S}{4V} t\right).$$

Уравнение состояния  $p = nkT$ . Парциальное давление гелия в сосуде

$$p_{\text{He}} = p_0 \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{He}} S}{4V} t\right).$$

Для воздуха в балансовом уравнении необходимо учитывать как влетающие, так и вылетающие молекулы:

$$V \frac{dn_{\text{e}}}{dt} = \frac{1}{4} \bar{v}_{\text{e}} S (n_0 - n_{\text{e}}).$$

Оно также решается методом разделения переменных при условии, что начальная концентрация молекул воздуха в сосуде равна нулю:

$$n_{\text{e}} = n_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{e}} S}{4V} t\right)\right), \quad p_{\text{e}} = p_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{v}_{\text{e}} S}{4V} t\right)\right).$$

Суммарное давление в сосуде определяется законом Дальтона:

$$p = p_{\text{He}} + p_e.$$

Окончательно

$$p = p_0 (1 + \exp(-t/\tau_{\text{He}}) - \exp(-t/\tau_{\text{возд}})), \quad \tau = 4V/(S\bar{v}).$$

## 2-я контрольная работа

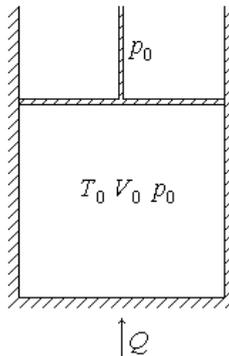
1. Рассматриваемый процесс равновесный, а для равновесных процессов согласно второму началу термодинамики изменение энтропии определяется равенством:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

При изобарическом нагревании газа бесконечно малое количество подводимой теплоты связано с соответствующим изменением температуры соотношением

$$\delta Q = \nu c_p dT,$$

где  $\nu$  – число молей газа,  $c_p$  – его молярная теплоемкость при постоянном давлении.



Подставляя это выражение для элементарного количества теплоты в равенство для  $dS$  и интегрируя его от начальной температуры  $T_0$  до конечной температуры  $T$ , получим

$$\Delta S = \nu c_p \ln \frac{T}{T_0}.$$

Изменение энтропии определяется отношением конечной и начальной температур. Это отношение найдем по известному количеству подведенной теплоты

$$Q = \nu c_p (T - T_0) = \nu c_p T_0 \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right),$$

откуда следует

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{Q}{\nu c_p T_0}.$$

Неизвестное число молей газа найдем из термического уравнения состояния. Для идеального газа оно имеет вид

$$pV = \nu RT,$$

или в начале процесса

$$p_0 V_0 = \nu R T_0,$$

С учетом соотношения Майера

$$c_p - c_v = R$$

и выражения для показателя адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

находим последовательно число молей газа и отношение температур:

$$\nu = \frac{1}{(\gamma-1)c_V} \frac{p_0 V_0}{T_0}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0}.$$

Таким образом, изменение энтропии равно

$$\Delta S = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0} \right).$$

Из термического уравнения состояния для идеального газа следует, что в изобарическом процессе отношение объемов газа в два момента времени равно соответствующему отношению температур:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0}.$$

Таким образом, объем при изобарическом нагреве газа становится равным

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Q}{p_0 V_0} \right).$$

**2.** В первое начало термодинамики входит величина  $Q$ . Под ней понимают количество теплоты, полученное системой. По условию задачи *уходящее* тепло равно изменению внутренней энергии газа, поэтому в соотношении между  $Q$  и  $\Delta U$  возникает знак «минус»:

$$Q = -\Delta U.$$

Так как газ идеальный, то его внутренняя энергия – функция только температуры. Пусть теплоемкость  $C_V$  постоянна. Тогда

$$Q = -C_V(T - T_0).$$

Здесь либо  $C_V$  теплоемкость всего газа, либо количество газа равно одному молю, и тогда  $C_V$  – молярная теплоемкость. Таким образом, теплоемкость газа в рассматриваемом процессе равна

$$C = -(\partial Q / \partial T) = -C_V.$$

Работа, совершаемая над газом, и подведенная к нему теплота идут на изменение его внутренней энергии (первое начало термодинамики). Для условий задачи

$$A' = \Delta U - Q = 2\Delta U = 2C_V(T - T_0).$$

Для нахождения конечной температуры необходимо получить уравнение процесса. С этой целью рассматривается первое начало термодинамики в дифференциальной форме. Для данной задачи оно имеет вид

$$-dU = dU + pdV.$$

Слева – количество теплоты, полученное газом. Для идеального газа уравнение можно преобразовать:

$$2dU + pdV = 0 \Rightarrow 2C_V dT + RTdV/V = 0.$$

Оно решается разделением переменных, так что

$$T/T_0 = (V_0/V)^{(\gamma-1)/2},$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты. По условию газ сжимается с уменьшением объема в два раза. Окончательно

$$A' = 2c_V T_0 (2^{(\gamma-1)/2} - 1).$$

**3.** Абсолютная средняя скорость молекулярного движения  $\langle v \rangle$  для идеального газа вычисляется по формуле

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

При адиабатическом расширении газа его температура уменьшается, и соответственно уменьшается средняя скорость теплового движения молекул. Уравнение адиабаты идеального газа в переменных  $p$ ,  $V$  имеет вид

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

Пользуясь термическим уравнением состояния идеального газа

$$pV = \nu RT,$$

запишем уравнение адиабаты в переменных  $T$ ,  $V$ :

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.},$$

откуда найдем конечную температуру газа при его адиабатическом расширении:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V}{2V} \right)^{\gamma-1} = T_1 \cdot 2^{-(\gamma-1)},$$

и, следовательно, отношение средних скоростей молекулярного движения:

$$\frac{\langle v_2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2^{-(\gamma-1)/2}.$$

Показатель адиабаты одноатомного идеального газа равен  $\gamma = 5/3$ . Для этого случая отношение абсолютных средних скоростей теплового движения молекул при адиабатическом двукратном увеличении объема газа равен

$$\frac{\langle v_2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} = 2^{-1/3}.$$

4. В этой задаче нет подвода теплоты, отсутствует работа внешних сил. Внутренняя энергия системы двух газов сохраняется. Отсюда следует

$$0 = \Delta U = \nu_1 C_{V1} (T - T_0) + \nu_2 C_{V2} (T - T_0) \rightarrow T = T_0,$$

т. е. конечная температура смеси равна начальной температуре.

Для каждого газа реальный процесс можно заменить изотермическим (как в процессе Гей-Люссака), так что

$$\Delta S_i = \nu_i R \ln ((V_1 + V_2)/V_i), \quad i = 1, 2.$$

Энтропия – аддитивная величина. Ее изменение для системы равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \nu_1 R \ln (1 + V_2/V_1) + \nu_2 R \ln (1 + V_1/V_2) > 0.$$

Пусть (для большей наглядности результата)  $V_1 = V_2$ . Тогда  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$  и

$$\Delta S = 2\nu R \ln 2 > 0.$$

Энтропия возросла, хотя подвода теплоты нет. Следовательно, диффузия – неравновесный процесс.

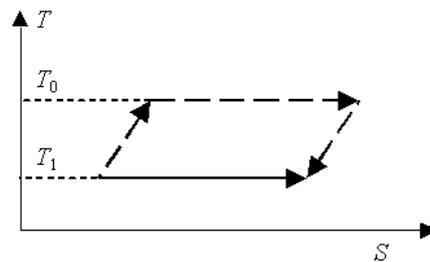
Если применить теперь полученную формулу для тождественных газов, то получается парадоксальный вывод. Конечное состояние системы макроскопически ничем не отличается от начального состояния. Перегородка не играет никакой роли. Ее можно мысленно ставить и мысленно же убирать. Поскольку энтропия – функция состояния, ее значение для тождественных газов не должно зависеть от наличия или отсутствия перегородки. А в соответствии с полученным выше результатом энтропия возрастает. Этот парадоксальный вывод получил название парадокса Гиббса. Разрешается он следующим образом.

Для тождественных газов полученная формула для  $\Delta S$  неприменима, для них  $\Delta S = 0$ . А формулой можно пользоваться, если молекулы или атомы газов хоть как-то различаются и смесь таких газов можно разделить на компоненты с помощью, например, центрифуги. Молекулы (атомы) одного и того же газа неразличимы, и установить, какая из частиц первоначально была в объеме  $V_1$ , а какая в объеме  $V_2$ , невозможно. От перехода неразличимых частиц из одного объема в другой макроскопическое состояние системы не меняется.

5. Изменение энтропии не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое. На этом основании изменение энтропии в результате плавления вещества при температуре  $T_1$  можно приравнять изменению энтропии в следующем переходе. Вначале твердое вещество нагревается от температуры  $T_1$  до  $T_0$ , затем происходит его плавление при температуре  $T_0$  (а при этой температуре теплота плавления вещества известна), и, наконец, уже в жидком состоянии вещество охлаждается от  $T_0$  до  $T_1$ . На  $T, S$ -диаграмме изображены: сплошной линией – путь перехода при температуре  $T_1 < T_0$ , пунктиром – предложенный путь перехода, изменение энтропии на котором мы будем определять.

Подсчитать изменение энтропии при таком переходе несложно:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_1}^{T_0} mC_m dT/T + mq_0/T_0 + \int_{T_0}^{T_1} mC_{жс} dT/T = \\ &= m(C_m - C_{жс}) \ln(T_0/T_1) + mq_0/T_0. \end{aligned}$$



С другой стороны, то же изменение энтропии в результате плавления вещества при температуре  $T_1$  равно

$$\Delta S = mq_1/T_1.$$

Приравнивание этих двух выражений для  $\Delta S$  дает

$$q_1 = (C_m - C_{жс})T_1 \ln(T_0/T_1) + q_0 T_1/T_0.$$

### Решения примерных задач к экзамену

**1.** Импульс, передаваемый пластинке одной молекулой при упругом отражении, равен  $2mv_x$ , где ось  $x$  направлена перпендикулярно плоскости пластинки. Если  $dj(v_x, v_\perp)$  – число молекул, падающих на единицу площади пластинки в единицу времени и имеющих данные компоненты скорости  $v_x$  и  $v_\perp$  ( $v_\perp$  – составляющая скорости, перпендикулярная оси  $x$ ), то сила, действующая на пластинку, равна

$$F = S \int 2mv_x dj.$$

Для  $dj$  имеет место выражение

$$dj = v_x n d\vec{w}(\vec{v}),$$

где  $n$  – концентрация частиц в сосуде,  $d\vec{w}(\vec{v}) = (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2) d\vec{v}$  – распределение Максвелла ( $\alpha = m/2kT$ ). В цилиндрических координатах

$$v^2 = v_x^2 + v_\perp^2, \quad d\vec{v} = 2\pi v_\perp dv_\perp dv_x,$$

поэтому

$$F = 2mSn(\alpha/\pi)^{3/2} \pi \int_0^\infty v_x^2 \exp(-\alpha v_x^2) dv_x \int_0^{v_x r/l} \exp(-\alpha v_\perp^2) 2v_\perp dv_\perp.$$

Очевидно, не все молекулы с данной  $v_x$  попадают на пластинку, а только те, у которых  $v_\perp \leq v_x r/l$ . Интегрирование дает окончательный результат:

$$F = nkTS(1 - (1 + (r/l)^2)^{-3/2}).$$

2. В лабораторной системе отсчета газ в центрифуге вращается как единое целое, стало быть, имеется центростремительное ускорение, т. е. система не находится в механическом равновесии и к ней нельзя применить распределение Больцмана. В системе же отсчета, связанной с центрифугой, объект исследования находится в равновесии, и к нему можно применить указанное распределение. Но в этой системе отсчета на частицы действует центробежная сила. Соответствующая потенциальная энергия частицы равна

$$u = -\int_0^r m\omega^2 r dr = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

Распределение Больцмана с учетом цилиндрической симметрии имеет вид

$$dw(r) = 1/Z \exp(m\omega^2 r^2 / 2kT) 2\pi r l dr,$$

где  $l$  – высота барабана центрифуги. Выражение для статистической суммы получается из условия нормировки распределения:

$$Z = \int_0^R \exp(m\omega^2 r^2 / 2kT) 2\pi r l dr = \pi l \frac{2kT}{m\omega^2} (\exp(m\omega^2 R^2 / 2kT) - 1).$$

В результате для концентрации частиц получается формула

$$n(r) = N dw(r) / (2\pi r l dr) = \frac{Nm\omega^2}{2\pi l kT} \frac{\exp(m\omega^2 r^2 / (2kT))}{\exp(m\omega^2 R^2 / 2kT) - 1}.$$

Из формулы следует, что концентрация тяжелых частиц у боковой стенки центрифуги относительно выше, что используется для разделения смесей. Концентрация частиц у боковой стенки центрифуги равна

$$n(R) = \frac{Nm\omega^2}{2\pi l kT} \frac{1}{1 - \exp(-m\omega^2 R^2 / 2kT)}.$$

Соответствующее отношение концентраций молекул  $D_2$  и  $H_2$  будет

$$\frac{n_{D_2}}{n_{H_2}} = \frac{N_{D_2} m_{D_2}}{N_{H_2} m_{H_2}} \frac{1 - \exp(-m_{H_2} \omega^2 R^2 / 2kT)}{1 - \exp(-m_{D_2} \omega^2 R^2 / 2kT)}.$$

С учетом того, что масса молекулы дейтерия в два раза тяжелее и начальная пропорция изотопов водорода  $D_2$  и  $H_2$  равна  $\beta$ , при отборе смеси у боковой стенки центрифуги можно увеличить долю дейтерия:

$$N_{D_2} / N_{H_2} = n_{D_2} / n_{H_2} = \frac{2\beta}{1 + \exp(-m_{H_2} \omega^2 R^2 / 2kT)}.$$

Максимальное соотношение компонент в смеси равно

$$(N_{D_2} / N_{H_2})_{\max} = 2\beta.$$

**3.** Если газ не очень плотный, то при расчете частоты столкновений следует учитывать только парные столкновения (столкновениями одновременно более чем двух молекул можно пренебречь). При этом молекулы в некотором приближении можно считать упругими шариками. Если  $\vec{v}_i$  и  $\vec{v}_j$  – скорости двух молекул, то для столкновения важны не сами по себе эти скорости, а скорость относительного движения молекул:

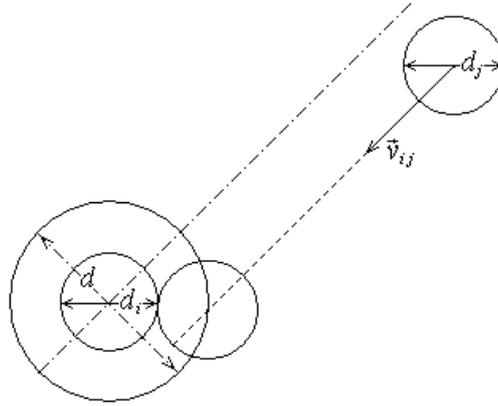
$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j.$$

Задача решается в системе отсчета, связанной с рассматриваемой молекулой. Все остальные молекулы движутся с относительными скоростями и, как известно, распределены по скоростям с вероятностью, определяемой распределением Максвелла, в которое входит приведенная масса молекул  $\mu$ .

Вместо рассматриваемой молекулы можно ввести гипотетическую частицу диаметром  $d = d_i + d_j$  (где  $d_i$  и  $d_j$  – диаметры сталкивающихся молекул), заменив все остальные молекулы материальными точками. Таким образом, задача определения частоты столкновений сводится к нахождению числа ударов о круг диаметром  $d$  частиц максвелловского газа. Эта частота равна произведению плотности потока двумерного газа (см. задачу 2.9) на длину окружности. Для частоты столкновений молекулы  $i$ -го сорта с молекулами  $j$ -го сорта получаем

$$v_{ij} = \pi(d_i + d_j) \frac{n_j \bar{v}_{ij}}{\pi} = n_j \bar{v}_{ij} (d_i + d_j).$$

Здесь  $\bar{v}_{ij}$  – средняя относительная скорость. Она вычисляется по той же формуле, что и просто средняя скорость теплового движения молекул двумерного газа, только с заменой массы молекулы на приведенную массу, поскольку характер распределения молекул по скоростям один и тот же (распределение Максвелла).



Для полной частоты столкновений молекулы  $i$ -го сорта (с молекулами всех сортов) получаем

$$v_i = \sum_j n_j \bar{v}_{ij} (d_i + d_j) = \bar{v}_i d_i \sum_j n_j \sqrt{1 + \mu_i / \mu_j} (1 + d_j / d_i).$$

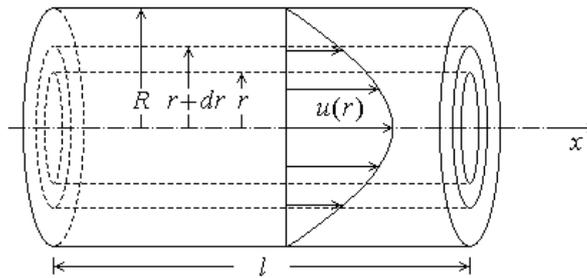
В случае наличия только одного сорта частиц частота столкновения молекулы равна

$$v = n \sqrt{2} \bar{v} 2d = \sqrt{2} \frac{N}{S} \bar{v} 2d,$$

где  $\bar{v} = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$  – средняя скорость теплового движения молекул двумерного газа.

В действительности молекулы взаимодействуют не только при непосредственном соприкосновении, но и при пролете на некотором расстоянии друг от друга. Такой характер взаимодействия обычно учитывается посредством введения эффективного сечения столкновения.

4. Рассматривается стационарное течение. Цилиндрический канал длинный, что позволяет не учитывать влияние его концов. Жидкость несжимаемая. В результате можно считать, что имеется лишь одна компонента скорости жидкости (обозначим ее через  $u$ ), направленная вдоль оси  $x$ . Эта компонента скорости зависит только от расстояния до оси симметрии (радиуса  $r$ ). Градиент давления постоянный, имеет отрицательное значение. Течение ламинарное. Схема течения показана на рисунке.



В области течения выделяется цилиндрический слой жидкости между радиусами  $r$  и  $r + dr$ . Жидкость не испытывает ускорения, поэтому равнодействующая всех сил, действующих на жидкость в выделенном объеме, равна нулю. Рассмотрим проекцию всех сил на ось  $x$ . По цилиндрической поверхности радиуса  $r$  действует сила трения  $\tau 2\pi r l|_r$ , где  $\tau$  – напряжение трения, нижний индекс указывает, на каком расстоянии действует сила трения. По цилиндрической поверхности радиуса  $r + dr$  сила трения действует в противоположном направлении  $-\tau 2\pi r l|_{r+dr}$ . На торцевые поверхности действуют силы давления. С учетом заданного перепада давления проекция этих сил на ось  $x$  равна  $\Delta p 2\pi r dr$ . Балансовое уравнение имеет вид

$$\tau 2\pi r l|_r - \tau 2\pi r l|_{r+dr} + \Delta p 2\pi r dr = 0.$$

Сократив на  $2\pi$  и разделив на  $ldr$ , получим дифференциальное уравнение:

$$-\frac{d(\tau r)}{dr} + \frac{\Delta p}{l} r = 0.$$

Напряжение трения для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\tau = -\eta \frac{du}{dr},$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости. После подстановки  $\tau$  получаем дифференциальное уравнение для скорости жидкости  $u$ :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l} r.$$

Для его решения имеются два граничных условия:

$$|du/dr| < \infty \text{ при } r = 0 \text{ (на оси симметрии);}$$

$$u = 0 \text{ при } r = R \text{ (условие прилипания на стенке).}$$

На оси симметрии обычно пишут условие симметрии  $du/dr = 0$  при  $r = 0$ . Однако, в случае осесимметричной задачи достаточно использовать ограниченность производной. Однократное интегрирование с использованием первого условия дает

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r.$$

Последующее интегрирование с использованием второго условия дает параболический профиль скорости

$$u = (\Delta p / 4\eta l) (R^2 - r^2)$$

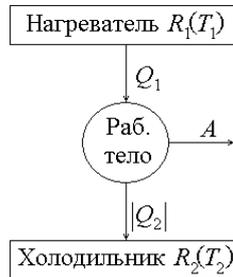
Он изображен на рисунке к задаче.

Расход жидкости определяется выражением

$$Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4.$$

Это формула Пуазейля, а рассмотренное течение называется течением Пуазейля.

5. Максимальная работа будет получена, если использовать тепловую машину, работающую по обратимому циклу Карно. Схема такой машины приведена на рисунке.



Однако теплоемкости тел (нагревателя и холодильника) в данной задаче конечные и их температуры при тепловом контакте с рабочим телом тепловой машины в общем случае изменяются. Поэтому для получения максимальной работы применяется непрерывная последовательность бесконечно малых циклов Карно, в пределах каждого из которых текущие температуры тел  $T_1$  и  $T_2$  (соответственно температуры нагревателя и холодильника) можно считать постоянными. При контакте с нагревателем (тело 1) рабочее тело получает количество тепла, равное  $\delta Q_1$ . Это тепло  $\delta Q_1$ , согласно рисунку, является «отданным теплом» для нагревателя (тела 1). Другими словами, нагреватель получает тепло, равное

$$-\delta Q_1 = C_1 dT_1.$$

От холодильника (тело 2), согласно введенным обозначениям, рабочее тело получает тепло, равное  $-\delta Q_2$ . В то же время холодильник (тело 2) получает тепло, равное

$$\delta Q_2 = C_2 dT_2.$$

Таким образом, тепловая машина будет совершать работу за счет внутренней энергии тел 1 и 2. Совершаемая за цикл работа равна сумме теплот, полученных рабочим телом в течение цикла:

$$\delta A = \delta Q_1 - \delta Q_2 = -C_1 dT_1 - C_2 dT_2.$$

Работа машины продолжается до тех пор, пока температуры тел не станут равными:  $T_1 = T_2 = T$ . Полная работа равна

$$A = C_1 T_{10} + C_2 T_{20} - (C_1 + C_2) T.$$

Для нахождения конечной температуры тел можно воспользоваться равенством Клаузиуса для обратимого цикла:

$$\sum \left[ \frac{\text{тепло, полученное рабочим телом от } i\text{-го источника}}{\text{температура } i\text{-го источника}} \right] = 0$$

$$\delta Q_1/T_1 - \delta Q_2/T_2 = 0 \Rightarrow C_1 dT_1/T_1 + C_2 dT_2/T_2 = 0.$$

Заметим, что знаки перед  $\delta Q_1$  и  $\delta Q_2$  стоят те же самые, что и в выражении для работы, совершаемой в цикле. Действительно, в обоих случаях фигурирует тепло, полученное рабочим телом. Интегрирование последнего равенства дает конечную температуру:

$$T = T_{10}^{C_1/(C_1+C_2)} \cdot T_{20}^{C_2/(C_1+C_2)}.$$

Максимальная работа, которую можно получить, равна

$$A = C_1 T_{10} + C_2 T_{20} - (C_1 + C_2) T_{10}^{C_1/(C_1+C_2)} \cdot T_{20}^{C_2/(C_1+C_2)}.$$

Следует обратить внимание на то, что максимальная работа будет совершена в равновесном процессе. В этом случае суммарная энтропия нагревателя и холодильника неизменна, т. е. выполняется условие

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0.$$

Это условие эквивалентно написанному выше равенству Клаузиуса.

6. Так как система теплоизолирована, то согласно первому началу работа внешних сил приводит к изменению внутренней энергии системы:

$$A' = \Delta U_1 + \Delta U_2.$$

Предполагается, что поршень перемещается без трения.

Для идеального газа бесконечно малое изменение внутренней энергии равно  $dU = \nu C_V dT$ . Если теплоемкость  $C_V$  считать постоянной, то конечное изменение  $U$  равно

$$\Delta U = \nu C_V (T - T_0) = \nu C_V T_0 (T/T_0 - 1) = P_0 V_0 (T/T_0 - 1) / (\gamma - 1),$$

где  $T_0$  – начальная температура газа.

а) Так как поршень перемещается медленно и не проводит тепло, то изменение объема газов в каждой из частей сосуда – адиабатические процессы. Уравнение адиабаты для идеального газа было получено в задаче 1.1:  $pV^\gamma = \text{const}$ . В переменных  $T, V$  оно имеет вид:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Пользуясь им, получаем конечные температуры газов:

$$T_1 = T_0(V_0/V_1)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}, T_2 = T_0(V_0/V_2)^{\gamma-1} = (2/3)^{\gamma-1}.$$

Работа внешних сил в этом случае равна

$$A' = \Delta U_1 + \Delta U_2 = p_0 V_0 / (\gamma - 1) \cdot (2^{\gamma-1} + (2/3)^{\gamma-1} - 2).$$

б) В случае теплопроводящего поршня температуру газа в обеих частях сосуда можно считать одинаковой в любой момент времени. Одинаково также число молей газа. Это следует из начальных данных. В результате

$$A' = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 2\nu C_V (T - T_0) = 2P_0 V_0 (T/T_0 - 1) / (\gamma - 1).$$

Конечная температура системы может быть найдена из уравнения процесса. Для получения уравнения процесса первое начало термодинамики записывается в дифференциальной форме для всей системы:

$$2dU + p_1dV_1 + p_2dV_2 = 0.$$

Если подставить сюда выражение для  $dU$  через температуру и теплоемкость ( $dU = \nu C_V dT$ ), выразить давление с помощью термического уравнения состояния идеального газа ( $p = \nu RT/V$ ) и затем поделить все слагаемые на  $2\nu C_V T$ , то дифференциальное уравнение примет вид

$$dT/T + (\gamma - 1)/2 \cdot (dV_1/V_1 + dV_2/V_2) = 0.$$

При преобразовании используются соотношение Майера  $C_p - C_V = R$  и показатель адиабаты  $\gamma = C_p/C_V$ . Интегрирование дает уравнение процесса:

$$\ln(T/T_0) + (\gamma - 1)/2 \cdot \ln(V_1 V_2/V_0^2) = 0.$$

Найдем значения экспоненты с показателями, равными правой и левой частям уравнения. Получим равенство:

$$T/T_0 = (V_0^2/V_1 V_2)^{(\gamma-1)/2}$$

Конечная температура системы равна

$$T = T_0 (4/3)^{(\gamma-1)/2}.$$

Работа внешних сил

$$A' = 2P_0 V_0 (T/T_0 - 1)/(\gamma - 1) = 2p_0 V_0 / (\gamma - 1) ((4/3)^{(\gamma-1)/2} - 1).$$

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### Рекомендуемая литература к теоретическому курсу

1. Бурштейн А. И. Молекулярная физика. Новосибирск: Наука, 1986.
2. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: М.: Наука, 1972.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. М.: Наука, 1979.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1977. Т. 1, вып. 3 – 4.
5. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М.: Иностран.лит., 1955.
6. Кубо Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1967.
7. Докторов А. Б., Бурштейн А. И. Термодинамика и молекулярная физика. Курс лекций. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2010.
8. Базаров И. П. Термодинамика. Высшая школа, М. 1976.
9. Толкачев В. А. Термодинамика и статистическая физика. Новосибирск: НГУ, 1996.
10. Замураев В. П., Калинина А. П. Термодинамика и молекулярная физика. Новосибирск. Изд. НГУ. 2007.
11. Замураев В. П., Калинина А. П. Термодинамика и молекулярная физика // Новосибирск. Изд. НГУ. 2007.
12. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: Изд. НГУ, 2003.
13. Замураев В. П., Калинина А. П. Задачи с решениями по термодинамике и молекулярной физике. Новосибирск: Изд. НГУ, 2008.

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Требуется большая аудитория, большая доска и хороший мел.
- Персональные компьютеры, мультимедийный проектор, ноутбуки, экраны.

Программа составлена в соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки дипломированного специалиста «бакалавр» по **профессиональному циклу дисциплин (Б.3)** по направлению «**011200 Физика**», квалификация (степень) «бакалавр», а также в соответствии с Образовательным стандартом высшего профессионального образования принятым в Федеральном государственном образовательном бюджетном учреждении высшего профессионального образования Новосибирский государственный университет.

Авторы: Дзюба Петр Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры общей физики и химической и биологической физики НГУ, директор ИХКГ СО РАН;

Замураев Владимир Павлович, доцент кафедры общей физики НГУ, снс ИТПМ СО РАН;

Калинина Анна Павловна, доцент кафедры общей физики НГУ, снс ИТПМ СО РАН.

Рецензент (ы) д-р физ.-мат. наук, проф. С. С. Кацнельсон

\_\_\_\_\_

Программа одобрена на заседании

\_\_\_\_\_

(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет)

от \_\_\_\_\_ года.