МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет и СУНЦ НГУ
Кафедра физики
Кафедра общей физики

Б. Г. Вайнер

ОТ МЕХАНИКИ ДО ОПТИКИ

ЗАДАЧИ С ОБУЧАЮЩИМИ РЕШЕНИЯМИ

учебное пособие

Новосибирск
2012

УДК 531.07
ББК 22.2я7
В 12

Вайнер Б. Г. От механики до оптики. Задачи с обучающими решениями: учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 201 с.

Учебное пособие служит вспомогательным материалом при изучении курсов “Механика и теория относительности”, "Молекулярная физика", "Электродинамика", "Оптика" на физическом факультете, факультете информационных технологий и других факультетах Новосибирского государственного университета. Оно может быть полезным также для студентов других высших и средних учебных заведений, учеников старших классов общеобразовательных и специализированных физико-математических школ, учителей и преподавателей физики.

Главная цель пособия – привитие начальных навыков самостоятельного решения задач и быстрое поднятие уровня студентов младших курсов, у которых в общеобразовательной школе предмету “физика” не уделялось должного внимания. Пособие дополняет материал учебников в направлении практического овладения предметом. Его основным элементом служат подробные обучающие решения, приведенные к каждой задаче, разъясняющие физический смысл рассматриваемых ситуаций, дающие теоретическую базу и детально описывающие методы решения.

Формулировки задач являются оригинальными и охватывают практически все ключевые разделы классической физики, подготавливая студентов и будущих абитуриентов к дальнейшему, более подробному и глубокому, изучению курса физики в вузе.

Автор: докт. физ.-мат. наук Б. Г. Вайнер

Рецензент: докт. физ.-мат. наук, проф. В. Г. Сербо

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ НГУ на 2009–2018 годы.

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ………………………………………………….... 4

ЗАДАЧИ ……………………………………………………....... 7
Механика и колебания…………………………….………….. 9
Гидростатика и закон Архимеда ....…........... 15
Молекулярная физика и теплота …............................ 19
Электричество …....................……………………………... 25
Магнетизм …....……………….....................………… 30
Оптика и распространение света ……………………… 35

РЕШЕНИЯ ……………………………………………….…..... 38
Механика и колебания…………………………….…………. 39
Гидростатика и закон Архимеда ....…............ 80
Молекулярная физика и теплота …............................... 98
Электричество …....................……………………………. 128
Магнетизм …....…………………....................……... 155
Оптика и распространение света ……………………... 186

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПРАВКИ ……………………...... 200

ПРЕДИСЛОВИЕ

Последние годы резко обострилась проблема, выраженная в снижении уровня базовых знаний и отсутствии навыков самостоятельного решения задач по физике у абитуриентов, поступающих на естественнонаучные, включая физические, специальности вузов. Это обусловлено понижением значимости естественных наук в общеобразовательной школьной программе. В результате, у большинства выпускников школ, а также студентов младших курсов, столкнувшихся с университетским уровнем обучения физике, возникает труднопреодолимый барьер перед данным предметом, в особенности, в части обретения практических навыков решения физических задач.

Настоящее учебное пособие направлено на решение этой проблемы. Оно является продолжением воплощения идеи, реализованной в предыдущем учебном пособии автора, изданном Новосибирским государственным университетом и вызвавшем активный интерес читателей: *Вайнер Б. Г. Механика. Задачи по физике с подробными обучающими решениями: учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2011. 174 с.*

Новое учебное пособие представляет собой новый набор оригинальных задач автора, отличаясь от предыдущего тем, что кроме механики подробно рассмотрены также другие темы классической физики – гидростатика, молекулярная физика, электричество, магнетизм, колебания, оптика. Многие задачи включают в свое содержание комбинацию тем. Поскольку предыдущее и новое воплощения задачника дополняют друг друга, хотелось бы порекомендовать для извлечения наибольшей пользы изучить эти книги вместе.

Несмотря на оригинальность формулировок предложенных задач, рассмотренные в них модельные ситуации, как правило, являются типовыми, что позволяет в дальнейшем применять приобретенные знания и навыки к решению задач, предлагаемых в других сборниках, на контрольных работах, олимпиадах и экзаменах, включая ЕГЭ.

Оригинальность подхода, предложенного автором и реализованного в настоящем и вышеупомянутом изданиях, состоит в том, что обучение основам разных разделов физики целенаправленно осуществляется в форме детального разбора решений задач (преимущественно, с увлекательными условиями). При этом в описания решений *ненавязчиво* введены элементы физической теории, разъяснения практически важных фундаментальных физических положений и понятий, разбор общих методологических подходов к решению задач того или иного класса, а также анализ часто встречающихся ошибок. В разделе “Решения” настоящей книги к таким частям текста, представляющим общеметодологический интерес, привлекается внимание путем выделения их *курсивом*.

Изучение физики по учебникам не всегда приводит к желаемому результату в силу скучности самого процесса заучивания материала и оторванности такого материала от практического использования. Изложение физической теории в форме, когда отталкивание происходит от решения конкретной физической проблемы, видится автору более продуктивным для усвоения материала учащимися.

Избранный и реализованный в настоящей книге “живой” подход к представлению учебного материала позволяет надеяться на быстрое, и при этом глубокое, вхождение студентов и школьников в физику университетского уровня через форму обучения, более увлекательную, чем чтение стандартных учебников.

Авторы многих задачников по физике традиционно представляют тексты решений задач, не выходя за рамки их тем, сокращают промежуточные этапы решений и тем самым оставляют много вопросов у неопытных студентов и школьников. В настоящем сборнике все последовательные шаги решений подробнейшим образом разобраны, физически обоснованы и представлены на языке, максимально доступном начинающему. В каждом случае, имеющем общее методологическое значение, дано подробное разъяснение особенностей соответствующего подхода или приема для применения к другим задачам подобного класса.

Несмотря на то, что настоящее учебное пособие воплощает в себе более чем 20-летний педагогический опыт автора, искренне приветствуются те читатели, которые сочтут необходимым высказать свои пожелания и замечания, направленные на улучшение элементов данной книги, что может быть учтено в последующих изданиях. Свои высказывания можно направлять на имя автора по электронному адресу BGV@isp.nsc.ru.

В заключение автор хотел бы искренне поблагодарить всех своих многочисленных учеников за их неподдельный интерес к самому увлекательному, информационно емкому, разнообразному, естественному и, в то же время, строгому, ну, и, конечно, самому универсальному для восприятия и познания мира учебному предмету – физике. Этот неугасающий интерес является главным стимулом для автора не останавливаться на достигнутом, а продолжать непрерывно повышать также и свой профессиональный уровень, что делает жизнь ярче и насыщенней.

Профессор СУНЦ НГУ, ведущий научный сотрудник
Института физики полупроводников им. А.В.Ржанова СО РАН,
д.ф.-м-н.

Б.Г.Вайнер

2012 г.

ЗАДАЧИ

Важным качеством настоящего сборника является то, что он тренирует умение понимать, каких конкретных действий ждут от учащегося составители условий задач по физике, когда предлагают их ему. Разобраться в этой проблеме – обычно самое сложное для неопытного школьника или студента. Подробнейшие решения, предложенные во второй части книги, могут рассматриваться как, своего рода, "натаскивание", в хорошем смысле этого слова, на распознавание подходов и приемов с целью практического применения для решения задач по физике.

Несмотря на то, что при создании книги не ставилось целей обучать специальным подходам к решению олимпиадных задач, можно с уверенностью утверждать, что ни в одной физической олимпиаде нельзя рассчитывать на успех без знаний материала, изложенного здесь. Более того, последнее время на олимпиады все чаще стали выносить самые обычные, то есть вполне бесхитростные, задачи повышенной сложности. Решению таких задач настоящий сборник учит.

Технология самообучения с помощью данного пособия состоит в следующем. Учащийся

1) вникает в условие задачи,
2) пытается самостоятельно ее решить и решает,
3) безотносительно к тому, получилось это сделать или нет, читает и усваивает решение, разобранное во второй части книги,
4) переходит к следующей задаче.

Приведем список из 6 правил, которые настоятельно рекомендуется соблюдать при решении практически всех задач по физике – как приведенных здесь, так и встреченных в будущем:

1. С самого начала решение сопровождать *большими* и наглядными рисунками, на которые наносить все важное, что отражено в условии задачи, а также каждый элемент своего пошагового решения.

2. Если решение предназначено для чтения другими лицами, сопровождать его подробными словесными комментариями. Давать расшифровку всем новым обозначениям. Идеи решения доводить

до проверяющего Вашу работу. Одни лишь формулы часто остаются непонятными, и Вы теряете баллы. Помните, что приучая себя к подробным комментариям, Вы вырабатываете стиль оформления своих будущих научных работ.

3. Не спешить подставлять численные значения в процессе решения. В подавляющем большинстве случаев сначала следует получить ответ в общем виде, и лишь в конечную формулу подставить численные значения. Такой подход не только позволяет убедиться в корректности размерности окончательного выражения, но также дает возможность исследовать поведение найденной величины в широком интервале изменений параметров задачи.

4. Ответ обязательно проверить на размерность. Размерность конечной формулы должна соответствовать размерности искомой величины. Проверку размерности очень полезно проводить и на промежуточных этапах решения. Это защитит от случайных технических ошибок.

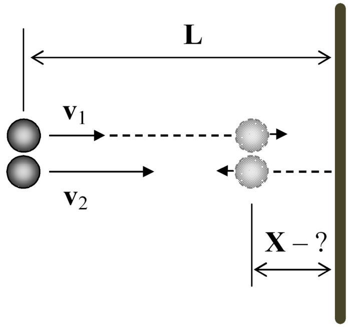
5. Даже верная конечная формула ответа – еще не есть правильный ответ задачи. Может оказаться, что при некоторых значениях параметров в формуле ответа возникает отрицательное число под корнем, ноль в знаменателе или иная математическая или физическая некорректность (отрицательная масса, синус или косинус, большие единицы и пр.). В таких случаях необходимо снабдить ответ определенными ограничивающими условиями (обычно – неравенствами), при выполнении которых некорректности исключаются.

6. Проверить ответ, записанный в общем виде, на предельные или очевидные случаи. Для этого часто бывает полезным какой-то параметр (массу, длину, скорость и др.) представить очень малым (почти нулевым) или, наоборот, очень большим (бесконечным). В предельных случаях часто результат решения очевиден. Если формула ответа согласуется с данной очевидностью, это веский (хоть и не абсолютный!) аргумент в пользу корректности решения. Если же не согласуется, следует поискать ошибку или понять, почему это происходит (в некоторых условиях уже изначально исключается возможность вариации параметров в произвольных пределах).

Итак, приступим!

Механика и колебания

ЗАДАЧА № 1. Два шарика одновременно пускают по гладкой горизонтальной плоскости в сторону вертикальной стены от точки, расположенной на расстоянии **L** от этой стены. При этом первому сообщают скорость $\mathbf{v}_1$, а второму – $\mathbf{v}_2$, большую, чем $\mathbf{v}_1$ (см. рис.). После абсолютно упругого отскока второй шарик катится обратно. На каком расстоянии **X** от стены он встретит первый шарик (поравняется с ним)?

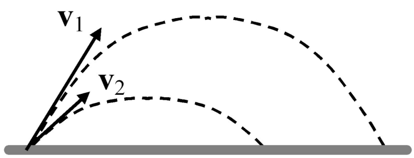


ЗАДАЧА № 2. Ко дну бассейна “прицепились” два воздушных пузырька разных размеров. В какой-то момент один оторвался и стал всплывать с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1 = 2$ см/с. Второй оторвался через время $\Delta\mathbf{t} = 5$ с после первого и тоже стал всплывать с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2 = 6$ см/с. На каком расстоянии **X** от дна пузырьки окажутся одновременно на одинаковой глубине?

ЗАДАЧА № 3. Ко дну бассейна “прицепились” два воздушных пузырька разных размеров. В какой-то момент один оторвался и стал всплывать с постоянным ускорением $\mathbf{a}_1$. Второй оторвался через время $\Delta\mathbf{t}$ после первого и тоже стал всплывать, но с другим постоянным ускорением $\mathbf{a}_2$. На каком расстоянии **X** от дна пузырьки одновременно окажутся в воде на одинаковом уровне?

ЗАДАЧА № 4. Маленький резиновый мячик, катившийся со скоростью $\mathbf{v}_0$ по горизонтальному столу в поле тяжести **g**, достиг края и упал на пол, имея в момент приземления скорость **v.** С какой частотой **f** мячик продолжал после этого подпрыгивать, если все его удары о пол считать абсолютно упругими, а сопротивлением воздуха пренебречь? Чему равна длина **L** одного такого прыжка?

ЗАДАЧА № 5. Длина полета тела, брошенного в поле тяжести **g** под углом $\boldsymbol{\beta}_1 = 30°$ к горизонту, оказалась в $\sqrt{3}$ раз больше длины полета тела, брошенного под углом $\boldsymbol{\beta}_2 = 15°$ к горизонту (см. рис.). Во сколько раз начальная скорость $\mathbf{v}_1$ первого тела была больше начальной скорости $\mathbf{v}_2$ второго тела? Сопротивлением воздуха пренебречь.



ЗАДАЧА № 6. На верхнем конце вертикально установленного высокого шеста лежит кубик, который надо сбить маленьким мячиком, бросив его так, чтобы он ударил по кубику в верхней точке траектории своего полета. Это удалось сделать школьнику, когда он направил мяч под углом 30° к горизонту. Длину шеста увеличили вдвое. Под каким углом к горизонту теперь должен школьник бросить мяч с прежней начальной скоростью, чтобы подобным образом сбить кубик? Школьника считать маленьким, сопротивлением воздуха пренебречь.

ЗАДАЧА № 7. На верхнем конце вертикально установленного высокого шеста лежит кубик, который надо сбить маленьким мячом, бросая его так, чтобы он ударил по кубику в верхней точке траектории своего полета. Это удалось сделать школьнику, когда он направил мяч под углом 30° к горизонту. Длину шеста увеличили втрое. Насколько нужно мальчику приблизиться или удалиться от шеста, чтобы из новой точки снова таким же образом сбить кубик, если бросать мяч с прежней начальной скоростью, но, возможно, под новым углом? До каких пределов можно так удлинять шест? Считать, что мальчик мал по сравнению с шестом. Сопротивлением воздуха пренебречь.

ЗАДАЧА № 8. На верхнем конце вертикально установленного высокого шеста лежит кубик, который надо сбить маленьким мячом, бросая его так, чтобы он ударил по кубику в верхней точке траектории своего полета. Это удалось сделать школьнику, когда он направил мяч под углом $\boldsymbol{\alpha} = 30°$ к горизонту. Высоту шеста увеличили в $\mathbf{k}$ раз, но мальчик, все равно, пожелал сбить кубик прежним образом, а именно, в верхней точке траектории мяча, бросая его с прежней начальной скоростью, хоть, возможно, и под другим углом. Что он для этого должен сделать: приблизиться к шесту или отойти от него? Считать, что мальчик мал по сравнению с шестом. Сопротивлением воздуха пренебречь.

ЗАДАЧА № 9. Кошелек, лежавший на краю стола в самой верхней на тот момент кабинке колеса обозрения радиуса $\mathbf{R} = 10$ м, нечаянно сорвался и полетел вниз. Каков был радиус кривизны его траектории при пролете уровня центра колеса, если известно, что перед самым отрывом от стола центростремительное ускорение $\mathbf{a}_0$ кошелька было равно 1 м/с^2 ? Ускорение свободного падения $\mathbf{g} = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

ЗАДАЧА № 10. Частица движется по пространственной спирали вдоль оси Z по закону $z = \mathbf{v}_0 t$ (t – время), сохраняя в XY-плоскости постоянный радиус $\mathbf{R}$ и изменяя свое угловое положение в этой плоскости по закону $\varphi = \boldsymbol{\beta}_0 t^2$. Здесь $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\beta}_0$ – известные константы, а φ – угол в радианах. Найти модули скорости $\mathbf{v}$, центростремительного ускорения $\mathbf{a}_{\text{Ц}}$ и полного ускорения $\mathbf{a}$ частицы в любой момент времени t.

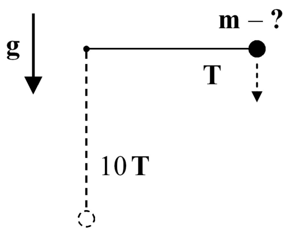
ЗАДАЧА № 11. Мальчик стоит у стены дома, а прямо над ним на расстоянии $\mathbf{H}$ от мальчика из окна выглядывает его товарищ. Друзья решили обменяться одинаковыми теннисными мячами. Тот, который был сверху, просто выпустил мяч из рук, а который снизу – в тот же самый момент подкинул свой мяч вверх. С какой начальной скоростью он подкинул мяч, если друзья поймали мячи одновременно? Известно, что сила сопротивления воздуха, действующая на каждый мяч, оставалась в течение всего полета постоянной и равной **F**. Ускорение свободного падения **g** и масса мяча **m** известны.

ЗАДАЧА № 12. Водитель автомобиля, увидев перед собой стену, резко ударил по тормозам, застопорив все колеса, и одновременно коснулся клаксона, который издал короткий (почти мгновенный) сигнал. Скользя по горизонтальной дороге, автомобиль преодолел еще расстояние **L** и остановился ровно в тот момент, когда шофера настигло эхо гудка, отраженного от стены. На каком расстоянии **X** от стены остановился автомобиль, если скорость звука в воздухе равна **c**, а коэффициент трения колес о дорогу равен μ? Ускорение свободного падения **g** известно.

ЗАДАЧА № 13. Снаряд массы **M**, вылетевший из орудия со скоростью v_0 под углом α к горизонту в поле тяжести **g**, разорвался в наивысшей точке своего полета на две части, равные по массе. При этом скорость передней (острой) части снаряда удвоилась сразу после взрыва, хотя по направлению не изменилась. Задняя часть снаряда при падении на землю испытывала постоянную силу сопротивления воздуха $F = Mg/4$. Считая, что целый снаряд и его передняя часть сопротивления воздуха не испытывают, определите, с какой разницей во времени Δt осколки снаряда упадут на землю.

ЗАДАЧА № 14. Тяжелая ракета массы **M** с незначительным по массе количеством топлива стартовала с большой космической платформы в радиальном от Земли направлении с нулевой начальной скоростью, неся на себе пусковое устройство со снарядом в два раза большей массы, чем она сама. Когда она произвела выстрел в направлении своего движения, то из-за отдачи на мгновение остановилась, не выключая двигателей, но затем продолжила полет, пройдя прежнее по длине расстояние в три раза быстрее, чем до запуска снаряда. Найти постоянную силу тяги двигателей ракеты. Ускорение свободного падения **g** в зоне полета ракеты считать известным и постоянным.

ЗАДАЧА № 15. Маленький грузик, привязанный в поле тяжести **g** к невесомой и нерастяжимой нити, отклоняют в горизонтальное положение, как показано на рисунке, и здесь мгновенно сообщают ему начальную скорость, направленную вертикально вниз. Сразу после начала движения с этой скоростью, еще в горизонтальном положении, сила натяжения нити оказалась равной **T**. При проходе грузиком нижнего положения круговой траектории сила натяжения нити оказалась равной 10**T**. Чему была равна масса грузика **m**? Сопротивлением воздуха пренебречь.

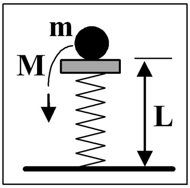


ЗАДАЧА № 16. Грузик положили в поле тяжести на поверхность плоской длинной горки, наклоненной под углом **β** к горизонту, и отпустили с нулевой начальной скоростью. Какую максимальную длину пути **L** сможет преодолеть грузик, скользя по горке, если по мере его движения коэффициент трения **μ** между ним и поверхностью непрерывно увеличивается по закону $\mu = \gamma x$, где **x** – расстояние вдоль горки, отсчитанное от места, куда положили грузик, а **γ** – известная константа?

ЗАДАЧА № 17. Во сколько раз изменится частота колебаний математического маятника по сравнению с той, которую он имел вблизи поверхности Земли, если этот маятник удалить от Земли на расстояние ее радиуса?

ЗАДАЧА № 18. От однородного тела, подцепленного к концу легкой пружины и совершавшего на ней гармонические колебания, отвалилась половина. Как изменилась частота колебаний оставшейся части тела на пружине?

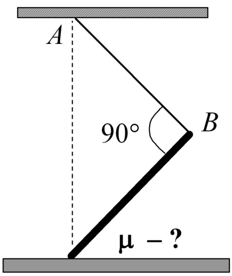
ЗАДАЧА № 19. На подставке массы **M**, закрепленной на легкой вертикально стоящей пружинке, лежит кусочек пластилина массы **m**. При этом система совершает вертикальные гармонические колебания с периодом **T**. Когда такой маятник нахо-



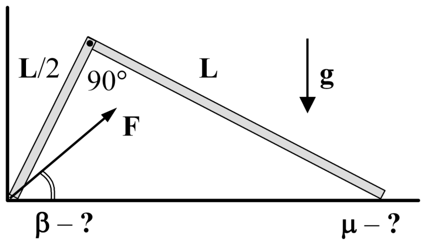
дился в одном из крайних положений и высота пружинки в тот момент была равна **L**, пластилин не удержался на подставке и начал падать вертикально вниз (см. рис.). Определить а) сколько колебаний успеет совершить маятник за время падения пластилина? б) Какое количество теплоты выделится в результате прилипания пластилина к полу? Ускорение свободного падения **g** считать известным. Сопротивлением воздуха и размерами пластилина пренебречь.

ЗАДАЧА № 20. Грузик положили в поле тяжести на поверхность плоской длинной горки, наклоненной под углом β к горизонту, и отпустили с нулевой начальной скоростью. Какое время грузик будет двигаться до полной остановки, если по мере его скольжения по горке коэффициент трения μ между ним и поверхностью непрерывно увеличивается по закону $\mu = \gamma \mathbf{x}$, где **x** – расстояние вдоль горки, отсчитанное от места, куда положили грузик, а γ – известная константа?

ЗАДАЧА № 21. Каким должен быть коэффициент трения однородного стержня о пол, чтобы этот стержень мог стоять в поле тяжести так, как показано на рисунке? Длина невесомой нити *AB* равна длине стержня.

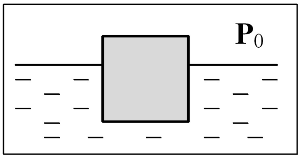


ЗАДАЧА № 22. Две шарнирно соединенные тонкие рейки разной длины (**L** и **L**/2), но с одинаковыми массами, поставлены в поле тяжести **g** под прямым углом друг к другу в угол комнаты, как показано на рисунке. Коэффициент трения μ между правой рейкой и полом минимален для того, чтобы скольжения еще не было. Определить численные значения а) этого коэффициента и б) тригонометрической функции угла $\boldsymbol{\beta}$, под которым относительно горизонта направлена неизвестная сила **F**, действующая со стороны угла на левую рейку. Трение в шарнире отсутствует.

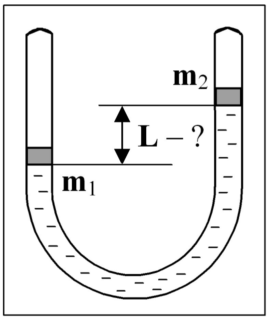


Гидростатика и закон Архимеда

ЗАДАЧА № 23. В условиях атмосферного давления $\mathbf{P}_0 = 10^5$ Па в ванне, заполненной водой, плавает деревянный кубик с размером ребра **a** = 10 см (см. рис.). Чему равна сила, которую испытывает на себе нижняя грань кубика со стороны воды, если плотность дерева $\boldsymbol{\rho} = 800$ кг/м^3, а плотность воды $\boldsymbol{\rho}_0 = 1000$ кг/м^3? Ускорение свободного падения **g** = 10 м/с^2.



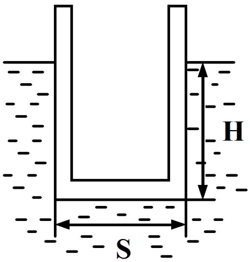
ЗАДАЧА № 24. В запаянную с обоих концов вертикально расположенную U-образную однородную трубку с внутренним поперечным сечением **S** налита жидкость плотности $\boldsymbol{\rho}$ и вставлены два поршня, которые плотно прилегают к стенкам и могут скользить вдоль них без трения. Масса левого поршня – $\mathbf{m}_1$, а правого – $\mathbf{m}_2$ (см. рис.). Над поршнями –



вакуум. Определить установившуюся разность уровней жидкости **L** в коленах трубки.

ЗАДАЧА № 25. В тонкостенный цилиндрический стакан с площадью основания **S** налита вода плотности ρ_0 до высоты **H**. В нее опускают деревянную шайбу, изготовленную из материала плотности ρ, имеющую форму цилиндра высотой **h** с площадью основания **S**/2. Чему равно давление **P** на дне стакана, в котором плавает шайба? Атмосферное давление $\mathbf{P}_0$ и ускорение свободного падения **g** известны.

ЗАДАЧА № 26. Пустой стакан с площадью основания **S** плавает, погрузившись в воду плотности ρ на глубину **H** (см. рис.). Каким будет величина погружения $\mathbf{H}_1$ стакана, если в него добавить массу **M** такой же воды? Атмосферное давление присутствует.



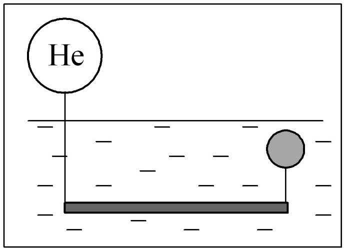
ЗАДАЧА № 27. Однородное тело, которое в воде тонет, подвешено к динамометру. Если его взвешивать на воздухе, то показания динамометра будут $\mathbf{P}_1 = 0.9$ кГ, а если взвесить, когда оно полностью погружено в воду, динамометр покажет $\mathbf{P}_2 = 0.3$ кГ. Чему равна плотность ρ материала, из которого изготовлено тело, если плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3?

ЗАДАЧА № 28. Деревянный брусок со стоящей на нем гирькой массы **m** плавает в горизонтальном положении, погрузившись в воду ровно на одну треть своего объема. Когда на него сверху поставили еще 4 такие же гирьки, верхняя грань бруска поравнялась с уровнем поверхности воды. Найти по этим данным массу бруска **M**.

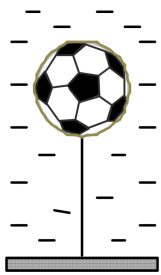
ЗАДАЧА № 29. Пустой тазик массы **m** плавает в ванне с пресной водой. Если в него положить груз массы **M**, а в ванну налить соленую воду, то тазик будет плавать с той же глубиной погружения, что и раньше. Во сколько раз плотность ρ соленой воды больше плотности ρ_0 пресной?

ЗАДАЧА № 30. Деревянный кубик плавает в кастрюле, погрузившись в воду ровно наполовину. Изменился бы, и если да, то в какую сторону, объем погруженной части кубика, если бы эту кастрюлю опустили в шахту глубиной, равной 1/6 радиуса Земли?

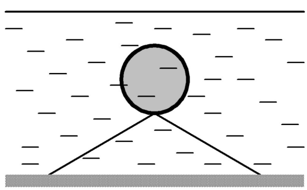
ЗАДАЧА № 31. Однородный стержень хотят приподнять со дна сосуда, заполненного глицерином, привязав к одному из концов сферический воздушный шар с гелием, расположенный над поверхностью жидкости, а к другому концу – легкий сферический поплавок, остающийся ниже уровня поверхности жидкости (см. рис.). Во сколько раз радиус $\mathbf{R}_Г$ шара с гелием должен быть больше радиуса $\mathbf{R}_П$ поплавка, чтобы стержень поднимался со дна, все время оставаясь в горизонтальном положении? Плотность воздуха ρ_0 = 1.3 кг/м^3, плотность глицерина $\rho \approx$ 1300 кг/м^3. Массой шаров и вязким трением пренебречь.



ЗАДАЧА № 32. Футбольный мяч полностью погружен в воду и удерживается там легкой тонкой нитью, прикрепленной ко дну (см. рис.). Сила натяжения нити в 4 раза больше веса мяча, когда тот лежит на горизонтальной земле. Какая часть объема мяча окажется погруженной в воду, когда нить порвется и мяч поднимется на поверхность?

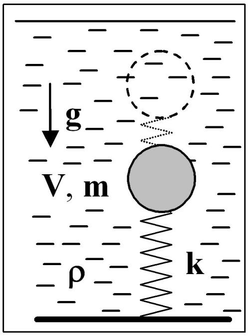


ЗАДАЧА № 33. Когда сферический буй массы **m** плавает на поверхности воды в поле тяжести **g**, он погружен в воду ровно наполовину. Буй утопили, закрепив под водой двумя легкими



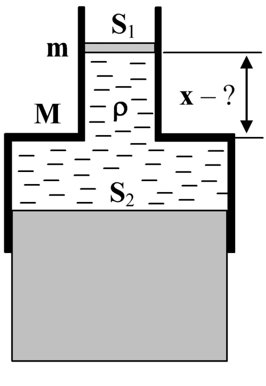
одинаковыми растяжками, каждая из которых встала под углом 30° по отношению к горизонтальному дну (см. рис.). Чему равна сила натяжения **T** каждой из растяжек?

ЗАДАЧА № 34. Один конец пружины жесткости **k** закреплен на дне сосуда с жидкостью плотности ρ. Ко второму концу при-

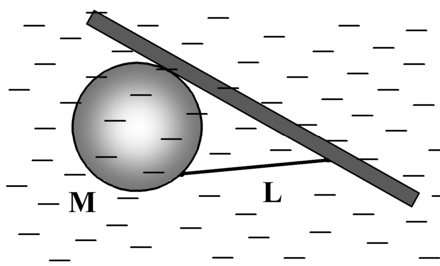


креплен хорошо обтекаемый поплавок массы **m** и объемом **V**. В начальный момент поплавок удерживают так, что пружина оказывается недеформированной (см. рис.). На какое расстояние **x** сместится поплавок после того, как его отпустят и колебания пружины успокоятся? Какую суммарную работу **A** совершит при этом сила Архимеда? Ускорение свободного падения **g** известно.

ЗАДАЧА № 35. Фигуру массы **M**, сваренную из двух отрезков



тонкостенных труб с площадями поперечного сечения S_1 и S_2, надели плотно, но без трения, в присутствии поля тяжести на вертикальный закрепленный стержень с площадью поперечного сечения S_2, как показано на рисунке. Во внутреннее пространство фигуры налили жидкость плотности ρ, герметично "закупорив" ее сверху тонким поршнем площади S_1 и массы **m**, тоже скользящим по стенкам цилиндра без трения. В таком виде систему отпустили. После успокоения колебаний она остановилась в положении, показанном на рисунке. Чему при этом равно расстояние **x** от поршня до колена, где стыкуются трубы разного диаметра? Внешнее атмосферное давление присутствует.



ЗАДАЧА № 36. Если однородный шар радиуса **R** и массы **M** опустить в жидкость, он будет в ней плавать, погрузившись на треть своего объема. Такой шар зафиксировали с помощью тонкой невесомой и нерастяжимой нити длины **L** под гладкой закрепленной наклонной плоскостью, помещенной внутрь этой жидкости, примерно так, как показано на рисунке. Когда все движения шара прекратились, оказалось, что нить приняла горизонтальное положение. Найти силу натяжения этой нити. Ускорение свободного падения **g** известно.

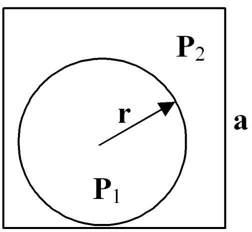
Молекулярная физика и теплота

ЗАДАЧА № 37. В закрытый с обоих концов горизонтально расположенный цилиндрический сосуд вставлен теплопроводящий поршень, герметично разделяющий внутреннее пространство на два отсека и способный скользить по внутренним стенкам сосуда без трения. Слева от поршня находится 1 моль водорода, а справа – 1 моль кислорода. Определить, каким будет отношение объемов $\mathbf{V_В}/\mathbf{V_К}$ отсеков цилиндра, заполненных, соответственно, водородом и кислородом, после установления термодинамического равновесия в системе.

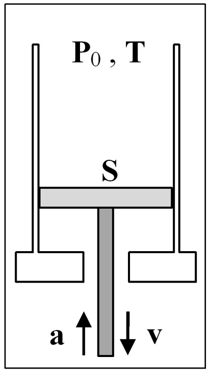
ЗАДАЧА № 38. В закрытый с обоих концов горизонтально расположенный цилиндрический сосуд вставлен теплопроводящий поршень, герметично разделяющий внутреннее пространство на два отсека и способный скользить по внутренним стенкам сосуда без трения. Слева от поршня находится водород, а справа – кислород. Массы $\mathbf{m}$ газов одинаковые. Определить, каким будет отношение объемов $\mathbf{V}_В/\mathbf{V}_К$ отсеков цилиндра, заполненных, соответственно, водородом и кислородом, после установления термодинамического равновесия в системе. Молярные массы атомов водорода $\mu_В$ = 0.001 кг/моль и кислорода $\mu_К$ = 0.016 кг/моль известны.

ЗАДАЧА № 39. Тонкостенный стеклянный сферический сосуд вставлен в герметичный бокс кубической формы так, что каждая стенка бокса касается сферы. В промежутке между гранями куба и сосудом – вакуум, а внутри сосуда – идеальный газ под давлением $\mathbf{P}_0$ при температуре $\mathbf{T}_0$. Когда систему нагрели до температуры $\mathbf{T}$, сосуд лопнул. Найти а) Какое давление $\mathbf{P}$ установится в боксе после того, как газ примет температуру его стенок? б) Чему равно отношение начальной ($\mathbf{U}_0$) и конечной ($\mathbf{U}$) внутренних энергий газа?

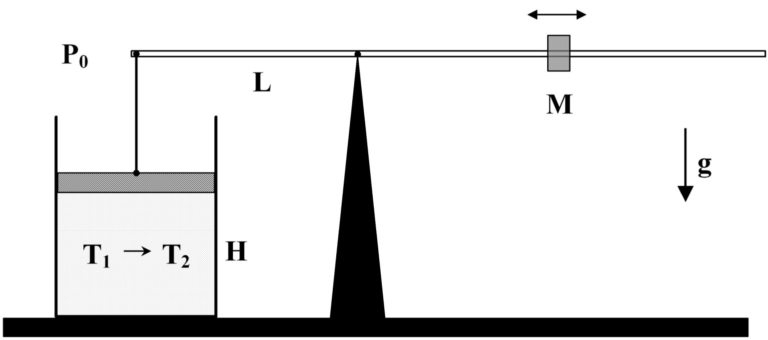
ЗАДАЧА № 40. Внутри герметичного бокса кубической формы со стороной **a** находится тонкостенный стеклянный сферический сосуд радиуса **r**. Сосуд заполнен идеальным газом, находящимся под давлением $\mathbf{P}_1$, а бокс – другим количеством идеального газа, находящегося под давлением $\mathbf{P}_2$ (см. рис.). Определить давление $\mathbf{P}$, которое установится в боксе, если сосуд разобьется. Температура поддерживается постоянной.



ЗАДАЧА № 41. Дном открытого на атмосферу достаточно высокого цилиндрического неподвижного стакана с площадью внутреннего поперечного сечения **S** служит подвижный поршень. Поршень перемещают вверх с нулевой начальной скоростью и постоянным ускорением **a** (см. рис.). Через время **t** направление движения изменяют, и поршень перемещают вниз в течение такого же времени **t**, но уже с постоянной скоростью **v**, после чего резко останавливают. Определить итоговое изменение числа молекул воздуха Δ**N** в стакане после таких манипуляций. Какое значение времени **t** следует выбрать, чтобы число молекул в стакане осталось прежним? Атмосферное давление $\mathbf{P_0}$, температуру воздуха **T**, а также значения универсальной газовой постоянной **R** и числа Авогадро $\mathbf{N_A}$ считать известными.



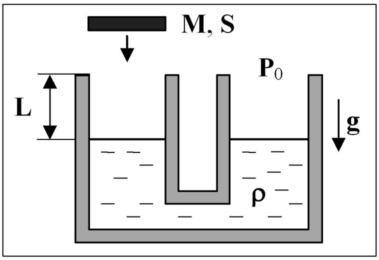
ЗАДАЧА № 42. ("Взвешивание температуры") К одному концу рычажных весов прикреплен на шарнирных соединениях массивный поршень, герметично вставленный в стакан с гладкими стенками. Расстояние от дна стакана до поршня равно **H**, а от оси вращения легкого коромысла весов до легкого стержня, удерживающего поршень – **L**. В стакан помещено **ν** молей идеального газа. При определенном положении противовеса массы **M** коромысло стоит горизонтально, при этом температура газа



равна $\mathbf{T}_1$ и вся система уравновешена (см. рис.). Газ нагревают до температуры $\mathbf{T}_2$. На какую величину и в какую сторону при этом нужно сдвинуть противовес вдоль коромысла, чтобы оно осталось горизонтальным? Ускорение свободного падения **g** известно. Атмосферным давлением $\mathbf{P}_0$ не пренебрегать.

ЗАДАЧА № 43. В перевернутый гладкостенный стакан с площадью дна **S** герметично вставлен поршень массы **M**. Между дном и поршнем находится аргон (идеальный газ), а снаружи – атмосфера, при этом поршень в свободном состоянии покоится. К нему мгновенно подцепляют груз такой же массы **M**. После прихода к новому равновесию объем газа в стакане становится вдвое больше первоначального. Определить атмосферное давление. Ускорение свободного падения **g** известно. Теплопроводности стакана и поршня пренебрежимо малы. Передвижения поршня считать не слишком быстрыми.

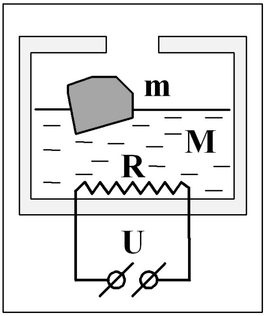
ЗАДАЧА № 44. Один из двух одинаковых сообщающихся сосудов



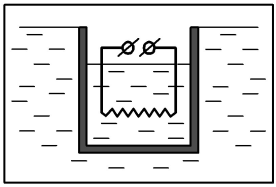
(на рисунке – левый) с площадью внутреннего поперечного сечения **S** закрывают поршнем массы **M**, плотно прилегающим к достаточно высоким стенкам и способным скользить вдоль них без трения. В сосудах находится жидкость плотности **ρ**. Исходное расстояние от ее поверхности до края сосуда равно **L**. Определить, а) на какую высоту **x** поднимется уровень жидкости в правом сосуде, когда после вставки поршня система придет в равновесие? б) Какой объем **V** при этом займет воздух, оставшийся слева над жидкостью? Ускорение свободного падения **g** и атмосферное давление $\mathbf{P}_0$ считать известными, а температуру – постоянной.

ЗАДАЧА № 45. Оцените, до какой наименьшей температуры **T** можно охладить массу **M** = 200 г коктейля, если в него погрузить несколько кусочков тающего льда общей массой **m** = 30 г? Начальная температура коктейля $\mathbf{T}_0$ = 27 °С. Теплообменом с фужером и окружающей средой пренебречь. Удельная теплота плавления льда **λ** = 330 кДж/кг. Значения удельных теплоемкостей воды и коктейля считать одинаковыми и равными **c** = 4.2 кДж/(кг·К).

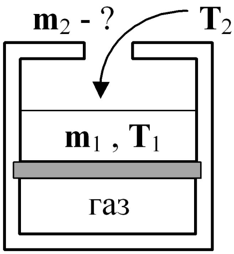
ЗАДАЧА № 46. При нормальном атмосферном давлении в теплоизолированный сосуд налита вода массы **M**, имеющая температуру **T**. На дно сосуда уложен нагреватель, сопротивление спирали которого равно **R**. Какое время **t** работы нагревателя потребуется, чтобы осушить сосуд? На сколько времени **Δt** увеличится это время, если в налитую воду дополнительно опустить кусочек льда массой **m** при температуре 0 °С (см. рис.)? На спираль, сопротивление которой не зависит от температуры, подается постоянное напряжение **U**. Удельная теплоемкость воды **c**, удельная теплота парообразования **r** и удельная теплота плавления льда **λ** известны.



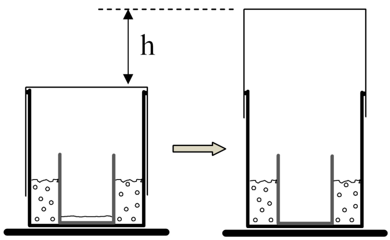
ЗАДАЧА № 47. Тонкостенный сосуд массы **m** = 0.5 кг с теплоизолирующими стенками, частично заполненный стоградусным кипятком массы **M** = 2 кг, плавает в спокойном озере при нормальном атмосферном давлении так, что верхняя кромка сосуда находится на уровне поверхности воды (см. рис.). Чтобы система случайно не затонула, включают нагреватель мощности **P** = 2.5 кВт, который начинает выпаривать воду из сосуда. Определить, в течение какого времени **t** должен работать нагреватель, чтобы ровно половина сосуда выступила над водой? Удельная теплота парообразования воды **r** = 2.3 МДж/кг.



ЗАДАЧА № 48. В теплоизолированный сосуд встроена теплопроводящая перегородка, под которую помещен идеальный газ. Выше перегородки налита жидкость массы $\mathbf{m}_1$ = 4 кг при температуре $\mathbf{T}_1$. Система находится в термодинамическом равновесии (см. рис.). Какую массу $\mathbf{m}_2$ такой же жидкости при температуре $\mathbf{T}_2 = \mathbf{k}\mathbf{T}_1$ (где $\mathbf{k}$ = 1.3) нужно добавить в сосуд, чтобы после прихода к новому термодинамическому равновесию давление газа увеличилось в $\mathbf{r}$ = 1.1 раз? Во сколько раз по сравнению с первоначальной возрастет при этом температура газа? Считать, что теплоемкость жидкости не зависит от температуры. Теплоемкостями сосуда, перегородки и газа пренебречь.



ЗАДАЧА № 49. Внутри высокой кастрюли с кипящей водой стоит тяжелая пустая банка с остатками воды на дне. Экспериментатор задумал просушить дно банки следующим образом. Он натянул сверху на кастрюлю пластиковый колпак, выполненный в форме перевернутой кастрюли чуть большего диаметра (см. рис.) и стал поднимать этот колпак. Дно высохло, как только колпак приподнялся на высоту $\mathbf{h}$ = 30 см над кастрюлей. При этом пар наружу не выходил, а наружный воздух под колпак не проникал. Оценить, какая масса воды была в банке, если площадь ее дна $\mathbf{S}_0 = 100$ см^2. Считается, что численные значения остальных параметров, необходимых для решения задачи, Вы знаете. Присутствием остаточного воздуха под колпаком пренебречь. Теплопроводность колпака считать незначительной. Ответ представить в общем виде и в численном.



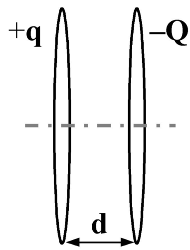
Электричество

ЗАДАЧА № 50. Два маленьких металлических шарика одинакового радиуса несли разные заряды: $\mathbf{Q}_1 = +8\mathbf{q}$ и $\mathbf{Q}_2 = -4\mathbf{q}$. После лобового столкновения шарики стали отталкиваться друг от друга. Во сколько раз сила их притяжения друг к другу до соударения превосходила по величине силу отталкивания после соударения при одинаковых расстояниях между шариками, много больших их радиусов?

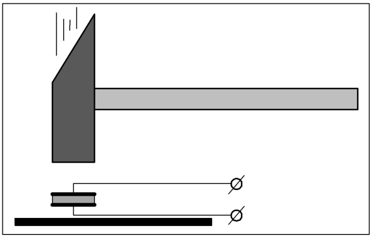
ЗАДАЧА № 51. Два одинаковых точечных заряда **q** закреплены на некотором расстоянии друг от друга в точках А и В. Третий точечный заряд **q** поместили в точку С, являющуюся вершиной равностороннего треугольника АВС. Во сколько раз и в какую сторону по величине изменилась при этом сила, действующая на заряд **q** в точке А?

ЗАДАЧА № 52. Каждая из трех одинаковых шаровидных капель ртути радиуса $\mathbf{r}_0$ несет на себе заряд **q**. Капли сливаются в одну шаровидную каплю. Найдите потенциал **φ** на ее поверхности. Поле тяжести и окружающая среда отсутствуют.

ЗАДАЧА № 53. Два кольца радиуса **R** имеют общую ось и закреплены на расстоянии **d** друг от друга. На кольцах равномерно распределены заряды: на первом – положительный +**q**, а на втором – отрицательный –**Q** (см. рис.). В центр первого кольца помещают протон и отпускают. Какова будет его скорость в момент пролета через центр второго кольца? Масса **m** и заряд **e** протона известны.



ЗАДАЧА № 54. По плоскому конденсатору, изготовленному из пластичных материалов, произвели удар, в результате чего его пластины расплющились и стали в 1.5 раза больше по площади, а зазор между пластинами уменьшился в 2 раза (см. рис.). Заряд на конденсаторе и относительная диэлектрическая проницаемость изолятора остались прежними. Во сколько раз и в какую сторону изменилась энергия электрического поля в конденсаторе в результате удара?



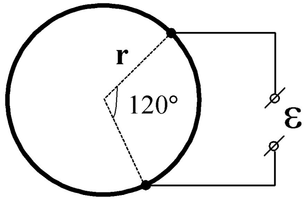
ЗАДАЧА № 55. К клеммам идеального источника напряжения подсоединены параллельно два разных куска проволоки. Через один из них при этом течет ток $\mathbf{I}_1$. Какой по величине ток $\mathbf{I}_2$ течет через второй кусок, если известно, что когда куски соединили последовательно и их свободные концы подключили к тому же самому источнику, то по проволокам потек ток $\mathbf{I}$?

ЗАДАЧА № 56. Имеется две лампы накаливания: одна рассчитана на мощность $\mathbf{P}_1 = 6$ Вт при подаче на нее напряжения $\mathbf{U}_1 = 6$ В, а другая – на мощность $\mathbf{P}_2 = 3$ Вт при подаче напряжения $\mathbf{U}_2$, тоже равного 6 В. Какой силы ток $\mathbf{I}$ будет протекать через каждую из ламп, если их соединить последовательно и на эту цепь подать напряжение $\mathbf{U}_3 = 9$ В? Считать, что сопротивление ламп не изменяется при изменении температуры нити накала.

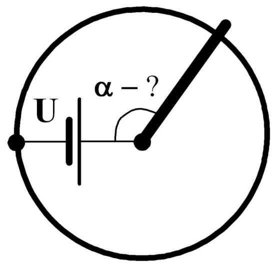
ЗАДАЧА № 57. Источник Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ с внутренним сопротивлением $\mathbf{r}$ замкнут на нагрузку с сопротивлением $\mathbf{R}_1$. Какой должна быть Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ другого источника с таким же внутренним сопротивлением, чтобы на нагрузке с сопротивлением $\mathbf{R}_2$ выделялась такая же мощность?

ЗАДАЧА № 58. К проводящему кольцу радиуса $\mathbf{r} = 2$ м в точках, показанных на рисунке, подсоединена батарея с Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon} = 4$ В и нулевым внутренним сопротивлением. Какая мощность $\mathbf{N}$

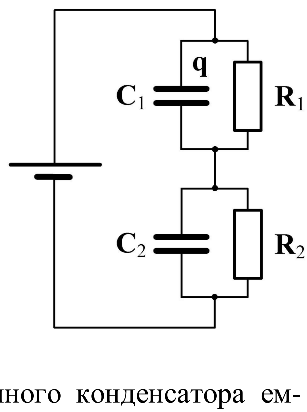
выделяется при этом на всем кольце, если оно изготовлено из однородной проволоки с радиусом поперечного сечения $\mathbf{r}_1$ = 1 мм и удельным сопротивлением $\rho = 10^{-6}$ Ом×м, а сопротивление подводящих проводников пренебрежимо мало?



ЗАДАЧА № 59. Источник напряжения одним концом присоединен к тонкому проводящему кольцу, изготовленному из куска однородной проволоки сопротивлением **r**, а другим – к радиальному проводящему полозку, способному вращаться вокруг центра и скользить по кольцу сохраняя с ним электрический контакт (см. рис.). Под каким углом α следует расположить полозок, чтобы обеспечить минимальный ток через источник? Чему равен этот ток, если напряжение источника равно **U**? Сопротивлением самого полозка и сопротивлением источника пренебречь.

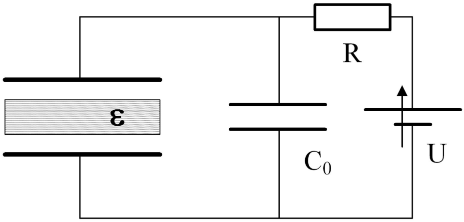


ЗАДАЧА № 60. К источнику постоянного напряжения подсоединены конденсаторы и сопротивления с известными номиналами $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, как показано на рисунке. При этом заряд на емкости $\mathbf{C}_1$, равен **q**. Внезапно сопротивление $\mathbf{R}_2$ перегорает, и на его месте появляется разрыв цепи. Какой заряд установится на емкости $\mathbf{C}_2$ через длительное время?

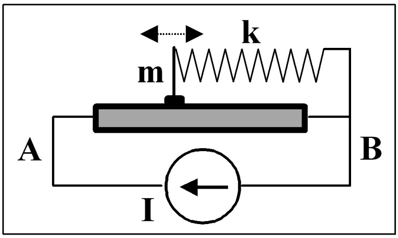


ЗАДАЧА № 61. Выводы плоского воздушного конденсатора емкости **C** подсоединены к идеальной батарее, вырабатывающей постоянное напряжение **U**. Какую работу надо совершить внешней силе, чтобы раздвинуть пластины конденсатора, увеличив расстояние между ними вдвое?

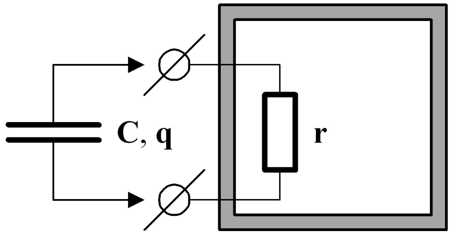
ЗАДАЧА № 62. Ровно посередине между обкладками плоского воздушного конденсатора, расстояние между которыми **d**, закреплен изолирующий слой толщиной **d**/2 с относительной диэлектрической проницаемостью **ε**. Система подключена к источнику постоянного напряжения **U** и к емкости $\mathbf{C}_0$ по схеме, изображенной на рисунке. Верхнюю обкладку площади **S** достаточно медленно (но не адиабатически) придвинули вплотную к верхней поверхности изолирующего слоя, при этом на сопротивлении **R** выделилась теплота **Q**. Какую работу совершила внешняя сила, придвинувшая обкладку?



ЗАДАЧА № 63. Реостат, имеющий полное сопротивление **R** и длину **L**, включен в цепь с идеальным источником постоянного тока **I** (источник, вырабатывающий на выходе ток, величина которого не зависит от сопротивления нагрузки). Полозок реостата представляет собой подвижный контакт массы **m**, закрепленный на легкой пружине жесткости **k**, как показано на рисунке. Электрическое сопротивление пружины равно нулю. Контакт скользит по реостату без трения. Чему равны амплитуда $\mathbf{U}_0$ и период **T** колебаний напряжения, измеренного между точками **A** и **B**, если амплитуда колебаний подвижного контакта на пружине равна $\mathbf{x}_0$? Индуктивностью пружины пренебречь.

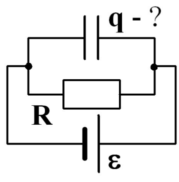


ЗАДАЧА № 64. Сопротивление **r** находится внутри герметичного теплоизолированного сосуда с 1 молем одноатомного идеального газа. Через это сопротивление разряжают конденсатор емкости **C**, на обкладки которого предварительно помещен заряд **q** (см. рис.). Какой силы ток **I** потечет через сопротивление в первый момент времени после подсоединения конденсатора? На какую величину **ΔT** увеличится температура газа после того, как конденсатор полностью разрядится? Теплоемкостью сопротивления и стенок сосуда пренебречь.



ЗАДАЧА № 65. Нагревателем воды, имеющей массу **M** и помещенной в сосуд с теплоизолирующими стенками, служит спираль с электрическим сопротивлением **R**, подключенная к источнику напряжения **U**. При нормальных внешних условиях через время **t** после начала работы нагревателя вся вода из сосуда испарилась. Какой была ее начальная температура **T**? Удельная теплоемкость воды **c** и ее удельная теплота парообразования **r** известны. Теплоемкостью нагревателя и стенок сосуда пренебречь.

ЗАДАЧА № 66. Идеальный конденсатор, выпаянный из колебательного LC-контура с катушкой индуктивности **L** и резонансной частотой ω_0, включили в цепь с сопротивлением **R** и идеальным источником ЭДС **ε**, как показано на рисунке. Определить а) заряд **q**, установившийся через длительное время на обкладках конденсатора; б) количество теплоты **Q**, которая выделяется в цепи за интервал времени **t**.

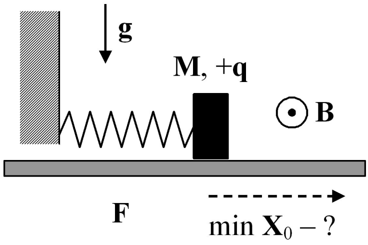


Магнетизм

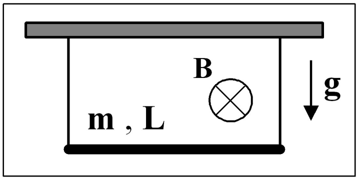
ЗАДАЧА № 67. Электрон и протон влетают в область однородного магнитного поля с индукцией **B** таким образом, что вектора их скоростей перпендикулярны вектору магнитной индукции. Во сколько раз отличаются друг от друга скорости электрона $\mathbf{v}_Э$ и протона $\mathbf{v}_П$, если эти частицы далее движутся в поле **B** по окружностям одинакового радиуса? Скорость какой частицы больше? Масса электрона $\mathbf{m}_Э$ приблизительно в 1800 раз меньше массы протона $\mathbf{m}_П$. Взаимодействием частиц друг с другом пренебречь.

ЗАДАЧА № 68. Верхнее полупространство, в котором помимо поля тяжести **g** имеется однородное горизонтально направленное магнитное поле с индукцией **B**, отделено от нижнего плоской горизонтальной границей. С этой границы одновременно запустили вертикально вверх частицу массы **m**, несущую заряд **q**, и маленькое незаряженное тело. Известно, что частица и тело вернулись на границу одновременно, а их максимальное удаление от этой границы в процессе полета было тоже одинаковым. С какой начальной скоростью была запущена частица, если считать, что влияние поля тяжести на ее полет пренебрежимо мало?

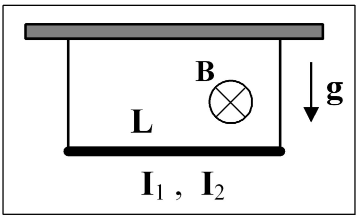
ЗАДАЧА № 69. В поле тяжести **g** и горизонтально направленном магнитном поле с индукцией **B** маленький по размерам груз массы **M**, несущий положительный заряд **q**, прикреплен к достаточно длинной легкой горизонтальной пружине, второй конец которой закреплен на вертикальной стене. Груз может скользить по горизонтальной поверхности гладкого стекла, выдерживающего максимальную локальную нагрузку силой **F** (**F** > **Mg**). Направление вектора **B** показано на рисунке. На какую минимальную из возможных величину $\mathbf{X}_0$ следует оттянуть груз от стенки относительно положения равновесия, чтобы после отпускания он, двигаясь без отрыва от поверхности, проломил бы стекло и, как потом выяснилось бы, это произошло через время $\Delta \mathbf{t}$ после отпускания?



ЗАДАЧА № 70. В однородном магнитном поле с индукцией **B** = 0.05 Тл на гибких невесомых непроводящих нитях подвешен тонкий металлический стержень массы **m** = 5 г и длины **L** = 50 см, расположенный горизонтально и перпендикулярно вектору магнитной индукции, который также имеет горизонтальное направление (см. рис.). К концам стержня подсоединяют источник напряжения и начинают пропускать медленно нарастающий ток. При какой минимальной силе тока **I** исчезнет натяжение нитей, поддерживающих стержень? Ускорение свободного падения **g** считать равным 10 м/с^2.

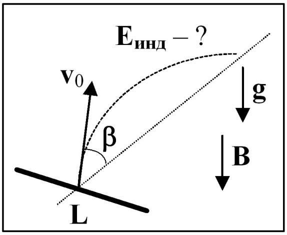


ЗАДАЧА № 71. В поле тяжести **g** и однородном магнитном поле с индукцией **B** на гибких невесомых непроводящих одинаковых нитях подвешен тонкий металлический массивный стержень длины **L**, расположенный горизонтально и перпендикулярно вектору магнитной индукции, который также имеет горизонтальное направление (см. рис.). К концам стержня подсоединяют источник напряжения и начинают пропускать медленно нарастающий ток. При этом наблюдают, что при минимальной силе тока $\mathbf{I}_1$ исчезает натяжение

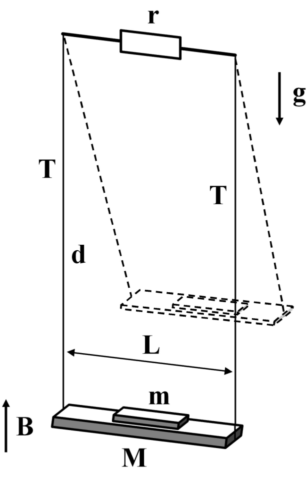


нитей, поддерживающих стержень, а при минимальной силе тока $\mathbf{I}_2$, текущем в противоположном направлении, нить рвется. Чему равна прочность нити $\mathbf{T}_0$ (минимальная сила на разрыв)?

ЗАДАЧА № 72. Массивному металлическому прутку длины **L** сообщают начальную скорость $\mathbf{v}_0$ под углом $\boldsymbol{\beta}$ к горизонту таким образом, что вектор скорости перпендикулярен длинной стороне прутка (см. рис.). Его полет проходит в поле тяжести **g** и однородном вертикально направленном магнитном поле с индукцией **B**. Какой величины Э.Д.С $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ будет индуцирована магнитным полем между концами прутка в верхней точке траектории и на половине максимальной высоты полета?



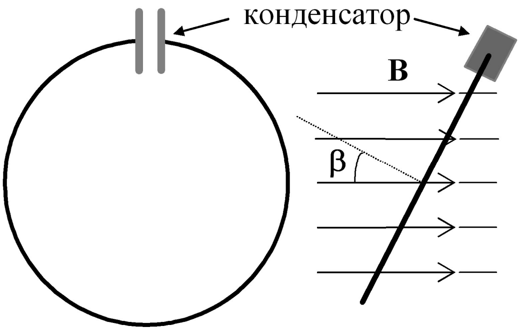
ЗАДАЧА № 73. Качели представляют собой замкнутый проводящий контур, в который включено сопротивление **r**, при этом “сиденье” длиной **L** и массой **M**, а также легкие жесткие прутья длиной **d**, являются идеальными проводниками. На центр “сиденья” положили маленький деревянный брусок массы **m**, затем качели отклонили и отпустили (см. рис.). При проходе нижней точки, где плоскость “сиденья” была горизонтальной, включили вертикально направленное однородное магнитное поле с индукцией **B**. При каких значениях **r** брусок начнет соскальзывать с “сиденья” в нижней точке, если коэффициент трения между ним и “сиденьем” равен $\boldsymbol{\mu}$, а сила натяжения каждого прута качелей перед самым включением поля была равной **T**? Ускорение сво-



бодного падения **g** известно. Моментами инерции “сиденья” и бруска, а также индуктивностью системы, пренебречь.

ЗАДАЧА № 74. Кусок проволоки, имеющий сопротивление **r**, изогнут в форме плоского равностороннего треугольника со стороной **a**. В разрыв между концами проволоки включен маленький идеальный гальванометр. Плоскость треугольника ориентирована перпендикулярно линиям однородного магнитного поля с индукцией **B**. Фигуру деформировали, превратив ее в окружность и сохранив прежнюю ориентацию по отношению к вектору **B**. Какой по величине заряд протек через гальванометр в процессе деформации?

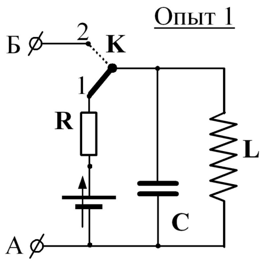
ЗАДАЧА № 75. Провод, изогнутый в форме кольца, замкнут на плоский конденсатор, ширина пустого зазора между обкладками которого равна **d**. Фигура помещена в однородное магнитное поле, индукция которого линейно увеличивается со временем (магнитная индукция **B** изменяется со временем **t** по закону **B** = **kt**, где **k** – известная константа). Сначала линии магнитной индукции составляют угол β с нормалью к плоскости коль-

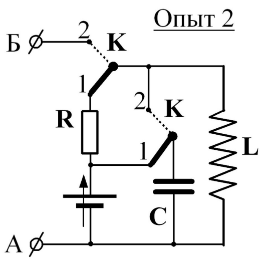


ца (см. рис.). Потом фигуру разворачивают на угол β так, чтобы линии вектора **B** стали перпендикулярными плоскости кольца. На какую величину Δ**d** в последнем случае следует изменить расстояние между обкладками конденсатора, чтобы заряд на них остался прежним?

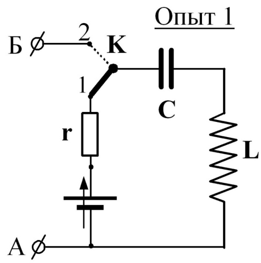
ЗАДАЧА № 76. Во сколько раз и в какую по величине сторону изменится энергия **W** магнитного поля однородной длинной цилиндрической катушки индуктивности, если от нее отсечь 1/3 ее длины, а по проводу оставшейся части катушки пустить ток, вдвое больший исходного?

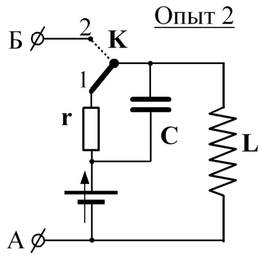
ЗАДАЧА № 77. Во внутренний объем теплоизолированного калориметра встроено электрическое сопротивление (резистор), концы которого выведены наружу и могут быть подсоединены к контактам А и Б одной (опыт 1) или другой (опыт 2) электрической схемы, изображенной на рисунке. Схемы содержат одинаковые идеальные элементы: постоянную Э.Д.С., сопротивление **R** = 200 Ом, емкость **C** = 2 нФ и индуктивность **L** = 0.4 мГн. В представленном виде обе схемы находятся уже длительное время. В каждом из опытов в калориметр насыпают по одинаковому количеству снега при температуре 0 °С, после чего ключ **K** (в опыте 1) или одновременно оба ключа **K** (в опыте 2) перебрасывают (без искры) из положения 1 в положение 2. При этом оказывается, что через очень большое время в опыте 1 снег полностью тает без изменения температуры в калориметре, а в опыте 2 образованная из снега вода нагревается до некоторой температуры **T**. Определить эту температуру, если удельная теплоемкость воды $\mathbf{c}_В$ = 1 калл/(г·град), а удельная теплота плавления льда $\boldsymbol{\lambda}$ = 80 калл/г. Энергией излучения пренебречь.





ЗАДАЧА № 78. Во внутренний объем теплоизолированного калориметра встроено электрическое сопротивление (резистор), концы которого выведены наружу и могут быть подсоединены к контактам А и Б одной (опыт 1) или другой (опыт 2) электрической схемы, изображенной на рисунке. Схемы содержат одинаковые идеальные элементы: постоянную Э.Д.С., сопротивление **r** = 100 Ом, емкость **C** = 1000 пФ и индуктивность **L** = 11 мкГн. В представленном виде обе схемы находятся уже длительное время. В каждом из опытов в калориметр насыпают по одинаковому количеству снега при температуре 0 °С, после чего ключ **К** перебрасывают (без искры) из положения 1 в положение 2. При этом оказывается, что через очень большое время в опыте 1 снег полностью тает без изменения температуры в калориметре, а в опыте 2 образованная из снега вода нагревается до некоторой температуры **T**. Определить эту температуру, если удельная теплоемкость воды $\mathbf{c}_В$ = 1 калл/(г·град), а удельная теплота плавления льда λ = 80 калл/г. Энергией излучения пренебречь.





Оптика и распространение света

ЗАДАЧА № 79. Плоское зеркало может поворачиваться вокруг оси, лежащей в плоскости зеркала. На него под некоторым углом падает луч света в направлении, перпендикулярном этой оси. На какой угол повернется отраженный луч, если зеркало повернется на угол $\Delta\beta$?

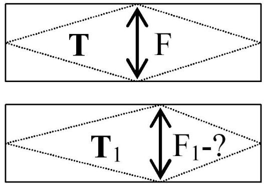
ЗАДАЧА № 80. Тонкий луч света падает на поверхность стеклянного шара, а выходит из него в конце дуги 90° (имеется в виду дуга окружности, лежащая на поверхности этого шара и отсчитываемая от точки падения луча). Чему равен угол **φ** между падающим и вышедшим из шара лучами, если показатель преломления стекла равен **n**, а вокруг шара – вакуум.

ЗАДАЧА № 81. Вертолет, зависший над озером глубиной **L** с плоским горизонтальным дном, направляет на воду прожектор под углом **α** к вертикали и начинает спускаться вертикально вниз с постоянной скоростью **v**. Найти а) с какой скоростью **u** перемещается при этом световое пятно по дну озера? б) За какое время **T** свет, испущенный прожектором на высоте **h** над водой, преодолевает путь до дна озера? Относительный коэффициент преломления воды равен **n**, относительный коэффициент преломления воздуха принять равным 1. Скорость света в воздухе равна **c**.

ЗАДАЧА № 82. На оптической оси на расстоянии **a** = 40 см от выпуклой линзы с фокусным расстоянием **F** = 30 см находится предмет. С противоположной стороны линзы на расстоянии **L** = 90 см от нее установлено плоское зеркало, направленное отражающей поверхностью в сторону линзы и расположенное перпендикулярно оптической оси. На каком расстоянии **x** от линзы находится плоскость, в которой изображение предмета выглядит резким?

ЗАДАЧА № 83. Действительное изображение точки подвеса математического маятника в выпуклой линзе, служащей его грузом, находится на расстоянии от линзы, равном 1/3 длины нити маятника. При колебаниях нить совпадает с оптической осью линзы. Период колебаний **T** известен и численно равен 2π секунд. Чему равно фокусное расстояние **F** линзы? Ускорение свободного падения считать равным **g** = 10 м/с^2.

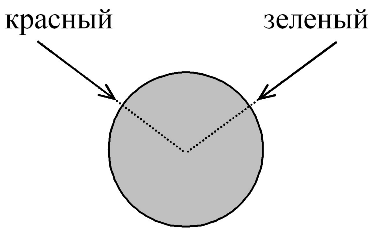
ЗАДАЧА № 84. В герметично закрытый с обоих концов пустотелый цилиндр вставлен поршень, представляющий собой



выпуклую линзу с фокусным расстоянием **F**. Поршень тепло не проводит, плотно прилегает к стенкам цилиндра и может скользить вдоль них без трения. По обе стороны от линзы находится по одинаковому количеству одинакового идеального газа при одной и той же температуре **T**. При этом резкое изображение в линзе левой торцевой стенки цилиндра находится на правой стенке (см. рис.). Определить а) какова длина **L** цилиндра? б) Линзу с каким фокусным расстоянием $\mathbf{F}_1$ следует использовать в качестве поршня, чтобы резкое изображение левой стенки находилось на правой стенке после нагрева газа в левом отсеке до температуры $\mathbf{T}_1$ (справа температура поддерживается равной **T**)?

ЗАДАЧА № 85. Альпинисты закрепили на вершине вулкана Камерун высотой **H** ≈ 4 км над уровнем моря флаг своей страны, спустились с горы и удалились от нее по морю на небольшом корабле так далеко, что их флаг стал видимым в телескоп лишь на уровне горизонта. За какое время **t** при этом солнечный свет, отраженный от флага, достигал альпинистов, если радиус Земли **R** ≈ 6400 км? Скорость света **c** в воздухе принять равной 300000 км/с.

ЗАДАЧА № 86. На поверхность стеклянного шара в радиальном направлении одновременно приходят два луча света – красный и зеленый (см. рис.). Какой из лучей достигнет центра шара быстрее? Ответ строго обосновать.



РЕШЕНИЯ

Решения задач, приведенные ниже, составлены не с той целью, чтобы продемонстрировать, что автор умеет их решать. К сожалению, последним грешат многие изданные массовыми тиражами “решебники”. Представленные ниже решения ориентированы на самых неискушенных в этом деле студентов и школьников, и потому могут показаться местами даже избыточно подробными и навязчивыми.

Вместе с тем, автор убедительно рекомендует даже опытным “асам” прочитывать предложенный текст не “по диагонали”. Многие разъяснения, приведенные в решениях, а в особенности, те, что выделены *курсивом*, иногда окажутся способными приятно удивить учащихся, дав им возможность ознакомиться с некоторыми тонкостями, на которые они при первом подходе к задаче могли не обратить внимания или о которых могли даже не догадываться.

Единственное, что автор решил оставить читателям для самостоятельных действий – это изготовление рисунков к своему решению. Они практически отсутствуют в данной части книги. На основе приведенных подробных словесных пояснений читатель способен сделать однозначное построение. Однако, у каждого обычно существует индивидуальный подход к изготовлению иллюстраций, и по этой причине учащимся предоставляется полная свобода. Другая, не менее важная, цель такого подхода состоит в том, что самостоятельно изготовленные иллюстрации сделают прочтение этого раздела задачника менее пассивным, что принесет безусловную пользу для обучения.

А, вот, чего автор убедительно не рекомендует – это ограничиваться одним лишь чтением приведенного ниже текста без того, чтобы помогать себе воспринимать его с помощью подробных рисунков, сделанных своими руками.

Механика и колебания

ЗАДАЧА № 1 (решение).

Обратим внимание на то, что поверхность, по которой двигались шарики, была горизонтальной и гладкой, значит, скорости шаров сохраняли свои первоначальные значения в процессе всего движения. Отскок второго шарика от стены тоже не изменил величины его скорости, поскольку *при абсолютно упругом ударе о стену направление скорости меняется, но величина скорости сохраняется.*

Основным подходом к решению подобных задач на кинематику является использование такого факта, что шарик 1 и шарик 2 двигались до встречи одинаковое время. Обозначим его через $\mathbf{t}$.

За время $\mathbf{t}$ первый шарик, двигаясь с меньшей скоростью $\mathbf{v}_1$, не успел пройти расстояния $\mathbf{L}$, поскольку повстречал второй шарик еще по пути к стене на расстоянии $\mathbf{X}$ от нее. Значит, за время $\mathbf{t}$ он прошел лишь расстояние $(\mathbf{L} - \mathbf{X})$.

Второй шарик, двигаясь со скоростью $\mathbf{v}_2$, за время $\mathbf{t}$ успел дойти до стены, преодолев расстояние $\mathbf{L}$, да еще проделать путь $\mathbf{X}$ обратно, то есть всего пройти расстояние $(\mathbf{L} + \mathbf{X})$.

Поскольку движение каждого шарика было равномерным (с постоянной скоростью), время их движения можно выразить, разделив пройденное расстояние на скорость. Для первого шарика при этом

$$\mathbf{t} = (\mathbf{L} - \mathbf{X})/\mathbf{v}_1 \ ,$$

а для второго –

$$\mathbf{t} = (\mathbf{L} + \mathbf{X})/\mathbf{v}_2 \ .$$

Приравняв полученные выражения друг другу, мы найдем искомое расстояние $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \ .$$

<u>**Ответ**</u> **:** $\mathbf{X} = \mathbf{L}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1)$.

ЗАДАЧА № 2 (решение).

Пусть до положения, где пузырьки оказались на одном уровне, второй пузырек всплывал время $\mathbf{t}_2$. Так как по условию задачи первый пузырек оторвался на $\Delta\mathbf{t} = 5$ с раньше, он всплывал до той же точки большее время, которое равно

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \Delta\mathbf{t}\ .$$

Обозначим расстояние от дна кастрюли до места встречи пузырьков в воде через **X**, как предложено в условии. Первый пузырек преодолел это расстояние с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1 = 2$ см/с за время $\mathbf{t}_1$, а второй – с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2 = 6$ см/с за время $\mathbf{t}_2$. Тогда согласно формулам кинематики равномерного движения можно записать:

$$\mathbf{X} = \mathbf{v}_2\mathbf{t}_2\ ,$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{v}_1\mathbf{t}_1 = \mathbf{v}_1(\mathbf{t}_2 + \Delta\mathbf{t})\ .$$

Выразим $\mathbf{t}_2$ из первого уравнения и подставим во второе:

$$\mathbf{X} = \mathbf{v}_1(\mathbf{X}/\mathbf{v}_2 + \Delta\mathbf{t})\ .$$

Отсюда

$$\mathbf{X} = \mathbf{v}_1\Delta\mathbf{t}/(1 - \mathbf{v}_1/\mathbf{v}_2) = 15 \text{ см}\ .$$

Ответ : $\mathbf{X} = \mathbf{v}_1\Delta\mathbf{t}/(1 - \mathbf{v}_1/\mathbf{v}_2) = 15$ см .

ЗАДАЧА № 3 (решение).

Пусть до положения, где пузырьки оказались на одном уровне, второй пузырек всплывал время $\mathbf{t}_2$. Так как по условию задачи первый пузырек оторвался на $\Delta\mathbf{t}$ раньше, он всплывал до той же точки большее время, которое равно

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 + \Delta\mathbf{t}\ .$$

Обозначим расстояние от дна кастрюли до места встречи пузырьков в воде через **X**, как предложено в условии. Первый пузырек преодолел это расстояние с постоянным ускорением $\mathbf{a}_1$ за время $\mathbf{t}_1$, а второй – с постоянным ускорением $\mathbf{a}_2$ за время $\mathbf{t}_2$. Поскольку у дна никто пузырьки не подталкивал, их начальные скорости следует принять равными нулю. Тогда согласно формулам кинематики равноускоренного движения можно записать:

$$\mathbf{X} = \mathbf{a}_2\mathbf{t}_2^2/2 \quad ,$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{a}_1\mathbf{t}_1^2/2 = \mathbf{a}_1(\mathbf{t}_2 + \Delta\mathbf{t})^2/2 \quad .$$

Выразим $\mathbf{t}_2$ из первого уравнения и подставим во второе:

$$\mathbf{X} = \mathbf{a}_1[\sqrt{2\mathbf{X}/\mathbf{a}_2} + \Delta\mathbf{t}]^2/2 \quad .$$

Отсюда

$$\mathbf{X} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\Delta\mathbf{t}^2/[2(\sqrt{\mathbf{a}_2} - \sqrt{\mathbf{a}_1})^2] \quad .$$

Проанализируем полученный ответ. Несмотря на то, что его математическая форма позволяет ускорению $\mathbf{a}_1$ быть большим по величине, чем $\mathbf{a}_2$, здравый смысл подсказывает, что такое невозможно. Действительно, если бы пузырек, оторвавшийся от дна первым, имел бы еще и большее ускорение, второй пузырек никогда не настиг бы его. По этой причине в ответе следует обязательно указать, что $\mathbf{a}_2 > \mathbf{a}_1$. Если $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, второй пузырек будет гнаться за первым бесконечно долгое время, в результате чего величина $\mathbf{X}$ будет стремиться к бесконечности, что, в частности, подтверждается нашим ответом.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{X} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\Delta\mathbf{t}^2/[2(\sqrt{\mathbf{a}_2} - \sqrt{\mathbf{a}_1})^2]$ при условии $\mathbf{a}_2 > \mathbf{a}_1$.

ЗАДАЧА № 4 (решение).

В первое мгновение после полного отрыва от стола мячик еще продолжает двигаться по инерции, поэтому направление его скорости в первый момент свободного полета сохраняется горизонтальным, как это было при движении по столу. Однако, с данного момента под действием силы тяжести начинает увеличиваться от исходного нулевого значения и вертикальная скорость мяча. Таким образом, оказавшись в свободном полете, мячик приобретает два движения одновременно: одно – по горизонтали, а другое – по вертикали.

Следует четко понимать, что *эти движения независимы друг от друга. Действительно, мячик не упадет быстрее или медленнее в* *зависимости от того, какая у него горизонтальная скорость. Ведь горизонтальную скорость мяча можно очень просто сделать любой другой, совершенно не прикасаясь к нему, а просто, например, наблюдая за ним из окна транспорта, едущего по горизонтальной дороге в направлении горизонтального движения мяча. Если скорость транспорта довести, скажем, до $\mathbf{v}_0$, то мячик будет просто падать вертикально вниз, находясь все время перед нашими глазами. Согласитесь, что не может время падения мяча на землю зависеть от того, с какой скоростью мы едем в трамвае!*

Заметим, что если по вертикали сила, изменяющая скорость мячика, присутствует, то по горизонтали в условиях данной задачи таких сил нет. А если никто тебя в сторону не тянет, то и скорость твоя в эту сторону измениться не может. В частности, *вертикальная сила не может изменить горизонтальной скорости.* Таким образом, горизонтальная скорость $\mathbf{v}_0$, которую мячик имел на столе, а также сразу после отрыва от стола, так и продолжит "уносить" его от этого стола в горизонтальном направлении до самого падения на пол.

Но и после падения ничего при движении в горизонтальном направлении у мячика не изменится. Действительно, в данной задаче мы имеем дело с абсолютно упругими ударами о пол. *Абсолютно упругий отскок от тяжелого неподвижного предмета, чем, в частности, является пол, обладает следующими свойствами: 1) угол падения на плоскость равен углу отражения от нее, 2) составляющая вектора скорости, направленная вдоль плоскости, сохраняется как по величине, так и по направлению, 3) составляющая вектора скорости, нормальная к плоскости, сохраняется по величине, но изменяет направление на противоположное.*

Есть еще одно важнейшее свойство абсолютно упругих ударов: в акте таких соударений сохраняется энергия системы, потому что при соударении не выделяется теплота, в отличие от ударов неупругих. Но это свойство нам сейчас не потребуется, поскольку всю задачу мы попробуем решить без привлечения знаний об энергии, а используя лишь правила кинематики.

Пусть **H** – высота стола. Мы только что убедились в том, что время падения мяча, имеющего начальную горизонтальную скорость, и мяча, просто свободно падающего с такой же высоты, равны друг другу. *Время падения тела, имевшего на высоте* ***H*** *нулевую начальную скорость в вертикальном направлении, определяется из популярной формулы кинематики, применимой для данного случая:*

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{t}^2/2 \ ,$$

откуда

$$\boldsymbol{t} = \sqrt{2\boldsymbol{H}/\boldsymbol{g}}\,.$$

Имев нулевую начальную скорость по вертикали и двигаясь вниз равноускоренно с ускорением свободного падения **g**, *тело (мяч) к моменту приземления наберет вертикальную скорость*

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{g}\boldsymbol{t}\,,$$

горизонтальная же при этом останется, как уже обсуждалось, равной $\boldsymbol{v}_0$.

Поскольку горизонтальная и вертикальная проекции скорости перпендикулярны друг другу, то по теореме Пифагора можно выразить полную скорость **v** мяча в момент приземления:

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_1^{\,2} + \mathbf{v}_0^{\,2}\ .$$

Отсюда после подстановки $\mathbf{v}_1$ и **t** легко получить выражение для высоты стола, с которого падал мячик:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^{\,2})/2\mathbf{g}\ .$$

Тогда время его падения

$$\mathbf{t} = \sqrt{2\mathbf{H}/\mathbf{g}} = (1/\mathbf{g})\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^{\,2}}\ .$$

При свободном полете в поле тяжести время подъема на максимальную высоту равно времени спуска с этой высоты на исходный уровень (вне зависимости от горизонтальной составляющей скорости!), и наоборот. Используем это свойство для того, чтобы понять, что после отскока мяча от поверхности земли до нового удара с ней пройдет время 2**t** (взлет и падение). Поскольку условия в момент второго приземления абсолютно такие же, как в момент первого (вертикальная и горизонтальная проекции скорости у мяча остаются теми же), то при дальнейших таких отскоках время **T**, равное 2**t**, будет периодом между повторяющимися приземлениями мяча.

Частота $\mathbf{f}$ связана с периодом простым соотношением:

$$\mathbf{f} = 1/\mathbf{T} \ ,$$

откуда искомая величина

$$\mathbf{f} = 1/(2\mathbf{t}) = \mathbf{g}/(2\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2}) \ .$$

Каждый период $\mathbf{T}$ между соударениями с полом наш мячик двигался в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$, что объяснялось выше. Это означает, что за данное время он пролетал по горизонтали расстояние $\mathbf{L}$, равное

$$\mathbf{L} = \mathbf{v}_0\mathbf{T} = (2\mathbf{v}_0/\mathbf{g})\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2} \ ,$$

что и является искомым расстоянием между каждой парой его приземлений.

Поскольку скорость $\mathbf{v}$ включает в себя в качестве горизонтальной компоненты скорость $\mathbf{v}_0$, величина $\mathbf{v}^2$ заведомо больше, чем $\mathbf{v}_0^2$, поэтому подкоренное выражение в формулах, отражающих величины $\mathbf{f}$ и $\mathbf{L}$, не может быть меньше нуля. Однако, для полной математической корректности целесообразно этот факт отметить в ответе задачи.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{f} = \mathbf{g}/(2\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2})$, $\mathbf{L} = (2\mathbf{v}_0/\mathbf{g})\sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2}$,
при условии $\mathbf{v}^2 > \mathbf{v}_0^2$.

ЗАДАЧА № 5 (решение).

Решение данной задачи полностью строится на использовании известной формулы кинематики, описывающей *длину горизонтального полета $\boldsymbol{L}$ тела, брошенного с горизонтальной поверхности в поле тяжести $\boldsymbol{g}$ под углом $\boldsymbol{\beta}$ к горизонту с начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$:*

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{v}_0^2 sin(2\boldsymbol{\beta})/\boldsymbol{g} \ .$$

Присвоим индекс 1 первому телу, а индекс 2 – второму. По условию задачи длина полета первого тела $\mathbf{L}_1$ в $\sqrt{3}$ раз больше длины полета второго $\mathbf{L}_2$, что можно выразить отношением

$$\mathbf{L}_1/\mathbf{L}_2 = \sqrt{3} = [\mathbf{v}_{01}^2\sin(2\boldsymbol{\beta}_1)/\mathbf{g}]/[\mathbf{v}_{02}^2\sin(2\boldsymbol{\beta}_2)/\mathbf{g}] =$$

$$= [\mathbf{v}_{01}^2\sin(2\beta_1)]/[\mathbf{v}_{02}^2\sin(2\beta_2)]$$

Подставим в полученное соотношение значения углов $\beta_1 = 30°$ и $\beta_2 = 15°$, заданные в условии задачи, помня при этом, что $\sin 60° = \sqrt{3}/2$, а $\sin 30° = 1/2$:

$$\sqrt{3} = [\mathbf{v}_{01}^2\sin(60°)]/[\mathbf{v}_{02}^2\sin(30°)] = \sqrt{3}\,\mathbf{v}_{01}^2/\mathbf{v}_{02}^2 \quad .$$

После сокращения на $\sqrt{3}$ в левой и правой частях равенства мы получаем:

$$\mathbf{v}_{01}^2/\mathbf{v}_{02}^2 = 1 \quad ,$$

откуда

$$\mathbf{v}_{01} = \mathbf{v}_{02} \quad .$$

Таким образом, тела были брошены с одинаковыми начальными скоростями.

Ответ: Тела были брошены с **одинаковыми** начальными скоростями.

ЗАДАЧА № 6 (решение).

Ясно, что эта задача на тему "кинематика движения в поле тяжести". Решение таких задач почти всегда сводится *к выбору наиболее удобной системы координат, а затем – к применению тех или иных формул кинематики, описывающих равноускоренное и равномерное движение.* Главной проблемой является определение оптимального набора таких формул. Но, даже действуя неоптимально, все равно, как правило, удается прийти к правильному ответу, затратив, правда достаточно много времени на сложные выкладки. *Искусство решения задач по кинематике состоит в достижении верного ответа с наименьшими трудозатратами.*

Представленная задача легко решится, если обратить внимание на то, что длина шеста совпадает с максимальной высотой подъема **H** брошенного мяча, а для последней в кинематике известна легко выводимая формула:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{v}_0\sin\alpha)^2/2\mathbf{g} \quad ,$$

где $\mathbf{v}_0$ – начальная скорость, сообщенная мячу, α – угол, под которым он был брошен относительно горизонтального уровня, а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения.

Когда длину шеста удвоили, удвоилась и наибольшая высота подъема, однако, угол броска тоже изменился и стал равным β:

$$2\mathbf{H} = (\mathbf{v}_0\sin\beta)^2/2\mathbf{g} \;.$$

Разделив второе уравнение на первое, мы придем к соотношению:

$$\sin\beta = \sqrt{2}\,\sin\alpha \;.$$

Поскольку по условию задачи $\alpha = 30°$, а $\sin 30° = 1/2$, окончательным ответом будет

$$\sin\beta = \sqrt{2}\,/2 \;,$$

откуда $\beta = 45°$.

Полезно знать, что в формулировках задач по физике, где требуется найти угол, традиционно считается, что выразив какую-либо функцию угла (синус, косинус или др.), вы нашли и сам угол, поэтому нет необходимости в конце решения выражать этот угол через обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус и др.). Тем не менее, в сомнительных ситуациях не помешает, на всякий случай, поинтересоваться, какую форму ответа от вас требуют представить.

Ответ: $\beta = 45°$.

ЗАДАЧА № 7 (решение).

Аналогично решению задачи № 6 выразим наибольшую высоту $\mathbf{H}$ подъема мяча, брошенного под углом $\alpha = 30°$, а также в три раза большую высоту подъема мяча, брошенного под соответствующим углом, равным β:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{v}_0\sin\alpha)^2/2\mathbf{g} \;,$$

$$3\mathbf{H} = (\mathbf{v}_0\sin\beta)^2/2\mathbf{g} \;.$$

где $\mathbf{v}_0$ – начальная скорость, сообщенная мячу, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. Разделив второе уравнение на первое, приходим к соотношению:

$$\sin\beta = \sqrt{3}\,\sin\alpha \quad .$$

Траектория полета симметрична относительно вершины шеста, поскольку это точка максимального подъема мяча, поэтому расстояние от мальчика до основания шеста представляет собой половину дальности полета. Согласно формулам кинематики дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, записывается для каждого из рассматриваемых нами случаев в следующем виде:

для тела, брошенного под углом α

$$\mathbf{L}_1 = 2\mathbf{v}_0^2 \sin\alpha \cos\alpha \,/\mathbf{g} \ ,$$

для тела, брошенного под углом β

$$\mathbf{L}_2 = 2\mathbf{v}_0^2 \sin\beta \cos\beta \,/\mathbf{g} \ .$$

Отношение этих величин может служить характеристикой того, как мальчику следует изменить свое местоположение относительно шеста, чтобы снова сбить кубик. Запишем это отношение:

$$\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 = \sin\beta \cos\beta \,/[\sin\alpha \cos\alpha] \ .$$

Подставим сюда полученное выше выражение для $\sin\beta$ и выразим косинусы через синусы, пользуясь тем, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. В результате, получим:

$$\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 = \sqrt{3(1 - 3\sin^2\alpha)/(1 - \sin^2\alpha)} \ .$$

Поскольку по условию задачи $\alpha = 30°$, а $\sin 30° = 1/2$, окончательно получаем

$$\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 = 1 \ .$$

Иначе говоря, мальчику необходимо оставаться на месте и просто бросить мяч под углом, синус которого равен $\sqrt{3}\,\sin 30° = \sqrt{3}/2$, то есть под углом 60° к горизонту.

Ответим теперь на второй вопрос: до каких пределов можно так увеличивать длину шеста? Для этого рассмотрим соотношение, связывающее $\sin\beta$ и $\sin\alpha$. Нетрудно получить, что при увеличении длины шеста не в 3 раза, а в произвольные **k** раз, мы будем иметь

$$\sin\beta = \sqrt{\mathbf{k}}\,\sin\alpha \quad .$$

Однако, у нас $\sin\alpha = \sin 30° = 1/2$, а также очевидно, что $\sin\beta$ не может быть больше единицы, то есть

$$\sin\beta = \sqrt{\mathbf{k}}\,\sin\alpha = \sqrt{\mathbf{k}}\,/2 \le 1 \quad .$$

Отсюда вытекает, что

$$\sqrt{\mathbf{k}} \le 2 \quad \text{и} \quad \mathbf{k} \le 4 \ .$$

Таким образом, длину шеста можно увеличить не более, чем в четыре раза. При этом в предельном случае получается, что $\sin\beta = 1$, то есть подбрасывание мяча следует производить вертикально вверх.

Ответ: Мальчику нужно оставаться на месте. Длину шеста можно максимально увеличить в 4 раза.

ЗАДАЧА № 8 (решение).

Данная задача является более общим случаем задачи № 7. Снова выразим наибольшую высоту $\mathbf{H}$ подъема мяча, брошенного под углом α, а также в $\mathbf{k}$ раз большую высоту подъема мяча, брошенного под соответствующим углом β:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{v}_0\sin\alpha)^2/2\mathbf{g} \ ,$$

$$\mathbf{kH} = (\mathbf{v}_0\sin\beta)^2/2\mathbf{g} \ .$$

где $\mathbf{v}_0$ – начальная скорость, сообщенная мячу, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. Разделив второе уравнение на первое, получаем

$$\sin\beta = \sqrt{\mathbf{k}}\,\sin\alpha \quad .$$

Траектория полета симметрична относительно вершины шеста. При этом, дальность полета $\mathbf{L}_1$ тела, брошенного под углом α к горизонту,

$$\mathbf{L}_1 = 2\mathbf{v}_0^2 \sin\alpha \cos\alpha \,/\mathbf{g} \ ,$$

а под углом β –

$$\mathbf{L}_2 = 2\mathbf{v}_0^2 \sin\beta \cos\beta \,/\mathbf{g} \ .$$

Рассмотрим отношение этих величин:

$$\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 = \sin\beta\cos\beta\,/[\sin\alpha\cos\alpha]\ .$$

Подставим сюда полученное выше выражение для $\sin\beta$ и выразим косинусы через синусы, пользуясь тем, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. В результате, получим:

$$\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 = \sqrt{\mathbf{k}(1 - \mathbf{k}\sin^2\alpha)/(1 - \sin^2\alpha)}\ .$$

Чтобы понять, какая из величин – $\mathbf{L}_2$ или $\mathbf{L}_1$ – больше (и отсюда разобраться о направлении перемещения мальчика), необходимо исследовать последнее уравнение, которое, как видно, зависит от двух параметров – $\mathbf{k}$ и α. Ясно, что если $\mathbf{L}_2 > \mathbf{L}_1$, мальчик должен отойти от шеста, в противном случае – приблизиться к нему.

Сделаем пока фиксированным угол α и посмотрим, как ведет себя отношение $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$ при изменении $\mathbf{k}$. Нетрудно видеть, что под знаком корня в последнем выражении стоит квадратный трехчлен с нулевым свободным членом, а именно, функция

$$Y(\mathbf{k}) = \mathbf{k}(1 - \mathbf{k}\sin^2\alpha) = \mathbf{k} - \mathbf{k}^2\sin^2\alpha\ .$$

Известно, что график этой функции представляет собой перевернутую параболу, положение максимума которой находится по известной формуле “–b/(2a)”. В нашем случае максимум расположен при значении $\mathbf{k}$, равном

$$\mathbf{k}_m = 1/(2\sin^2\alpha)\ .$$

При значении угла $\alpha = 30°$ мы получаем $\mathbf{k}_m = 2$.

Разберемся, о чем это говорит. Поскольку при значении $\mathbf{k} = \mathbf{k}_m$ мы имеем максимальное значение отношения $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$, то это значит, что при увеличении исходной высоты шеста в 2 раза мальчик должен отойти от него на максимальное расстояние. При этом, как нетрудно вычислить из формулы для $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$, мы имеем

$$\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 = 2/\sqrt{3} \approx 1.155\ .$$

Таким образом, вырисовывается следующая картина. В самом начале, когда шест только еще начинают удлинять (то есть при $1 < \mathbf{k} < 2$), отношение $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$ растет, пока при $\mathbf{k} = 2$ ни достигнет максимального значения $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 \approx 1.155$. Следовательно, в этих пределах увеличения длины шеста мальчик должен отходить от него, чтобы достигнуть желаемого результата. При $\mathbf{k} = 2$ отношение $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$ переваливает через максимум и при $\mathbf{k} > 2$ уменьшается, оставаясь все еще больше единицы. Значение, равное 1, отношение $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$ принимает при $\mathbf{k} = 3$. При дальнейшем увеличении $\mathbf{k}$ (до максимально возможного значения $\mathbf{k} = 4$, как показано в решении задачи № 7) отношение $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$ становится меньше 1, то есть при $3 < \mathbf{k} < 4$ мальчик должен приблизиться к шесту, пока при $\mathbf{k} = 4$ ни уткнется в него ($\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1 = 0$). Если значение $\mathbf{k}$ в точности равно трем, мальчик должен остаться на месте, изменив лишь угол броска, что доказано в решении задачи № 7.

<u>Ответ:</u> при $1 < \mathbf{k} < 3$ мальчик должен отойти от шеста,
а при $3 < \mathbf{k} < 4$ – приблизиться к нему.

ЗАДАЧА № 9 (решение).

Прежде всего, поймем, в каком состоянии оказался кошелек сразу после того, как покинул стол.

Поскольку соскальзывание со стола произошло случайно, самопроизвольно, и относительно стола его никто не толкал, то в первый момент свободного полета кошелек еще продолжал двигаться по инерции с той скоростью, которую имел вместе со столом. Так как в условии сказано, что отрыв от стола произошел в самой верхней кабинке, движение которой в верхней точке колеса обозрения, очевидно, только горизонтальное, то и кошелек в момент отрыва имел лишь горизонтальную составляющую скорости.

Эту горизонтальную линейную скорость $\mathbf{v}_\Gamma$ кошелька относительно земли можно легко определить, воспользовавшись выражением для центростремительного ускорения $\mathbf{a}_0$, значение которого для момента отрыва дано в условии задачи:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{v}_\Gamma^{\,2}/\mathbf{R} \quad ,$$

откуда

$$\mathbf{v}_\Gamma^{\,2} = \mathbf{a}_0\mathbf{R} \quad .$$

Преодоление кошельком вертикального расстояния $\mathbf{R}$ происходило независимо от горизонтального движения. Так как скорость кошелька по вертикали в самой верхней точке была равна нулю, к моменту достижения уровня центра колеса она примет значение $\mathbf{v}_В$, которое можно выразить из кинематического соотношения

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_В^2/(2\mathbf{g}) \ ,$$

откуда

$$\mathbf{v}_В^2 = 2\mathbf{gR} \ .$$

По теореме Пифагора можно найти полную мгновенную скорость $\mathbf{v}$ кошелька при пролете уровня центра колеса:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_Г^2 + \mathbf{v}_В^2} = \sqrt{(\mathbf{a}_0 + 2\mathbf{g})\mathbf{R}} \ .$$

Радиус кривизны $\mathbf{R}_К$ траектории в этот момент найдем из соотношения

$$\mathbf{R}_К = \mathbf{v}^2/\mathbf{a}_Ц \ ,$$

где $\mathbf{a}_Ц$ – центростремительное ускорение кошелька при пролете уровня центра колеса.

Осталось определить $\mathbf{a}_Ц$. Очевидно, что единственной силой, обеспечивающей полное ускорение кошелька, является сила тяжести, следовательно, в соответствии со вторым законом Ньютона полное ускорение кошелька в любой момент его полета равно $\mathbf{g}$. Роль центростремительного ускорения $\mathbf{a}_Ц$ выполняет проекция этого полного ускорения, направленная внутрь траектории перпендикулярно вектору скорости $\mathbf{v}$.

Нетрудно увидеть, нарисовав вектора $\mathbf{g}$, $\mathbf{v}$ и их проекции, что угол между проекцией вектора $\mathbf{g}$, выполняющей роль $\mathbf{a}_Ц$, и самим вектором $\mathbf{g}$ в точности такой же, как угол между горизонтальной составляющей $\mathbf{v}_Г$ скорости $\mathbf{v}$ и самим вектором скорости $\mathbf{v}$. Соответственно, равны и косинусы этих углов:

$$\mathbf{a}_Ц/\mathbf{g} = \mathbf{v}_Г/\mathbf{v} \ ,$$

причем величина $\mathbf{v}_Г$ здесь та же самая, что была у кошелька в момент отрыва, поскольку в горизонтальном направлении на него никакие силы во время полета не действовали, и потому не могли изменить эту составляющую скорости.

Из последнего соотношения можно выразить $\mathbf{a}_Ц$:

$$\mathbf{a}_Ц = \mathbf{g}\mathbf{v}_Г/\mathbf{v} \ .$$

Теперь осталось подставить в выражение для $\mathbf{R}_К$ найденные выше соотношения для $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}_Ц$ и получить окончательно:

$$\mathbf{R}_К = \mathbf{R}(2 + \mathbf{a}_0/\mathbf{g})\sqrt{1 + 2\mathbf{g}/\mathbf{a}_0} = 21\sqrt{21} \approx 96.2 \text{ м} .$$

<u>**Ответ:**</u> $\mathbf{R}_К = \mathbf{R}(2 + \mathbf{a}_0/\mathbf{g})\sqrt{1 + 2\mathbf{g}/\mathbf{a}_0} \approx 96.2 \text{ м}$.

ЗАДАЧА № 10 (решение).

Эта задача является типичным примером, принадлежащим к классу задач по кинематике, которые можно было бы образно назвать "задачи на формулы". Кинематика, по сути, не относится к физике как к науке о природе. Она, скорее, сродни математике, поскольку, как и последняя, лишь формально описывает закономерности движения тел, не вдаваясь в фундаментальные причины такого движения.

Тем не менее, когда истинная физика выявляет, к примеру, то, что сумма сил, действующих на интересующее ее тело, остается на протяжении всего процесса постоянной, а значит, и ускорение тела будет в этом процессе постоянным, то она обращается за помощью к кинематике, которая "знает", как математически описать движение с постоянным ускорением во всех его проявлениях.

В каждый момент времени вектор скорости нашей частицы можно составить из двух проекций. При этом одна проекция, направленная вдоль оси Z и равная по величине $\mathbf{v}_0$, остается постоянной, что следует из условия задачи, поскольку закон $z = \mathbf{v}_0 t$ описывает равномерное движение.

Другая проекция, которую можно обозначить через $\mathbf{v}_t$, направлена вдоль поверхности цилиндра перпендикулярно направлению Z. Она вместе с частицей вращается по окружности, задаваемой радиусом цилиндра, постоянно огибая этот цилиндр и, соответственно, постоянно изменяя свое направление.

За время $d\mathbf{t}$ точка, которой сопоставлена частица на данной окружности, проходит вместе с частицей дугу длиной $d\mathbf{l}$, ограниченную углом $d\varphi$. Согласно известному математическому соотношению длина этой дуги

$$d\mathbf{l} = \mathbf{R}d\varphi \;,$$

поэтому линейная скорость частицы вдоль окружности

$$\mathbf{v}_t = d\mathbf{l}/d\mathbf{t} = \mathbf{R}d\varphi/d\mathbf{t} = \mathbf{R}\omega = 2\mathbf{R}\beta_0\mathbf{t}\ .$$

При дифференцировании угла по времени мы учли то, что по условию задачи $\varphi(\mathbf{t}) = \beta_0\mathbf{t}^2$.

Вдоль третьей независимой координаты, а именно, в радиальном направлении цилиндра, скорость равна нулю, поскольку радиус цилиндра не изменяется.

Таким образом, модуль скорости $\mathbf{v}$ частицы согласно теореме Пифагора равен

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_t^2} = \sqrt{\mathbf{v}_0^2 + (2\mathbf{R}\beta_0\mathbf{t})^2}\ .$$

Зная эту зависимость $\mathbf{v}(t)$, мы можем выразить ускорение частицы вдоль траектории ее движения, продифференцировав последнее выражение по времени. Однако, это не будет ответом на вопрос, фигурирующий в задаче, хотя бы потому, что кроме ускорений вдоль поверхности есть еще центростремительная составляющая, отвечающая за вращение частицы вокруг оси цилиндра.

Для нахождения искомого ускорения воспользуемся плодотворным приемом, который отлично работает в ситуациях, аналогичных той, что имеет место в нашей задаче. А именно, наша ситуация выигрышна тем, что вдоль оси Z частица дрейфует с постоянной по величине и направлению скоростью $\mathbf{v}_0$, поэтому система отсчета, сопровождающая частицу вдоль оси цилиндра с такой же скоростью, является инерциальной со всеми вытекающими отсюда положительными последствиями.

Перейдем в эту инерциальную систему отсчета. Из нее мы увидим, что частица совершает вращательное движение по окружности радиуса $\mathbf{R}$ с линейной скоростью $\mathbf{v}_t$, выражение для которой найдено выше, и вдоль этой круговой траектории совершает равноускоренное движение с постоянным ускорением

$$\mathbf{a}_t = 2\mathbf{R}\beta_0\ ,$$

которое легко получить, продифференцировав выражение для $\mathbf{v}_t$ по времени.

Центростремительная часть ускорения частицы, нормальная к направлению вектора скорости $\mathbf{v}_t$, при этом определяется классическим кинематическим соотношением

$$\mathbf{a}_{\text{Ц}} = \mathbf{v}_t^2/\mathbf{R} = 4\mathbf{R}(\beta_0\mathbf{t})^2 \ .$$

Тогда в выбранной системе отсчета полное ускорение **a** частицы согласно теореме Пифагора равно

$$\mathbf{a} = \sqrt{\mathbf{a}_t^2 + \mathbf{a}_{\text{Ц}}^2} = 2\mathbf{R}\beta_0\sqrt{1 + 4\beta_0^2\mathbf{t}^4} \ .$$

Теперь осталось лишь воспользоваться тем, крайне полезным, свойством, что ускорение инвариантно по отношению к любой инерциальной системе отсчета. То есть при переходах в любые инерциальные системы отсчета ускорение тела останется по величине и направлению одним и тем же. Это легко доказывается путем дифференцирования векторов скорости по времени в соотношениях, называемых преобразованиями Галилея для скоростей. Соответственно, найденные выше выражения для **a** и $\mathbf{a}_{\text{Ц}}$ будут в инерциальной лабораторной системе отсчета такими же по величине и направлению, какими мы их нашли в системе, движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$.

Ответ: $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_0^2 + (2\mathbf{R}\beta_0\mathbf{t})^2}$;
$\mathbf{a}_{\text{Ц}} = 4\mathbf{R}(\beta_0\mathbf{t})^2$;
$\mathbf{a} = 2\mathbf{R}\beta_0\sqrt{1 + 4\beta_0^2\mathbf{t}^4}$.

ЗАДАЧА № 11 (решение).

Стандартные задачи на движение в поле тяжести обычно не учитывают присутствие воздуха, и фраза “сопротивлением воздуха пренебречь” сопровождает практически все задачи кинематики. В настоящем же случае мы сталкиваемся с присутствием силы сопротивления воздуха, которая, безусловно, должна внести свои коррективы в решение.

Движение тела в вязкой среде (воде, воздухе и пр.) приводит к появлению силы сопротивления ***F****, которая действует на тело в направлении, противоположном направлению его движения относительно этой среды. Природа силы вязкого трения обусловлена соударением тела с молекулами, составляющими данную среду.*

Заметим, что ветер, подталкивающий тела к движению, имеет ту же самую природу. Действительно, дуновение ветра – это движение молекул воздуха. Налетая на тело, молекулы сталкиваются с его поверхностью и увлекают в направлении своего движе-

ния. Пока тело не разогнано до скорости ветра, молекулы потока воздуха всегда обгоняют тело. Но если перейти в систему отсчета, связанную с воздухом, то получится, что воздух покоится, а тело перемещается "навстречу ветру". При этом возникает сила сопротивления, действующая на тело в направлении против его скорости в данной стоячей среде, а, значит, эта сила действует "по ветру".

Величина силы вязкого трения зависит от относительной скорости тела и среды, и чем больше скорость, тем сильнее воздействие этой среды. Однако, в рамках определенных приближений можно иногда принимать эту силу постоянной, что мы и имеем в нашей задаче.

Опишем динамику каждого из мячей. Условия их движения различаются тем, что на мяч, летящий сверху вниз, сила тяжести направлена вниз, а сила сопротивления воздуха $\mathbf{F}$ – вверх, в то время как на мяч, запущенный вверх, обе эти силы действуют в одну сторону, а именно, вниз.

Соответственно, второй закон Ньютона для мяча, отпущенного сверху, выглядит так:

$$\mathbf{ma}_1 = \mathbf{mg} - \mathbf{F} \ ,$$

а для запущенного снизу – так:

$$\mathbf{ma}_2 = \mathbf{mg} + \mathbf{F} \ .$$

Здесь $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ – ускорение первого и второго мяча, соответственно. Выразим эти ускорения:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{g} - \mathbf{F/m} \ ,$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{g} + \mathbf{F/m} \ .$$

Перейдем теперь к описанию кинематики движения мячей. Заметим, что полученные выше выражения для $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ представляют собой комбинацию постоянных величин, а значит, ускорения мячей постоянные и можно применять формулы кинематики равноускоренного движения.

Проверка того, является ли ускорение постоянным, – важный этап решения задач по механике. Довольно часто бывает, что ускорение зависит от времени, скорости или координаты, а школь-

ник или студент, не обратив на это внимание, применяет к описанию такой системы формулы кинематики равноускоренного движения. Убедитесь, что ускорение равно константе – и только после этого используйте хорошо известные вам формулы для движения с постоянным ускорением!

Мяч, отпущенный сверху, имел нулевую начальную скорость, поэтому высота **H**, которую он преодолел сверху вниз, связана со временем полета **t** известным соотношением

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_1\mathbf{t}^2/2 \ .$$

Вертикальная координата **H**, которую достиг второй мяч за то же самое время **t** (по условию задачи мячи были брошены и пойманы одновременно), описывается другой известной формулой:

$$\mathbf{H} = \mathbf{v}_0\mathbf{t} - \mathbf{a}_2\mathbf{t}^2/2 \ ,$$

где $\mathbf{v}_0$ – искомая начальная скорость, сообщенная мячику вторым мальчиком. Напомним, что выбор знаков у слагаемых в этом уравнении определяется тем, что координата (**H**) отсчитывается вверх, скорость ($\mathbf{v}_0$) тоже направлена вверх, а ускорение ($\mathbf{a}_2$) направлено вниз.

Из первого уравнения для **H** можно выразить время полета мяча:

$$\mathbf{t} = \sqrt{2\mathbf{H}/\mathbf{a}_1} \ .$$

Скорость $\mathbf{v}_0$ можно легко выразить после вычитания первого уравнения для **H** из второго и подстановки полученного выше выражения для **t**:

$$\mathbf{v}_0 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\sqrt{\mathbf{H}/(2\mathbf{a}_1)} \ .$$

Подставив сюда полученные выше выражения для ускорений мячиков, получим окончательно:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{g}\sqrt{2\mathbf{H}/(\mathbf{g} - \mathbf{F}/\mathbf{m})} \ .$$

Для того, чтобы ответ оставался корректным, необходимо потребовать выполнение условия:

$$\mathbf{g} > \mathbf{F}/\mathbf{m} \ .$$

Заметим, что в отсутствии сопротивления воздуха, то есть при **F**

= 0, мы получаем ответ

$$\mathbf{v}_0 = \sqrt{2\mathbf{gH}} ,$$

который нетрудно вывести, решая обычную задачу кинематики, где “сопротивлением воздуха можно пренебречь”.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{v}_0 = \mathbf{g}\sqrt{2\mathbf{H}/(\mathbf{g} - \mathbf{F}/\mathbf{m})}$ при условии $\mathbf{g} > \mathbf{F}/\mathbf{m}$.

ЗАДАЧА № 12 (решение).

С момента, когда водитель ударил по тормозам и одновременно коснулся клаксона, до момента, когда автомобиль остановился и водитель услышал короткое эхо, звук прошел суммарное расстояние **S**, составленное из следующих отрезков: 1) тормозной путь автомобиля **L**, 2) расстояние **X** от конца тормозного пути до стены, 3) расстояние **X** от стены до конца тормозного пути:

$$\mathbf{S} = \mathbf{L} + 2\mathbf{X} .$$

Отсюда, зная скорость звука в воздухе **c**, легко найти время, которое звук “пролетал” это расстояние:

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}/\mathbf{c} = (\mathbf{L} + 2\mathbf{X})/\mathbf{c} .$$

Ровно то же самое время **t** автомобиль тормозил, скользя по горизонтальной дороге. Динамика его движения в горизонтальном направлении описывается вторым законом Ньютона:

$$\mathbf{ma} = \mu\mathbf{N} ,$$

где **m** – масса автомобиля, **a** – его ускорение, а **N** – сила реакции горизонтальной опоры, действующей на автомобиль в процессе скольжения. Силу **N** найдем из второго закона Ньютона, записанного для автомобиля в вертикальном направлении, в котором он покоится:

$$0 = \mathbf{N} - \mathbf{mg} ,$$

откуда

$$\mathbf{N} = \mathbf{mg} .$$

С учетом предыдущего уравнения теперь можно выразить ускорение автомобиля:

$$\mathbf{a} = \mu\mathbf{g} \quad .$$

Поскольку ускорение получилось постоянным, можно для описания движения автомобиля воспользоваться формулами кинематики равноускоренного движения. В нашем случае самое простое – это “обратить” движение автомобиля, приняв во внимание, что *процесс торможения при равноускоренном движении тела в направлении “туда” симметричен процессу ускорения на аналогичном участке траектории в направлении “обратно”*. Наш автомобиль на участке длиной **L**, двигаясь с ускорением, по величине равным **a**, теряет скорость до нуля за время **t**. В силу изложенного выше принципа этот автомобиль, начав движение с нулевой скоростью и сохраняя постоянным ускорение **a**, пройдет путь **L** за время **t**. Последний процесс легко описывается соотношением:

$$\mathbf{L} = \mathbf{at}^2/2 \quad .$$

Подставив сюда найденные выше выражения для **a** и **t**, легко получить искомую величину **X**:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{c}\sqrt{2\mathbf{L}/(\mu\mathbf{g})} - \mathbf{L}]/2 \quad .$$

Обратим внимание на то, что данный ответ имеет физический смысл, лишь если $\mathbf{X} \geq 0$. Это требование накладывает определенные ограничения на параметры задачи. Положив $\mathbf{X} \geq 0$, мы получаем:

$$2\mathbf{c}^2/(\mu\mathbf{gL}) \geq 1 \quad .$$

<u>**Ответ:**</u> $\mathbf{X} = [\mathbf{c}\sqrt{2\mathbf{L}/(\mu\mathbf{g})} - \mathbf{L}]/2$ при условии $2\mathbf{c}^2/(\mu\mathbf{gL}) \geq 1$.

ЗАДАЧА № 13 (решение).

Так как в условии задачи сказано, что снаряд разорвался в верхней точке своей траектории, он обладал в этот момент лишь горизонтальной составляющей скорости, *равной $v_0\cos\alpha$, поскольку именно такая горизонтальная проекция скорости была сообщена ему при взлете, и эта проекция сохранялась неизменной на протяжении всего полета из-за отсутствия горизонтальных сил, действовавших на снаряд.*

Этап разрыва снаряда можно описать с помощью закона сохранения импульса в горизонтальном направлении. Как выше уже было сказано, никаких горизонтальных внешних сил на рассматриваемую систему не действовало, поэтому ее суммарный импульс после разрыва сохранился таким же по величине и направлению, какой был до него:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_0\cos\alpha = (\mathbf{M}/2)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{M}/2)\mathbf{v}_2 \ ,$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – скорости переднего (острого) и заднего осколков, соответственно.

Заметим, что все записанные импульсы как до разрыва, так и после, взяты с одинаковыми положительными знаками, что означает движение всех частей нашей системы в одном направлении – вперед по ходу снаряда. Если для целого снаряда и его переднего осколка такое решение вполне обоснованно, ибо мы знаем, что они, действительно, двигались в одном направлении, то для заднего – это лишь в порядке предположения, поскольку после разрыва он вполне мог лететь и в обратную сторону. *Реальное направление его скорости можно узнать путем решения записанного выше уравнения: если выражение для $\mathbf{v}_2$ окажется положительным, то задняя часть, действительно, полетела вперед, а если отрицательным – то назад.*

По условию задачи скорость переднего осколка удвоилась по сравнению с тем, какая была у снаряда до разрыва, откуда

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_0\cos\alpha \ .$$

Подставив эту скорость в записанное выше уравнение, мы получаем, что

$$\mathbf{v}_2 = 0.$$

Это означает, что задний осколок сразу после разрыва снаряда остановился.

Очевидно, что после мгновенной остановки он начал падать вертикально вниз с некоторым ускорением **a**. При этом на него действовали две внешние силы: вниз – сила тяжести $(\mathbf{M}/2)\mathbf{g}$, а вверх – сила сопротивления воздуха, равная согласно условию задачи $\mathbf{M}\mathbf{g}/4$. Соответственно, второй закон Ньютона для заднего осколка, записанный по вертикальному направлению, можно выразить так:

$$(\mathbf{M}/2)\mathbf{a} = (\mathbf{M}/2)\mathbf{g} - \mathbf{M}\mathbf{g}/4 \ ,$$

откуда

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}/2 \ .$$

Отметим, что с момента разрыва снаряда оба осколка начали падение одновременно с одной и той же высоты. Передний при этом осуществлял свободное падение в поле тяжести **g**, поскольку кроме силы тяжести никаких других внешних сил не испытывал, а задний падал с найденным выше ускорением **g**/2.

Движение переднего осколка по вертикали происходило независимо от его перемещения в горизонтальном направлении, поэтому если максимальную высоту подъема снаряда, где произошел разрыв, обозначить через **H**, то для первого осколка, падавшего время $\mathbf{t}_1$ можно записать

$$\mathbf{H} = \mathbf{g}\mathbf{t}_1^2/2 \ ,$$

а для второго, падавшего время $\mathbf{t}_2$ –

$$\mathbf{H} = (\mathbf{g}/2)\mathbf{t}_2^2/2 \ .$$

Высоту **H** можно выразить из известного кинематического соотношения для *максимальной высоты подъема тела, брошенного в поле тяжести* ***g*** *под углом* $\boldsymbol{\alpha}$ *к горизонту с начальной скоростью* $\boldsymbol{v_0}$*:*

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{v_0}^2 sin^2\boldsymbol{\alpha}/2\boldsymbol{g} \ .$$

Подставив последнее соотношение в два предыдущих, мы можем выразить искомую разницу во времени приземления осколков:

$$\Delta\mathbf{t} = \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = (\mathbf{v}_0\sin\alpha/\mathbf{g})(\sqrt{2} - 1) \ .$$

<u>Ответ:</u> $\Delta\mathbf{t} = (\mathbf{v}_0\sin\alpha/\mathbf{g})(\sqrt{2} - 1)$.

ЗАДАЧА № 14 (решение).

Прежде всего, отметим, что согласно условию задачи масса снаряда равна 2**M**, а время прохода ракетой контрольного расстояния после выстрела равно **t**/3, где **t** – время движения от старта до выстрела. Таким образом, до выстрела масса укомплектованной ракеты была равна 3**M**. Потерей массы топлива при движении можно пренебречь, поскольку эта масса согласно условию задачи была значительно меньше массы ракеты.

Пока выстрел еще не был произведен, на движущуюся ракету со снарядом действовали две внешние силы: сила тяги двигателей **F**, направленная в космос по оси, идущей от центра Земли (ракета по условию удаляется от планеты радиально), и сила притяжения к Земле, направленная к центру Земли. Соответственно, второй закон Ньютона в радиальном направлении для ракеты со снарядом можно записать так:

$$3\mathbf{M}\mathbf{a}_1 = \mathbf{F} - 3\mathbf{M}\mathbf{g} \ ,$$

а для ракеты, освободившейся от снаряда после выстрела:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{M}\mathbf{g} \ ,$$

где $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ – ускорения ракеты до выстрела и после, соответственно.

Разделив эти уравнения друг на друга, получим соотношение, которое нам в дальнейшем понадобится:

$$\mathbf{a}_2/\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{F}/(\mathbf{F} - 3\mathbf{M}\mathbf{g}) + 1 \ .$$

В силу того, что

1) начальная скорость ракеты в обоих случаях (на старте и сразу после отдачи при выстреле) была нулевой,

2) пройденные контрольные расстояния равны друг другу,

3) суммарная внешняя сила, ускоряющая ракету, в обоих случаях оставалась постоянной, и потому движение в обоих случаях было равноускоренным, мы можем записать соотношение, выражающее равенство пройденных ракетой расстояний:

$$\mathbf{a}_1\mathbf{t}^2/2 = \mathbf{a}_2(\mathbf{t}/3)^2/2 \ .$$

Отсюда

$$\mathbf{a}_2/\mathbf{a}_1 = 9 \ .$$

Приравняв ранее найденное отношение ускорений $\mathbf{a}_2/\mathbf{a}_1$ к этому значению, окончательно получим:

$$\mathbf{F} = 4\mathbf{M}\mathbf{g} \ .$$

Ответ: $\mathbf{F} = 4\mathbf{M}\mathbf{g}$.

ЗАДАЧА № 15 (решение).

Указание в условии задачи на движение тела по круговой траектории подсказывает, что наверняка придется воспользоваться законами, описывающими кинематику и/или динамику криволинейного движения (в простом варианте – движения по окружности).

Несмотря на то, что в первый момент после того, как грузику сообщили скорость, он движется, практически, вертикально, все-таки уже через малый промежуток времени $d\mathbf{t}$ его вектор линейной скорости начнет отклоняться от прямой, иначе движение не было бы криволинейным. А *раз есть изменение направления скорости, значит есть изменение вектора скорости, а раз изменение вектора скорости не равно нулю за время* $d\mathbf{t}$*, значит есть и ненулевое ускорение.*

За изменение направления вектора скорости точки отвечает вектор центростремительного ускорения. Он всегда направлен к центру мгновенной окружности, которую можно вписать в малый участок траектории в том месте, где сейчас находится движущаяся точка.

Радиус $\boldsymbol{R}_к$ *этой окружности называют мгновенным радиусом кривизны траектории. Ясно, что при движении тела по окружности постоянного радиуса* $\boldsymbol{R}$ *радиусом кривизны и будет сам радиус* $\boldsymbol{R}$*, а стрелка вектора центростремительного ускорения при этом всегда будет направлена на центр окружности, по которой движется тело.*

Нетрудно показать, что *центростремительное ускорение* $\boldsymbol{a}_ц$ *выражается через мгновенную линейную скорость* $\boldsymbol{v}$ *движущейся точки, через угловую скорость* $\boldsymbol{\omega}$*, связанную с вращением этой точки вокруг центра мгновенной окружности, и через мгновенный радиус кривизны* $\boldsymbol{R}_к$ *траектории следующим образом:*

$$\boldsymbol{a}_ц = \boldsymbol{v}^2/\boldsymbol{R}_к = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{R}_к .$$

При этом величины $\boldsymbol{v}$ *и* $\boldsymbol{\omega}$ *связаны соотношением*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{R}_к .$$

Представленные выше две формулы чрезвычайно полезно помнить и всегда использовать, когда встречаете задачи с криволинейными траекториями движения тел, в частности, с движением тел по окружности.

Поскольку после слова "центростремительное" было произнесено слово "ускорение", то, безусловно, в создании физической картины криволинейного движения у нас обязаны участвовать внешние силы, действующие на тело. Это следует из второго закона Ньютона, согласно которому "есть ускорение – значит, есть и сила".

Поскольку центростремительное ускорение направлено к центру мгновенной окружности, то согласно второму закону Ньютона и векторная сумма сил, действующих на тело, спроецированная на радиальное направление, должна быть направлена на центр той же окружности. Проекции сил, нормальные к радиальному направлению, не участвуют в придании телу центростремительного ускорения, то есть не участвуют в повороте ее вектора скорости. И наоборот, центростремительное ускорение не описывает изменение величины скорости тела вдоль окружности, а значит, радиальные силы не приводят к изменению величины скорости.

Сразу после того, как грузику сообщили начальную скорость, на него стали действовать две внешние силы: сила тяжести – вертикально вниз и сила натяжения нити – радиально в сторону центра вращения. Как только что было пояснено, сила тяжести в этот момент не принимала никакого участия в создании центростремительного ускорения груза, поэтому второй закон Ньютона для груза в горизонтальном (совпадающим в начальный момент с радиальным) направлении записывается так:

$$\mathbf{ma_{ц}} = \mathbf{mv}_1^2/\mathbf{R} = \mathbf{T}\ ,$$

где $\mathbf{R}$ – длина нити, на которой вращается груз, а $\mathbf{v}_1$ – начальная скорость груза (пока нить еще не вышла из горизонтального положения).

В нижней точке траектории на груз действуют также две силы. Сила натяжения нити, равная по условию задачи $10\mathbf{T}$, тянет его вверх, а сила тяжести $\mathbf{mg}$ – вниз. В отличие от первого случая, сила тяжести теперь принимает самое непосредственное участие в создании центростремительного ускорения, поскольку вся целиком является проекцией на радиальное направление, хоть и "смотрит" в противоположную сторону от центра вращения и потому во втором законе Ньютона берется с отрицательным знаком:

$$\mathbf{mv}_2^2/\mathbf{R} = 10\mathbf{T} - \mathbf{mg}\ ,$$

где $\mathbf{v}_2$ – скорость груза в нижней точке траектории, когда нить ориентирована вертикально.

Этих двух уравнений пока не хватает, чтобы ответить на вопрос задачи. Третье, недостающее, уравнение мы возьмем, записав закон сохранения энергии для груза.

Если отсчет потенциальной энергии вести от горизонтального уровня начального положения груза, то в этом начальном положении груз обладает только кинетической ненулевой энергией $\mathbf{mv}_1{}^2/2$. В нижнем положении его потенциальная энергия становится ненулевой, принимает отрицательное значение и делается равной ($-\mathbf{mgR}$), поскольку груз теперь находится на горизонтальном уровне, который на $\mathbf{R}$ ниже исходного. Также в нижнем положении груз обладает кинетической энергией $\mathbf{mv}_2{}^2/2$.

На первый взгляд, нет никаких противопоказаний для сохранения полной механической энергии груза при его переходе из начального состояния в конечное. Однако, это не так. Обратите внимание: на протяжении всего пути от исходной до конечной точки на груз действовала внешняя сила, которая имела потенциальную возможность совершить работу над грузом и тем самым изменить его энергию. Такой силой была сила натяжения нити.

Однако, при ближайшем рассмотрении можно заметить, что *в течение каждого промежутка времени d**t** сила натяжения нити была приложена к грузу радиально. Сам же груз осуществлял за это время перемещение d**l** = **v**d**t** вдоль вектора своей мгновенной скорости **v**, которая была направлена по касательной к окружности, то есть была перпендикулярна радиусу и, соответственно, перпендикулярна силе натяжения.*

*Поскольку работа силы по определению равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения, элементарная работа силы натяжения нити на любом участке d**l** была равна нулю, так как скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. Следовательно, сила натяжения не совершила работу над грузом.*

Заметим, что аналогичным образом не совершает работу и сила реакции опоры, которая всегда нормальна к поверхности, по которой скользят тела. Однако, принимать за догму то, что ни сила натяжения, ни сила реакции опоры никогда работы не совершают, глубоко ошибочно. При рассмотрении тех же самых физических явлений из движущихся систем отсчета можно получить такие условия, когда точка приложения указанных сил станет переме-

щаться уже не перпендикулярно вектору силы, и данные силы при рассмотрении из этих систем отсчета начнут совершать работу.

Таким образом, для груза можно записать закон сохранения энергии:

$$(\mathbf{mv_2}^2/2 - \mathbf{mgR}) - \mathbf{mv_1}^2/2 = 0 \ .$$

Теперь, решая совместно все три полученные уравнения, мы сможем определить искомую массу:

$$\mathbf{m} = 3\mathbf{T}/\mathbf{g} \ .$$

Ответ: $\mathbf{m} = 3\mathbf{T}/\mathbf{g}$.

ЗАДАЧА № 16 (решение).

Эта задача, хоть и похожа на стандартную задачу о соскальзывании грузика с наклонной плоскости, но существенно отличается от нее. В стандартных задачах такого типа коэффициент трения у нас оставался постоянным на протяжении всего пути. В результате, получалось так, что сумма сил, действующих на грузик в направлении вдоль плоскости горки, оставалась постоянной при скольжении, поэтому, согласно закону Ньютона, и ускорение грузика было постоянным. В итоге, мы могли свободно применять формулы кинематики равноускоренного движения.

Здесь же суммарная сила, действующая на груз вдоль плоскости горки, не остается постоянной из-за переменной силы трения, поэтому все привычные формулы равноускоренного движения оказываются для данной задачи недействительными.

Продуктивным подходом к решению данной задачи является использование закона изменения энергии. Применим его.

В начальный момент времени наш грузик покоится, следовательно, его кинетическая энергия равна нулю. При этом он находится на некоторой высоте **h** относительно уровня самой нижней точки, куда он сможет доскользить. Если обозначить максимальную длину его пути вдоль горки через **L** (ее и надо найти), то нетрудно видеть из геометрического построения, что величины **h** и **L** связаны соотношением

$$\mathbf{h} = \mathbf{L}\sin\beta \ .$$

Из этого следует, что потенциальная энергия грузика относительно горизонтального уровня точки его финиша равна $\mathbf{mgL}\sin\boldsymbol{\beta}$, она же составляет и полную начальную энергию грузика $\mathbf{W}_{нач}$.

В нижней точке грузик снова оказывается в состоянии покоя, поэтому его кинетическая энергия снова оказывается равной нулю. Там равна нулю и его потенциальная энергия, поскольку это нулевая точка отсчета его вертикального положения, а значит, и потенциальной энергии. Таким образом, конечная энергия грузика

$$\mathbf{W}_{кон} = 0 \ .$$

Потеря начальной энергии грузика $\mathbf{mgL}\sin\boldsymbol{\beta}$ при скольжении происходит благодаря работе силы трения на поверхности горки. Поскольку при перемещении грузика сила трения непрерывно меняется, меняется и *работа силы трения, которая на любом малом участке перемещения* $d\mathbf{x}$ *по определению равна*

$$dA = \boldsymbol{F}_{тр} d\boldsymbol{x} \ .$$

В последнем выражении символы $\boldsymbol{F}_{тр}$ *и* $d\mathbf{x}$ *представляют собой векторы (!), а произведение является скалярным произведением векторов. Поскольку вектор силы трения скольжения* $\boldsymbol{F}_{тр}$ *направлен против вектора перемещения* $d\mathbf{x}$*, угол между ними равен 180°. Косинус 180° равен минус единице, поэтому величина скалярного произведения* $\boldsymbol{F}_{тр}d\boldsymbol{x}$ *и, соответственно, величина работы силы трения скольжения является отрицательной.*

Известно, что сила трения скольжения описывается выражением

$$\mathbf{F}_{тр} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{N} \ ,$$

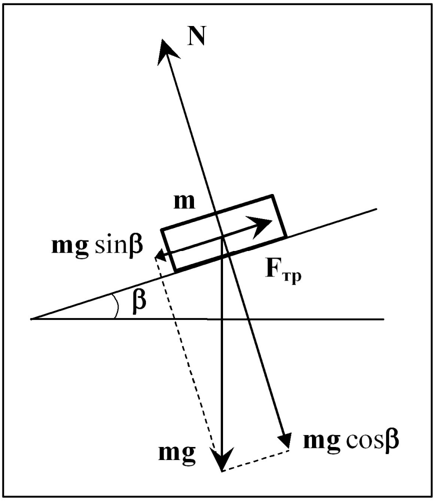
где $\mathbf{N}$ – сила реакции опоры, по которой скользит тело. Для нахождения $\mathbf{N}$ следует рассмотреть расстановку сил, действующих на грузик на горке. Эти силы и их проекции на оси, направленные вдоль горки и перпендикулярно к ней, изображены на рисунке.

На грузик действуют три внешние силы: сила тяжести $\mathbf{mg}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Запишем второй закон Ньютона в направлении, перпендикулярном поверхности горки:

$$0 = \mathbf{N} - \mathbf{mg}\cos\boldsymbol{\beta} \ ,$$

откуда сразу следует выражение для $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{mg}\cos\boldsymbol{\beta} \; .$$



В выражении второго закона Ньютона мы учли то, что ускорение груза по выбранному направлению равно нулю, поскольку в процессе скольжения он движется строго по прямой, не погружаясь в "тело" горки и не отрываясь от ее поверхности.

Таким образом, величина работы совершаемой силой трения на малом участке длины $d\mathbf{x}$ при скольжении груза записывается следующим образом:

$$d\mathbf{A} = -\gamma\mathbf{x}\,\mathbf{mg}\cos\beta\, d\mathbf{x} \; .$$

В последнем выражении $d\mathbf{x}$ представляет собой уже не вектор, а скалярную положительную величину, поскольку характеризует модуль вектора перемещения $d\mathbf{x}$. Выражая $d\mathbf{A}$, мы учли, что по условию задачи $\boldsymbol{\mu} = \gamma\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ – расстояние вдоль горки, отсчитанное от места старта грузика.

Суммарная работа силы трения на участке длиной $\mathbf{L}$ может быть посчитана путем суммирования (интегрирования) всех малых приращений работы $d\mathbf{A}$, представленных выше в аналитическом виде. Для тех, кто владеет интегрированием, произвести такой расчет не является проблемой, и можно легко записать конечный результат:

$$\mathbf{A} = -\gamma\mathbf{L}^2\mathbf{mg}\cos\beta/2 \; .$$

Те же, кто формулами интегрирования не владеют, могут легко посчитать этот интеграл графически, построив график линейной функции подынтегрального выражения $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \gamma\mathbf{mg}\cos\beta\mathbf{x}$ и посчитав чисто геометрически площадь под этой прямой на участке изменения **x** от 0 до **L** (для получения значения работы **A** конечный результат графического интегрирования потом надо будет умножить на минус единицу).

Таким образом, закон изменения энергии грузика

$$\mathbf{W}_{кон} - \mathbf{W}_{нач} = \mathbf{A}$$

при перемещении из начальной точки до точки остановки выглядит следующим образом:

$$0 - \mathbf{mgL}\sin\beta = -\gamma\mathbf{L}^2\mathbf{mg}\cos\beta/2 \ .$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{L} = 2\mathrm{tg}\beta/\gamma \ .$$

Любопытно отметить, что такой же результат можно получить с использованием казалось бы далекого от темы задачи подхода – ... теории колебаний. Если хотите узнать как, загляните в решение задачи № 20.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{L} = 2\mathrm{tg}\beta/\gamma$.

ЗАДАЧА № 17 (решение).

*Математическим маятником исторически называют маленький по размерам груз, подвешенный в поле тяжести **g** на достаточно длинной легкой нити или легком длинном стержне.* Малое отклонение груза от положения равновесия приводит к гармоническим колебаниям груза. Известно, что *собственная (резонансная) частота колебаний математического маятника*

$$\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\boldsymbol{g/L}} \ ,$$

*где **L** – длина нити (стержня) маятника, а **g** – ускорение свободного падения, обусловленное полем тяжести.* Ясно, что параметр **g**, входящий в выражение для $\boldsymbol{\omega}_0$, отражает величину ускорения свободного падения в том месте, где маятник колеблется.

*Согласно закону Всемирного тяготения, вблизи планеты массы **M** ускорение свободного падения*

$$\boldsymbol{g = GM/r^2} \ ,$$

где $\boldsymbol{G}$ *– гравитационная постоянная, а* $\boldsymbol{r}$ *– расстояние от центра планеты до точки, где определяется величина* $\boldsymbol{g}$. Соответственно, на поверхности Земли (когда $\mathbf{r}$ принимает значение радиуса Земли $\mathbf{R}$) собственная частота колебаний маятника равна

$$\omega_{01} = \sqrt{\mathbf{GM/(R^2L)}}\ ,$$

а на расстоянии $2\mathbf{R}$ от центра

$$\omega_{02} = \sqrt{\mathbf{GM/(4R^2L)}}\ .$$

Отсюда выходит, что

$$\omega_{02}/\omega_{01} = 1/2\ .$$

Поскольку *частота колебаний* $\boldsymbol{f}$ *связана с собственной частотой колебаний* $\boldsymbol{\omega_0}$ *постоянным множителем*

$$\omega_0 = 2\pi f\ ,$$

искомое отношение частот колебаний математического маятника будет таким же, как отношение собственных частот колебаний.

Ответ: Частота колебаний маятника **уменьшится в** 2 **раза**.

ЗАДАЧА № 18 (решение).

Груз массы $\boldsymbol{m}$, *подцепленный к легкой пружине жесткости* $\boldsymbol{k}$ *и совершающий на ней малые колебания в горизонтальной, вертикальной или наклоненной под углом к горизонту плоскости, обычно называют физическим маятником (отличая тем самым его от математического). Собственная частота колебаний физического маятника*

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}\ .$$

Соответственно, после того, как масса груза $\mathbf{m}$ уменьшилась по условию задачи вдвое и стала $\mathbf{m}/2$, собственная частота колебаний стала равной

$$\omega_1 = \sqrt{2\mathbf{k/m}} = \omega_0\sqrt{2}\ ,$$

то есть увеличилась в $\sqrt{2}$ раз.

Вместе с собственной частотой в корень из двух раз увеличилась и частота колебаний **f** груза, связанная с ω_0 соотношением

$$\omega_0 = 2\pi \mathbf{f} \ .$$

<u>Ответ:</u> Частота колебаний **увеличилась в** $\sqrt{2}$ **раз**.

ЗАДАЧА № 19 (решение).

Груз в виде массивной подставки с пластилином, колеблющийся на пружинке, представляет собой вариант физического маятника, собственная (резонансная) частота колебаний которого в исходном состоянии может быть выражена в виде

$$\omega = 2\pi/\mathbf{T} = \sqrt{\mathbf{k}/(\mathbf{M}+\mathbf{m})} \ ,$$

где **k** – жесткость пружинки. Отсюда

$$\mathbf{k} = 4\pi^2(\mathbf{M}+\mathbf{m})/\mathbf{T}^2 \ .$$

После того, как пластилин сорвется с подставки, собственная частота изменится и станет равной

$$\omega_1 = 2\pi/\mathbf{T}_1 = \sqrt{\mathbf{k}/\mathbf{M}} \ ,$$

где $\mathbf{T}_1$ – новый период колебаний (колебания одной подставки без пластилина). Отсюда, с учетом найденного выше выражения для **k**,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}\sqrt{\mathbf{M}/(\mathbf{M}+\mathbf{m})} \ .$$

С высоты **L** кусочек пластилина будет падать с нулевой начальной скоростью, двигаясь равноускоренно в постоянном поле тяжести **g**. Воспользовавшись подходящей для этого случая формулой кинематики

$$\mathbf{L} = \mathbf{g}\mathbf{t}^2/2 \ ,$$

можно найти время падения:

$$\mathbf{t} = \sqrt{2\mathbf{L}/\mathbf{g}} \ .$$

За это время маятник совершит

$$\mathbf{N} = \mathbf{t}/\mathbf{T}_1$$

полных колебаний. Подставив в последнее выражение полученные выше соотношения для **t** и $\mathbf{T}_1$, получим окончательно для **N**:

$$\mathbf{N} = (1/\mathbf{T})\sqrt{(2\mathbf{L}/\mathbf{g})(1+\mathbf{m}/\mathbf{M})}\ .$$

Поскольку трение о воздух отсутствует, то энергия кусочка в процессе падения будет сохраняться, при этом вся начальная потенциальная энергия **mgL**, отсчитанная от уровня пола, перейдет к моменту соударения с полом в кинетическую энергию. Последняя после прилипания пластилина полностью выделится в виде теплоты **Q**. Исходя из сказанного, можно записать:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{mgL}\ .$$

<u>Ответ:</u> а) $\mathbf{N} = (1/\mathbf{T})\sqrt{(2\mathbf{L}/\mathbf{g})(1+\mathbf{m}/\mathbf{M})}$, б) $\mathbf{Q} = \mathbf{mgL}$.

ЗАДАЧА № 20 (решение).

В решении задачи № 16 уже отмечалось, что непрерывное изменение коэффициента трения с расстоянием не позволяет применять кинематические формулы, разработанные для равноускоренного движения, из которых мы привыкли, в частности, выражать время перемещения.

Если не удается определить время через кинематику, полезно протестировать возможность решения с помощью такого неожиданного подхода, как теория гармонических колебаний. В ряде случаев это приводит к успеху. И настоящая задача – не исключение.

Запишем второй закон Ньютона для нашего грузика, учитывая, что на горке на него действуют три внешние силы: сила тяжести **mg**, сила реакции опоры **N** и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. В направлении вдоль горки этот закон выражается в виде:

$$\mathbf{ma} = \mathbf{mg}\sin\boldsymbol{\beta} - \mathbf{F}_{тр}\ ,$$

где **a** – ускорение грузика; вектор ускорения направлен вдоль плоскости горки в сторону ее подножья.

Поскольку по условию задачи мы имеем дело со скольжением, для $\mathbf{F}_{тр}$ нужно использовать выражение, справедливое для силы трения скольжения:

$$\mathbf{F}_{тр} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{N}\ .$$

Второй закон Ньютона в направлении по нормали к поверхности горки выглядит так:

$$0 = \mathbf{N} - \mathbf{mg}\cos\beta\ .$$

Здесь учтено, что ускорение груза в выбранном направлении равно нулю, поскольку в процессе скольжения груз движется вдоль поверхности горки строго прямолинейно.

Из последнего уравнения следует, что

$$\mathbf{N} = \mathbf{mg}\cos\beta\ .$$

Подставив в явном виде силу трения, полученную из предыдущих соотношений, в выражение для второго закона Ньютона вдоль горки, можно с учетом того, что по условию задачи $\mu = \gamma\mathbf{x}$, прийти к следующему уравнению:

$$\mathbf{ma} = \mathbf{mg}(\sin\beta - \gamma\mathbf{x}\cos\beta)\ .$$

Сократив левую и правую части уравнения на массу, заменив **a** на вторую производную координаты по времени $d^2\mathbf{x}/dt^2$ и перенеся слагаемое, содержащее множитель **x**, в левую часть равенства, мы приведем уравнение к виду:

$$d^2\mathbf{x}/d\mathbf{t}^2 + \gamma\cos\beta\mathbf{x} = \mathbf{mg}\sin\beta\ .$$

Поскольку в интервале "разумных" углов наклона горки от 0 до 90° множитель $\gamma\cos\beta$ больше нуля, мы в чистом виде получили дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания переменной **x**. В общем виде уравнение гармонических колебаний выглядит так:

$$d^2\mathbf{x}/d\mathbf{t}^2 + \omega_0^2\mathbf{x} = 0\ .$$

Здесь

$$\omega_0 = 2\pi/\mathbf{T}\ -$$

собственная частота колебаний, **T** – период колебаний.

Постоянное слагаемое $\mathbf{mg}\sin\beta$, присутствующее в нашем уравнении, отражает наличие постоянной силы. Как легко показать, *постоянная сила не влияет на собственную частоту колебаний* ω_0, которая, исходя из вида нашего уравнения, равна

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma\cos\beta}\ .$$

Таким образом, грузик на горке с заданным в условии изменением коэффициента трения с расстоянием ведет себя точно так же, как гармонический осциллятор. Сначала, сразу после отпускания, он быстро ускоряется. В середине пути имеет максимальную скорость и нулевое ускорение, после чего начинает замедляться, пока ни остановится, пройдя максимальное расстояние **L**, равное двум амплитудам колебаний. Назад, безусловно, грузик не заскользит. В этом смысле, уравнение колебаний описывает его движение только в течение половины первого периода.

Отсюда сразу следует и ответ задачи. С использованием записанного выше соотношения между собственной частотой и периодом колебаний, мы получаем, что искомое время

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}/2 = \pi/\omega_0 = \pi/\sqrt{\gamma\cos\beta}\ .$$

В качестве дополнения к решению, давайте, проанализируем, как ведет себя ускорение грузика с изменением **x**. Из уравнения, полученного выше для **a**, видно, что при малых значениях **x** (в самом начале скольжения) груз будет иметь максимальные значения **a**, однако, с ростом **x** его ускорение будет падать, поскольку уменьшается множитель в скобках. При некотором значении $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m$ множитель в скобках обратится в ноль. Нетрудно видеть, что это произойдет при

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_m = \mathrm{tg}\beta/\gamma\ .$$

Поскольку теперь мы знаем, что это состояние грузика наступает ровно на полпути до его остановки, легко вычислить длину **L**, равную максимальному пути, который проходит грузик по горке:

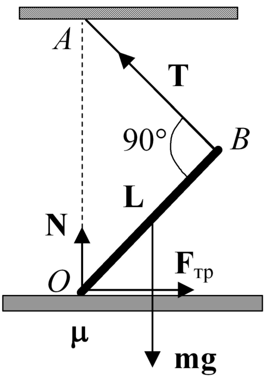
$$\mathbf{L} = 2\mathbf{x}_m = 2\mathrm{tg}\beta/\gamma\ .$$

Данный ответ в точности совпадает с ответом, полученным для **L** в решении задачи № 16 с применением закона изменения энергии.

Ответ: $\mathbf{t} = \pi/\sqrt{\gamma\cos\beta}$.

ЗАДАЧА № 21 (решение).

Рассмотрим внешние силы, действующие на стержень. Все они показаны стрелками на рисунке.



Вертикально вниз действует *сила тяжести* ***mg****, всегда приложенная к центру масс тела.* Вертикально вверх – *сила реакции опоры* ***N****, всегда перпендикулярная поверхности, на которую опирается тело*. Вправо – *сила трения* $\boldsymbol{F}_{тр}$*, всегда направленная вдоль поверхности*. И, наконец, влево и вверх – сила натяжения нити **T**. Следует хорошо прочувствовать и четко запомнить, что *нить всегда тянет тело на себя и никогда его от себя не отталкивает*!

Те, кому трудно сориентироваться, в какую сторону – влево или вправо – действует сила трения, исходите из следующего. Ясно, что нить тянет стержень на себя. Значит, у силы **T** есть горизонтальная составляющая, направленная на рисунке влево. Если бы и сила трения была направлена влево, то по второму закону Ньютона стержень должен был бы ускоряться в левую сторону, поскольку никаких других горизонтальных сил на него не действует. Но он покоится. А это значит, что сила трения, действующая на него, направлена вправо.

Данная задача представляет собой типичный пример задачи на тему "статика". При решении таких задач используют два свойства, характерные для поведения рассматриваемых тел. А именно, 1) центр масс тела имеет нулевое ускорение и 2) тело, как целое, не изменяет с течением времени своей угловой скорости (если говорить более точно, то не изменяет величины и направления своего момента импульса).

Покоящееся тело, примером чего служит стержень в нашей задаче, очевидно, удовлетворяет обоим указанным выше условиям. *Условия статики формально описываются в виде 1) равенства нулю произведения массы на ускорение во втором законе Ньютона по любому из направлений в пространстве и 2) равенства нулю суммы моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно любой точки, выбранной как на теле, так и вне тела.*

Для расставленных сил, изображенных на рисунке, наиболее подходящей системой координат является такая, где ось абсцисс направлена горизонтально (например, вправо), а ось ординат – вертикально (например, вверх). Тогда второй закон Ньютона для стержня в горизонтальном направлении записывается в виде

$$0 = \mathbf{F}_{тр} - \mathbf{T}\cos 45°\ ,$$

а в вертикальном –

$$0 = \mathbf{T}\sin 45° + \mathbf{N} - \mathbf{mg}\ ,$$

где учтено, что по условию задачи фигура *OAB* представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, а потому угол между стержнем и полом, так же, как между нитью и биссектрисой прямого угла, равны по 45°.

Ясно, что на очень скользком полу сила трения не сможет справиться с горизонтальной составляющей силы **T**, и стержень уйдет влево. Чтобы этого не произошло, коэффициент трения должен быть больше некоторого критического значения, которое задается началом скольжения стержня, а именно, переходом силы трения из силы трения покоя в силу трения скольжения.

Известно, что *сила трения скольжения описывается произведением силы реакции опоры на коэффициент трения:*

$$\boldsymbol{F}_{тр} = \boldsymbol{\mu N}\ .$$

Таким образом, если мы подставим последнее соотношение в записанный выше второй закон Ньютона для горизонтального направления, то при всех коэффициентах трения, превышающих по величине тот, который мы найдем, скольжения заведомо не будет, и фигура, изображенная на рисунке, будет сохранять свою форму, что и требуется по условию задачи.

Тем не менее, трех записанных выше равенств не хватает, чтобы в явном виде выразить искомый критический коэффициент трения. Для решения этой проблемы на помощь приходит уравнение моментов сил, отражающее второе формальное условие статики.

Запишем сумму моментов внешних сил, действующих на стержень, относительно одной из выбранных на рисунке точек. Обычно выбор наиболее удачной точки резко упрощает дальнейшие математические выкладки. В этом и состоит искусство решения задач на статику. Однако, в нашем случае все характерные точки на стержне или нити (точка подвеса нити к потолку, точка касания нитью стержня, точка приложения силы тяжести к стержню, расположенная в центре стержня, точка опоры стержня о пол) являются практически равноценными.

Выберем для записи моментов сил точку O, где стержень касается пола. Ясно, что относительно этой точки плечи сил $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_{тр}$ равны нулю, поэтому вклад в сумму моментов дадут только сила тяжести и сила натяжения нити. Если обозначить через $\mathbf{L}$ длину стержня, то согласно геометрии задачи можно записать:

$$0 = (\mathbf{L}/2)\cos 45°\mathbf{mg} - \mathbf{LT} .$$

Моменты сил $\mathbf{mg}$ и $\mathbf{T}$ выбраны с разными знаками, поскольку эти силы "закручивают" (вращают) свои плечи относительно точки O в разные стороны: сила $\mathbf{mg}$ – по часовой стрелке, а сила $\mathbf{T}$ – против часовой стрелки.

Решив совместно все четыре записанные выше уравнения, мы получим для критической величины коэффициента трения окончательное соотношение

$$\mu \geq 1/3 .$$

<u>Ответ:</u> $\mu \geq 1/3$.

ЗАДАЧА № 22 (решение).

Решение этой задачи проще всего начать с записи второго закона Ньютона для целой фигуры, состоящей из двух реек. Она находится в состоянии покоя будучи уравновешенной четырьмя внешними силами.

Вертикально вниз ее увлекает сила тяжести $2\mathbf{mg}$, где $\mathbf{m}$ – масса одной рейки (по условию задачи массы реек равны друг другу). Вертикально вверх на фигуру действует сила реакции $\mathbf{N}$ со стороны горизонтальной поверхности, на которую опирается длинная (правая) рейка.

Если бы не было трения, фигура стремилась бы разойтись, постепенно увеличивая угол между рейками, и лечь на пол. Такое поведение легко понять хотя бы из тех соображений, что потенциальная энергия фигуры, изображенной на рисунке, очевидно, больше ее потенциальной энергии, когда обе рейки лежат горизонтально, а *всякая механическая система стремится занять состояние с наи-*

меньшей потенциальной энергией.

При стремлении разойтись правая рейка двигалась бы вправо, что она и стремится делать, когда фигура находится в изображенном на рисунке положении. Соответственно, сила трения действует на ее нижнюю точку влево, не давая фигуре разъехаться. Таким образом, третьей внешней силой, действующей на фигуру, является сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, приложенная к нижней точке правой рейки и направленная со стороны горизонтальной плоскости влево.

Четвертой и последней силой является сила $\mathbf{F}$, действующая на фигуру из угла между вертикальной стеной и полом. По смыслу это тоже сила реакции опоры. Однако, она не подчиняется незыблемому правилу, действующему для таких сил – она не перпендикулярна поверхности, на которую оказывается давление и, соответственно, со стороны которой по третьему закону Ньютона эта сила реакции оказывает внешнее воздействие на тело. Неперпендикулярность связана с тем, что в углу сходятся одновременно две поверхности, а построить один перпендикуляр сразу к двум плоскостям, расположенным под углом друг к другу, невозможно.

При появлении подобных случаев, в частности, в задачах с шарниром, *типичной ошибкой является направление силы вдоль тела, упирающегося в угол или в шарнир* (в нашем случае это было бы направление силы $\mathbf{F}$ вдоль левой рейки). Как мы увидим из решения, угол β, изображенный на рисунке условия, заранее предсказать невозможно. Каждый раз его можно конкретно определить лишь после записи всех необходимых уравнений механики, адекватных для ситуации, и после решения полученной системы уравнений.

В силу сказанного, *вектор силы, действующей из угла, направляют сначала произвольно*, что и предпринято при создании рисунка условия задачи. При этом полезным приемом является сразу разложить силу $\mathbf{F}$ на проекции, а именно, на горизонтальную, $\mathbf{F}_x$, и вертикальную, $\mathbf{F}_y$, которые затем будет удобно использовать при записи второго закона Ньютона. В нашем случае сила $\mathbf{F}_x$ направлена по горизонтали вправо, а $\mathbf{F}_y$ – по вертикали вверх.

Таким образом, по вертикальному и горизонтальному направлениям второй закон Ньютона для фигуры, состоящей из двух реек, запишется, соответственно, так:

$$0 = \mathbf{F}_y + \mathbf{N} - 2\mathbf{mg} \ ,$$

$$0 = \mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{тр} \ .$$

Поскольку коэффициент трения μ согласно условию задачи является минимальным для того, чтобы фигура еще сохраняла свою форму, численное значение этого коэффициента фактически определяет состояние системы, когда она уже "готова" начать скольжение. В этой ситуации сила трения выражается соотношением, справедливым для силы трения скольжения:

$$\mathbf{F}_{тр} = \mu\mathbf{N} \ .$$

В решении задачи № 42 дано несколько подсказок по узнаванию из текста условия тех разделов физики, темам которых посвящена та или иная задача. В частности, отмечено, что заданные в условии конкретные (обычно – линейные) размеры тел (или какие-то соотношения между размерами) часто служат неявным указанием на то, что в процессе решения потребуется использование понятия моментов сил. При рассмотрении неподвижных объектов такие задачи или их части, как правило, относятся к теме “статика”. Пример настоящей задачи – не исключение.

В отличие от второго закона Ньютона, для записи которого абсолютно неважно, в каких точках приложены к телу или рассматриваемой системе тел внешние силы, при записи уравнения моментов сил местоположение каждой точки приложения конкретной силы играет принципиальнейшую роль! В поиске оптимального решения также играет важную роль выбор точки (или оси), относительно которой моменты сил записываются, хоть при этом и хорошо известно, что в условиях статики сумма моментов внешних сил, действующих на рассматриваемое тело или систему, равна нулю относительно любой выбранной точки или оси.

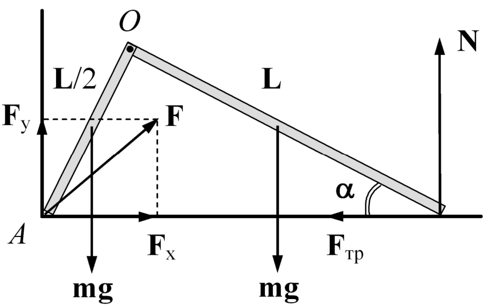
При составлении уравнения моментов сил, действующих на нашу фигуру, весьма неудобной силой является, как ни странно, сила тяжести 2**mg**. Это связано с тем, что *сила тяжести всегда приложена к центру масс тела (или системы)*, а вычисление местоположения центра масс пары реек для определения плеча силы 2**mg** – задача, хоть и не слишком трудоемкая, но и не слишком приятная.

В подобных случаях бывает очень удобным рассмотреть силу тяжести, действующую на каждую рейку в отдельности. Ясно, что центр масс каждой однородной рейки находится в ее середине, поэтому плечи каждой из двух действующих на фигуру сил **mg** могут быть выражены элементарно.

Расстановка сил для записи моментов показана на рисунке. Здесь введен угол α между длинной (правой) рейкой и плоскостью, на которую она опирается. Уравнение моментов сил, записанное для длинной рейки относительно точки ее контакта с короткой рейкой (точки *O*), выглядит следующим образом:

$$0 = (\mathbf{L}/2)\cos\alpha\ \mathbf{mg} + \mathbf{L}\sin\alpha\ \mu\mathbf{N} - \mathbf{L}\cos\alpha\ \mathbf{N}\ .$$

Сила, действующая на рейку в самом контакте, не учтена, поскольку ее плечо относительно точки *O* равно нулю.



Сократив на **L**, разделив полученное уравнение на $\cos\alpha$ и учтя, что согласно условию задачи

$$\mathrm{tg}\alpha = 1/2\ ,$$

мы получим

$$\mathbf{N} = \mathbf{mg}/(2 - \mu)\ .$$

Подставив это в записанную выше систему уравнений для второго закона Ньютона и выразив $\mathbf{F}_x$ и $\mathbf{F}_y$, мы найдем

$$\mathrm{tg}\beta = \mathbf{F}_y/\mathbf{F}_x = 3/\mu - 2\ .$$

Оставим на время это выражение, которое нам еще понадобится, и запишем уравнение моментов сил для всей фигуры относительно точки *A*, показанной на рисунке:

$$0 = (\mathbf{L}/4)\sin\alpha\ \mathbf{mg} + [(\mathbf{L}/2)\sin\alpha + (\mathbf{L}/2)\cos\alpha]\mathbf{mg} -$$

$$- [(\mathbf{L}/2)\sin\alpha + \mathbf{L}\cos\alpha]\mathbf{N}\ .$$

Моменты силы трения $\mathbf{F}_{тр}$ и силы **F** относительно точки *A* равны нулю, поскольку равны нулю их плечи относительно этой точки.

Снова сократив на **L**, разделив полученное уравнение на $\cos\alpha$ и учтя, что $tg\alpha = 1/2$, получим

$$\mathbf{N} = 7\mathbf{mg}/10 .$$

Приравняв друг другу оба выражения, полученные для **N**, мы найдем критическое значение коэффициента трения:

$$\mu = 4/7 .$$

Подставив это значение в выражение для $tg\beta$, найдем:

$$tg\beta = 13/4 .$$

Поскольку согласно условию задачи $tg(90° - \alpha) = 2$, то видно, что рисунок, приведенный в условии, выполнен неточно: полученное значение для $tg\beta$ показывает, что вектор силы **F** проходит выше левой (короткой) рейки.

<u>Ответ:</u> Критическое значение $\mu = 4/7$; $tg\beta = 13/4$.

Гидростатика и закон Архимеда

ЗАДАЧА № 23 (решение).

Масса кубика **m** равна произведению его плотности ρ на объем $\mathbf{V} = \mathbf{a}^3$:

$$\mathbf{m} = \rho\mathbf{a}^3 .$$

Поскольку во время плавания в воде он покоится, глубину **h**, на которой находится его нижняя грань, мы найдем, приравняв силу тяжести **mg**, действующую на кубик вниз, *силе Архимеда, выталкивающей его из жидкости вверх и равной, как известно, произведению плотности жидкости ρ_0, ускорения свободного падения **g** и объема погруженной части* $\mathbf{V}_1 = \mathbf{a}^2\mathbf{h}$:

$$\mathbf{mg}, = \rho_0 \mathbf{gV}_1 ,$$

откуда после подстановки

$$\rho \mathbf{a}^3 \mathbf{g} = \rho_0 \mathbf{g} \mathbf{a}^2 \mathbf{h} ,$$

и

$$\mathbf{h} = \mathbf{a}\rho/\rho_0 .$$

*Давление **P** внутри жидкости на глубине **h** от поверхности складывается из двух составляющих.*

Прежде всего, оно обусловлено тем давлением P_0, которое сверху вниз оказывают на поверхность жидкости внешние объекты (в нашем случае – атмосфера). Эта составляющая давления одинаково присутствует в каждой точке объема нижележащей жидкости, поскольку характеризует "сдавленность" жидкости как целого (это выражает смысл закона Паскаля).

Вторая составляющая порождена тем, что на любой нижней жидкости стоит верхняя. Условный столб этой верхней жидкости давит на нижнюю благодаря своему весу, который, в свою очередь, обусловлен силой притяжения к земле. Нижняя жидкость не стоит на верхней, поэтому вторая составляющая давления совершенно не зависит от того, что находится снизу под тем уровнем, на котором мы определяем давление (от оставшегося расстояния до дна кастрюли и т. п.). В ряде ситуаций вместо нижней жидкости может сразу идти дно сосуда, водоема и пр. или находиться иная твердая поверхность.

*Вторая составляющая, которую иногда называют гидростатической частью давления, равна произведению плотности жидкости ρ_0, ускорения свободного падения **g** и высоты столба жидкости **h** над уровнем, где производится измерение. Уровень вершины этого столба находится там, где измерено давление P_0.*

Заметим, что уровень, где измерено P_0, вовсе не обязательно должен находиться на поверхности жидкости. Его можно задать где-то и внутри жидкости. Тогда столб, о котором шла речь выше, будет отсчитываться от этой точки внутри жидкости вниз.

*Таким образом, давление на глубине **h** от поверхности жидкости (или от точки внутри жидкости, где измерено давление P_0) записывается в виде*

$$\boldsymbol{P = P_0 + \rho_0 gh}\ .$$

Подставив сюда полученное выше выражение для **h**, найдем

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{ga} + \mathbf{P_0}\,.$$

*Сила давления d**F** определяется как давление **P**, умноженное на площадь d**S**, на которую это давление оказывается:*

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}d\boldsymbol{S}\ .$$

*В этом определении площадь и, соответственно, сила взяты дифференциально маленькими, поскольку предполагается, что в другой точке большой поверхности давление **P** может быть уже другим. Однако, если давление на плоскую поверхность с площадью **S** всюду, в каждой точке, одинаковое, то можно смело писать*

$$\boldsymbol{F = PS}\ .$$

В нашем случае нижняя грань кубика имеет площадь $\mathbf{S} = \mathbf{a}^2$, и эта грань вся находится в одном горизонтальном уровне, то есть давление на каждую ее точку одно и то же. Поэтому искомая сила давления

$$\mathbf{F} = \mathbf{Pa}^2 = (\boldsymbol{\rho}\mathbf{ga} + \mathbf{P}_0)\mathbf{a^2} = 1008\ (\text{Н}) = 100.8\ (\text{кГ})\ .$$

Проанализируем полученный ответ.

Прежде всего, удивляет огромная величина силы. На какие-то (10×10) квадратных сантиметров кубика давит больше ста (!) килограммов. Но это, действительно, так. "Виной" всему не жидкость, налитая в кастрюлю, а *атмосфера. Именно, ее давление, равное на уровне моря примерно 10^5 паскалей*, заставляет кубик, как, впрочем, и все, находящееся на земле, "терпеть" такие силы сжатия. Если бы кубик был пустотелым (с откачанным внутренним пространством), потребовалась бы немалая прочность его стенок, чтобы избежать деформации.

В последнем записанном выше соотношении можно сравнить величины сил, обусловленных атмосферным давлением $\mathbf{P}_0$ и гидростатическим давлением $\boldsymbol{\rho}_0\mathbf{gh}$ налитой жидкости. Первая из них дает вклад 100 кГ, а вторая – всего 0.8 кГ. Это еще раз демонстрирует важность присутствия слагаемого $\mathbf{P}_0$ в общих выражениях для давления внутри жидкости. А многие ошибочно опускают эту "малозначимую" величину.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{F} = 1008\ Н = 100.8\ кГ$.

ЗАДАЧА № 24 (решение).

Решение задач такого типа сводится к записи уравнений, отражающих механическое равновесие разных фигурирующих в условии задачи объектов: поршней, столбиков жидкости, отсеченных объемов газа и пр. При этом достаточно определиться, какие внешние силы действуют на объект, после чего записать для него второй закон Ньютона с нулевым значением ускорения, поскольку объекты в таких задачах находятся в состоянии покоя.

Запишем для левого поршня второй закон Ньютона по вертикальному направлению. Воспользуемся тем, что над верхней поверхностью поршня – вакуум, а не газ, поэтому сверху вниз на него действует только сила тяжести $\mathbf{m_1 g}$, где $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. По направлению вверх этот поршень испытывает только лишь силу давления жидкости, прилегающей к его нижней поверхности, и эта сила равна $\mathbf{PS}$, где $\mathbf{P}$ – давление внутри жидкости на уровне нижней поверхности левого поршня. Давление $\mathbf{P}$ поршня можно определить из условия механического равновесия этого поршня:

$$0 = \mathbf{m_1 g} - \mathbf{PS}\ .$$

В правом колене трубки на том же самом горизонтальном уровне, где расположена нижняя плоскость левого поршня, будет такое же, как слева, давление $\mathbf{P}$. Это легко понять. Действительно, если бы давления были разными, то и сила $\mathbf{PS}$, действующая на воду вниз на этом горизонтальном уровне, была бы разной. В результате, вода в трубке начала бы двигаться. Заметим, что *равенство давлений внутри покоящейся жидкости на одном горизонтальном уровне – это общее свойство всех сообщающихся сосудов.*

Давление в каждой точке внутри жидкости распространяет свое действие по всем направлениям (как тычинки одуванчика). Выразим давление $\mathbf{P}$ в правом колене трубки, анализируя обстановку, имеющую место в этом колене.

Из рисунка условия задачи видно, что в давление $\mathbf{P}$ в правом колене дают вклад две составляющие. Они подробно обсуждены в решении задачи № 23. Одна обусловлена давлением $\mathbf{P_0}$, существующим в жидкости на уровне нижней плоскости правого поршня и поддавливающим сверху столб высотой $\mathbf{L}$ жидкости в трубке, расположенный между этой плоскостью и горизонтальным уровнем, на котором мы определили давление $\mathbf{P}$. Вторая составляющая, которая обусловлена собственным весом столба высотой $\mathbf{L}$, равна, как известно, $\boldsymbol{\rho}\mathbf{gL}$.

Таким образом, для правого колена трубки можно записать:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_0} + \boldsymbol{\rho}\mathbf{gL} \ .$$

Давление $\mathbf{P_0}$ найдем из условия механического равновесия правого поршня. Над его верхней поверхностью, как и над поршем слева – вакуум, а не газ, поэтому сверху вниз на него действует только сила тяжести $\mathbf{m_2g}$. Вверх правый поршень испытывает только силу давления жидкости, прилегающей к его нижней поверхности, и эта сила равна $\mathbf{P_0S}$. Запишем для правого поршня второй закон Ньютона по вертикальному направлению:

$$0 = \mathbf{m_2g} - \mathbf{P_0S} \ .$$

Решая совместно три полученные выше уравнения, легко выразить искомое расстояние $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{m_1} - \mathbf{m_2})/\boldsymbol{\rho}\mathbf{S} \ .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{L} = (\mathbf{m_1} - \mathbf{m_2})/\boldsymbol{\rho}\mathbf{S}$.

ЗАДАЧА № 25 (решение).

Сила давления $\mathbf{F}$, действующая со стороны жидкости на дно стакана, по третьему закону Ньютона равна по величине силе реакции $\mathbf{N}$, которую испытывает вода со стороны дна. При этом сила реакции направлена вертикально вверх. Если обозначить через $\mathbf{P}$ искомое давление на дне стакана, то для силы $\mathbf{F}$ можно записать выражение

$$\mathbf{F} = \mathbf{PS} \ ,$$

откуда

$$\mathbf{N} = \mathbf{PS} \ .$$

Рассмотрим в качестве физического объекта воду с плавающей в ней шайбой.

Сверху вниз на эту систему действуют сила тяжести $\mathbf{Mg}$, приложенная к воде ($\mathbf{M}$ – масса воды), сила тяжести $\mathbf{mg}$, приложенная к шайбе ($\mathbf{m}$ – масса шайбы), а также сила атмосферного давления $\mathbf{P_0S}$, распределенная между верхней поверхностью шайбы площадью $\mathbf{S}/2$ и поверхностью воды такой же площади.

Снизу вверх действует только сила $\mathbf{N}$.

Поскольку выбранная нами система покоится, второй закон Ньютона для нее по вертикальному направлению выглядит так:

$$0 = (\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{g} + \mathbf{P_0S} - \mathbf{N} \ .$$

Так как до опускания шайбы вода в стакане занимала объем, равный $\mathbf{SH}$, легко выразить массу этой воды:

$$\mathbf{M} = \rho_0\mathbf{SH} \ .$$

Аналогично можно выразить массу шайбы, зная ее габаритные размеры, заданные в условии задачи:

$$\mathbf{m} = \rho(\mathbf{S}/2)\mathbf{h} \ .$$

Подставив полученные выражения, а также выражение для $\mathbf{N}$, в уравнение второго закона Ньютона, приведенное выше, мы легко сможем выразить $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_0} + \mathbf{g}(\rho_0\mathbf{H} + \rho\mathbf{h}/2) \ .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{P} = \mathbf{P_0} + \mathbf{g}(\rho_0\mathbf{H} + \rho\mathbf{h}/2)$.

ЗАДАЧА № 26 (решение).

Когда пустой стакан плавает, на него действуют по вертикали следующие силы.

Сверху вниз – сила тяжести $\mathbf{mg}$, где $\mathbf{m}$ – масса стакана, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, и сила атмосферного давления, которая приложена как к верхней поверхности толстых стенок стакана, так и к его дну. Из рисунка задачи видно, что общая площадь названных плоскостей составляет величину $\mathbf{S}$, поэтому сила атмосферного давления равна $\mathbf{P_0S}$, где $\mathbf{P_0}$ – атмосферное давление.

Снизу вверх на стакан действует сила со стороны жидкости, которая равна **PS**, где **P** – давление внутри жидкости непосредственно под дном стакана. Из решения задачи № 23 мы знаем, что $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \rho\mathbf{gH}$, поэтому второй закон Ньютона для пустого стакана, выражающий условие его равновесия (ускорение равно нулю), можно записать в следующем виде:

$$0 = (\mathbf{mg} + \mathbf{P}_0\mathbf{S}) - (\mathbf{P}_0 + \rho\mathbf{gH})\mathbf{S} \ .$$

Условие механического равновесия стакана, заполненного водой, характеризуется тем, что система стала тяжелее на величину веса **Mg** налитой в стакан жидкости, потому глубина погружения стала теперь не **H**, а $\mathbf{H}_1$:

$$0 = (\mathbf{mg} + \mathbf{Mg} + \mathbf{P}_0\mathbf{S}) - (\mathbf{P}_0 + \rho\mathbf{gH}_1)\mathbf{S} \ .$$

Решая совместно оба уравнения, получим

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \mathbf{M}/(\rho\mathbf{S}) \ .$$

Ответ: $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \mathbf{M}/(\rho\mathbf{S})$.

ЗАДАЧА № 27 (решение).

На воздухе растяжение пружины динамометра и, соответственно, показания этого прибора, отражают величину силы тяжести, действующей на тело массы **m**, поэтому

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{mg} \ ,$$

где **g** – ускорение свободного падения. Если обозначить через **V** объем тела, то можно записать $\mathbf{m} = \rho\mathbf{V}$, и тогда

$$\mathbf{P}_1 = \rho\mathbf{Vg} \ .$$

Силой Архимеда, действующей на тело в воздухе, мы в этой задаче можем пренебречь практически без потери точности, поскольку плотность нашего тела больше плотности воды (оно по условию задачи в воде тонет), а плотность воды, в свою очередь, почти в 800 раз больше плотности воздуха.

Когда тело погружено в воду, сила тяжести, действующая на тело, никуда не исчезает, однако, нагрузка на пружину уменьшается на величину силы Архимеда $\rho_0\mathbf{Vg}$, действующей на тело объемом **V** вверх. Соответственно, новые показания динамометра можно выразить соотношением:

$$\mathbf{P}_2 = \rho\mathbf{V}\mathbf{g} - \rho_0\mathbf{V}\mathbf{g} .$$

Исключая $\mathbf{V}$ из двух последних уравнений, получим искомый ответ:

$$\rho = \rho_0/(1 - \mathbf{P}_2/\mathbf{P}_1) = 1.5\rho_0 = 1500 \ (\text{кг/м}^3) .$$

<u>Ответ:</u> $\rho = \rho_0/(1 - \mathbf{P}_2/\mathbf{P}_1) = 1500 \ (\text{кг/м}^3)$.

ЗАДАЧА № 28 (решение).

В случае с одной гирькой сила тяжести, действующая вниз на систему “брусок + гирька” уравновешивается силой Архимеда $\mathbf{F}$, действующей вверх на брусок, погруженный в жидкость на 1/3 его объема. Отсюда второй закон Ньютона для этой системы записывается в следующем виде:

$$0 = (\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{g} - \mathbf{F} ,$$

где $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения.

В случае с 5 гирьками, стоящими на бруске, выталкивающая сила Архимеда становится втрое больше (объем погруженной части бруска утроился), и условие механического равновесия для системы записывается так:

$$0 = (\mathbf{M} + 5\mathbf{m})\mathbf{g} - 3\mathbf{F} .$$

Решая совместно эти два уравнения, мы находим, что

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{M} = \mathbf{m}$.

ЗАДАЧА № 29 (решение).

В пресной воде на тазик действуют две внешние силы. Вниз – сила тяжести $\mathbf{mg}$, а вверх – сила Архимеда, равная $\rho_0\mathbf{gV}$, где $\mathbf{V}$ – объем погруженной части тазика (объем вытесненной воды), а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. Поскольку тазик покоится, можно следующим образом выразить условие его механического равновесия с помощью второго закона Ньютона в вертикальном направлении:

$$0 = \mathbf{mg} - \rho_0\mathbf{gV} .$$

Случай с соленой водой отличается от предыдущего тем, что тазик становится тяжелее на вес добавленной в него воды **Mg**, а плотность жидкости изменяется с ρ_0 на ρ. Соответственно, условие механического равновесия в соленой воде будет выглядеть так:

$$0 = (\mathbf{m} + \mathbf{M})\mathbf{g} - \rho\mathbf{gV} .$$

Поскольку глубина погружения и форма тазика остались прежними, прежним остался и объем **V** погруженной части.

Решив совместно полученные уравнения, найдем:

$$\rho/\rho_0 = 1 + \mathbf{M/m} .$$

<u>Ответ:</u> $\rho/\rho_0 = 1 + \mathbf{M/m}$.

ЗАДАЧА № 30 (решение).

При погружении в глубокую шахту основной эффект можно ожидать от того, что в соответствии с законом Всемирного тяготения изменяется ускорение свободного падения **g**. Так как кубик в воде находится в состоянии механического равновесия, то действующая на него сила тяжести **mg** равна выталкивающей силе Архимеда ρ_0**gV**, где ρ_0 – плотность воды, а **V** – объем погруженной части кубика. Отсюда следует равенство

$$\mathbf{mg} = \rho_0\mathbf{gV}$$

и, соответственно, после сокращения на **g**

$$\mathbf{V} = \mathbf{m}/\rho_0 .$$

Видно, что величина **V** не зависит от того, на каком расстоянии от поверхности Земли находится кастрюля.

Для наиболее въедливых стоит пояснить, что *жидкость (в частности, вода) считается несжимаемой средой*, поэтому ее плотность сохраняется неизменной, несмотря на некоторое изменение внешнего давления при погружении под землю.

Также следует напомнить, что *при выводе формулы, описывающей закон Архимеда, а именно, той, где сила Архимеда* $\boldsymbol{F}_A = \boldsymbol{\rho}_0 \boldsymbol{g} \boldsymbol{V}$, *учитывается наличие атмосферного давления, поэтому изменение давления окружающего воздуха не отразится на плавании тела.*

И, тем не менее, можно найти эффект, который внесет поправку в сделанные выше выводы. Дело в том, что *на кубик, частично выступающий из воды, действуют ... две силы Архимеда. Одну мы только что успешно обсудили. А вторая обусловлена "плаванием" кубика в воздухе.*

Именно, благодаря последней поднимаются аэростаты и шарики, наполненные газом, более легким, чем воздух. Эта сила появляется из-за того, что давление воздуха на верхнюю грань кубика меньше, чем на поверхность воды, поскольку на поверхность еще дополнительно давит слой воздуха, расположенный между уровнем верхней грани и уровнем воды. Согласно закону Паскаля давление атмосферы на воду распространяется на весь объем жидкости и, в частности, на область, где расположена нижняя грань кубика. Таким образом, получается, что нижняя грань поддавливается атмосферой больше, чем верхняя, поэтому появляется дополнительная выталкивающая сила.

Так же, как сила Архимеда в воде, сила выталкивания воздухом $\boldsymbol{F}_A^{(B)}$ *описывается формулой*

$$\boldsymbol{F}_A^{(B)} = \boldsymbol{\rho g V}^{(B)} \quad ,$$

где $\boldsymbol{\rho}$ *– плотность воздуха, а* $\boldsymbol{V}^{(B)}$ *– объем тела, выступающий из жидкости.*

С учетом сказанного второй закон Ньютона для кубика можно записать так:

$$0 = \mathbf{mg} - (\rho_0 \mathbf{gV} + \rho \mathbf{gV}^{(B)}) \ .$$

Если обозначить через $\mathbf{V}_0$ весь объем кубика, то очевидно, что

$$\mathbf{V}^{(B)} = \mathbf{V}_0 - \mathbf{V} \ .$$

Подставив это в предыдущее уравнение, сократив на $\mathbf{g}$ и выразив $\mathbf{V}$, мы получим:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{m} - \rho \mathbf{V}_0)/(\rho_0 - \rho) \ .$$

Исследование поведения этой функции при изменении ρ показывает, что по мере увеличения ρ утопленный объем $\mathbf{V}$ уменьшается, что, впрочем, вполне естественно, ибо чем больше ρ, тем больше величина силы Архимеда в воздухе, "вытягивающей" кубик из воды. Так как плотность воздуха, в отличие от воды, реагирует на атмосферное давление и с ростом атмосферного давления увеличивается, а атмосферное давление, в свою очередь, увеличивается по мере увеличения высоты столба воздуха (и, соответственно, по мере погружения вглубь Земли), кубик при опускании кастрюли в шахту слегка высунется из воды.

Вместе с тем, нетрудно посчитать, подставив численные значения в вышеприведенную формулу для $\mathbf{V}(\rho)$, что вклад силы Архимеда, обусловленный воздухом, в основной эффект составляет не более 0.1%, а эффект изменения силы Архимеда при погружении под землю – и того меньше. В этом смысле, влиянием атмосферного воздуха в данной задаче можно с хорошей точностью пренебречь.

<u>Ответ:</u> **Объем погруженной части кубика практически не изменится.**

ЗАДАЧА № 31 (решение).

Чтобы состояние однородного стержня оставалось горизонтальным, действующие на него с обоих концов силы натяжения нитей, идущих от шара и от поплавка, должны быть равными. Нити увлекаются вверх благодаря силам Архимеда $\mathbf{F}_{Г}$ и $\mathbf{F}_{П}$, действующим, соответственно, на гелиевый шар в воздухе и на поплавок в глицерине.

Поскольку объем воздушного шара равен $(4/3)\pi\mathbf{R}_{Г}^3$, а объем поплавка – $(4/3)\pi\mathbf{R}_{П}^3$, равенство друг другу упомянутых выше сил Архимеда записывается так:

$$\rho_0\mathbf{g}(4/3)\pi\mathbf{R}_{Г}^3 = \rho\mathbf{g}(4/3)\pi\mathbf{R}_{П}^3 ,$$

где $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения.

Отсюда получаем:

$$\mathbf{R}_{Г}/\mathbf{R}_{П} = \sqrt[3]{\rho/\rho_0} = 10 .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{R}_{Г}/\mathbf{R}_{П} = \sqrt[3]{\rho/\rho_0} = 10$.

ЗАДАЧА № 32 (решение).

Определим, какие по природе и величине силы действуют на мяч, когда он лежит на земле и когда он в воде. Когда мяч на земле, поле тяжести притягивает его с силой, равной $\mathbf{mg}$, а земля отталкивает с силой реакции $\mathbf{N}$, равной весу мяча. Здесь $\mathbf{m}$ – масса мяча, а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. Силы $\mathbf{mg}$ и $\mathbf{N}$ равны друг другу, поскольку в противном случае мяч либо проваливался бы под землю, либо взлетал бы к небу.

Когда мяч полностью под водой, его тянут вниз сила тяжести, равная $\mathbf{mg}$, и сила натяжения нити $\mathbf{T}$, равная согласно условию задачи $4\mathbf{mg}$. Вверх действует только сила Архимеда, равная по величине $\rho\mathbf{g}\mathbf{V}_0$, где ρ - плотность воды, а $\mathbf{V}_0$ – объем мяча. Поскольку мяч при этом покоится, второй закон Ньютона для него можно записать так:

$$0 = \rho\mathbf{g}\mathbf{V}_0 - \mathbf{mg} - \mathbf{T} \quad .$$

При плавании мяча на поверхности сила тяжести продолжает на него действовать, сила натяжения исчезает, а сила Архимеда становится меньше, поскольку мяч теперь вытесняет меньший объем воды. Пусть этот объем равен $\mathbf{V}$. Тогда второй закон Ньютона для плавающего мяча выглядит следующим образом:

$$0 = \rho\mathbf{g}\mathbf{V} - \mathbf{mg} \quad .$$

Выразив из двух последних уравнений $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_0$, взяв их отношение и подставив $4\mathbf{mg}$ вместо $\mathbf{T}$, получим

$$\mathbf{V}/\mathbf{V}_0 = 1/5 \quad .$$

Ответ: в воду окажется погруженной **одна пятая** часть объема мяча.

ЗАДАЧА № 33 (решение).

Когда буй, полностью погруженный в воду, держится на растяжках, на него действуют четыре внешние силы. Вниз его тянут сила тяжести, равная $\mathbf{mg}$, две силы со стороны растяжек, а вверх – сила Архимеда $\mathbf{F}_A$. Если обозначить через $\mathbf{T}$ силу натяжения одной растяжки, то можно заметить, что в вертикальном направлении бую “достается” только часть этой силы, равная проекции силы **T** на вертикальную ось, а именно, $\mathbf{T}\sin 30°$. От двух симметрично расположенных растяжек, соответственно, “достается” $2\mathbf{T}\sin 30°$. Поскольку буй при этом покоится, второй закон Ньютона для него можно записать так:

$$0 = \mathbf{F}_A - \mathbf{mg} - 2\mathbf{T}\sin 30° \ .$$

В горизонтальном направлении все внешние силы, действующие на буй, уравновешены в силу симметрии.

При плавании буя на поверхности сила тяжести продолжает на него действовать, силы со стороны растяжек исчезают, а сила Архимеда становится в два раза меньше, чем $\mathbf{F}_A$, поскольку согласно условию задачи буй теперь погружен только наполовину, то есть вытесняет в два раза меньше воды. Соответственно, второй закон Ньютона для него выглядит следующим образом:

$$0 = \mathbf{F}_A/2 - \mathbf{mg} \ .$$

Из последнего уравнения получаем

$$\mathbf{F}_A = 2\mathbf{mg} \ .$$

Подставив это значение в первое уравнение, а также учитывая, что $\sin 30° = 1/2$, получим, выразив **T**,

$$\mathbf{T} = \mathbf{mg} \ .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{T} = \mathbf{mg}$.

ЗАДАЧА № 34 (решение).

Когда колебания пружины и воды успокоятся, поплавок окажется в состоянии механического равновесия. При этом на него будут действовать три внешние силы: 1) выталкивающая сила Архимеда, равная $\rho\mathbf{gV}$, будет тянуть его вверх, 2) пружина растянется и будет "не отпускать" поплавок уходить вверх, то есть будет тянуть его вниз с силой, равной **kx** согласно закону Гука, где **x** – абсолютное удлинение пружины относительно размера пружины в недеформированном состоянии, 3) наконец, сила притяжения поплавка к земле будет тянуть его вниз с силой **mg**.

Соответственно, можно для поплавка записать второй закон

Ньютона по вертикальному направлению

$$0 = \mathbf{\rho g V} - \mathbf{mg} - \mathbf{kx} \;,$$

откуда сразу получить искомое удлинение

$$\mathbf{x} = (\mathbf{\rho g V} - \mathbf{mg})/\mathbf{k} \;.$$

Выталкивающая сила, действующая на данный поплавок во время его колебаний, будет оставаться постоянной по величине и направлению и равной $\mathbf{\rho g V}$. На этапах, когда во время затухающих колебаний поплавок идет вниз, эта выталкивающая сила совершает отрицательную работу, поскольку сама направлена вверх. В свою очередь, при движении вверх работа будет положительной. Поэтому суммарная работа будет определяться произведением постоянной силы $\mathbf{\rho g V}$ на величину (модуль вектора) конечного перемещения поплавка, и эта итоговая работа окажется положительной, поскольку в конечном итоге поплавок ушел вверх относительно исходного положения, то есть в ту же сторону, куда действовала сила Архимеда. Эта работа равна

$$\mathbf{A} = \mathbf{\rho g V x} = \mathbf{\rho g V}(\mathbf{\rho g V} - \mathbf{mg})/\mathbf{k} \;.$$

Заметим, что по условию задачи мы имеем дело с поплавком, а не с грузом, плотность материала которого больше плотности воды, поэтому заранее предполагаем, что поплавок будет всплывать. Этому требованию соответствует условие

$$\mathbf{\rho g V} > \mathbf{mg} \;.$$

Ответ: $\mathbf{x} = (\mathbf{\rho g V} - \mathbf{mg})/\mathbf{k}$, $\mathbf{A} = \mathbf{\rho g V}(\mathbf{\rho g V} - \mathbf{mg})/\mathbf{k}$,
при условии $\mathbf{\rho g V} > \mathbf{mg}$.

ЗАДАЧА № 35 (решение).

Решение задач на гидростатику подобного типа обычно сводится к выбору объектов, не прикрепленных жестко к лабораторным элементам конструкции, и записи для них уравнений статики, то есть условий их механического равновесия. Последнее реализуется путем применения к данным объектам второго закона Ньютона со значением ускорения, равным нулю. Заметим, что объек-

тами при этом могут быть не только твердые тела, но также столбики воды в трубке и пр.

Рассмотрим поршень и действующие на него силы. Сверху вниз на него действует сила тяжести $\mathbf{mg}$ и сила давления атмосферного воздуха $\mathbf{P}_0\mathbf{S}_1$, где $\mathbf{P}_0$ – атмосферное давление. Снизу вверх его "подпирает" жидкость, заполняющая резервуар из двух труб. Если обозначить через $\mathbf{P}_1$ давление жидкости непосредственно под нижней плоскостью поршня, то второй закон Ньютона для поршня запишется так:

$$0 = \mathbf{P}_0\mathbf{S}_1 + \mathbf{mg} - \mathbf{P}_1\mathbf{S}_1 \ .$$

Рассмотрим теперь фигуру с "коленом", сваренную из двух труб. Она предоставлена сама себе и держится, опираясь, исключительно, на воду, поскольку трение между внутренними стенками широкой трубы и стержнем, на который эта труба надета, отсутствует. Отметим, что площадь плоскости "колена" представляет собой разность площадей поперечного сечения широкой $\mathbf{S}_2$ и узкой $\mathbf{S}_1$ труб.

На фигуру сверху вниз действует сила тяжести $\mathbf{Mg}$ и сила атмосферного давления, которой некуда больше давить, кроме как на верхнюю плоскость "колена". Снизу вверх фигура поддерживается силой давления со стороны воды, расположенной под тем же "коленом". Если давление внутри жидкости непосредственно под нижней плоскостью "колена" обозначить через $\mathbf{P}_2$, то эта сила равна $\mathbf{P}_2(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1)$.

Можно заметить, что давления $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ связаны между собой. Действительно, горизонтальный уровень жидкости, где давление $\mathbf{P}_2$, находится глубже на величину $\mathbf{x}$, чем уровень с давлением $\mathbf{P}_1$, поэтому столб жидкости высотой $\mathbf{x}$ добавляет свое давление на нижний уровень, и эта добавка, как известно в гидростатике, равна $\boldsymbol{\rho}\mathbf{gx}$.

Учитывая все вышеизложенное, можно записать второй закон Ньютона для фигуры из труб:

$$0 = \mathbf{P}_0(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) + \mathbf{Mg} - (\mathbf{P}_1 + \boldsymbol{\rho}\mathbf{gx})(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \ .$$

Подставив в это уравнение $\mathbf{P}_1$, выраженное из записанного выше второго закона Ньютона для поршня, найдем требуемую величину $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{M}/(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) - \mathbf{m}/\mathbf{S}_1]/\boldsymbol{\rho} \ .$$

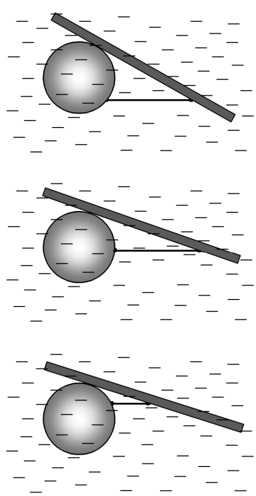
Поскольку расстояние **x** не может быть меньше нуля, мы должны потребовать от параметров выполнения условия

$$\mathbf{M}/\mathbf{m} \geq \mathbf{S}_2/\mathbf{S}_1 - 1 \ ,$$

которое является неотъемлемым атрибутом ответа к настоящей задаче.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{x} = [\mathbf{M}/(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) - \mathbf{m}/\mathbf{S}_1]/\rho$ при условии $\mathbf{M}/\mathbf{m} \geq \mathbf{S}_2/\mathbf{S}_1 - 1$.

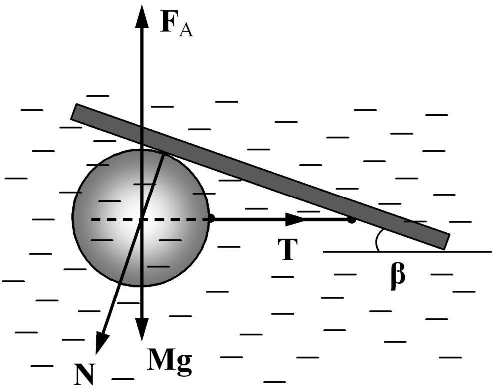
ЗАДАЧА № 36 (решение).



Одного указания на то, что нить в стационарном состоянии системы примет горизонтальное положение, еще не достаточно, чтобы понять, как относительно центра шара будет идти ее продолжение. Ведь в зависимости от длины нити и угла наклона плоскости к горизонту возможно бесконечное количество вариантов, три из которых показаны на рисунке, где приведены примеры, когда продолжение нити проходит выше центра, ниже его и непосредственно через центр. При неизвестном угле β наклона плоскости к горизонту, а он неизвестен, неопределенность в положении конца нити на поверхности шара не позволит до конца решить данную задачу, в чем легко убедиться, попытавшись это сделать.

Помочь раскрыть данную неопределенность позволяет анализ рассматриваемой механической системы с позиций статики. Поскольку ситуация, представленная в настоящей задаче, является довольно стандартной, описанный ниже подход можно рассматривать как *общий методический прием*, который рекомендуется применять в подобных случаях.

Рассмотрим все внешние силы, действующие на шар. Они изображены на рисунке справа. Вертикально вниз на него действует сила тяжести **Mg**, вертикально вверх – сила Архимеда $\mathbf{F}_{A}$, вправо – горизонтальная (по условию задачи) сила натяжения нити **T**, а влево и вниз – сила реакции опоры **N**, обусловленная отталкиванием



шара наклонной плоскостью.

Заметим, что сила тяжести приложена к центру шара, поскольку шар по условию задачи однородный и это требование должно выполняться хотя бы *из соображений симметрии*. В общем случае, как известно, *сила тяжести приложена к центру масс тела или системы*.

Точка приложения силы Архимеда тоже находится в центре шара, поскольку *точка приложения силы Архимеда всегда находится в центре масс жидкости, которая заполнила бы объем, занятый телом*. При однородной плотности жидкости центр масс однородного жидкого шара, очевидно, располагается в центре этой объемной фигуры.

Сила реакции опоры **N** к центру шара не приложена. Она приложена в точке касания шаром наклонной плоскости. Однако, ее направление, как направление любой силы реакции опоры, перпендикулярно этой плоскости, и поскольку плоскость совпадает с касательной к поверхности шара, то вектор силы **N** проходит через центр шара, что следует из правил геометрии и стереометрии.

Таким образом, в нашей задаче оказывается, что сила тяжести, сила Архимеда и сила реакции опоры – все три проходят в точности через центр шара.

Применим теперь вышеобещанный методический прием. Составим уравнение моментов сил, действующих на шар, выбрав именно его центр в качестве точки, относительно которой эти моменты записываются. Тогда в силу проведенного анализа плечи сил **Mg**, **N** и $\mathbf{F}_A$ у нас оказываются равными нулю, и уравнение моментов сил выглядит следующим образом:

$$0 = 0\cdot\mathbf{Mg} + 0\cdot\mathbf{N} + 0\cdot\mathbf{F}_A + \mathbf{rT}\ ,$$

где **r** – плечо силы **T**. Непосредственно отсюда следует, что в условиях статики плечо силы **T** тоже обязано быть равным нулю, а значит, продолжение нити проходит в точности через центр шара, как показано пунктиром на последнем рисунке.

Только что сделанный вывод позволяет из геометрии рисунка без труда определить угол $\boldsymbol{\beta}$, поскольку видно, что

$$\sin\boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}/(\mathbf{R} + \mathbf{L}) \; .$$

После разложения силы **N** на вертикальную и горизонтальную составляющие, мы, опираясь на последний чертеж, получим все необходимые данные для записи второго закона Ньютона для шара по вертикальному и горизонтальному направлениям, соответственно:

$$0 = \mathbf{Mg} + \mathbf{N}\cos\boldsymbol{\beta} - \mathbf{F}_{\mathrm{A}} \; ,$$

$$0 = \mathbf{T} - \mathbf{N}\sin\boldsymbol{\beta} \; .$$

Согласно условию задачи, находясь в свободном плавании, шар погружен лишь на 1/3 своего объема. Это в соответствии с законом Архимеда означает, что в данный момент на него вертикально вверх действует выталкивающая сила, равная по величине трети от силы $\mathbf{F}_{\mathrm{A}}$, действующей при полном погружении. Вниз при свободном плавании на шар действует только сила тяжести, поэтому мы можем записать:

$$0 = \mathbf{Mg} - \mathbf{F}_{\mathrm{A}}/3 \; .$$

Решив совместно полученные уравнения, мы найдем неизвестную величину **T**:

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{MgR}/\sqrt{\mathbf{L}(\mathbf{L} + 2\mathbf{R})} \; .$$

Ответ: $\mathbf{T} = 2\mathbf{MgR}/\sqrt{\mathbf{L}(\mathbf{L} + 2\mathbf{R})}$.

Молекулярная физика и теплота

ЗАДАЧА № 37 (решение).

После прихода системы к термодинамическому равновесию температура **T** в обоих отсеках выровняется. Давление **P** тоже станет одинаковым, иначе поршень бы сдвигался из-за разных по величине сил давления **PS**, действующих на него слева и справа (**S** – площадь внутреннего поперечного сечения цилиндра). Заметим, что и количества молей газа **ν** в отсеках также равны между собой, что следует из условия задачи.

Записав уравнение состояния идеального газа для одного из отсеков объемом **V**

$$\mathbf{PV = \nu RT}\ ,$$

где **R** – универсальная газовая постоянная, мы видим, что объемы, занятые водородом, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_В$, и кислородом, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_К$, тоже оказываются равными между собой. Таким образом, поршень установится ровно посередине сосуда.

Ответ: $\mathbf{V}_В/\mathbf{V}_К = 1$.

ЗАДАЧА № 38 (решение).

На первый взгляд, эта задача является полным аналогом предыдущей. Однако, есть существенная разница в сформулированных исходных условиях. В задаче № 37 равными в отсеках были количества вещества, измеренные в молях, а в настоящей задаче – измеренные в килограммах. Посмотрим, к чему это приводит.

Так же, как и в прежней ситуации, после прихода системы к термодинамическому равновесию температура **T** и давление **P** в обоих отсеках выровняются.

Запишем уравнение состояния идеального газа для отсека с водородом:

$$\mathbf{PV_В = [m/(2\mu_В)]RT} \ ,$$

где **R** – универсальная газовая постоянная, а **m** – масса газа в отсеке. Коэффициент 2, поставленный перед $\mu_В$, учитывает, что в отсеках *атомы водорода объединены в молекулы, состоящие из двух атомов*, и, соответственно, число молей вещества ν, указывающее на количество отдельных частиц в газе, будет равным $\mathbf{m}/(2\mu_В)$.

Соответственно, для отсека с кислородом это уравнение выглядит в виде

$$\mathbf{PV_К = [m/(2\mu_К)]RT} \ .$$

Разделив одно уравнение на другое, мы получаем

$$\mathbf{V_В/V_К} = \mu_К/\mu_В = 16 \ .$$

Напомним для сравнения, что при равных количествах молей газа в отсеках поршень в термодинамическом равновесии устанавливался ровно посередине сосуда.

Ответ: $\mathbf{V_В/V_К} = 16$.

ЗАДАЧА № 39 (решение).

Объем сферического сосуда

$$\mathbf{V_0} = (4/3)\pi \mathbf{r}^3 \ ,$$

где **r** – радиус сферы. Поскольку по условию задачи сосуд касается всех стенок бокса, то сторона куба равна 2**r** и, соответственно, объем бокса

$$\mathbf{V} = 8\mathbf{r}^3 \ .$$

Уравнение состояния идеального газа в целом сферическом сосуде записывается в виде

$$\mathbf{P_0V_0} = \nu \mathrm{R}\mathbf{T_0} \ ,$$

а в кубическом боксе при лопнувшем сосуде:

$$\mathbf{PV} = \nu \mathrm{R}\mathbf{T} \ .$$

Здесь R - универсальная газовая постоянная, ν – число молей газа, которое остается, конечно, неизменным и которое можно выразить из первого уравнения состояния, подставив в него записанное выше выражение для $\mathbf{V}_0$:

$$\boldsymbol{\nu} = 4\pi\mathbf{P}_0\mathbf{r}^3/(3R\mathbf{T}_0) \ .$$

Подставив теперь полученные $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{V}$ во второе уравнение состояния, мы легко приходим к ответу на первый вопрос задачи:

$$\mathbf{P} = \pi\mathbf{P}_0\mathbf{T}/(6\mathbf{T}_0) \ .$$

Внутреннюю энергию $\mathbf{U}_0$ идеального газа в сферическом сосуде удобнее выразить через температуру, а не через объем и давление (см. комментарии в решении задачи № 43):

$$\mathbf{U}_0 = \boldsymbol{\nu}\mathbf{c}_V\mathbf{T}_0 \ ,$$

где $\mathbf{c}_V$ – удельная молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. В свою очередь, внутренняя энергия газа в кубическом боксе при температуре $\mathbf{T}$ записывается в виде:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\nu}\mathbf{c}_V\mathbf{T} \ .$$

Разделив последние два уравнения друг на друга, мы получим искомый ответ на второй вопрос:

$$\mathbf{U}_0/\mathbf{U} = \mathbf{T}_0/\mathbf{T}.$$

<u>Ответ:</u> а) $\mathbf{P} = \pi\mathbf{P}_0\mathbf{T}/(6\mathbf{T}_0)$; б) $\mathbf{U}_0/\mathbf{U} = \mathbf{T}_0/\mathbf{T}$.

ЗАДАЧА № 40 (решение).

Задачи подобного типа почти все решаются с привлечением уравнения состояния идеального газа. Как правило, они бесхитростные, и искусство их решения сводится к выбору наиболее подходящих моментов времени, для которых следует описать состояние газа, и к выбору самого газа, состояние которого описывается.

Когда мы говорим о выборе газа, то имеем в виду выбор двух связанных друг с другом макропараметров: количества (обычно выраженного в молях) и объема этого газа.

Для разных моментов времени указанные параметры могут быть выбраны совершенно разными, и это принципиально отличает обсуждаемый подход от подхода, используемого для записи закона изменения энергии. В последнем мы всегда, выбирая разные *моменты времени, описываем состояние одной и той же физической системы! Здесь же мы имеем право описать состояние, вообще говоря, разных систем.*

Например, если в первый выбранный нами момент времени описывается состояние $\boldsymbol{\nu}$ *молей идеального газа в объеме* $\boldsymbol{V}$*, то это совсем не означает, что в другой выбранный момент мы обязаны записывать уравнение строго для такого же количества* $\boldsymbol{\nu}$ *молей газа. За интересующий интервал времени часть молекул могла покинуть сосуд, так же, как мог измениться и объем сосуда, заполненный данным газом. В этих случаях второе уравнение приходится записывать уже для нового количества и нового объема.*

Более того, в смеси идеальных газов допускается записывать уравнение состояния для каждой из составляющих эту смесь компонент. При этом следует четко понимать, что даже если количества молей каждой компоненты разные, то объемы для этих компонент равны друг другу (каждая компонента "летает" в одном и том же сосуде!).

А, вот, давления у них могут быть разными. Такие давления называют парциальными давлениями. При этом существует довольно очевидный, но важный, закон Дальтона, провозглашающий, что общее (полное) давление газа в сосуде равно сумме парциальных давлений.

Физический смысл закона Дальтона легко понять. Поскольку мы имеем дело с идеальным газом, это означает, что молекулы данного газа, практически, "не видят" друг друга. Вся их жизнь протекает так, как будто бы других молекул (ни "своих", ни "чужих") рядом не существует. Нарушают одиночество лишь редкие (кратковременные) по сравнению с временем свободного пробега соударения, позволяющие за длительное время прийти данному газу к состоянию термодинамического равновесия (к единой температуре).

Соответственно, любая стенка внутри газа (в частности, ограничивающая его объем), линейные размеры которой много больше длины свободного пробега молекул, атакуется молекулами разного сорта независимо. К примеру, молекулы сорта А совершают за единицу времени $\boldsymbol{N_А}$ *ударов об эту стенку, а молекулы сорта Б -* $\boldsymbol{N_Б}$ *ударов. При этом* $\boldsymbol{N_А}$ *совершенно не зависит от* $\boldsymbol{N_Б}$*, и наоборот.*

Поскольку при прочих равных условиях давление в газе определя-

ется тем, сколько молекул в единицу времени атаковало выбранную площадку (скольким молекулам эта площадка изменила их импульс при соударении), становится очевидным, что молекулы сорта А, создающие парциальное давление P_A и молекулы сорта Б, создающие парциальное давление $P_Б$, в сумме оказывают на площадку давление, равное ($P_A + P_Б$), о чем и говорит закон Дальтона.

Для решения предложенной задачи выберем подход, включающий в себя запись трех уравнений состояния идеального газа: 1) газа в исходном сферическом сосуде, 2) газа в промежутке между сферой и внутренними стенками кубического бокса и 3) смеси предыдущих двух газов, оказавшихся внутри бокса после того, как сферический сосуд разбился.

Учтем, что объем сферического сосуда равен

$$\mathbf{V}_1 = (4/3)\pi\mathbf{r}^3 ,$$

а объем части бокса между сферой и кубом объемом $\mathbf{a}^3$ –

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{a}^3 - (4/3)\pi\mathbf{r}^3 .$$

Уравнение состояния идеального газа в сферическом сосуде и в боксе до того, как сосуд разобьется, запишется, соответственно, так:

$$\mathbf{P}_1(4/3)\pi\mathbf{r}^3 = \nu_1\mathbf{RT} ,$$

$$\mathbf{P}_2[\mathbf{a}^3 - (4/3)\pi\mathbf{r}^3] = \nu_2\mathbf{RT} .$$

Здесь ν_1, ν_2 – количества молей газа в сосуде и в боксе, соответственно, $\mathbf{T}$ – температура газа, $\mathbf{R}$ – универсальная газовая постоянная.

После того, как сосуд разобьется, уравнение состояния идеального газа в боксе можно будет представить в виде:

$$\mathbf{Pa}^3 = (\nu_1 + \nu_2)\mathbf{RT} .$$

Подставив сюда $\nu_1\mathbf{RT}$ и $\nu_2\mathbf{RT}$ из первых двух уравнений состояния, получим

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 + 4\pi\mathbf{r}^3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)/(3\mathbf{a}^3) .$$

Заметим, что если газ внутри сферы и газ в остальной части бокса были разными по природе, то после того, как сосуд разобьется, давление **P** будет представлять собой сумму парциальных давлений этих газов. Последние легко найти, записав уравнение состояние идеального газа для каждой компоненты, составляющей смесь, и сопоставив эти уравнения с исходными уравнениями состояния этих газов.

Определив таким способом парциальные давления, нетрудно убедиться, что их сумма равна найденному выше выражению для **P**.

Ответ: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 + 4\pi \mathbf{r}^3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)/(3\mathbf{a}^3)$.

ЗАДАЧА № 41 (решение).

Пусть до начала манипуляций с поршнем высота внутренних стенок стакана равнялась **L**. Тогда после ускоренного движения дна вверх с нулевой начальной скоростью эта высота уменьшится на размер $\mathbf{at}^2/2$ и станет равной

$$\mathbf{h} = \mathbf{L} - \mathbf{at}^2/2 \ .$$

Равномерное движение поршня вниз добавит высоту стенкам на величину **vt**, и в конечном итоге высота этих стенок окажется равной

$$\mathbf{H} = \mathbf{L} - \mathbf{at}^2/2 + \mathbf{vt} \ .$$

Поскольку исходный объем стакана был равен **SL**, то для воздуха, находившегося в этом стакане до манипуляций с поршнем, можно записать следующее уравнение состояния идеального газа:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{SL} = \nu_1\mathbf{RT} \ ,$$

где ν_1 – число молей воздуха в стакане до манипуляций.

Аналогично, уравнение состояния воздуха, заполняющего стакан с новым положением поршня и, соответственно, с новым объемом, равным **SH**, выглядит так:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{S}(\mathbf{L} - \mathbf{at}^2/2 + \mathbf{vt}) = \nu_2\mathbf{RT} \ ,$$

где ν_2 – число молей воздуха в стакане после манипуляций.

Из этих уравнений можно выразить разность количеств газа в стакане, выраженную в молях:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{S}(\mathbf{vt} - \mathbf{at}^2/2)/\mathbf{RT} \ .$$

Поскольку *в каждом моле содержится число Авогадро частиц*, искомое значение $\Delta\mathbf{N}$ находится путем простого умножения $\Delta\boldsymbol{\nu}$ на число Авогадро:

$$\Delta\mathbf{N} = \mathbf{N_A}\Delta\boldsymbol{\nu} = \mathbf{N_A P_0 S(vt - at}^2/2)/\mathbf{RT} \;.$$

Число молекул в стакане не изменится, если перемещение поршня в одну сторону окажется равным его перемещению в другую, то есть будет выполнено условие:

$$\mathbf{vt} = \mathbf{at}^2/2 \;.$$

Отсюда определяем искомое время $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = 2\mathbf{v}/\mathbf{a} \;.$$

<u>Ответ:</u> $\Delta\mathbf{N} = \mathbf{N_A P_0 S(vt - at}^2/2)/\mathbf{RT}$; $\mathbf{t} = 2\mathbf{v}/\mathbf{a}$.

ЗАДАЧА № 42 (решение).

Первое, что следует сделать после прочтения условия подобных комбинированных задач – это определить, каким темам курса физики посвящена данная задача и, соответственно, законы и правила каких разделов физики можно было бы привлечь для ее решения. Как правило, этот, казалось бы, очевидный шаг является наиболее трудным во всем процессе решения.

Быстрая "узнаваемость" темы приходит или с накоплением уже достаточного опыта, или благодаря способности логически мыслить, *быстро перебирать возможные варианты и отбрасывать все заведомо неподходящее. Второй способ очень хотелось бы порекомендовать каждому. Он гораздо более продуктивен, чем долгое сидение над условием и размышление на тему "ну как же ее решать?".*

Однако, само условие иногда содержит в себе подсказку, какую выбрать тему. Пара таких подсказок будет разобрана ниже в решении задачи № 43. Еще на несколько, имеющих отношение к рассматриваемой задаче, можно указать сейчас.

То, что в нашей задаче присутствует газ, занимающий некоторый объем, фигурирует температура этого газа, с очевидностью намекает на то, что потребуется использовать уравнение состояния идеального газа. Две разные температуры, о которых го-

ворится в условии, подсказывают, что это уравнение, возможно, придется записать два раза – для каждой из температур.

Масса груза, массивность поршня, наличие силы атмосферного давления, действующей на поршень – все это намекает на механику и, конкретно – на динамику. Конечно, самым популярным законом в динамике является второй закон Ньютона, поэтому его, безусловно, нужно включить в список "узнаваемости" и попробовать применить ко всем возможным подходящим для его использования телам.

Но в этой задаче присутствует еще одна важная подсказка, которая практически всегда намекает на еще одну тему механики. Спрашивается: "А куда девать **L**, заданную в условии?" *Присутствие каких-то определенных размеров тел в задачах механики почти наверняка подсказывает, что придется записывать моменты сил, и заданный размер будет являться плечом какой-то из этих сил или иметь отношение к нему. Следовательно, механические задачи с определенно заданными размерами механических элементов – это в большинстве своем либо задачи на статику, либо на динамику вращения.* В нашем конкретном случае мы имеем дело со статикой, поскольку в обоих описанных в условии задачи состояниях система уравновешена и находится в покое.

Итак, исключительно из текста предложенной задачи мы в состоянии "узнать" следующие темы:

1) уравнение состояния идеального газа,
2) второй закон Ньютона,
3) уравнение моментов сил в условиях статики.

Применим эти знания.

Объем **V** и число молей ν газа под поршнем остаются одними и теми же как при исходной температуре T_1, так и при конечной температуре T_2. При этом давление газа вполне может быть разным. Обозначим его, соответственно, P_1 и P_2. Тогда уравнение состояния идеального газа, находящегося под поршнем, запишется для каждого из указанных случаев в следующем виде:

$$\mathbf{P_1V = \nu RT_1}\ ,$$

$$\mathbf{P_2V = \nu RT_2}\ .$$

При этом следует учесть, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{SH}\ ,$$

где $\mathbf{S}$ – площадь поперечного сечения стакана.

Давления $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ присутствуют в записях второго закона Ньютона для поршня. Давайте, определим внешние силы, действующие на этот поршень. Пусть его масса равна $\mathbf{m}$. Также пусть атмосферное давление равно $\mathbf{P}_0$. Тогда можно без труда понять, что сверху вниз по вертикали на поршень действует сила тяжести $\mathbf{mg}$ и сила атмосферного давления $\mathbf{P}_0\mathbf{S}$, а снизу вверх – сила давления газа, заключенного под поршнем, равная $\mathbf{P}_1\mathbf{S}$ в исходном состоянии системы и $\mathbf{P}_2\mathbf{S}$ – в конечном. О направлении действия силы со стороны стержня, вторым концом прикрепленного к коромыслу, следует слегка порассуждать.

Очевидно, что противовес массы $\mathbf{M}$ тянет правое плечо коромысла вниз. Это означает, что для сохранения коромыслом горизонтального положения стержень также должен тянуть коромысло вниз. Если он тянет коромысло вниз, то по третьему закону Ньютона само коромысло тянет его вверх. В результате получается, что и поршень утягивается вслед за стержнем вверх.

Обозначим силу, действующую на поршень вверх со стороны стержня, через $\mathbf{F}_1$ для исходного состояния системы и через $\mathbf{F}_2$ – для конечного. Тогда второй закон Ньютона, записанный для покоящегося поршня в исходном состоянии и после повышения температуры, будет выглядеть, соответственно, так:

$$0 = \mathbf{mg} + \mathbf{P}_0\mathbf{S} - \mathbf{P}_1\mathbf{S} - \mathbf{F}_1\ ,$$

$$0 = \mathbf{mg} + \mathbf{P}_0\mathbf{S} - \mathbf{P}_2\mathbf{S} - \mathbf{F}_2\ .$$

Рассмотрим отдельно стержень. Так как он невесомый, то кроме таких же по величине, как $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, сил, действующих вниз со стороны поршня, и соответствующих сил $\mathbf{F}_{к1}$ и $\mathbf{F}_{к2}$, действующих вверх со стороны коромысла, никаких других внешних сил, действующих на него, нет, откуда следует, что

$$\mathbf{F}_{к1} = \mathbf{F}_1\ ,$$

$$\mathbf{F}_{к2} = \mathbf{F}_2\ ,$$

поскольку этот стержень в обоих состояниях покоится. В результате выходит, что в исходном и конечном состояниях системы силы, действующие на коромысло вниз в точке прикрепления стержня, по величине равны, соответственно, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

Рассмотрим противовес. На него действуют две внешние силы: вниз – сила тяжести **Mg**, а вверх – сила со стороны коромысла, которую в исходном состоянии можно обозначить через $\mathbf{N}_1$, а в конечном – через $\mathbf{N}_2$. Соответственно, второй закон Ньютона по вертикали для противовеса запишется так:

$$0 = \mathbf{Mg} - \mathbf{N}_1 \ ,$$

$$0 = \mathbf{Mg} - \mathbf{N}_2 \ .$$

В результате получаем, что сила, действующая на коромысло вниз в точке, где находится противовес, равна по величине **Mg**.

*Обратим внимание на одну часто встречающуюся неточность, допускаемую в подобных ситуациях учащимися. Подавляющее их большинство на вопрос "Какая сила действует на коромысло в точке нахождения противовеса?" ответит: "На коромысло в этой точке действует сила **Mg**". Это в принципе неверно.*

***Mg** – это выражение для силы тяжести, действующей на противовес (не на коромысло!) со стороны Земли и обусловленной взаимодействием этого противовеса с планетой. Коромысло абсолютно ничего "не знает" про отношения противовеса и Земли и потому не чувствует силу **Mg**. Оно ощущает лишь некую внешнюю силу давления **N** (в нашем случае – $\mathbf{N}_1$ или $\mathbf{N}_2$) со стороны противовеса, и только ее. Поэтому на заданный вопрос следует отвечать: "На коромысло действует сила **N** со стороны противовеса". Какой окажется сила **N** – равной по величине **Mg** или нет – определит второй закон Ньютона, записанный для противовеса.*

*При этом существует уловка, позволяющая, слегка подкорректировав вышеприведенный ответ учащихся, считать его верным. Она состоит в том, что в качестве системы для записи уравнения моментов сил можно выбрать не коромысло, а "коромысло + противовес". Тогда сила **N** сразу превращается во внутреннюю силу системы и в уравнении моментов не участвует. Зато в точке нахождения противовеса на систему (опять же, не на коромысло!) в этом случае, действительно, действует сила **Mg**.*

Теперь настало время отдельно рассмотреть коромысло. Поскольку в обоих состояниях оно находится в покое, то сумма моментов всех внешних сил, действующих на него, равна нулю. Если эти моменты записать относительно точки опоры коромысла и при этом моменты сил, вращающие свои плечи по часовой стрелке, принять положительными, то для исходного и конечного состояний коромысла условие статики будет выглядеть следующим образом:

$$0 = \mathbf{L}_1\mathbf{N}_1 - \mathbf{L}\mathbf{F}_{к1} \ ,$$

$$0 = \mathbf{L}_2\mathbf{N}_2 - \mathbf{L}\mathbf{F}_{к2} \ .$$

Через $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ мы обозначили расстояния от точки опоры коромысла до противовеса в исходном и конечном состояниях, соответственно.

Сделав все подстановки и решив совместно вышеприведенные уравнения, мы получим окончательно:

$$\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 = (\mathbf{L}\nu\mathbf{R}/\mathbf{MgH})(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) \ .$$

Поскольку $\mathbf{T}_2 > \mathbf{T}_1$, то $\mathbf{L}_1 > \mathbf{L}_2$, из чего следует, что согласно рисунку, приведенному в условии задачи, противовес нужно сдвинуть влево (ближе к точке опоры коромысла).

Ответ: Противовес следует придвинуть к точке опоры коромысла на величину $\Delta\mathbf{L} = (\mathbf{L}\nu\mathbf{R}/\mathbf{MgH})(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1)$.

ЗАДАЧА № 43 (решение).

Рассмотрим силы, действующие на поршень в исходном состоянии. Снизу вверх (стакан перевернут) на него давит атмосфера с силой $\mathbf{P}_0\mathbf{S}$, где $\mathbf{P}_0$ – атмосферное давление. Вниз, в свою очередь, направлены две силы: сила тяжести $\mathbf{Mg}$ и сила давления $\mathbf{P}_1\mathbf{S}$, создаваемая аргоном, где $\mathbf{P}_1$ – давление газа внутри стакана. Поскольку поршень покоится, второй закон Ньютона для него записывается так:

$$0 = \mathbf{Mg} + \mathbf{P}_1\mathbf{S} - \mathbf{P}_0\mathbf{S} \ .$$

Когда подвесили груз и система пришла к новому равновесию, сила атмосферного давления сохранилась прежней, в то время, как сила давления, создаваемая аргоном, вообще говоря, могла измениться, поскольку изменился (удвоился) объем газа. Обозначим новое давление газа через $\mathbf{P}_2$ и запишем второй закон Ньютона для системы “поршень + груз”:

$$0 = (\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{g} + \mathbf{P}_2\mathbf{S} - \mathbf{P}_0\mathbf{S}\ .$$

Придирчивый читатель обратит внимание на то, что одну силу мы "забыли" учесть в последнем уравнении. Действительно, подвешенный (скажем, на нити) груз не лишен объема и находится в атмосфере в условиях поля тяжести, поэтому на него обязана действовать выталкивающая сила Архимеда, направленная вверх. И это абсолютно верное замечание.

Однако, при решении задач, подобных той, которую мы разбираем, не следует, как говорят, предаваться фанатизму. Физика – наука точная в том смысле, что она объективно, "раз и навсегда" устанавливает истинные законы природы. Но она же и приближенная, поскольку при количественном описании явлений учитывает, как правило, лишь доминирующие факторы и механизмы, опуская те, которые не определяют поведение и основные свойства рассматриваемых систем. В нашем случае неявно предполагается, что сила Архимеда вносит пренебрежимо малую поправку в основной результат.

Вместе с тем, на практике обсуждаемая проблема часто встает весьма и весьма серьезно. Учащийся (как и любой физик, занимающийся исследованиями) должен самостоятельно суметь распознать, какие эффекты ему учитывать, а на какие не обращать внимания. Однозначных правил о том, как поступить, здесь не существует. Можно предложить лишь несколько полезных советов:

1. Применяйте ваш ранее накопленный опыт решения многочисленных задач по физике. Со временем начинаешь чувствовать, какие эффекты главные, а какие – несущественные.

2. Исходите из условия задачи: смотрите, какие параметры в нем заданы, а какие – нет. Ясно, что в нашем случае для учета силы Архимеда необходимо было бы знать объем подвешенного груза, плотность атмосферного воздуха. О них ни слова не сказано. Это почти наверняка говорит о том, что авторы задачи не предполагали учета силы Архимеда. Ну, и, конечно, будьте внимательны при обратном. Если видите, что "зачем-то" дан объем груза, подумайте, какие эффекты Вы забыли учесть.

3. Помните, что предлагаемые Вам задачи – решаемы! Причем, сформулированные в них задания предполагают возможность решения обычными школьниками и студентами. Если, учтя какие-то *тонкие эффекты, Вы столкнулись с непомерно сложными выкладками, невозможностью привести ответ к достаточно лаконичному виду, необходимостью глубоких познаний в математике, это, скорее, говорит о том, что Вы переусердствовали с точностью. Ясно, что данный совет справедлив лишь применительно к обычным учебным задачам. При решении реальных физических исследовательских задач могут потребоваться иные подходы.*

Опишем теперь изменение энергии системы “аргон + поршень + груз” в промежутке времени между тем, как систему отпустили, и тем, как она пришла к новому равновесию.

Наиболее сложным в процедуре решения задач по физике обычно является определение списка законов, которые необходимо привлечь для решения. Существуют определенные признаки, облегчающие “узнаваемость” некоторых из этих законов.

Так, если в задаче по молекулярной физике Вы встречаете слова типа “сосуд с теплоизолирующими стенками”, “теплопроводностью стенок пренебречь”, это признак того, что может потребоваться применение закона изменения энергии, поскольку авторы намекают, что теплота не поступает к системе через ее границы и не рассеивается во внешнюю среду. Обычно в подобных задачах отсутствует фраза типа “температура газа сохраняется неизменной”, поскольку изотермические условия, как правило, обеспечиваются отведением или подведением теплоты через стенки или другие элементы системы, что противоречит условию теплоизолированности.

Но бывают и “необычные” случаи. В условии сказано, что объем теплоизолирован, а в то же время, говорится “К системе подвели теплоту Q ...”. В этом случае для решения, наверняка, потребуется закон изменения энергии, в котором просто теплота будет строго детерминирована (равна Q), а неконтролируемая теплота, уходящая или приходящая через стенки, будет равна нулю. Подвести или отвести заданную теплоту Q можно с помощью специального нагревателя (холодильника), встроенного во внутрь системы.

Поскольку в начальный и конечный моменты времени наша система неподвижна и потому не обладает кинетической энергией, ее полная энергия складывается всего из двух компонент – внутренней энергии газа и потенциальной энергии поршня с грузом. Потенциальной энергией газа можно при этом пренебречь в силу ее несущественности по сравнению с потенциальной энергией значительно более тяжелых объектов системы – груза и поршня.

Есть две обычно употребляемые формы записи внутренней энергии U идеального газа: форма, выраженная через температуру T газа, и выраженная через его давление P и объем V:

$$U = \nu c_V T = (c_V/\boldsymbol{R})PV\,,$$

*где ν – количество молей газа, c_V – его удельная (на один моль) теплоемкость при постоянном объеме, **R** – универсальная газовая постоянная. Очень полезно держать в памяти обе эти формулы и использовать ту, которая содержит переменные, входящие в другие уравнения решения.*

Если за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии поршня с грузом принять новое положение равновесия, то в начальный момент времени полная энергия $\mathbf{E}_\mathrm{H}$ выбранной нами системы запишется так:

$$\mathbf{E}_\mathrm{H} = (\mathbf{c}_\mathrm{V}/\mathbf{R})\mathbf{P}_1\mathbf{V} + (\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{gh}\ \ ,$$

где $\mathbf{c}_\mathrm{V}$ – удельная (на один моль) теплоемкость аргона при постоянном объеме, **V** – начальный объем газа в стакане, **h** – расстояние, на которое опустился поршень с подвешенным к нему грузом. При этом,

$$\mathbf{h} = \mathbf{V}/\mathbf{S}\ \ ,$$

поскольку в условии задачи сказано, что после опускания поршня объем газа удвоился.

В конечный момент времени полная энергия $\mathbf{E}_\mathrm{K}$ выбранной нами системы будет включать в себя лишь внутреннюю энергию газа, поскольку потенциальная энергия поршня с грузом в соответствующем положении равна нулю:

$$\mathbf{E}_\mathrm{K} = (\mathbf{c}_\mathrm{V}/\mathbf{R})\mathbf{P}_2 2\mathbf{V}\ \ .$$

Коэффициент 2 появился из-за того, что конечный объем газа в два раза больше первоначального.

В промежутке между начальным и конечным моментами времени аргон, вообще говоря, мог менять свою температуру, однако, теплообмена с внешней средой при этом не происходило и подведенная к системе теплота **Q** была равной нулю, поскольку в условии задачи сказано, что теплопроводность стакана и поршня пренебрежимо малы.

В то же время, в процессе опускания поршня на систему действовала внешняя сила, совершившая над системой работу за этот период. Такой силой служила сила атмосферного давления, сохранявшаяся постоянной по величине, поскольку по условию задачи движение поршня было достаточно медленным.

В этом месте необходимо рассмотреть один тонкий вопрос. Дело в том, что при очень медленном перемещении поршня могут быть обеспечены такие условия, что газ внутри стакана в любой момент времени будет находиться в состоянии термодинамического равновесия, а значит, процесс, совершаемый над газом, будет равновесным. В отсутствии теплообмена с окружающей средой такой равновесный процесс называется адиабатическим, и для его описания справедливо уравнение адиабаты

$$PV^{\gamma} = const \ ,$$

где

$$\gamma = c_P/c_V \, ,$$

c_P – удельная (на один моль) теплоемкость газа при постоянном давлении, которая для идеального газа согласно формуле Майера равна $c_V + R$.

Однако, навряд ли можно с уверенностью гарантировать, что, пусть даже при достаточно медленных перемещениях груза, процесс внутри стакана окажется заведомо равновесным. В этой связи, использовать уравнение адиабаты рекомендуется либо тогда, когда условие задачи прямо на это намекает, либо уж тогда (в сомнительных случаях), когда с применением других подходов решить задачу не удается. В нашем случае можно решить задачу без использования уравнения адиабаты.

Работу **A** силы атмосферного давления легко рассчитать, она равна

$$\mathbf{A = -\,P_0Sh} \, .$$

Знак работы отрицательный, поскольку сила всегда действовала вверх, а вектор конечного перемещения поршня у нас направлен вниз. *Отметим, что работа силы атмосферного давления на этапах колебательного процесса, когда при движении поршня вверх вектора силы и перемещения совпадали по направлению, была скомпенсирована с противоположным знаком на соответствующих этапах обратного пути поршня, поэтому в конечный результат внесло вклад лишь итоговое перемещение.*

Таким образом, закон изменения энергии системы

$$\mathbf{E}_К - \mathbf{E}_Н = \mathbf{A} + \mathbf{Q}$$

в нашем случае принимает следующий вид:

$$(\mathbf{c}_V/\mathbf{R})\mathbf{P}_2 2\mathbf{V} - [\,(\mathbf{c}_V/\mathbf{R})\mathbf{P}_1\mathbf{V} + (\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{gh}\,] = -\,\mathbf{P}_0\mathbf{Sh} + 0\ .$$

Заметим, что аргон, заполняющий стакан, – это одноатомный газ. *Известно, что для любого одноатомного идеального газа*

$$\mathbf{c}_V = (3/2)\mathbf{R}\ .$$

Решив совместно записанные выше уравнения, мы получим ответ задачи:

$$\mathbf{P}_0 = 13\mathbf{Mg}/(5\mathbf{S})\ .$$

В заключение, можно особо отметить, что рассмотренный пример демонстрирует довольно редкий случай, когда при решении задачи на тему “газы” мы обошлись без “палочки-выручалочки” – уравнения Клапейрона-Менделеева.

<u>Ответ</u> : $\mathbf{P}_0 = 13\mathbf{Mg}/(5\mathbf{S})$.

ЗАДАЧА № 44 (решение).

После прихода системы в состояние механического равновесия воздух, заключенный между поршнем и жидкостью, окажется под некоторым давлением **P**. При этом на поршень будут действовать три внешние силы: вниз – сила притяжения к земле **Mg** и сила атмосферного давления $\mathbf{P}_0\mathbf{S}$, а вверх – сила **PS** давления воздуха, захваченного поршнем. С учетом того, что в состоянии равновесия поршень покоится, второй закон Ньютона для него по вертикальному направлению выглядит так:

$$\mathbf{Mg} + \mathbf{P_0S} = \mathbf{PS}\ ,$$

откуда

$$\mathbf{P} = \mathbf{Mg/S} + \mathbf{P_0}\ .$$

Воздух, заключенный между поршнем и жидкостью, давит не только на поршень снизу – вверх, но и на жидкость сверху – вниз. И, вообще говоря, его давление на жидкость больше, чем на поршень, поскольку внизу к давлению **P** добавляется давление, обусловленное собственным весом этого воздуха, обусловленным действующей на него силой тяжести, направленной к земле. Однако, *в силу того, что плотность воздуха много меньше плотности жидкости, также участвующей в создании итогового давления в системе, в задачах подобного типа обычно пренебрегают перепадом давления в пределах газовой среды и считают, что давление внутри газа везде одинаковое.*

Таким образом, получается, что у поверхности жидкости в отсеке с поршнем давление равно **P**.

Заметим, что *давление внутри жидкости у самой ее поверхности не может отличаться от давления в газе* $\boldsymbol{P}$. *Если бы это было так и давление* $\boldsymbol{P_1}$ *внутри жидкости было бы не равным* $\boldsymbol{P}$, *то на тонкий приповерхностный жидкий слой снизу бы действовала сила* $\boldsymbol{P_1S}$, *а сверху – не равная ей сила* $\boldsymbol{PS}$, *в результате чего согласно второму закону Ньютона слой должен был бы ускоряться (вверх или вниз), что нарушало бы условие механического равновесия.*

По закону сообщающихся сосудов давление в соседнем колене на уровне поверхности жидкости левого колена тоже равно **P**. Этот факт разобран в решении задачи № 24. Посмотрим, как создается давление **P** в правом колене.

После того, как вставили поршень, уровень жидкости в левом колене ушел вниз на некоторое расстояние **x**. Поскольку по условию задачи площадь поперечного сечения правого и левого сосудов одинаковая, то в силу *несжимаемости жидкости* уровень в правом колене тоже ушел на **x** вверх относительно своего исходного положения. В результате уровень поверхности жидкости в правом колене оказался выше, чем в левом, на 2**x**.

Таким образом, давление в правом колене на горизонтальном уровне, соответствующем поверхности жидкости в левом колене, можно записать в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \boldsymbol{\rho}\mathbf{g}2\mathbf{x} ,$$

что подробно обосновано в решении задачи № 23. Отсюда с учетом ранее полученного выражения для **P**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}/2\boldsymbol{\rho}\mathbf{S} .$$

Чтобы найти объем **V** воздуха, заключенного между поршнем и поверхностью воды в левом сосуде, запишем уравнение состояния идеального газа для этого воздуха до вставки поршня

$$\mathbf{P}_0\mathbf{LS} = \boldsymbol{\nu}\mathbf{RT}$$

и в конечном состоянии – когда система с поршнем пришла к равновесию –

$$\mathbf{PV} = \boldsymbol{\nu}\mathbf{RT} ,$$

где **T** – температура газа, $\boldsymbol{\nu}$ – число молей воздуха внутри сосуда, **R** – универсальная газовая постоянная. Мы использовали тот факт, что в начальный момент, когда поршень еще только вставили в сосуд и воздух еще не был им сжат, объем этого воздуха составлял величину **LS**.

Решая совместно систему из двух последних уравнений с учетом полученного выше соотношения для P, можно выразить искомый объем:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_0\mathbf{LS}^2/(\mathbf{Mg} + \mathbf{P}_0\mathbf{S}) .$$

Несмотря на то, что в условии задачи определено, что стенки сосудов достаточно высокие, можно выразить это условие в явной форме, исходя из того, что вода в правом колене не должна переливаться через край. Последнего не случится, если подъем уровня не превысит величину **L**:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}/2\boldsymbol{\rho}\mathbf{S} \le \mathbf{L} .$$

Отсюда получаем условие на предельную массу поршня

$$\mathbf{M} \le 2\boldsymbol{\rho}\mathbf{SL}$$

или минимальную исходную высоту стенок над уровнем жидкости:

$$\mathbf{L \ge M/(2\rho S)}\ .$$

<u>Ответ</u> : $\mathbf{x = M/2\rho S}$, $\mathbf{V = P_0LS^2/(Mg + P_0S)}$,
при условии $\mathbf{M \le 2\rho SL}$ или $\mathbf{L \ge M/(2\rho S)}$.

ЗАДАЧА № 45 (решение).

В задачах подобного типа возможно несколько конечных ситуаций.

Первая – когда в процессе передачи тепла от жидкости (в нашем случае – от коктейля) льду весь лед растаял (расплавился) и образовавшаяся при таянии вода нагрелась затем от 0°C до конечной установившейся положительной температуры смеси.

Вторая имеет место, когда льда слишком много, и теплоты, отобранной от жидкости, не хватает, чтобы весь его растопить. В этом случае установившимся состоянием будет такое, когда жидкость охлаждена до 0°C, и в ней плавают остатки льда.

Бывает и третья ситуация, когда исходная температура льда не 0°C, а ниже нуля. В этом случае возможно, что лед, еще не начав таять, охладит всю жидкость до 0°C, сам при этом оставаясь при отрицательной, хоть и более высокой, чем сначала, температуре, после чего начнет эту жидкость превращать в лед, отнимая у нее теплоту для дальнейшего собственного нагрева. При этом вода может замерзнуть до льда либо вся целиком, либо частично. В последнем случае мы будем в конце иметь лед с остатками воды при температуре 0°C. Если же вода замерзнет целиком, она, теперь уже в форме льда, имеет шанс охладиться до отрицательной температуры, если к моменту ее полного замерзания лед еще не достиг 0°C.

Каждый из этих процессов описывается соответствующим уравнением теплового баланса, учитывающим все особенности, перечисленные выше.

Иногда трудно предугадать, по какому сценарию будет развиваться процесс, поскольку этот сценарий зависит от количественных параметров – исходных температур компонентов и их исходных масс. По этой причине бывает необходимым проверять несколько ситуаций в поисках корректной.

Смысл уравнения теплового баланса состоит в том, что в усло-

виях теплоизолированного пространства, куда помещают обменивающиеся теплотой компоненты, никакая дополнительная теплота не уходит наружу и не приходит извне. Поэтому получается так, что вся теплота, отданная первым компонентом второму в точности равна теплоте, принятой вторым компонентом от первого (в этом и состоит тепловой баланс).

При этом нужно соблюдать строгий закон природы: теплота не может передаваться от более холодного тела более теплому! Она передается только от более теплого тела более холодному (в идеализированной ситуации, которая может быть реализована только теоретически, теплота может передаваться между телами, которые находятся при одинаковой температуре).

Отданная телом 1 теплота может приводить к его охлаждению, конденсации из пара в жидкость и кристаллизации (переходу из жидкого в твердое состояние). Аналогично, принятая телом 2 теплота может приводить к его нагреву, плавлению и испарению. Конденсация, испарение, кристаллизация и плавление могут быть как полными (для всей массы тела), так и частичными, в зависимости от исходного состояния системы.

При этом,

1) при нагревании вещества массой $\boldsymbol{m}$ *от начальной температуры* $\boldsymbol{T}_{нач}$ *до конечной температуры* $\boldsymbol{T}_{кон}$ ($\boldsymbol{T}_{кон} > \boldsymbol{T}_{нач}$) *это вещество принимает количество теплоты* $\Delta\boldsymbol{Q}_T$, *равное*

$$\Delta\boldsymbol{Q}_T = \boldsymbol{cm}(\boldsymbol{T}_{кон} - \boldsymbol{T}_{нач}) \quad ,$$

где $\boldsymbol{c}$ *– удельная теплоемкость данного вещества.*

Аналогичное количество теплоты отдает горячее вещество холодному, при этом в записанную формулу для переданной теплоты следует подставлять массу и удельную теплоемкость того вещества, которое отдает теплоту, изменяя свою температуру от $\boldsymbol{T}_{нач}$ *до* $\boldsymbol{T}_{кон}$, *где теперь* $\boldsymbol{T}_{кон} < \boldsymbol{T}_{нач}$, *и потому выражение для* $\Delta\boldsymbol{Q}_T$ *получается отрицательным.*

Здесь предполагается, что обе теплоты $\Delta\boldsymbol{Q}_T$ *стоят с одной стороны от знака равенства в уравнении теплового баланса, так что их сумма равна нулю, если никаких других тепловых процессов не происходит.*

2) Для плавления массы $\boldsymbol{m}$ *вещества (перехода из твердой фазы* *в жидкую) требуется, чтобы это вещество приняло теплоту* $\Delta \boldsymbol{Q}_{П}$*, называемую теплотой фазового перехода, равную*

$$\Delta \boldsymbol{Q}_{П} = \boldsymbol{\lambda m} \ ,$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ *– удельная теплота плавления этого вещества.*

При кристаллизации (затвердевании) единицы массы такого же вещества (переходе из жидкой фазы в твердую) данное вещество отдает точно такое же количество теплоты $\boldsymbol{\lambda}$*, что и при плавлении, поэтому для кристаллизации массы* $\boldsymbol{m}$ *данного вещества требуется отвести от него теплоту*

$$\Delta \boldsymbol{Q}_{З} = \boldsymbol{\lambda m} \ .$$

Необходимо помнить, что плавление и кристаллизация начинаются не в произвольный момент, а только тогда, когда температура вещества достигла температуры фазового перехода (перехода из твердой фазы в жидкую или наоборот)! Для перехода "водалед" при нормальных условиях температура фазового перехода составляет $0^\circ C$*.*

2) Для испарения массы $\boldsymbol{m}$ *вещества (перехода из жидкой фазы в газообразную) требуется, чтобы эта масса вещества приняла теплоту фазового перехода* $\Delta \boldsymbol{Q}_{И}$*, равную*

$$\Delta \boldsymbol{Q}_{И} = \boldsymbol{rm} \ ,$$

где $\boldsymbol{r}$ *– удельная теплота парообразования для этого вещества.*

В неравновесных условиях обычно эта теплота принимается от остальной, более нагретой, части тел, поэтому при испарении сами тела, и в особенности, локальные участки, на которых происходит испарение, охлаждаются.

При конденсации единицы массы такого же вещества (переходе из газообразной фазы в жидкую) молекулы, составляющие эту единицу массы, передают от себя точно такое же количество теплоты $\boldsymbol{r}$*, что им требовалось для испарения, поэтому при конденсации массы* $\boldsymbol{m}$ *данного вещества выделяется теплота*

$$\Delta \boldsymbol{Q}_{К} = \boldsymbol{rm} \ .$$

Наиболее интенсивно парообразование происходит при кипении жидкости. Необходимо помнить, что кипение и интенсивная кон-

денсация начинаются не в произвольный момент, а только тогда, когда окружающая температура (и, соответственно, в равновесных условиях – температура вещества) достигла температуры фазового перехода (перехода из жидкой фазы в газообразную или наоборот)! Для перехода "вода-пар" при нормальных условиях температура фазового перехода (температура кипения) составляет 100° С.

Поскольку в условии задачи сказано, что температуру нужно оценить (а не точно вычислить), можно принять такое допущение, что воздух, окружающий фужер, является хорошим термостатом, и все теплообменные процессы происходят в пределах фужера без участия окружающей среды.

Исходя из того, что по условию нашей задачи

а) количество льда небольшое по сравнению с количеством теплой жидкости,

б) начальная температура льда равна 0° С, то есть ему не требуется теплота для увеличения температуры до температуры плавления, а потому лед сразу начнет таять,

можно с наибольшей вероятностью ожидать, что в конце процесса весь лед растает, а коктейль охладится, не превращаясь в лед.

В силу всего вышесказанного, уравнение теплового баланса для процесса, описанного в условии задачи, и для введенных в условии обозначений можно записать в виде

$$\mathbf{Mc}(\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}) + \mathbf{mc}(\,0 - \mathbf{T}) - \mathbf{m}\boldsymbol{\lambda} = 0\ .$$

Переписав это уравнение в другом виде:

$$\mathbf{Mc}(\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}) = \mathbf{m}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{mc}(\mathbf{T} - 0)\ ,$$

можно сделать понятнее его смысл: теплота $\mathbf{Mc}(\mathbf{T}_0 - \mathbf{T})$, отданная коктейлем, пошла на плавление льда ($\mathbf{m}\boldsymbol{\lambda}$) и нагревание образованной из этого льда воды от нуля градусов (сразу после плавления) до конечной температуры **T**. Поскольку удельные теплоемкости коктейля и воды приняты одинаковыми, одинаковы и символы **с**, стоящие слева и справа в последнем уравнении.

Из полученного уравнения выразим искомую температуру **T**:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{McT}_0 - \mathbf{m}\boldsymbol{\lambda})/[(\mathbf{M}+\mathbf{m})\mathbf{c}]\ .$$

Заметим, что в данном представлении температура выражена в градусах Цельсия, хоть, впрочем, *уравнение теплового баланса можно записывать и с использованием значений температуры, выраженной в кельвинах, поскольку в нем везде стоят не абсолютные температуры, а их разности, которые одинаковы для обеих шкал.*

Подставив в последнее соотношение численные значения, заданные в условии, получаем

$$\mathbf{T} = 13.2\ °\mathrm{C}\ .$$

<u>Ответ</u> : $\mathbf{T} = (\mathbf{McT_0} - \mathbf{m\lambda})/[(\mathbf{M}+\mathbf{m})\mathbf{c}] \approx 13\ °\mathrm{C}$.

ЗАДАЧА № 46 (решение).

Данная задача продолжает тему, начатую в задаче № 45.

Узнаем сначала, какое количество теплоты **Q** требуется, чтобы осушить сосуд в исходном состоянии, пока в него еще не добавляли лед. Подведение теплоты нужно для осуществления двух процессов: а) нагревания массы **M** воды от исходной температуры **T** до температуры кипения 100°С, являющейся температурой фазового перехода воды из жидкого состояния в газообразное, б) для осуществления самого фазового перехода, а именно, превращения жидкости в пар, имеющий давление, равное окружающему.

Физический механизм второго процесса не столь тривиален и состоит в следующем. Молекулы жидкости, температура которой доведена до температуры фазового перехода, сами по себе не способны "развалиться" на отдельные частицы, чтобы с этого момента назваться паром. Они при температуре кипения еще держатся друг за друга и требуют дополнительной энергии (теплоты), чтобы эти связи порвать.

*Но даже после подведения какого-то количества дополнительной теплоты **ΔQ**, рвущей связи, молекулы, ранее пребывавшие в жидкой фазе, должны еще "пробить себе дорогу" в окружающее пространство, ведь они придавлены к жидкости окружающей газовой атмосферой, не дающей освободившимся молекулам свободно разлететься. Это означает, что подведенная теплота **ΔQ** не вся расходуется на разрыв связей между молекулами. Часть ее* *идет на совершение работы молекулами жидкости, ставшей газом, по расширению своего объема до такой величины, когда давление внутри вновь образованного газа сравняется с внешним атмосферным давлением.*

По этой причине, когда мы говорим, что ***r*** *– это удельная теплота парообразования, то должны понимать, что такое количество теплоты требуется, чтобы разорвать связи единичной массы жидкости и плюс еще совершить работу над внешними силами давления.*

Как подробно разбиралось в решении задачи № 45, количество теплоты, которое требуется для нагревания воды в сосуде от температуры **T** до температуры кипения 100°C, можно выразить в виде

$$\Delta \mathbf{Q}_{\mathrm{T}} = \mathbf{cM}(100 - \mathbf{T}) \ ,$$

а чтобы полностью испарить эту воду, требуется теплота

$$\Delta \mathbf{Q}_{\mathrm{И}} = \mathbf{rM} \ .$$

Таким образом,

$$\mathbf{Q} = \Delta \mathbf{Q}_{\mathrm{T}} + \Delta \mathbf{Q}_{\mathrm{И}} = \mathbf{cM}(100 - \mathbf{T}) + \mathbf{rM} \ .$$

Эта теплота передается от нагревателя, который согласно закону Джоуля-Ленца вырабатывает мощность

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^2/\mathbf{R} \ .$$

Таким образом, за время **t** этот нагреватель рассеивает количество теплоты

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{U}^2/\mathbf{R})\mathbf{t} \ ,$$

которая и расходуется на осушение сосуда.

Отсюда можно найти время первого осушения:

$$\mathbf{t} = \mathbf{QR}/\mathbf{U}^2 = (\mathbf{MR}/\mathbf{U}^2)[\mathbf{c}(100 - \mathbf{T}) + \mathbf{r}] \ .$$

С кусочком льда массы **m** это время увеличивается на интервал $\Delta\mathbf{t}$, поскольку теперь дополнительно требуется теплота $\Delta\mathbf{Q}$, которую нужно затратить на расплавление льда, $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{m}$, нагревание воды, полученной из этого льда, от 0°C до 100°C, $\mathbf{cm}(100 - 0)$, и на испарение этой воды, нагретой до температуры кипения, **rm**. Отсюда

$$\Delta \mathbf{Q} = \lambda \mathbf{m} + \mathbf{cm}(100 - 0) + \mathbf{rm} \ .$$

Согласуя эту величину с законом Джоуля-Ленца, получаем

$$\Delta \mathbf{Q} = (\mathbf{U}^2/\mathbf{R})\Delta \mathbf{t} = \lambda \mathbf{m} + 100\mathbf{cm} + \mathbf{rm} \ ,$$

откуда

$$\Delta \mathbf{t} = (\mathbf{mR}/\mathbf{U}^2)(\lambda + 100\mathbf{c} + \mathbf{r}) \ .$$

Ответ : $\mathbf{t} = (\mathbf{MR}/\mathbf{U}^2)[\mathbf{c}(100 - \mathbf{T}) + \mathbf{r}]$, $\Delta \mathbf{t} = (\mathbf{mR}/\mathbf{U}^2)(\lambda + 100\mathbf{c} + \mathbf{r})$.

ЗАДАЧА № 47 (решение).

До выпаривания на покоящийся заполненный сосуд суммарной массы ($\mathbf{m} + \mathbf{M}$) действуют две внешние силы: сила тяжести ($\mathbf{m} + \mathbf{M})\mathbf{g}$, направленная вниз, и сила Архимеда $\mathbf{F}_A$, выталкивающая сосуд из воды вверх. Соответственно, второй закон Ньютона для этой системы можно записать в следующем виде:

$$0 = (\mathbf{m} + \mathbf{M})\mathbf{g} - \mathbf{F}_A \ .$$

После выпаривания сосуд с водой снова сохраняет состояние покоя. При этом разница с первым состоянием состоит в том, что масса заполняющей его воды стала меньше на некоторую величину $\mathbf{m}_1$, а сила Архимеда уменьшилась ровно в два раза, поскольку ее величина прямо пропорциональна объему жидкости, вытесняемому телом, а этот объем согласно условию задачи стал в два раза меньше.

Тогда условие механического равновесия системы в новом состоянии запишется через второй закон Ньютона так:

$$0 = (\mathbf{m} + \mathbf{M} - \mathbf{m}_1)\mathbf{g} - \mathbf{F}_A/2 \ .$$

Поскольку согласно условию задачи вода в сосуде находилась при исходной температуре 100 °C, то есть при температуре кипения, теплота, подводимая от нагревателя, вся шла исключительно на испарение жидкости, так как разогрева до более высокой температуры не требовалось. Для испарения массы $\mathbf{m}_1$ воды необходимо подвести к ней количество теплоты $\mathbf{Q}$, равное

$$\mathbf{Q} = \mathbf{rm}_1 \ .$$

В свою очередь, вся эта теплота передается воде от нагревателя мощности **P** за время **t**, а следовательно,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Pt}\ .$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{Pt} = \mathbf{rm}_1$$

и

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{Pt}/\mathbf{r}\ .$$

Подставив $\mathbf{m}_1$ в последнее выражение второго закона Ньютона и исключив из обоих уравнений $\mathbf{F}_A$, получим окончательно

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}(\mathbf{M} + \mathbf{m})/2\mathbf{P} = 1150\ (\text{с})\ .$$

Ответ : $\mathbf{t} = \mathbf{r}(\mathbf{M} + \mathbf{m})/2\mathbf{P} = 1150\ (\text{с}) \approx 19\ (\text{мин})$.

ЗАДАЧА № 48 (решение).

Пусть **T** – конечная температура жидкости после того, как система придет в состояние термодинамического равновесия. *Состояние термодинамического равновесия характеризуется тем, что вся система достигает единой температуры, так что теплообмена между ее частями в дальнейшем уже не происходит.*

Температуру **T** можно очень просто выразить через $\mathbf{T}_1$, рассмотрев газ, заключенный под перегородкой. Поскольку эта перегородка теплопроводящая, такую же температуру **T** в термодинамическом равновесии примет и газ. Запишем для него уравнение состояния идеального газа в начальный (до добавления жидкости) и конечный (после прихода к равновесию) моменты времени, соответственно:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{V} = \nu\mathbf{R}\mathbf{T}_1\ ,$$

$$\mathbf{PV} = \nu\mathbf{RT}\ ,$$

где **V** – неизменный для условий данной задачи объем газа, $\mathbf{P}_1$ – начальное давление газа, **P** – конечное давление газа, ν – число молей этого газа, остающееся неизменным, а **R** – универсальная газовая постоянная.

Разделив нижнее уравнение на верхнее, мы придем к соотношению:

$$\mathbf{T}/\mathbf{T}_1 = \mathbf{P}/\mathbf{P}_1 = \mathbf{r} = 1.1 \ .$$

Рассмотрим теперь отсек с жидкостью. В решении задачи № 45 подробно разъяснен физический смысл уравнения теплового баланса. В нашем случае более нагретая жидкость, масса которой $\mathbf{m}_2$, а начальная температура $\mathbf{T}_2$, передает теплоту более прохладной жидкости массы $\mathbf{m}_1$ с начальной температурой $\mathbf{T}_1$, в результате чего через достаточно длительное время обе жидкости приходят к единой температуре $\mathbf{T}$. Причем $\mathbf{T}_2 > \mathbf{T}$, а $\mathbf{T} > \mathbf{T}_1$. Запишем для этого процесса уравнение теплового баланса:

$$\mathbf{cm}_2(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}) = \mathbf{cm}_1(\mathbf{T} - \mathbf{T}_1) \ ,$$

где **c** – удельная теплоемкость жидкости. Отсюда

$$\mathbf{m}_2/\mathbf{m}_1 = (\mathbf{T} - \mathbf{T}_1)/(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}) = (\mathbf{T}/\mathbf{T}_1 - 1)/(\mathbf{T}_2/\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}/\mathbf{T}_1) \ .$$

С учетом найденного выше соотношения для $\mathbf{T}/\mathbf{T}_1$ и заданного в условии задачи соотношения для $\mathbf{T}_2/\mathbf{T}_1$, получаем

$$\mathbf{m}_2/\mathbf{m}_1 = (\mathbf{r} - 1)/(\mathbf{k} - \mathbf{r}) \ ,$$

откуда

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1(\mathbf{r} - 1)/(\mathbf{k} - \mathbf{r}) = \mathbf{m}_1/2 = 2 \text{ (кг)} \ .$$

Ответ : 1) $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_1(\mathbf{r} - 1)/(\mathbf{k} - \mathbf{r}) = 2$ (кг) .
2) Температура газа возрастет в **1.1** раза.

ЗАДАЧА № 49 (решение).

Если в замкнутый сосуд поместить жидкость, то через некоторое, достаточно большое, время свободное пространство, не занятое жидкостью, заполнится паром этой жидкости, давление которого будет определяться температурой, при которой находятся жидкость и стенки сосуда. Такой пар называют насыщенным, поскольку за вышеупомянутое длительное время этот пар успел прийти в равновесие со своей жидкостью, когда за равные промежутки времени число молекул, вылетающих из жидкости в свободное пространство, равно числу молекул, возвращающихся в жидкость обратно. В таком состоянии насыщенности не проис-

ходит изменений давления пара и концентрации молекул в нем.

Поскольку очевидно, что чем выше температура жидкости, тем больше молекул она поставляет в зону пара, давление насыщенного пара определяется, именно, температурой равновесной системы, но никак не объемом свободного пространства или какими-либо другими макропараметрами.

Кипящая жидкость характеризуется тем, что пузырьки пара, зарожденные в ней у дна сосуда (если нагрев идет со стороны дна), всплывая, достигают поверхности этой жидкости и там лопаются, в результате чего мы наблюдаем характерное бурление. До начала кипения пузырек не способен донести свой пар до поверхности, поскольку в верхних, более прохладных, чем у дна, слоях жидкости молекулы находящегося в нем насыщенного пара оказываются более горячими, чем окружающее водяное пространство, и поскольку поставка молекул в объем пузырька из окружающей жидкости становится существенно меньше, чем нужно для поддержания прежнего давления, "горячие" молекулы просто "тонут" в окружающей жидкости, а пузырек, тем самым, теряет внутреннее давление и, в конце концов, схлопывается до нуля под действием внешнего давления со стороны окружающей его жидкости.

При кипении в условиях, характерных для обычных земных, это внешнее давление с высокой точностью равно окружающему сосуд атмосферному давлению, поскольку нетрудно посчитать, что добавка к нормальному атмосферному давлению $\boldsymbol{P}_A \approx 10^5$ *Па гидростатического давления, создаваемого самой жидкостью и равного, как известно,* $\boldsymbol{\rho g h}$ *(*$\boldsymbol{\rho}$ *– плотность жидкости,* $\boldsymbol{g}$ *– ускорение свободного падения,* $\boldsymbol{h}$ *– толщина слоя жидкости), составляет, скажем, для габаритов типичной кастрюли всего лишь порядка одного процента от* $\boldsymbol{P}_A$.

Таким образом, факт кипения свидетельствует о том, что жидкость целиком прогрелась настолько, что давление насыщенного пара в поднимающихся пузырьках остается вплоть до самого верха жидкости равным атмосферному давлению, иначе пузырьки бы схлопнулись, не достигнув поверхности. Отсюда можно сделать следующий практически важный вывод.

Мы знаем, что при нормальных условиях вода начинает кипеть, когда достигает температуры 100°С. В свете вышеприведенных *пояснений это означает, что давление насыщенного пара воды при температуре 100° С приблизительно равно 10^5 Па.*

Соответственно, высоко в горах, где давление атмосферного воздуха меньше, чем 10^5 Па, пузырькам легче достигнуть поверхности, не будучи схлопнутыми, поэтому кипение начинается раньше, чем температура воды достигнет 100°С. А в кастрюле-скороварке – наоборот. В ней обеспечивают более высокое давление, чем атмосферное, и потому кипение начинается при более высокой, чем 100°С, температуре, за счет чего эффективность варки продуктов повышается.

Эти сведения нам нужны для решения данной задачи.

Внутри замкнутого пространства под колпаком – насыщенный пар при температуре кипения воды **T** = 100°С (373 K), а значит, давление этого пара $\mathbf{P}_0$ равно атмосферному, то есть 10^5 Па. Воздуха под колпаком нет по условию задачи, и произошло это потому, что молекулы воды, поставляемые из жидкости при кипении, вытолкнули постепенно весь воздух из объема над жидкостью наружу.

Пусть площадь дна кастрюли равна **S**. Тогда при подъеме колпака добавляется пространство объемом

$$\mathbf{V = Sh} \ ,$$

которое очень быстро заполняется насыщенным паром, массу которого обозначим через **m**. Пар появился в пустом объеме исключительно за счет испарения дополнительной порции жидкости из кастрюли (включая банку), поскольку в прежнем свободном пространстве кастрюли обстановка в смысле концентрации и давления насыщенного пара не изменилась, так как не изменилась температура системы 100°С.

Массу **m** можно найти, записав для этой порции пара уравнение состояния идеального газа, не забывая при этом, что *молекулярная масса молекул воды H_2O $\boldsymbol{\mu}$ легко может быть вычислена с использованием таблицы Менделеева путем суммирования молекулярных масс двух атомов водорода и одного атома кислорода:*

$$\boldsymbol{\mu} = 2 \times 1 \text{ г} + 16 \text{ г} = 18 \text{ г} = 18{\times}10^{-3} \text{ кг} \ .$$

Уравнение состояния идеального газа, или, как часто его называют, уравнение Клапейрона-Менделеева (или уравнение Менделеева-Клапейрона), для пара массы **m** выглядит так:

$$\mathbf{P_0V = (m/\boldsymbol{\mu})}\mathrm{R}\mathbf{T} \ ,$$

где R – *универсальная газовая постоянная, имеющая размерность, но численно равная 8.3 в системе СИ.*

В этом месте необходимо сделать замечание относительно того, насколько правомерно считать пары воды (а в некоторых других задачах – обычный атмосферный воздух) идеальным газом.

Газ считается идеальным, если его молекулы ведут себя, как биллиардные шары: они чувствуют друг друга только в момент соударения, а все остальное время живут независимо. Причем время "независимой" жизни (время свободного пробега) у них много больше времени соударения.

В реальной жизни полностью идеальных газов, практически, не встретить. Однако, с другой стороны, многие "популярные" газы, к которым относятся атмосферный воздух, компоненты этого воздуха (азот, кислород, углекислый газ и пр.), пары воды при обычных (не слишком высоких) температуре и давлении, принимаются в решении задач за идеальный газ, поскольку при ближайшем рассмотрении поведение их молекул вполне удовлетворяет определению такого газа.

Ясно, что при подъеме колпака вода будет испаряться однородно по площади кастрюли $\mathbf{S}$, и при этом испарится слой толщиной

$$\mathbf{d} = \mathbf{m}/(\rho\mathbf{S}) \ ,$$

где ρ – плотность жидкой воды. Из банки при этом уйдет масса воды, пропорциональная площади дна банки:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{S_0}/\mathbf{S})\mathbf{m} \ .$$

Подставив $\mathbf{m}$, выраженное из уравнения состояния идеального газа, получим

$$\mathbf{M} = \mathbf{S_0}\mu\mathbf{P_0}\mathbf{h}/\mathrm{R}\mathbf{T} = 1.7 \text{ г} \ .$$

<u>Ответ</u> : $\mathbf{M} = \mathbf{S_0}\mu\mathbf{P_0}\mathbf{h}/\mathrm{R}\mathbf{T} = 1.7$ г.

Электричество

ЗАДАЧА № 50 (решение).

Обозначим через **L** расстояние между шариками, при котором мы хотим сравнить друг с другом силы их взаимодействия. Поскольку по условию задачи линейные геометрические размеры шариков много меньше **L**, эти шарики можно рассматривать, как точечные заряды. Тогда силу притяжения $\mathbf{F}_{пр}$ и силу отталкивания $\mathbf{F}_{от}$ можно выразить через закон Кулона.

При этом до столкновения:

$$\mathbf{F}_{пр} = k\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2/\mathbf{L}^2 = k(8\mathbf{q})(-4\mathbf{q})/\mathbf{L}^2 \ ,$$

где k – константа-множитель в законе Кулона. В системе СИ

$$k = 1/(4\pi\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}_0) \ ,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ – электрическая постоянная, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Необходимо обратить серьезное внимание на то, что закон Кулона справедлив только для таких ситуаций, когда геометрические размеры заряженных тел много меньше расстояния между этими телами!

Способ создания положительного и отрицательного зарядов на металлических шарах довольно очевиден: положительный заряд образуется, когда из металла удаляют некоторое количество свободных электронов, а отрицательный – когда на него садят дополнительные электроны. Во время столкновения очень подвижные электроны металла быстро перераспределяются между шарами, а так как размеры шаров одинаковые, то и заряды на них после столкновения тоже станут одинаковыми.

Обозначим каждый из этих зарядов через **Q**. По закону сохранения электрического заряда мы имеем:

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = 2\mathbf{Q} \ ,$$

или

$$8\mathbf{q} - 4\mathbf{q} = 2\mathbf{Q}\ ,$$

откуда

$$\mathbf{Q} = +2\mathbf{q}\ .$$

Таким образом, после столкновения закон Кулона будет выглядеть так:

$$\mathbf{F}_{от} = k(2\mathbf{q})^2/\mathbf{L}^2\ .$$

Взяв модуль отношения записанных сил, получаем

$$|\mathbf{F}_{пр}/\mathbf{F}_{от}| = 32\mathbf{q}^2/4\mathbf{q}^2 = 8\ .$$

<u>Ответ</u> : **в** 8 **раз** .

ЗАДАЧА № 51 (решение).

До появления третьего заряда на заряд **q** в точке А действовала сила, которая согласно закону Кулона равна

$$\mathbf{F}_1 = k\mathbf{q}^2/\mathbf{L}^2\ ,$$

где **L** – расстояние между зарядами (оно же – длина стороны треугольника АВС).

После появления третьего заряда, на заряд в точке А начнут действовать уже две такие же, одинаковые по величине, силы, но направленные друг относительно друга под углом 60°. Тогда из геометрического построения легко понять, что модуль векторной суммы этих сил равен

$$\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{F}_1\cos 30° = 2k\mathbf{q}^2\cos 30°/\mathbf{L}^2 = k\mathbf{q}^2\sqrt{3}/\mathbf{L}^2\ .$$

Взяв отношение $\mathbf{F}_2/\mathbf{F}_1$, получим

$$\mathbf{F}_2/\mathbf{F}_1 = \sqrt{3}\ .$$

<u>Ответ</u> : сила **увеличилась в** $\sqrt{3}$ **раз**.

ЗАДАЧА № 52 (решение).

Электростатический потенциал $\boldsymbol{\varphi}$ *в некоторой точке пространства количественно определяется как работа, совершенная внешней силой по переносу единичного положительного заряда в* *указанную точку из бесконечности. Считается, что никаких других сил, кроме электростатических, в процессе этого переноса не действует.*

Явная неудачность вышеприведенного определения состоит в том, что термин "работа" в физике имеет строгое значение, и работа измеряется в джоулях, в то время как потенциал измеряется в вольтах, а чтобы получить джоули нужно его умножить на величину заряда, измеренного в кулонах.

Кроме этого, было бы большой ошибкой понимать определение потенциала буквально. Действительно, что такое "единичный заряд" в системе СИ? Это, как известно, один кулон. Но один кулон – это гигантской (!) величины заряд. В этом нетрудно убедиться. Посчитайте с помощью закона Кулона силу, с которой взаимодействуют два единичных заряда в системе СИ на расстоянии, пусть даже 1 км, друг от друга. и вы получите ... 10^4 Н, что соответствует одной тонне силы! Представляете, что произойдет с системой, к которой близко поднесут такой "единичный" заряд? И как бы его еще составить, чтобы он сам за счет внутренних сил не разлетелся во все стороны...

По этой причине для тестирования электрических полей обычно используют не единичные, а, так называемые, пробные заряды. Пробным зарядом считается такой заряд, величина которого настолько мала, что этот заряд не вносит изменений в окружающую зарядовую обстановку, кроме пренебрежимо малых.

Но даже если бы и с помощью пробного заряда вы захотели измерить потенциал металлического шара на его поверхности, вы потерпели бы неудачу, поскольку при непосредственном приближении положительного заряда к проводнику подвижные электроны металла тут же подтянулись бы к поверхности со стороны этого положительного заряда и изменили бы силу взаимодействия с ним, сделав отличной от той, какая была бы, если бы шар был заряжен однородно. А измененная сила привела бы и к изменению работы, о которой шла речь выше.

Поэтому когда мы говорим о потенциале проводящего шара на его поверхности, то понимаем под этим некоторую теоретическую величину, рассчитанную для условий, когда заряд распределен по поверхности сферы равномерно (однородно). В этом случае, как *нетрудно показать, потенциал шара, на котором сосредоточен заряд* $\boldsymbol{q}$*, выражается следующей зависимостью:*

$$\varphi = k\mathbf{q}/\mathbf{r} \ ,$$

где $\mathbf{r}$ *– расстояние от центра шара до точки, в которой измеряется потенциал (здесь величина* $\mathbf{r}$ *больше или равна радиусу шара), а* $k = 1/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0)$*, где, в свою очередь,* ε_0 *– электрическая постоянная, а* ε *– относительная диэлектрическая проницаемость окружающей среды.*

Нас по условию задачи интересует потенциал

$$\varphi = k\mathbf{Q}/\mathbf{R} \ ,$$

где $\mathbf{Q}$ – заряд объединенной капли ртути, а $\mathbf{R}$ – радиус этой капли.

В силу несжимаемости жидкости объем капли ртути, образовавшейся после слияния трех капель радиуса $\mathbf{r}_0$, равен суммарному объему этих трех капель:

$$(4/3)\pi\mathbf{R}^3 = 3(4/3)\pi\mathbf{r}_0^3 \ ,$$

откуда

$$\mathbf{R} = \sqrt[3]{3}\,\mathbf{r}_0 \, .$$

Мы оставили форму образовавшейся капли в виде шара по той причине, что в условии задачи было сказано, что поле тяжести отсутствует. В присутствии поля тяжести тяжелая капля ртути может сплюснуться, что обусловлено ее более выгодным состоянием в таком виде с позиций минимума потенциальной (свободной) энергии, учитывающей в данном случае потенциальную энергию капли в поле тяжести и энергию поверхностного натяжения ртути.

По закону сохранения заряда суммарный заряд образовавшейся капли

$$\mathbf{Q} = 3\mathbf{q} \, .$$

Таким образом, искомый потенциал новой капли в любой точке на ее поверхности

$$\varphi = k\mathbf{Q}/\mathbf{R} = 3^{2/3}k\mathbf{q}/\mathbf{r}_0 \, .$$

В последнем выражении $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, поскольку в условии задачи сказано, что окружающая среда отсутствует, а следовательно, относительная диэлектрическая проницаемость $\boldsymbol{\varepsilon} = 1$.

<u>Ответ</u> : $\boldsymbol{\varphi} = 3^{2/3}\mathrm{k}\mathbf{q}/\mathbf{r}_0$.

ЗАДАЧА № 53 (решение).

Подход к решению этой задачи напрашивается сам собой: использовать закон сохранения энергии. Действительно, протон в исходном состоянии (в центре левого кольца) и далее на продолжении всего полета находится в электростатическом потенциальном поле, не подвержен действию иных сторонних сил, и потому его энергия полностью сохраняется, лишь частично переходя из одного вида в другой.

Рассмотрим, какой энергией обладает протон, находясь в центре левого кольца. В этом положении он взаимодействует как с зарядами, распределенными по левому кольцу, так и с зарядами правого. Все упомянутые заряды формируют в точке пространства, где сейчас находится протон, суммарный электростатический потенциал $\boldsymbol{\varphi}$, поэтому потенциальную энергию протона $\mathbf{U}_Л$ в центре левого кольца можно записать так:

$$\mathbf{U}_Л = \mathbf{e}\boldsymbol{\varphi} \ .$$

Вычислить потенциал $\boldsymbol{\varphi}$, на первый взгляд, может показаться трудно. На самом деле, это не так. Действительно, рассмотрим для начала "собственное" кольцо протона – левое. Каждый заряженный микрофрагмент этого кольца, несущий на себе положительный электрический заряд $d\mathbf{q}$, дает свой вклад $d\boldsymbol{\varphi}$ в суммарный потенциал $\boldsymbol{\varphi}_1$ этого кольца. Такой вклад описывается *выражением для потенциала, создаваемого точечным зарядом* $d\boldsymbol{q}$ *на расстоянии* $\boldsymbol{R}$ *от заряда*:

$$d\boldsymbol{\varphi} = kd\boldsymbol{q}/\boldsymbol{R} \ ,$$

где k – константа, являющаяся постоянным множителем в законе Кулона:

$$k = 1/(4\pi\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_0) \ ,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ *– электрическая постоянная,* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *– относительная диэлектри-*

ческая проницаемость среды, в которой происходят описанные явления; в нашем случае все происходит в вакууме, поэтому значение $\boldsymbol{\varepsilon}$ следует принять равным единице.

Приближение точечного заряда в нашем случае вполне корректно, поскольку длину дуги микрофрагмента кольца, на которой распределен заряд $d\mathbf{q}$, мы заведомо выбираем много меньшей радиуса $\mathbf{R}$, то есть много меньшей расстояния от заряда $d\mathbf{q}$ до точки, где рассчитывается потенциал.

Выигрышным моментом для решения нашей задачи является то, что *электростатический потенциал является функцией скалярной. Чтобы в какой-то точке пространства посчитать его суммарную величину, создаваемую несколькими окружающими электрическими зарядами, нужно просто арифметически сложить потенциалы, создаваемые в указанной точке каждым из окружающих зарядов, с учетом, конечно, знака каждого вклада.*

Очевидно, что все одинаковые микрофрагменты кольца дадут одинаковый вклад в полный потенциал в центре, поскольку все они находятся на одинаковом расстоянии $\mathbf{R}$ от этого центра. Соответственно, потенциал φ_1 мы найдем простым суммированием (интегрированием) записанных выше потенциалов $d\varphi$:

$$\varphi_1 = \Sigma d\varphi = \Sigma \mathrm{k} d\mathbf{q}/\mathbf{R} = (\mathrm{k}/\mathbf{R})\Sigma d\mathbf{q} = (\mathrm{k}/\mathbf{R})\mathbf{q} = \mathrm{k}\mathbf{q}/\mathbf{R}\ .$$

Мы воспользовались тем, что множитель $\mathrm{k}/\mathbf{R}$ является константой, и потому его можно вынести за знак суммы, а также тем, что сумма всех зарядов $d\mathbf{q}$ на кольце равна суммарному заряду кольца $\mathbf{q}$.

Совершенно аналогичным образом мы найдем потенциал φ_2, создаваемый зарядами правого кольца в исходной точке, где находится протон. Разница состоит лишь в том, что расстояние от микрофрагментов правого кольца до точки, где в центре левого кольца изначально находится протон, теперь будет не $\mathbf{R}$, а, согласно теореме Пифагора, $\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2}$, и заряд нового кольца будет теперь не $+\mathbf{q}$, а $-\mathbf{Q}$. Соответственно, мы получим

$$\varphi_2 = -\,\mathrm{k}\mathbf{Q}/\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2}\ .$$

Поскольку в начальный момент времени протон покоится, то есть его кинетическая энергия равна нулю, то полная энергия протона в центре левого кольца $\mathbf{W}_{\text{нач}}$ будет определяться лишь потенциальной энергией в электростатическом поле и выглядеть так:

$$\mathbf{W}_{\text{нач}} = \mathbf{U}_{\text{Л}} = \mathbf{e}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{e}(\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2) = \mathrm{k}\mathbf{eq}/\mathbf{R} - \mathrm{k}\mathbf{eQ}/\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2}\ .$$

Ввиду того, что правое кольцо будет притягивать к себе положительно заряженный протон (*заряды с противоположными знаками притягиваются друг к другу*), он выйдет за пределы левого кольца и, одновременно с этим, его начнет отталкивать от себя еще и левое кольцо (*заряды с одинаковыми знаками взаимно отталкиваются*). В силу симметрии протон будет ускоряться строго по оси, проходящей через оба кольца, и в центре правого кольца будет обладать набранной к этому моменту скоростью **v**, а, следовательно, и кинетической энергией $\mathbf{mv}^2/2$.

Потенциальная энергия протона в центре правого кольца рассчитывается совершенно аналогично тому, как мы это сделали для центра левого, только теперь его расстояние от зарядов, распределенных на правом кольце, становится равным **R**, а до зарядов, распределенных на левом – $\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2}$.

Между моментами времени, когда протон перелетал от левого кольца к правому, на него не действовали никакие внешние силы, кроме электростатических, поэтому никакие дополнительные внешние силы не совершали над ним работу.

Работа электростатических сил учитывается сразу, как только мы записали потенциальную энергию тела (частицы) в электростатическом поле. Грубой ошибкой является, если в закон изменения энергии включают потенциальную энергию тела (частицы) в потенциальном поле и одновременно учитывают работу этого поля как работу внешних сил. При этом получается, что работа поля в одном уравнении учтена дважды. Это замечание относится и к гравитационному полю, тоже являющемуся потенциальным.

Таким образом, для протона можно записать закон сохранения энергии:

$$\mathbf{mv}^2/2 - \mathrm{k}\mathbf{Qe}/\mathbf{R} + \mathrm{k}\mathbf{qe}/\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2} = \mathrm{k}\mathbf{qe}/\mathbf{R} - \mathrm{k}\mathbf{Qe}/\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2}\ ,$$

откуда

$$\mathbf{mv}^2/2 = \mathrm{k}(\mathbf{Q}+\mathbf{q})\mathrm{e}(1/\mathbf{R} - 1/\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2})$$

и

$$\mathbf{v} = \sqrt{[2k(\mathbf{Q}+\mathbf{q})e/m](1/\mathbf{R} - 1/\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2})}\ .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{v} = \sqrt{[2k(\mathbf{Q}+\mathbf{q})e/m](1/\mathbf{R} - 1/\sqrt{\mathbf{R}^2+\mathbf{d}^2})}$.

ЗАДАЧА № 54 (решение).

Процесс зарядки конденсатора проще всего можно представить себе в следующем виде.

В уединенном конденсаторе, не имеющем гальванической связи с внешними электрическими цепями, возьмем маленькую "горстку" электронов с одной из металлических пластин (обкладок конденсатора) и перенесем на другую, где в силу своей большой подвижности эти электроны тут же однородно распределятся по ее поверхности, ибо горсткой они долго существовать не могут из-за саморасталкивания. На пластине, теперь обедненной электронами, распределение заряда тоже быстро станет поверхностно однородным. Это обеспечат свободные электроны, которых осталось здесь в большом достатке, хоть сама пластина и получила теперь нескомпенсированный положительный заряд, равный по величине отрицательному, перенесенному на противоположную пластину.

Попробуем повторить только что проделанную операцию. Возьмем еще одну "горстку" электронов и попытаемся перетащить на ту пластину, которая теперь несет на себе небольшой отрицательный заряд. Сделать это будет труднее, чем в первый раз, поскольку электрическое поле, возникшее между пластинами, теперь будет препятствовать переносу отрицательного заряда прежним способом. Это значит, что мы должны будем совершить работу по переносу заряда намеченным путем.

Следующий перенос будет делать еще труднее, поэтому нужно будет совершить еще большую работу внешней силой.

Таким образом, для того, чтобы зарядить конденсатор емкости $\boldsymbol{C}$ *до конечного заряда* $\boldsymbol{q}$ *(*$+\boldsymbol{q}$ *на одной обкладке и* $-\boldsymbol{q}$ *на другой), требуется совершение работы внешней силой. Из закона изменения энергии мы знаем, что совершая работу над системой, мы изменяем ее энергию. В нашем случае внешняя сила совершала положительную работу, поскольку приходилось направлять ее вектор в сторону перемещения электронов (сами электроны к пластине с* *отрицательным зарядом двигаться не хотели).*

В результате, конденсатор приобрел положительную энергию W_C, *которая, как нетрудно показать, может быть выражена в виде*

$$W_C = q^2/(2C) \ .$$

Поскольку напряжение U *на конденсаторе связано с зарядом на нем соотношением*

$$q = CU \ ,$$

энергию конденсатора также можно представить в виде

$$W_C = CU^2/2 \ .$$

"Носителем" этой энергии является электрическое поле, сосредоточенное между обкладками конденсатора.

Поскольку по условию нашей задачи заряд **q** на обкладках конденсатора не изменился при ударе, следует ожидать, что энергия могла измениться вследствие изменения величины емкости **С**.

Емкость C *плоского конденсатора может быть представлена выражением, в которое входят площадь* S *обкладки конденсатора, величина зазора* d *между обкладками и диэлектрическая проницаемость изолятора, заполняющего пространство между пластинами, которая равна произведению электрической постоянной* ε_0 *и относительной диэлектрической проницаемости* ε *вещества, из которого изготовлен изолятор. Это выражение выглядит следующим образом:*

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d \ .$$

Пусть индекс 1 обозначает состояние конденсатора до удара, а индекс 2 – после удара. Тогда с использованием последней формулы и формулы для энергии конденсатора, выраженной через заряд, легко найти:

$$\mathbf{W}_{C2}/\mathbf{W}_{C1} = \mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2 = \mathbf{S}_1\mathbf{d}_2/(\mathbf{S}_2\mathbf{d}_1) = (\mathbf{S}_1/\mathbf{S}_2)(\mathbf{d}_2/\mathbf{d}_1) = 1/3.$$

Ответ: Энергия конденсатора после удара **уменьшится в 3 раза.**

ЗАДАЧА № 55 (решение).

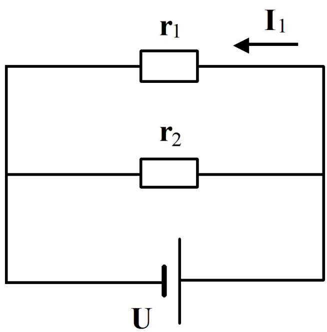
Каждый кусок проволоки, если это не сверхпроводник, обладает электрическим сопротивлением. Поэтому в электрических цепях такие объекты принято изображать в виде значков, используемых для отображения обычных сопротивлений (резисторов).

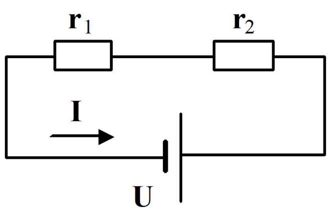
Пусть сопротивление первого куска проволоки, через который протекает ток $\mathbf{I}_1$, равно $\mathbf{r}_1$, а сопротивление второго с током $\mathbf{I}_2$ равно $\mathbf{r}_2$. Рассмотрим верхний рисунок, схематично иллюстрирующий два куска проволоки, соединенные параллельно и подключенные к внешнему источнику напряжения $\mathbf{U}$. Хорошо видно, что к концам сопротивления $\mathbf{r}_1$ непосредственно приложено напряжение $\mathbf{U}$, в результате чего через данное сопротивление протекает ток $\mathbf{I}_1$. Соответственно, можно применить закон Ома, чтобы выразить сопротивление $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{U}/\mathbf{I}_1 \quad .$$

Совершенно в аналогичной ситуации находится и сопротивление $\mathbf{r}_2$, откуда

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{U}/\mathbf{I}_2 \quad .$$





На нижнем рисунке изображено последовательное соединение сопротивлений $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. *При последовательном соединении элементов электрической цепи ток, протекающий через каждый из этих элементов, один и тот же! Такое свойство последовательных цепей обусловлено тем, что электрический заряд не накапливается, как принято считать, в проводниках, соединяющих рассматриваемые элементы. Соответственно, сколько заряда протекает через один элемент в единицу времени, столько же протечет за это время и через каждый последующий, не задерживаясь в соединительных проводниках.*

Известно, что *полное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений.* В результате, из закона Ома, записанного для участка, где последовательно соединены сопротивления $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, следует, что

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{U}/\mathbf{I} \ ,$$

откуда

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{U}/\mathbf{I} - \mathbf{r}_1 \ .$$

Теперь приравняем друг другу полученные выше выражения для сопротивления $\mathbf{r}_2$, в получившееся соотношение подставим выражение для $\mathbf{r}_1$, после чего выразим искомый ток:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1\, \mathbf{I} /(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}) \ .$$

Ответ: $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1\, \mathbf{I} /(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I})$.

ЗАДАЧА № 56 (решение).

*При протекании постоянного тока **I** через сопротивление нити лампы происходит разогрев этой нити, сопровождаемый выделением теплоты, обычно называемой Джоулевым теплом, поскольку мощность **P** этого тепловыделения подчиняется известному закону Джоуля-Ленца*

$$\boldsymbol{P = UI = RI^2 = U^2/R} \ ,$$

*где **R** – сопротивление проводника, по которому протекает ток **I** и который ввиду этого разогревается, а **U** – электрическое напряжение, приложенное к данному проводнику.*

Нетрудно увидеть, что все три соотношения, которые приведены выше, связаны друг с другом законом Ома

$$\boldsymbol{U = RI} \ .$$

Выразим из закона Джоуля-Ленца сопротивления ламп $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, где индексы 1 и 2 соответствуют обозначениям, принятым в условии задачи:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{U}_1^2/\mathbf{P}_1 = 6 \text{ Ом} \ ,$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{U}_2^2/\mathbf{P}_2 = 12 \text{ Ом} \ .$$

При последовательном соединении ламп их общее сопротивление $\mathbf{R}_3$ станет равным сумме сопротивлений каждой из ламп, что хорошо известно для последовательного соединения проводников. Соответственно,

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 18 \text{ Ом} .$$

Известно также, что *в любой точке последовательной цепи протекает ток одинаковой силы*. Соответственно, через каждую из ламп, включенных последовательно, ток **I** будет одинаковый и равный току, протекающему через сопротивление $\mathbf{R}_3$. Этот ток, о котором спрашивается в условии задачи, легко найти, записав закон Ома:

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}_3/\mathbf{R}_3 = \mathbf{U}_3/(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) = \mathbf{U}_3/(\mathbf{U}_1^2/\mathbf{P}_1 + \mathbf{U}_2^2/\mathbf{P}_2) = 0.5 \text{ (А)} .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{I} = \mathbf{U}_3/(\mathbf{U}_1^2/\mathbf{P}_1 + \mathbf{U}_2^2/\mathbf{P}_2) = 0.5 \text{ (А)}$.

ЗАДАЧА № 57 (решение).

В этой задаче мы имеем дело с неидеальным источником напряжения (Э.Д.С.). *Неидеальный источник напряжения отличается от идеального тем, что обладает ненулевым внутренним сопротивлением. На величину напряжения, вырабатываемого источником, это сопротивление не влияет, но в формировании силы тока, протекающего через источник, участвует.*

Последнее свойство неидеального источника позволяет изобразить его эквивалентную схему в электрической цепи в виде последовательно соединенных идеального источника с тем же самым напряжением, что у неидеального, и внутреннего сопротивления, которым обладает неидеальный источник.

В первом случае подключения нагрузки к неидеальному источнику напряжения мы можем записать силу тока, протекающего в цепи, воспользовавшись законом Ома для данной цепи, полное сопротивление которой складывается из последовательно соединенных сопротивлений $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{I}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 /(\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}) .$$

При этом выделяемая на сопротивлении нагрузки $\mathbf{R}_1$ мощность рассчитывается согласно закону Джоуля-Ленца:

$$P_1 = R_1 I_1^2 .$$

Во втором случае подключения нагрузки мы имеем, соответственно,

$$I_2 = \varepsilon_2 /(R_2 + r) ,$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 .$$

По условию задачи

$$P_1 = P_2 ,$$

откуда после подстановки полученных выше выражений находим:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \sqrt{R_1/R_2}\,(r + R_2)/(r + R_1) .$$

<u>Ответ:</u> $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \sqrt{R_1/R_2}\,(r + R_2)/(r + R_1)$.

ЗАДАЧА № 58 (решение).

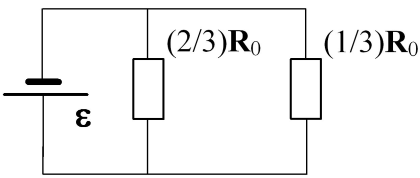
Из рисунка условия задачи хорошо видно, что к точкам, где источник Э.Д.С. подсоединен к кольцу, также подсоединены два участка кольцевой проволоки. Один из них представляет собой дугу 120°, то есть он составляет 1/3 длины всей окружности, а другой – соответственно, дугу 240°, то есть этот участок составляет 2/3 от длины окружности.

Пусть R_0 – сопротивление всего отрезка проволоки, из которого изготовлено кольцо. Поскольку проволока однородная, и чем участок длиннее, тем больше его сопротивление, то сопротивление более короткого участка составляет

$$R_1 = (1/3)R_0 ,$$

а более длинного –

$$R_2 = (2/3)R_0 .$$



Эквивалентная схема рассматриваемой электрической цепи показана на рисунке. Из нее хорошо видно, что источник напряжения нагружен на два сопротивления, соединенные параллельно, то есть нагружен на некоторое эквивалентное сопротивление $\mathbf{R}$, которое можно рассчитать, пользуясь известной *формулой для параллельного соединения сопротивлений:*

$$\boldsymbol{R = R_1R_2/(R_1 + R_2)}\ .$$

Подставив сюда ранее полученные выражения для $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, мы находим

$$\mathbf{R} = (2/9)\mathbf{R}_0\ .$$

На этом сопротивлении выделяется мощность (Джоулево тепло)

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\varepsilon}^2/\mathbf{R} = 9\boldsymbol{\varepsilon}^2/(2\mathbf{R}_0)\ .$$

Сопротивление $\boldsymbol{R_0}$ однородной проволоки мы можем вычислить по известной формуле, связывающей удельное сопротивление $\boldsymbol{\rho}$ материала, из которого она изготовлена, длину проволоки $\boldsymbol{L}$ и площадь ее поперечного сечения $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{R_0 = \rho L/S}\ .$$

Поскольку проволока представляет собой окружность радиуса $\mathbf{r}$, а в поперечном сечении имеет круг с радиусом $\mathbf{r}_1$, то

$$\mathbf{L} = 2\pi\mathbf{r}\ ,$$

а

$$\mathbf{S} = \pi\mathbf{r}_1^2\ ,$$

откуда

$$\mathbf{R}_0 = 2\boldsymbol{\rho}\mathbf{r}/\mathbf{r}_1^2\ .$$

Подставив это выражение в ранее записанное соотношение для $\mathbf{N}$, получим

$$\mathbf{N} = 9\boldsymbol{\varepsilon}^2\mathbf{r}_1^2/(4\boldsymbol{\rho}\mathbf{r}) = 18\ (\text{Вт})\ .$$

Ответ: $\mathbf{N} = 9\boldsymbol{\varepsilon}^2\mathbf{r}_1^2/(4\boldsymbol{\rho}\mathbf{r}) = 18\ (\text{Вт})$.

ЗАДАЧА № 59 (решение).

Можно заметить, что конец полозка, лежащий на кольце, делит это кольцо на два участка. Один представляет собой дугу с углом $\boldsymbol{\alpha}$, а второй – соответственно, дугу с углом ($2\pi - \alpha$). Длины этих участков $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ легко найти, воспользовавшись *полезным математическим соотношением, выражающим длину дуги через радиус окружности **R** и угол, ограничивающий эту дугу:*

$$\mathbf{L}_1 = \alpha\mathbf{R} \ ,$$

$$\mathbf{L}_2 = (2\pi - \alpha)\mathbf{R} \ .$$

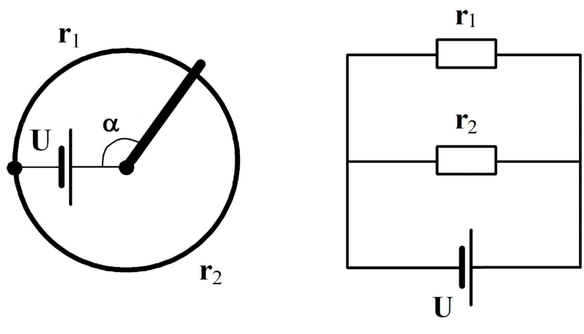
Следует помнить, что численное значение угла в приведенных формулах выражается в радианах (не в градусах!).

Поскольку проволока по условию задачи однородная, электрическое сопротивление каждого участка пропорционально его длине. Так как сопротивление всего куска проволоки длиной $2\pi\mathbf{R}$ равно $\mathbf{r}$, легко выразить сопротивления $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ каждого из кусков (см. рисунок слева):

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}\ \alpha\mathbf{R}/(2\pi\mathbf{R}) = \mathbf{r}\alpha/(2\pi) \ ,$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}\ (2\pi - \alpha)\mathbf{R}/(2\pi\mathbf{R}) = \mathbf{r}(2\pi - \alpha)/(2\pi) \ .$$

Теперь заметим, что сопротивления $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соединены парал-



лельно, и это параллельное соединение подсоединено к источнику напряжения. Соответственно, эквивалентную схему нашего устройства можно изобразить в виде, представленном на рисунке справа. *Полное сопротивление* $\mathbf{r}_O$ *пары параллельно соединенных проводников с индивидуальными сопротивлениями* $\mathbf{r}_1$ *и* $\mathbf{r}_2$ *выражается известной формулой:*

$$\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2/(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \ .$$

Поскольку источник напряжения соединен последовательно с этой парой, ток $\mathbf{I}$, протекающий через него, будет равен току, протекающему через пару. Последний, в свою очередь, мы можем определить из закона Ома, записанного для сопротивления $\mathbf{r}_O$:

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}/\mathbf{r}_O \quad .$$

Подставив сюда выражение для $\mathbf{r}_O$, с учетом записанных выше соотношений для $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ получим

$$\mathbf{I} = (4\pi^2\mathbf{U}/\mathbf{r})/[\alpha(2\pi - \alpha)] \quad .$$

Видно, что ток через источник зависит от угла α и принимает минимальное значение, когда знаменатель полученного выражения максимальный. Значение угла, при котором достигается максимум знаменателя, легко найти, поскольку функция $\alpha(2\pi - \alpha)$ представляет собой квадратный трехчлен с нулевым свободным членом, а положение экстремума этой функции (перевернутая парабола) определяется по известной формуле “– b/(2a)”. В нашем случае максимум расположен при значении α, равном π. При этом значение тока

$$\mathbf{I}_{min} = 4\mathbf{U}/\mathbf{r} \quad .$$

<u>Ответ:</u> минимальный ток $\mathbf{I}_{min} = 4\mathbf{U}/\mathbf{r}$ достигается при значении $\alpha = \pi$.

ЗАДАЧА № 60 (решение).

До перегорания сопротивления по замкнутой цепи, состоящей из источника с напряжением $\mathbf{U}$, сопротивления $\mathbf{R}_1$ и сопротивления $\mathbf{R}_2$, протекает постоянный ток, величину которого $\mathbf{I}$ можно выразить, записав закон Ома для этой цепи:

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}/(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \quad .$$

Ток во всех точках цепи одинаков, поскольку упомянутые выше элементы включены последовательно. Емкости, через которые ток, конечно, не протекает, не влияют на величину $\mathbf{I}$.

Поскольку через сопротивление $\mathbf{R}_1$ протекает ток $\mathbf{I}$, то по закону Ома на нем падает напряжение

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_1\mathbf{I} \; .$$

Емкость $\mathbf{C}_1$ подсоединена к тем же точкам, что и сопротивление $\mathbf{R}_1$, поэтому на этой емкости разность потенциалов также равна $\mathbf{U}_1$, и, следовательно, заряд на ней

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}_1\mathbf{U}_1 \ .$$

Поскольку величина заряда $\mathbf{q}$ дана в условии задачи, можно, подставив в последнее выражение полученные выше соотношения для $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{I}$, выразить напряжение источника:

$$\mathbf{U} = \mathbf{q}(1 + \mathbf{R}_2/\mathbf{R}_1)/\mathbf{C}_1 \ .$$

После того, как сопротивление $\mathbf{R}_2$ перегорит, ток во внешней цепи через некоторое время прекратится, поскольку его протеканию будет препятствовать емкость $\mathbf{C}_2$.

Напряжение на емкости $\mathbf{C}_1$ также упадет до нуля, поскольку если бы оно оставалось ненулевым, через сопротивление $\mathbf{R}_1$, подсоединенное к тем же точкам, что и $\mathbf{C}_1$, непрерывно тек бы ток согласно закону Ома. Иначе говоря, через некоторое время после перегорания сопротивления $\mathbf{R}_2$ сопротивление $\mathbf{R}_1$ полностью разрядит емкость $\mathbf{C}_1$.

В результате, через длительное время после перегорания сопротивления $\mathbf{R}_2$ все напряжение $\mathbf{U}$ источника станет падать на емкости $\mathbf{C}_2$, поэтому для заряда $\mathbf{q}'$, сосредоточенного на этой емкости, мы сможем записать

$$\mathbf{q}' = \mathbf{C}_2\mathbf{U} \ .$$

Подставив сюда полученное выше выражение для $\mathbf{U}$, найдем окончательно:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}(1 + \mathbf{R}_2/\mathbf{R}_1)\mathbf{C}_2/\mathbf{C}_1 \ .$$

Ответ: $\mathbf{q}' = \mathbf{q}(1 + \mathbf{R}_2/\mathbf{R}_1)\mathbf{C}_2/\mathbf{C}_1$.

ЗАДАЧА № 61 (решение).

Проанализируем состояние системы, состоящей из одного конденсатора, до и после раздвигания пластин.

В исходном состоянии система обладает энергией электрического поля

$$\mathbf{W = CU^2/2} \ ,$$

что подробно обсуждалось в решении задачи № 54. После раздвигания пластин напряжение на выводах конденсатора не изменилось (сохранилось подключение к той же самой батарее), но величина емкости стала другой, что в соответствии с записанной выше формулой привело к изменению энергии системы.

Чтобы узнать, как изменилась величина емкости, достаточно вспомнить соотношение, справедливое для емкости плоского конденсатора:

$$\mathbf{C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d} \ ,$$

где **S** – площадь пластины конденсатора, **d** – величина зазора между обкладками, $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ – электрическая постоянная, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ – относительная диэлектрическая проницаемость изолятора между обкладками (в нашем случае можно принять $\boldsymbol{\varepsilon} = 1$, что хорошо соответствует значению относительной диэлектрической проницаемости воздуха, заполняющего по условию задачи пространство между пластинами).

Из приведенной формулы для **C** видно, что емкость плоского конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между обкладками. Поскольку при раздвигании пластин никакие другие параметры конденсатора не изменяются, то увеличение **d** в два раза приводит к уменьшению емкости вдвое. Соответственно, вдвое уменьшается и энергия системы.

Разберемся, какие внешние факторы могли изменить энергию нашей системы? Оговоренная в условии задачи идеальность источника напряжения свидетельствует о том, что сопротивление его равно нулю, а следовательно, при протекании тока никакая теплота в цепи не выделяется.

*Сам же источник, вырабатывающий напряжение **U**, способен совершать работу по переносу заряда, поскольку он представляет собой электродвижущую силу, и если величина перенесенного заряда равна **Δq**, то такая работа равна*

$$\boldsymbol{A_U = U\Delta q} \ .$$

Эта работа положительная, если положительный заряд перенесен от минусовой клеммы источника к плюсовой, и наоборот –

отрицательная, если положительный заряд перенесен в противоположную сторону.

Вторым фактором, способным изменить энергию системы, является искомая механическая работа **A** внешней силы, которая была приложена к пластинам в процессе раздвигания.

Таким образом, закон изменения энергии системы, состоящей из заряженного конденсатора, можно представить в следующем виде:

$$(\mathbf{C}/2)\mathbf{U}^2/2 - \mathbf{CU}^2/2 = \mathbf{A}_U + \mathbf{A}\,.$$

Определим теперь величину и знак перенесенного заряда $\Delta\mathbf{q}$. Согласно известному соотношению, связывающему заряд **q** и напряжение **U** на конденсаторе емкости **C**, мы имеем до раздвигания пластин

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{CU}\,,$$

$$\mathbf{q}_2 = (\mathbf{C}/2)\mathbf{U}\,,$$

где $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ – заряды на обкладках конденсатора до и после раздвигания пластин, соответственно.

Видно, что в исходном состоянии на пластине, подсоединенной к положительному полюсу батареи, находился больший по величине заряд, чем после раздвигания. Это значит, что раздвигание привело к перетеканию положительного заряда через батарею от плюсовой ее клеммы к минусовой, а следовательно, к совершению этой батареей отрицательной работы

$$\mathbf{A}_U = \mathbf{U}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) = -\,(\mathbf{C}/2)\mathbf{U}^2\,.$$

Подставив это выражение в записанный выше закон изменения энергии, мы определим искомую работу:

$$\mathbf{A} = \mathbf{CU}^2/4\,.$$

<u>**Ответ:**</u> $\mathbf{A} = \mathbf{CU}^2/4$.

ЗАДАЧА № 62 (решение).

Выберем обе емкости и сопротивление, изображенные на рисунке условия задачи, включая все содержащиеся в них подвижные заряды, в качестве единой системы. Источник напряжения (Э.Д.С.)

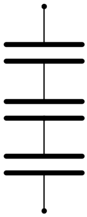
в систему включать не будем. Вполне логично, что за промежуток времени, прошедший между начальным состоянием этой системы, изображенным на рисунке условия, и конечным, когда обкладка уже придвинута и система пришла в равновесие, может произойти перераспределение зарядов между емкостями. Это означает, что в процессе манипуляций с верхней обкладкой возможно изменение энергии данной системы.

Следует иметь в виду, что в электрических цепях, подобных нашей, ни Э.Д.С., ни какие-либо сопротивления энергией не обладают, а если и обладают, то эта энергия остается неизменной, и потому может быть опущена в законе изменения энергии. Э.Д.С., как внешняя сила по отношению к системе, способна совершать работу, а сопротивления – рассеивать теплоту во внешнюю среду, но приписывать этим элементам какую-то энергию, по смыслу характеризующую мгновенное состояние системы, неправильно. Энергией в подобных цепях обладают электрические емкости, поскольку в них накоплен заряд, порождающий энергию электрического поля, сосредоточенного между обкладками данных емкостей. Изменение величины заряда, напряжения на обкладках конденсатора или самой величины емкости приводит к изменению энергии такой системы.

Легко увидеть, что и в начальный, и в конечный моменты времени ток через сопротивление не течет (мешают емкости), следовательно (согласно закону Ома), потенциалы обоих выводов этого сопротивления одинаковые, а значит, разность потенциалов на емкости $\mathbf{C}_0$ будет в начале и в конце процесса одинаковой и равной напряжению Э.Д.С. $\mathbf{U}$. Соответственно, следуя соотношению $\mathbf{q}_0 = \mathbf{C}_0\mathbf{U}$, заряд $\mathbf{q}_0$ на этой емкости в конце также примет исходное значение. Таким образом, в конечный момент времени энергия этого конденсатора $\mathbf{W}_0 = \mathbf{C}_0\mathbf{U}^2/2$ будет такой же, как была вначале.

Поскольку обе емкости нашей системы присоединены к одним и тем же точкам схемы, напряжение $\mathbf{U}$ сохранится также и на переменной емкости со вставкой. Однако, в результате перемещения обкладки величина емкости со вставкой изменится, а следовательно, изменится и заряд на ней.

Найдем величину этой емкости в начальный и конечный моменты времени. Сначала этот сложный конденсатор можно представить



в виде трех последовательно соединенных емкостей, изображенных на рисунке.

Исходное значение $\mathbf{C}_1$ емкости со вставкой можно выразить, воспользовавшись известной *формулой для последовательного соединения емкостей*:

$$1/\mathbf{C}_1 = 1/\mathbf{C}' + 1/\mathbf{C} + 1/\mathbf{C}' \quad ,$$

где в нашем случае $\mathbf{C}'$ – емкость конденсатора, обкладками которого служат металлическая пластина и ближайшая к ней поверхность диэлектрика (таких конденсаторов в сложном конденсаторе два), $\mathbf{C}$ – емкость конденсатора, сосредоточенного между поверхностями диэлектрика и, следовательно, заполненного материалом с относительной диэлектрической проницаемостью $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Аналогично, по окончании манипуляций с пластиной емкость $\mathbf{C}_2$ сложного (теперь уже – двойного) конденсатора может быть вычислена по формуле

$$1/\mathbf{C}_2 = 1/\mathbf{C} + 1/\mathbf{C}' \quad .$$

Выражая $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ из вышеприведенных соотношений, получаем

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}\mathbf{C}'/(\mathbf{C}' + 2\mathbf{C}) \ ;$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}\mathbf{C}'/(\mathbf{C}' + \mathbf{C}) \ .$$

Соответственно, в начальный момент на емкости $\mathbf{C}_1$ был сосредоточен заряд

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{U} = \mathbf{C}\mathbf{C}'\mathbf{U}/(\mathbf{C}' + 2\mathbf{C}) \ ,$$

а в конечный момент – на емкости $\mathbf{C}_2$ стал заряд, равный по величине

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{U} = \mathbf{C}\mathbf{C}'\mathbf{U}/(\mathbf{C}' + \mathbf{C}) \ .$$

Таким образом, в процессе манипуляций с верхней пластиной Э.Д.С. перенесла заряд в направлении по своей стрелке, равный разности зарядов на составной емкости, а именно,

$$\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = \mathbf{C}'\mathbf{C}^2\mathbf{U}/[(\mathbf{C}' + \mathbf{C})(\mathbf{C}' + 2\mathbf{C})] \ .$$

Соответственно, электродвижущая сила совершила работу, равную

$$\mathbf{A} = (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)\mathbf{U} = \mathbf{C}'\mathbf{C}^2\mathbf{U}^2/[(\mathbf{C}' + \mathbf{C})(\mathbf{C}' + 2\mathbf{C})] \ .$$

За это время произошло изменение энергии $\Delta\mathbf{W}$ нашей системы за счет изменения энергии составного конденсатора:

$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{C}_2\mathbf{U}^2/2 - \mathbf{C}_1\mathbf{U}^2/2 = \mathbf{C}'\mathbf{C}^2\mathbf{U}^2/[2(\mathbf{C}' + \mathbf{C})(\mathbf{C}' + 2\mathbf{C})] \ .$$

Запишем закон изменения энергии системы:

$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{A} + \mathbf{A}_X - \mathbf{Q} \ ,$$

где $\mathbf{A}_X$ – искомая работа силы, придвинувшей обкладку. Подставив сюда полученные выше выражения для $\mathbf{A}$ и $\Delta\mathbf{W}$, мы получаем

$$\mathbf{A}_X = \mathbf{Q} - \mathbf{C}'\mathbf{C}^2\mathbf{U}^2/[2(\mathbf{C}' + \mathbf{C})(\mathbf{C}' + 2\mathbf{C})] \ .$$

Теперь осталось выразить $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{C}$ через известные значения $\mathbf{S}$, $\mathbf{d}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для этого воспользуемся *общей формулой, выведенной для расчета емкости C плоского конденсатора, $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$*, где ε_0 – электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума), ε – относительная диэлектрическая проницаемость материала, заполняющего пространство между обкладками, S – площадь пластины конденсатора, d – толщина зазора между пластинами.

В нашем случае для обеих емкостей $S = \mathbf{S}$. Для емкости $\mathbf{C}'$ у нас $d = \mathbf{d}/4$ и $\varepsilon = 1$, а для емкости $\mathbf{C}$: $d = \mathbf{d}/2$ и $\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon}$. Отсюда

$$\mathbf{C}' = 4\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{S}/\mathbf{d} \ ,$$

$$\mathbf{C} = 2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{S}/\mathbf{d} \ .$$

Подставив $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{C}$ в выражение для $\mathbf{A}_X$, окончательно получим

$$\mathbf{A}_X = \mathbf{Q} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}^2\mathbf{S}\mathbf{U}^2/[\mathbf{d}(1 + \boldsymbol{\varepsilon})((2 + \boldsymbol{\varepsilon})] \ .$$

Необходимо отметить следующее. Несмотря на то, что из конечного выражения явно не следует знак работы $\mathbf{A}_X$, физическая картина подсказывает, что эта работа должна быть отрицательной. Действительно, при подаче напряжения на конденсатор его пластины накапливают заряды разноименных знаков, и потому притягиваются друг к другу. Соответственно, при медленном приближении обкладки к поверхности диэлектрика внешняя сила должна удерживать верхнюю пластину от ее самостоятельного устремления к нижней, то есть действовать в направлении, противоположном направлению перемещения этой пластины.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{A}_X = \mathbf{Q} - \varepsilon_0\varepsilon^2\mathbf{SU}^2/[\mathbf{d}(1+\varepsilon)((2+\varepsilon)]$ при условии $\mathbf{Q} < \varepsilon_0\varepsilon^2\mathbf{SU}^2/[\mathbf{d}(1+\varepsilon)((2+\varepsilon)]$.

ЗАДАЧА № 63 (решение).

Из рисунка условия задачи видно, что пружина, обладающая нулевым сопротивлением, закорачивает правую часть реостата, поскольку, образно говоря, при подтекании тока слева к "развилке", где находится контакт полозка, ни один "разумный" ток "не захочет" далее продвигаться к точке В, испытывая на своем пути сопротивление движению, а весь потечет через пружину, где такое сопротивление отсутствует. В результате получается так, что правая часть реостата полностью исключена из игры в данной электрической схеме.

Полозок на пружине представляет собой модель физического маятника ("грузик на пружинке"). При его отклонении вправо или влево от положения равновесия на величину $\mathbf{x}_0$ сопротивление между точками **A** и **B** изменяется, поскольку изменяется сопротивление левой части реостата. Так как по условию задачи полное сопротивление реостата длины **L** равно **R**, то отклонения на $\mathbf{x}_0$ согласно составленной пропорции соответствуют изменению сопротивления левой части на

$$\Delta\mathbf{r} = (\mathbf{x}_0/\mathbf{L})\mathbf{R} \ .$$

*Поскольку мы имеем дело с источником тока (а не с источником напряжения), то должны учитывать, что вырабатываемый этим прибором ток всегда на выходе одинаковый (и по условию нашей задачи равный **I**), независимо от того, с каким сопротивлением нагрузку мы к нему подсоединяем. Вместе с тем, стоит обратить внимание на такой факт, что в многочисленных учебных пособиях источники постоянного напряжения тоже часто называют "источниками постоянного тока", что не совсем корректно.*

Записав закон Ома для левой части реостата, легко найти, какое по величине напряжение упадет на этой части (а значит, и между точками А и В) при отклонении полозка влево ($\mathbf{U}_{Л}$) и вправо ($\mathbf{U}_{П}$). Если через $\mathbf{R}_0$ обозначить сопротивление между точкой А и крайним левым положением полозка, то мы получим:

$$\mathbf{U}_{Л} = \mathbf{I}\mathbf{R}_0 \ ,$$

$$\mathbf{U}_{П} = \mathbf{I}(\mathbf{R}_0 + 2\Delta\mathbf{r}) \ .$$

Подставив выражение для $\Delta\mathbf{r}$ и взяв разность между $\mathbf{U}_{П}$ и $\mathbf{U}_{Л}$, мы получим диапазон, в пределах которого изменяется напряжение между точками А и В:

$$\mathbf{U}_{П} - \mathbf{U}_{Л} = 2\mathbf{I}\Delta\mathbf{r} = 2\mathbf{I}(\mathbf{x}_0/\mathbf{L})\mathbf{R} \ .$$

Однако, это еще не есть ответ задачи, ибо *максимальный размах физической величины при колебаниях не есть амплитуда колебаний!*

Амплитудой колебаний называют величину максимального отклонения физической величины от положения равновесия. Причем, амплитуда всегда положительная, поскольку характеризует модуль этого отклонения. Таким образом, искомой амплитудой колебаний напряжения будет половина записанного выше размаха:

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{U}_{П} - \mathbf{U}_{Л})/2 = \mathbf{I}\mathbf{x}_0\mathbf{R}/\mathbf{L} \ .$$

Очевидно, что период колебаний напряжения между точками А и В будет таким же, как период колебаний физического маятника "полозок на пружине". Из теории колебаний хорошо известно, что *собственная частота колебаний физического маятника равна*

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \ .$$

*Собственная частота связана с периодом колебаний **T** соотношением*

$$\omega_0 = 2\pi/T \ ,$$

откуда искомый период

$$\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\mathbf{m}/\mathbf{k}} \ .$$

Ответ: $\mathbf{U}_0 = \mathbf{I}\mathbf{x}_0\mathbf{R}/\mathbf{L}$; $\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\mathbf{m}/\mathbf{k}}$.

ЗАДАЧА № 64 (решение).

Ответим сначала на первый вопрос задачи.

Сразу после подключения к сопротивлению заряженной до $\mathbf{q}$ емкости, между обкладками которой установлена разность потенциалов

$$\mathbf{U} = \mathbf{q}/\mathbf{C} \ ,$$

через сопротивление согласно закону Ома начинает протекать ток. Это происходит, потому что и емкость, и сопротивление подключены к одним и тем же точкам, а следовательно, разность потенциалов, имеющаяся между выводами этих элементов цепи, одинаковая.

При этом в самый первый момент емкость еще не успевает разрядиться на сколько-нибудь заметную величину, поэтому на ней еще остается напряжение $\mathbf{U}$. Тогда, применив закон Ома, можно найти, что начальный ток через сопротивление окажется равным

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}/\mathbf{r} = \mathbf{q}/(\mathbf{rC}) \ .$$

С течением времени этот ток будет уменьшаться по величине, поскольку заряд на обкладках, а с ним и напряжение, будут уменьшаться. Через длительное время ток полностью разрядит конденсатор, в результате чего все нескомпенсированные подвижные носители заряда одной обкладки перетекут через сопротивление на другую.

При протекании тока на сопротивлении согласно закону Джоуля-Ленца выделится тепло, которое разогреет газ. Поскольку теплоемкостью спирали нагревателя и других элементов системы можно по условию задачи пренебречь, то вся выделившаяся теплота поглотится газом.

Интегральное количество выделившейся теплоты определяется начальной *энергией, запасенной в конденсаторе и равной*

$$\boldsymbol{W = q^2/(2C)} \ .$$

Так как объем газа остается неизменным, то никакой работы в течение всего процесса газ не совершает, так же как и над ним не совершается никакая работа. В результате, вся теплота, полученная от нагревателя, будет направлена на увеличение внутренней энергии газа. Вследствие этого мы можем записать равенство:

$$\mathbf{q}^2/(2\mathbf{C}) = \boldsymbol{\nu}\mathbf{c}_V\Delta\mathbf{T}\ .$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ – число молей газа, по условию равное единице, $\mathbf{c}_V$ – удельная теплоемкость газа (на один моль) при постоянном объеме, $\Delta\mathbf{T}$ – изменение температуры газа в результате нагревания от спирали.

Поскольку *для одноатомного идеального газа*

$$\boldsymbol{c}_V = (3/2)\boldsymbol{R}\ ,$$

где $\boldsymbol{R}$ *– универсальная газовая постоянная*, то из полученного выше соотношения легко выразить искомое приращение температуры:

$$\Delta\mathbf{T} = \mathbf{q}^2/(3\mathbf{RC})\ .$$

Ответ: $\mathbf{I} = \mathbf{q}/(\mathbf{rC})\ ,\ \ \Delta\mathbf{T} = \mathbf{q}^2/(3\mathbf{RC})\ .$

ЗАДАЧА № 65 (решение).

Согласно закону Джоуля-Ленца при протекании тока через нагреватель, имеющий сопротивление **R**, выделяется тепловая мощность

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^2/\mathbf{R}\ ,$$

где **U** – электрическое напряжение, поданное на нагреватель.

Соответственно, за время **t** к воде от нагревателя будет подведена теплота

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Pt} = \mathbf{U}^2\mathbf{t}/\mathbf{R}\ .$$

Приращение внутренней энергии воды, обусловленное этой теплотой, будет израсходовано на нагрев воды от исходной температуры **T** (выразим ее в градусах Цельсия) до температуры кипения 100 °С (процесс протекает при нормальных условиях, о чем сказано в условии задачи) и на испарение этой воды. Первая из указанных составляющих потребует количество теплоты

$$\Delta\mathbf{Q}_{\mathrm{T}} = \mathbf{cM}(100 - \mathbf{T})\ ,$$

а вторая –

$$\Delta\mathbf{Q}_{\mathrm{И}} = \mathbf{rM}\ .$$

Таким образом, мы приходим к равенству:

$$\mathbf{Q} = \Delta\mathbf{Q}_\text{Т} + \Delta\mathbf{Q}_\text{И} = \mathbf{cM}(100 - \mathbf{T}) + \mathbf{rM}\ .$$

Отсюда можно выразить **T**:

$$\mathbf{T}\ [°C] = 100 + \mathbf{r}/\mathbf{c} - \mathbf{U}^2\mathbf{t}/(\mathbf{cRM})\ .$$

Заметим, что по физическому смыслу задачи исходная температура не может быть ниже нуля градусов Цельсия. Это накладывает ограничения на заданные в условии параметры:

$$100 + \mathbf{r}/\mathbf{c} - \mathbf{U}^2\mathbf{t}/(\mathbf{cRM}) > 0$$

или

$$\mathbf{U}^2\mathbf{t}/(\mathbf{RM}) < 100\mathbf{c} + \mathbf{r}\ \ .$$

.

Ответ: $\mathbf{T}\ [°C] = 100 + \mathbf{r}/\mathbf{c} - \mathbf{U}^2\mathbf{t}/(\mathbf{cRM})$ при условии $\mathbf{U}^2\mathbf{t}/(\mathbf{RM}) < 100\mathbf{c} + \mathbf{r}$.

ЗАДАЧА № 66 (решение).

*Легко показать теоретически, что если замкнуть друг на друга идеальные конденсатор емкости **C** и катушку, обладающую индуктивностью **L**, а затем вывести эту систему из равновесия (например, спровоцировать протекание небольшого тока по данному кольцу), то в созданной автономной системе возникнут незатухающие гармонические колебания с резонансной (собственной) частотой*

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}\ .$$

Такой замкнутый контур в электротехнике называют колебательным контуром. Колебаться по гармоническому (синусоидальному) закону будет при этом заряд на обкладках конденсатора, а также ток в цепи.

Из записанного соотношения можно выразить величину емкости:

$$\mathbf{C} = 1/\mathbf{L}\omega_0^{\ 2}\ .$$

Эта емкость, включенная в цепь, изображенную на рисунке условия задачи, напрямую присоединена к источнику Э.Д.С., следовательно, между ее выводами поддерживается напряжение, равное **ε**. Соответственно, заряд на этой емкости

$$\mathbf{q = \varepsilon C = \varepsilon / L\omega_0^2} \ .$$

Сопротивление **R**, подсоединенное к тем же точкам, что и конденсатор, ничуть не искажает общей картины. На этом сопротивлении тоже падает напряжение, равное **ε**.

Джоулево тепло на идеальной емкости не выделяется, поскольку постоянный электрический ток через нее не протекает. На сопротивлении же согласно закону Джоуля-Ленца рассеивается мощность

$$\mathbf{N = \varepsilon^2 / R} \ .$$

За время **t** в цепи, а именно, на сопротивлении, выделится *количество теплоты, рассчитываемое как мощность, умноженная на время протекания постоянного тока*, откуда

$$\mathbf{Q = Nt = \varepsilon^2 t / R} \ .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{q = \varepsilon / L\omega_0^2}$, $\mathbf{Q = \varepsilon^2 t / R}$.

Магнетизм

ЗАДАЧА № 67 (решение).

В магнитном поле на каждую из заряженных частиц действует сила Лоренца, о направлении которой подробно разъяснено в решении задачи № 69. Поскольку у наших частиц вектор скорости перпендикулярен вектору магнитной индукции, действующая на них сила Лоренца может быть представлена в виде произведения величин скорости частицы **v**, ее заряда **q** и модуля вектора магнитной индукции **B**:

$$\mathbf{F = qvB} \ .$$

Поскольку вектор силы Лоренца всегда направлен перпендикулярно вектору скорости заряженной частицы, эта сила создает центростремительное ускорение, и частица в однородном магнитном поле движется по окружности (в общем случае – по цилиндрической спирали).

Для нахождения скорости электрона $\mathbf{v}_Э$ и протона $\mathbf{v}_П$ в нашей задаче при движении частиц по окружностям одинакового радиуса $\mathbf{R}$ можно записать для этих частиц второй закон Ньютона в радиальном направлении с вектором центростремительного ускорения $\mathbf{v}^2/\mathbf{R}$, направленным к центру окружности:

$$\mathbf{m}_Э\mathbf{v}_Э^2/\mathbf{R} = \mathbf{q}\mathbf{v}_Э\mathbf{B} \ ,$$

$$\mathbf{m}_П\mathbf{v}_П^2/\mathbf{R} = \mathbf{q}\mathbf{v}_П\mathbf{B} \ .$$

Заряды $\mathbf{q}$ у обеих частиц приняты одинаковыми, поскольку *заряд электрона по модулю в точности равен заряду протона*.

Разделив первое уравнение на второе, мы придем к соотношению

$$\mathbf{v}_Э/\mathbf{v}_П = \mathbf{m}_П/\mathbf{m}_Э \approx 1800 \ .$$

<u>Ответ:</u> Скорость электрона выше : $\mathbf{v}_Э/\mathbf{v}_П \approx 1800$.

ЗАДАЧА № 68 (решение).

Поскольку тело не несет на себе электрического заряда, оно не будет реагировать на магнитное поле, и характер его движения будет определяться лишь полем тяжести. Так как ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ можно считать постоянным, не зависящим от координат, для описания полета тела можно воспользоваться формулами кинематики равноускоренного движения. Пусть $\mathbf{h}$ – максимальная высота подъема тела над границей полупространства, занятого магнитным полем, а $\mathbf{t}$ – полное время его полета вверх-вниз. Тогда, используя то, что время подъема равно времени спуска, можно записать для этапа падения тела с высоты $\mathbf{h}$

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}(\mathbf{t}/2)^2/2 \ .$$

Рассмотрим теперь движение частицы. Влетев, согласно условию задачи, в область магнитного поля со скоростью **v**, перпендикулярной вектору магнитной индукции **B**, частица тут же начнет испытывать действие силы Лоренца

$$\mathbf{F}_{Л} = \mathbf{qvB}\ .$$

Напомним, что *величина силы Лоренца, действующей на частицу с зарядом **q**, движущуюся со скоростью **v** в магнитном поле с индукцией **B**, равна*

$$\boldsymbol{F}_{Л} = \boldsymbol{qvB}\sin\boldsymbol{\beta}\,,$$

*где $\boldsymbol{\beta}$ – угол между векторами **v** и **B**.*

По условию нашей задачи вектора **v** и **B** взаимно перпендикулярны, поэтому синус угла β равен единице.

Обратим также внимание на то, что сила Лоренца *всегда направлена перпендикулярно вектору скорости заряженной частицы **v** (если, конечно, вектора **v** и **B** не коллинеарные, когда, в результате, $\boldsymbol{F}_{Л} = 0$) и, одновременно, перпендикулярна вектору **B***. (Подробнее о векторе силы Лоренца разъяснено в решении задачи № 69).

Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости, она придает частице в нашей задаче центростремительное ускорение $\mathbf{a}_{ц}$, которое можно найти, записав для частицы второй закон Ньютона:

$$\mathbf{ma}_{ц} = \mathbf{qvB}\ ,$$

откуда

$$\mathbf{a}_{ц} = \mathbf{qvB/m}\ .$$

Так как сила Лоренца никогда не действует вдоль линии вектора скорости, она, согласно второму закону Ньютона, не может изменить и величины этой скорости. Поскольку в нашем случае других сил, действующих на частицу, нет, получается, что при ее движении в магнитном поле скорость **v** будет оставаться постоянной по величине, а движение вдоль траектории, соответственно, равномерным.

Из курса механики известно, что *мгновенный радиус кривизны траектории **R** определяется по величине мгновенной линейной скорости **v** и мгновенному центростремительному ускорению $\boldsymbol{a}_{ц}$ соотношением:*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}^2/\boldsymbol{a}_{ц}\,.$$

Поскольку в нашем случае как **v**, так и $\mathbf{a}_ц$, являются постоянными величинами, радиус **R** также будет оставаться постоянным, а следовательно, частица в магнитном поле будет двигаться по окружности. Заметим, что *в общем случае она могла бы двигаться по спиральной траектории (по поверхности цилиндра), если бы влетела не строго перпендикулярно линиям магнитного поля, а имела бы ненулевую составляющую скорости вдоль вектора **B***.

Радиус этой окружности можно выразить, подставив в последнее соотношение ранее полученное выражение для $\mathbf{a}_ц$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{mv/qB} \quad .$$

Так как частица влетела в область магнитного поля перпендикулярно границе, то, двигаясь по окружности радиуса **R**, она опишет ровно половину окружности, пока снова не “уткнется” в границу. Время **t** такого равномерного движения легко найти, разделив длину полуокружности на постоянную скорость **v**:

$$\mathbf{t} = \pi\mathbf{R/v} \quad .$$

Подставив **R** из предыдущего соотношения, получаем

$$\mathbf{t} = \pi\mathbf{m/qB} \quad .$$

Заметим, что согласно условию задачи время **t** полета частицы и время полета тела одинаковые, а высота подъема тела

$$\mathbf{h} = \mathbf{R} \quad ,$$

поскольку совершенно очевидно, что максимальное удаление частицы от границы полупространства при движении по полуокружности равно **R**. Отсюда

$$\mathbf{h} = \mathbf{R} = \mathbf{mv/qB} = \mathbf{g}(\mathbf{t}/2)^2/2 = (\mathbf{g}/8)(\pi\mathbf{m/qB})^2 \quad .$$

Выразив **v**, получим окончательно:

$$\mathbf{v} = \pi^2\mathbf{mg}/(8\mathbf{qB}) \quad .$$

Ответ: $\mathbf{v} = \pi^2\mathbf{mg}/(8\mathbf{qB})$.

ЗАДАЧА № 69 (решение).

Чуть ли ни самым главным условием успешного решения задач *на магнетизм является безошибочное определение направления сил, воздействию которых подвержены электрические заряды в магнитном поле.* Тому примером – данная задача.

Основной силой, за появление которой ответственно магнитное поле, является сила Лоренца. Эта сила действует только на движущиеся заряженные тела. Если заряженное или незаряженное тело покоится относительно магнитного поля, сила Лоренца равна нулю.

Величина и направление силы Лоренца определяются правилами векторного произведения векторов, принятыми в математике. При этом сила Лоренца $\boldsymbol{F}_{Л}$ *представляет собой вектор, равный векторному произведению вектора скорости* $\boldsymbol{v}$*, которую имеет носитель заряда* $\boldsymbol{q}$*, движущийся в магнитном поле, и вектора* $\boldsymbol{B}$ *магнитной индукции:*

$$\boldsymbol{F}_{Л} = \boldsymbol{q}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \;.$$

В последнем выражении символы $\boldsymbol{F}_{Л}$*,* $\boldsymbol{v}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *представляют собой вектора, а символ умножения в квадратных скобках указывает на векторное умножение.*

В чем отличие векторного произведения векторов от привычного скалярного:

1) Результатом скалярного произведения является скаляр, а результатом векторного – вектор.

2) Результат скалярного произведения векторов не зависит от перестановки мест сомножителей, в то время как результат векторного – зависит. При перестановке мест сомножителей знак векторного произведения изменяется на противоположный (результирующий вектор начинает "смотреть" в противоположную сторону). По этой причине очень важно соблюдать установленный физическими законами порядок чередования символов в векторных произведениях!

3) Количественный результат скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$*, угол между которыми равен* α*,*

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha$$

(значки $|\boldsymbol{a}|$ *и* $|\boldsymbol{b}|$ *обозначают модуль вектора* $\boldsymbol{a}$ *и модуль вектора* $\boldsymbol{b}$*, соответственно).*

Количественный результат векторного произведения векторов ***a*** *и* ***b****, угол между которыми равен* α*, (он также есть длина, или модуль, результирующего вектора)*

$$|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha\ .$$

Достаточно необычным является то, что вектор, служащий результатом векторного произведения векторов, всегда направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы-сомножители. То есть этот результат перпендикулярен как первому вектору в произведении, так и второму. В случае, если сомножители лежат на одной прямой (или параллельны друг другу), векторное произведение равно нулю, что, собственно, следует и из вышеприведенной формулы, поскольку синус нуля и синус 180° равны нулю.

Главным практическим вопросом всегда встает следующий: в какую сторону от вышеупомянутой плоскости направлен вектор, являющийся результатом векторного произведения векторов? Это одна из самых трудных проблем, с которой сталкиваются школьники и студенты. Она является источником многих ошибок в решении задач на магнетизм.

В связи с этим, каждый должен определить для себя наиболее комфортное и удобное правило, позволяющее единственно верно ответить на поставленный вопрос в самых разных ситуациях. Упомянем, что наиболее популярными здесь служат "правило левой руки" или "правило правой руки", которым обычно обучают в школе. Однако, опыт показывает, что использование этих правил неэффективно и часто вызывает путаницу.

Можно порекомендовать следующий способ, основанный на остроумной идее, предложенной одним из моих учеников СУНЦ НГУ в 2012 году.

Рассмотрим вектора-сомножители ***a*** *и* ***b*** *как стрелки часов, расположенные на циферблате, служащим для них той самой плоскостью, перпендикулярно которой направлен результат векторного произведения. Вектор* ***b*** *при этом служит часовой стрелкой, а вектор* ***a*** *– минутной. Естественно, что при этом первый ("минутный") вектор, стоящий в произведении, – вектор* ***a*** *– вращается на циферблате быстро, а второй ("часовой") – вектор* ***b*** *–*

практически неподвижен.

Глядя на эти часы, мы должны всегда вращать минутную стрелку в сторону часовой по *<u>меньшему между ними</u>* *углу, неважно, куда будет направлено это вращение – влево или вправо. Однако, интерпретация направления вращения, которую и предложил школьник, легко решает все проблемы.*

Если минутная стрелка вращается "правильно", то есть, как говорят, "по часовой стрелке", то время, очевидно, на этих часах идет вперед, то есть "вектор времени", олицетворяющий вектор векторного произведения, направлен от нас куда-то вперед – за циферблат. Если же минутная стрелка, вращаясь по меньшему углу, вынуждена совершать поворот "против часовой стрелки", что часам несвойственно, то мы имеем дело с "машиной времени назад", когда время бежит назад – к нам за спину.

Ясно, что для превращения пары векторов в стрелки часов необходимо просто свести их начала (тупые концы) в одну точку, сохранив направления в пространстве, и эту точку вместе с векторами поместить в центр циферблата.

Теперь, проанализировав рисунок условия задачи, легко понять, что при движении груза в промежутке после отпускания до максимального сжатия пружины сила Лоренца будет действовать на груз вертикально вверх, а на пути груза в направлении от стенки до исходной точки – вертикально вниз, то есть в ту же сторону, куда действует сила тяжести.

Проанализируем теперь характер движения груза. Сразу после отпускания он, увлекаемый пружиной, начинает набирать скорость. Если груз не проломил стекло в самый первый момент (а это было бы возможно, если бы **F** была меньше **Mg**), то при дальнейшем движении в сторону стены такого и подавно не произойдет, поскольку сила Лоренца, действующая вверх, будет только уменьшать нагрузку на плоскость.

На обратном пути сила Лоренца, напротив, будет усиливать давление на стекло по сравнению с действием одного лишь веса груза, обусловленного силой тяжести, поэтому пролом стекла можно ожидать именно на пути груза по направлению от стены к исходной точке.

При этом максимальная сила давления груза на стекло будет в том месте, где скорость груза максимальная. Максимальную скорость груз будет иметь в положении равновесия данного физического маятника, где деформация пружины становится равной нулю, поскольку до достижения этого положения пружина все время будет подталкивать груз, увеличивая его скорость, а после прохода положения равновесия – тормозить его, и скорость будет становиться уже меньше.

Теперь, давайте, допустим, что стекло проламывается при движении груза от стены, но еще до достижения им положения равновесия. Это говорит о том, что в момент пролома стекла груз набрал необходимую скорость $\mathbf{v}_п$ для того, чтобы сила Лоренца "помогла" силе тяжести проломить стекло. Но ведь продвинься груз еще дальше в сторону положения равновесия – его скорость только увеличилась бы. Это означает, что можно было бы изначально оттянуть груз от стенки на несколько меньшее расстояние – такое, чтобы добиться ситуации, когда именно в положении равновесия груз наберет необходимую скорость $\mathbf{v}_п$.

Таким образом, условию минимальности отклонения груза от положения равновесия соответствует ситуация, когда груз проламывает стекло в положении равновесия физического маятника (груз на пружине) при движении в направлении от стены к исходной точке.

По направлению вдоль линии колебаний нашего груза на пружине сила Лоренца не действует, поэтому характер колебаний остается таким же, как в отсутствии магнитного поля. Тогда легко видеть, что время от момента, когда груз отпустили, до пролома стекла складывается из двух частей: время прохода груза от исходной точки в сторону стены до остановки (это занимает по времени пол периода колебаний) и время прохода от остановки у стены до положения равновесия маятника (это еще четверть периода колебаний). Таким образом, полное время, прошедшее от отпускания груза до пролома стекла, составляет три четверти периода колебаний. По условию задачи это время известно и равно $\Delta\mathbf{t}$.

Период колебаний $\boldsymbol{T}$ *связан с собственной (круговой) частотой колебаний* $\boldsymbol{\omega}_0$ *соотношением:*

$$T = 2\pi/\omega_0 \quad .$$

Таким образом, мы получили, что

$$(3/4)(2\pi/\omega_0) = \Delta\mathbf{t} \ .$$

В свою очередь, хорошо известно, что *собственная частота колебаний груза массы **M** на пружине жесткости **k***

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \sqrt{\mathbf{k}/\mathbf{M}} \ .$$

Подставив данную $\boldsymbol{\omega}_0$ в предыдущее соотношение, мы можем выразить **k**:

$$\mathbf{k} = 9\pi^2\mathbf{M}/(2\Delta\mathbf{t})^2 \ .$$

Запишем теперь второй закон Ньютона для груза по вертикальному направлению в ситуации, когда сила давления на стекло достигла критической величины, и стекло вот-вот проломится. В этот момент груз давит на стекло с силой **F**, в результате чего по третьему закону Ньютона стекло действует на груз с такой же по величине силой, но направленной вертикально вверх. Вниз на груз при этом действуют сила тяжести и сила Лоренца. Поскольку сила **F** – критическая сила, при ее достижении груз еще не ускоряется по вертикали, и сумма сил, действующих на него, равна нулю. Таким образом, можно записать:

$$0 = \mathbf{F} - \mathbf{Mg} - \mathbf{F}_{Л} \ ,$$

где

$$\mathbf{F}_{Л} = \mathbf{qvB} \ .$$

Это выражение для модуля силы Лоренца не содержит множителя $\sin\alpha$, поскольку в нашем случае угол между вектором скорости груза **v** и вектором магнитной индукции **B** $\alpha = 90°$, и $\sin\alpha = 1$.

Отсюда выразим скорость груза **v** при прохождении физическим маятником положения равновесия:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{F} - \mathbf{Mg})/(\mathbf{qB}) \ .$$

Определить искомую величину $\mathbf{x}_0$ минимального отклонения груза от положения равновесия можно, записав закон сохранения энергии для груза на пружине. Энергия этой системы, действительно, сохраняется, хоть при ближайшем рассмотрении это и не совсем очевидно. Усомниться в неизменности энергии позволяет такой факт, что в процессе колебаний на систему действуют четыре внешние силы, которые, вообще говоря, способны совершать работу, изменяя полную энергию. Что это за силы: 1) сила, действующая на пружину со стороны стены, к которой она прикреплена, 2) сила тяжести **Mg**, 3) сила реакции опоры, действующая на груз со стороны стекла, и, наконец, 4) сила Лоренца.

Однако, 1) точка приложения силы, действующей на пружину со стороны стены, не перемещается в процессе колебаний, поэтому работа этой силы равна нулю (напомним, что *работа dA силы $\boldsymbol{F}_0$ равна $dA = \boldsymbol{F}_0 d\boldsymbol{s}$, где $d\boldsymbol{s}$ – перемещение точки приложения силы $\boldsymbol{F}_0$; здесь $\boldsymbol{F}_0 d\boldsymbol{s}$ – это скалярное произведение векторов $\boldsymbol{F}_0$ и $d\boldsymbol{s}$*); 2) сила тяжести работу не совершает, поскольку перемещение груза в нашей задаче всегда происходит в направлении, перпендикулярном действию этой силы, поэтому скалярное произведение $\mathbf{Mg}d\mathbf{s}$ на каждом участке $d\mathbf{s}$ равно нулю; 3) сила реакции опоры работу не совершает по той же причине, что была указана для силы тяжести; 4) *сила Лоренца работу не совершает, поскольку всегда действует перпендикулярно вектору скорости $\boldsymbol{v}$, а значит, и вектору перемещения $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}dt$, где dt – время перемещения.*

При начальном отклонении груза на пружине, равном $\mathbf{x}_0$, система обладает только энергией деформации пружины $\mathbf{kx}_0^2/2$, поскольку скорость груза в этой точке пока еще остается равной нулю. В свою очередь, при проходе грузом положения равновесия деформация пружины обращается в ноль, и вся начальная энергия системы переходит в кинетическую энергию груза $\mathbf{Mv}^2/2$. Исходя из этого, закон сохранения энергии для нашей системы можно записать так:

$$\mathbf{kx}_0^2/2 = \mathbf{Mv}^2/2 \quad .$$

Подставив сюда найденные выше **k** и **v**, получим для $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x}_0 = 2\Delta\mathbf{t}(\mathbf{F} - \mathbf{Mg})/(3\pi\mathbf{qB}) \quad .$$

По условию задачи $\mathbf{F} > \mathbf{Mg}$, поэтому ответ выглядит корректным. Однако, не будем спешить.

Давайте разберемся: а что, если груз окажется слишком легким, а его скорость в положении равновесия – достаточно большой? Причем подумаем о скорости не на обратном пути груза, а на пути к стене. Ясно, что мы рискуем попасть в условия, когда сила Лоренца просто оторвет груз от поверхности, чего формулировка нашей задачи не допускает.

Запишем второй закон Ньютона в вертикальном направлении для груза при проходе им положения равновесия (где скорость, как уже отмечалось, наибольшая) на пути от исходной точки к стене. В положении равновесия на груз действуют вниз – сила тяжести **Mg**, а вверх – сила Лоренца $\mathbf{F}_{Л}$ и сила реакции опоры **N** со стороны стекла:

$$0 = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{Л} - \mathbf{Mg} \quad .$$

Пока $\mathbf{N} > 0$, груз еще "опирается" о стекло. Однако, когда сила Лоренца готова уже оторвать груз от поверхности, значение **N** становится равным нулю, и это определяет критическое условие на соотношение величин $\mathbf{F}_{Л}$ и **Mg**:

$$\mathbf{F}_{Л} \le \mathbf{Mg} \quad .$$

Поскольку в положении равновесия скорости груза одинаковые как на пути "туда", так и на пути "обратно" (это следует из закона сохранения энергии), в последнее неравенство можно подставить силу Лоренца $\mathbf{F}_{Л}$, выраженную из второго закона Ньютона, записанного выше при решении основной задачи для момента прохода положения равновесия на пути "обратно", а именно,

$$\mathbf{F}_{Л} = \mathbf{F} - \mathbf{Mg} \quad .$$

Тогда мы приходим к условию

$$\mathbf{F} \le 2\mathbf{Mg} \quad ,$$

являющемуся обязательным для соблюдения корректности ответа данной задачи.

Ответ: $\mathbf{x}_0 = 2\Delta\mathbf{t}(\mathbf{F} - \mathbf{Mg})/(3\pi\mathbf{qB})$ при условии $\mathbf{Mg} < \mathbf{F} \le 2\mathbf{Mg}$.

ЗАДАЧА № 70 (решение).

Стержень представляет собой линейный проводник с током и потому, находясь в магнитном поле, подвержен действию силы Ампера. Поскольку *природой силы Ампера является совокупное действие многочисленных сил Лоренца на подвижные заряды в провод-*

нике, участвующие в токе, направление этой силы подчиняется правилу, справедливому для силы Лоренца и подробно рассмотренному в решении задачи № 69.

В поле **B**, вектор которого изображен на рисунке условия задачи, на стержень при протекании по нему тока действует сила Ампера

$$\mathbf{F} = \mathbf{ILB}\ ,$$

направленная вверх, когда на схеме этого рисунка ток течет вправо.

Для исчезновения силы натяжения **T** каждой из нитей направленная вверх сила должна скомпенсировать силу тяжести **mg**, действующую на стержень вниз, поэтому записав для стержня второй закон Ньютона по вертикальному направлению

$$0 = \mathbf{mg} - \mathbf{ILB} - 2\mathbf{T}$$

и приравняв силу натяжения к нулю, мы получим искомое значение критической (минимальной) силы тока:

$$\mathbf{I} = \mathbf{mg}/(\mathbf{LB}) = 2\ (\mathrm{A})\ .$$

<u>**Ответ:**</u> $\mathbf{I} = \mathbf{mg}/(\mathbf{LB}) = 2\ (\mathrm{A})$.

ЗАДАЧА № 71 (решение).

Решение данной задачи является вариацией идеи, изложенной в решении предыдущей.

Если следовать схеме, представленной на рисунке условия задачи, то для исчезновения силы натяжения **T** каждой из нитей ток по стержню должен течь вправо. При этом направленная вверх сила Ампера **F** = **ILB** компенсирует силу тяжести **mg**, действующую на стержень вниз. В этом случае второй закон Ньютона для стержня по вертикальному направлению выглядит так

$$0 = \mathbf{mg} - \mathbf{ILB} - 2\mathbf{T}\ ,$$

где силу натяжения каждой нити **T** следует приравнять к нулю и получить условие для тока $\mathbf{I}_1$:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{mg}/(\mathbf{LB})\ .$$

При протекании тока по стержню влево сила Ампера будет сонаправлена с силой тяжести, и второй закон Ньютона для этого стержня по вертикальному направлению будет выглядеть следующим образом:

$$0 = \mathbf{mg} + \mathbf{ILB} - 2\mathbf{T}\ .$$

В критической ситуации, когда ток достигнет значения $\mathbf{I}_2$, сила натяжения каждой из одинаковых нитей примет значение $\mathbf{T}_0$, при котором такая нить рвется. Соответственно, второй закон Ньютона примет следующий вид:

$$0 = \mathbf{mg} + \mathbf{I}_2\mathbf{LB} - 2\mathbf{T}_0\ .$$

Выразив **mg** из найденного выше соотношения для $\mathbf{I}_1$ и подставив его в последнее уравнение, найдем искомую прочность нити:

$$\mathbf{T}_0 = (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{LB}/2\ .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{T}_0 = (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{LB}/2$.

ЗАДАЧА № 72 (решение).

Пока на старте пруток разгоняли, чтобы сообщить ему скорость $\mathbf{v}_0$, на подвижные носители заряда действовала сила Лоренца, направленная вдоль прутка и разносящая эти заряды в разные стороны: положительные – к левому концу прутка, а отрицательные – к правому. Именно такая поляризация обязана направлениям векторов скорости $\mathbf{v}_0$ и магнитной индукции **B**, заданным на рисунке условия задачи. Более подробно о величине и направлении силы Лоренца изложено в решении задачи № 69.

После того, как пруток освободили от стартового ускоряющего устройства и отправили с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ в свободный полет, его скорость продолжила меняться по величине и направлению, что, как минимум, было связано с воздействием на массивный пруток силы тяжести, искривляющей траекторию полета тел, брошенных под углом к горизонту.

Изменялась ли при этом сила Лоренца? Если посмотреть на формулу для силы Лоренца, записанную в векторной форме (см. решение задачи № 69), то можно заметить, что величина этой силы определяется лишь компонентой скорости, перпендикулярной вектору магнитной индукции. К продольной компоненте, направленной вдоль или против вектора **B**, данная сила индифферентна.

Разложив вектор $\mathbf{v}_0$ на вертикальную и горизонтальную составляющие, можно увидеть из геометрии условия задачи, что сила Лоренца, действующая на заряды прутка, определяется лишь горизонтальной проекцией вектора $\mathbf{v}_0$. И действует эта сила строго поперек направления перемещения прутка, поэтому не изменяет его скорости при движении в поле тяжести. Вбок (вдоль прутка) сила Лоренца тоже не сносит тело, поскольку разделившиеся в нем положительные и отрицательные заряды одинаковы по величине в силу условия электронейтральности, и сила Лоренца действует на эти заряды одинаково в разные стороны, пытаясь как бы растянуть пруток.

Хорошо известно, что горизонтальная проекция скорости тела, брошенного под углом к горизонту, сохраняет свою величину на протяжении всего полета, поскольку никакие внешние силы на тело не действуют в горизонтальном направлении. Это означает, что сила Лоренца, о которой шла речь выше, тоже будет оставаться постоянной, а следовательно, никакие токи в процессе полета по прутку течь не будут.

Мы должны были в последнем убедиться, чтобы исключить влияние силы Ампера на движение прутка: если бы по нему протекал ток, возникла бы сила Ампера, которая согласно геометрии условия задачи действовала бы в горизонтальном направлении против движения, тормозя пруток, и тем самым изменяя горизонтальную проекцию его скорости.

Исходя из всего вышесказанного, мы можем сделать вывод, что сила, разделяющая заряды и удерживающая их на разных концах в прутке, а именно эта сила определяет величину Э.Д.С. индукции, остается одной и той же на протяжении всего полета, то есть и в верхней точке траектории, и на полувысоте.

Величина Э.Д.С. индукции, возникающей в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ в проводнике длиной $\mathbf{L}$ при его движении со скоростью $\mathbf{v}$ в направлении, перпендикулярном длинной стороне проводника и вектору $\mathbf{B}$, равна

$$\mathbf{E}_{\text{инд}} = \mathbf{LvB} \ ,$$

что подробно обосновано в решении задачи № 73.

В нашем случае роль $\mathbf{v}$ выполняет горизонтальная проекция скорости прутка, равная $\mathbf{v}_0\cos\beta$. Отсюда следует, что и на максимальной высоте, и на полувысоте траектории прутка в поле тяжести Э.Д.С. индукции будет одинаковой и равной

$$\mathbf{E}_{инд} = \mathbf{L}\mathbf{v}_0\cos\beta\mathbf{B}\ .$$

<u>Ответ:</u> $\mathbf{E}_{инд} = \mathbf{L}\mathbf{v}_0\cos\beta\mathbf{B}$ в обоих случаях.

ЗАДАЧА № 73 (решение).

Разберемся сначала с физикой процесса, описанного в условии задачи. Ясно, что без магнитного поля качели так бы и совершали периодические колебания, а брусок так бы и оставался лежащим на сиденье. При этом, конечно, считается, что при максимальном угле отклонения качелей он не соскальзывает. Последнее возможно обеспечить несколькими способами, в частности, расположив сидение качелей между прутьями на осевом шарнире и изначально установив плоскость сиденья горизонтально.

Почему брусок стремится соскользнуть в нижней точке? В нижнем положении качелей, когда включают магнитное поле, электрический ток, возбужденный электродвижущей силой индукции и текущий по контуру качелей, начинает взаимодействовать с магнитным полем, в результате чего появляется сила Ампера, действующая на качели и резко тормозящая их. Деревянный брусок этой силы не испытывает, поскольку электрический ток через него не протекает, и продолжает в нижней точке двигаться по инерции вперед по направлению набранной к этому моменту скорости. Если сила трения не справляется с тем, чтобы удержать брусок на сидении, возникает его движение относительно плоскости сиденья, и брусок начинает соскальзывать.

Э.Д.С. индукции, в свою очередь, возникает в соответствии с законом Фарадея ввиду того, что после включения магнитного поля движение качелей приводит к изменению во времени магнитного потока через контур, ограниченный прямоугольником этих качелей.

Можно дать и другую интерпретацию появления Э.Д.С. индукции в контуре: при пересечении проводящим сидением линий магнитной индукции возникает сила Лоренца, действующая на свободные носители заряда в этом проводнике и приводящая к их движению. По правилам, принятым для векторного произведения векто-

ров, сила Лоренца в случае нашей задачи направлена влево вдоль длинной стороны сиденья, если смотреть со стороны, где качели приближаются (знак зарядов считается положительным). Значит, электрический ток, запущенный силой Лоренца, действующей на все свободные носители заряда в сиденье, будет течь по контуру качелей по часовой стрелке, если смотреть на контур с вышеуказанной стороны.

Видно, что решение данной задачи затрагивает не только вопросы магнетизма, но и тесно связано с механикой.

В нижней точке траектории качелей на брусок во время торможения сидения действует лишь одна горизонтальная сила – это сила трения. Соответственно, второй закон Ньютона для него по горизонтальному направлению можно записать так:

$$\mathbf{ma} = \mathbf{F}_{тр} \ ,$$

где **a** – горизонтальное ускорение бруска.

Заметим, что брусок является предметом "подневольным": он "едет на спине" у сидения качелей и, соответственно, вплоть до самого соскальзывания его ускорение определяется поведением качелей. Соответственно, из записанного выше уравнения можно видеть, что при малых значениях **a** сила трения не будет достигать своей максимальной величины, равной силе трения скольжения

$$\mathbf{F}_{тр} = \mu\mathbf{N} \ ,$$

где **N** – сила реакции, действующая со стороны сиденья на брусок снизу вверх. Нас же согласно условию задачи интересует именно скольжение бруска, поэтому критическое (минимальное) значение ускорения **a**, при котором оно начнется, будет определяться соотношением

$$\mathbf{ma} = \mu\mathbf{N} \ .$$

Рассмотрим теперь комбинированное тело, состоящее из сиденья и бруска и имеющее, соответственно, массу (**M** + **m**). Для него сила трения, упоминавшаяся выше, является внутренней и потому не входит во второй закон Ньютона. Появление сил, действующих на данное тело в горизонтальном направлении, можно ожидать со стороны двух внешних объектов: магнитного поля и прутьев качелей.

Весьма тонким и важным для подобных ситуаций вопросом является рассмотрение действия легких прутьев. Действительно, интуитивно можно ожидать, что на этапе торможения качелей магнитным полем разогнавшиеся к этому моменту прутья станут "подталкивать" (а в других аналогичных случаях – "задерживать") соединенные с ними качели. Так и было бы на самом деле, не будь прутья невесомыми.

Подталкивание или задержка качелей прутьями имеет следствием то, что по третьему закону Ньютона сами качели тогда должны действовать на прутья в горизонтальном направлении вдоль линии движения. Другим местом, со стороны которого прутья могут испытывать внешнее воздействие, является место подвеса прутьев.

Заметим, что в нашей задаче прутья не подвержены действию сил со стороны магнитного поля, поскольку в нижней точке траектории качелей текущий по прутьям ток коллинеарен вектору магнитной индукции, и потому сила Ампера на этот ток в нижнем положении не действует. Но легко увидеть, что и при других положениях прутьев действующая на них сила Ампера не имеет компонент, направленных вдоль движения.

В точке подвеса прута горизонтальная сила может быть приложена либо в том же направлении, что и сила со стороны сиденья, либо в противоположную сторону. Сонаправленные силы исключены, поскольку тогда согласно второму закону Ньютона для невесомого прута не равная нулю сумма сил $\boldsymbol{F}$ *сообщила бы ему бесконечное ускорение* $\boldsymbol{a}_n$*:*

$$0 \times \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{F} \ .$$

Но и противоположно направленные, пусть в сумме и равные нулю, силы тоже исключены, поскольку тогда согласно основному закону вращательной динамики твердого тела эти две внешние силы создали бы суммарный ненулевой момент сил $\boldsymbol{K}$*, в результате чего при нулевом моменте инерции невесомого прута последний мгновенно раскрутился бы до бесконечной угловой скорости* ω*:*

$$0 \times (\boldsymbol{d}\omega / dt) = \boldsymbol{K} \ ,$$

где t *– время.*

Поскольку в реальной природе не существует бесконечных ускорений и бесконечных угловых скоростей, то *сумма сил, действующих на невесомые объекты, а также сумма моментов сил, приложенных к ним, полагаются равными нулю.*

Если все-таки возразить данному утверждению и сказать, что и объектов с нулевой массой тоже не бывает, то компромисс можно найти в том, что мы рассматриваем объекты настолько легкие, что для изменения их импульса или момента импульса за короткое время dt достаточно практически нулевой по величине внешней силы, которая много меньше всех остальных действующих внешних сил рассматриваемой задачи, в нашем случае – сил, действующих, с учетом третьего закона Ньютона, на сиденье качелей со стороны магнитного поля.

Таким образом, на тело, составленное из двух масс – $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ – действует единственная горизонтальная сила – это сила Ампера $\mathbf{F}_A$. Соответственно, в горизонтальном направлении второй закон Ньютона для него выглядит так:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{a} = \mathbf{F}_A \ .$$

Очевидно, что ускорение $\mathbf{a}$ и ускорение $\mathbf{a}$, полученное выше для бруска, будут одинаковыми в тот критический момент, когда сила Ампера дорастет до величины, когда начнется скольжение. Приравнивая ускорения, мы получаем соотношение:

$$\mathbf{F}_A = \mu\mathbf{N}(1 + \mathbf{M}/\mathbf{m}) \ .$$

Силу реакции опоры $\mathbf{N}$ мы будем искать, записав второй закон Ньютона для бруска в вертикальном направлении. По вертикали на брусок в нижнем положении качелей действуют две силы: вверх – сила $\mathbf{N}$, а вниз – сила тяжести $\mathbf{mg}$. При этом брусок совместно с сиденьем качелей совершает движение по окружности радиуса $\mathbf{d}$ (длина прутьев) с некоторой линейной скоростью $\mathbf{u}$, а следовательно, у него есть центростремительное ускорение $\mathbf{a}_ц$, направленное вверх (к центру окружности).

Напомним, что один лишь факт, что движение тела криволинейное, уже свидетельствует о том, что это тело обладает ускорением и, соответственно, сумма сил, действующих на него, не равна нулю.

Второй закон Ньютона для бруска, записанный по вертикали:

$$\mathbf{ma_{ц} = N - mg} \ ,$$

где

$$\mathbf{a_{ц}} = \mathbf{u}^2/\mathbf{d} \ .$$

Аналогично можно записать второй закон Ньютона в вертикальном направлении для комбинированного тела, составленного из бруска и сиденья качелей. На него вверх действуют две силы **T** натяжения прутьев, а вниз – сила тяжести:

$$(\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{u}^2/\mathbf{d} = 2\mathbf{T} - (\mathbf{M} + \mathbf{m})\mathbf{g} \ .$$

Заметим, что в нижней точке в критический момент, когда должно начаться соскальзывание, линейные скорости **u** сиденья и бруска одинаковые, так же, как одинаковы и радиусы **d** их вращения по окружности. Соответственно, центростремительные ускорения $\mathbf{u}^2/\mathbf{d}$ у этих объектов тоже одинаковые.

Из последнего уравнения можно выразить **u**:

$$\mathbf{u} = \sqrt{\mathbf{d}[2\mathbf{T}/(\mathbf{M} + \mathbf{m}) - \mathbf{g}]} \ .$$

Разделив друг на друга представленные выше уравнения второго закона Ньютона, находим

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{T}/(1 + \mathbf{M}/\mathbf{m}) \ ,$$

после чего, подставив **N** в выражение для $\mathbf{F}_A$, можно записать силу Ампера:

$$\mathbf{F}_A = 2\mu\mathbf{T} \ .$$

С другой стороны, величину силы Ампера, действующей на сиденье качелей, можно выразить и явно. Действительно, *эта сила определяется током **I**, протекающим по сиденью, длиной **L** сиденья и магнитной индукцией **B**, вектор которой в нашем случае направлен перпендикулярно направлению тока*:

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{ILB} \ .$$

В общем случае выражение, стоящее справа, содержит также множитель $\sin\alpha$, *где* α *– угол между вектором скорости носите-*

лей заряда, создающих ток, и вектором магнитной индукции.

Направление вектора силы Ампера подчиняется правилу векторного произведения векторов. При этом первый вектор-сомножитель направлен по току, а вторым вектором служит вектор магнитной индукции.

Согласно правилам векторного произведения сила Ампера действует на наше сидение против скорости его движения, и потому тормозит его.

Приравняв друг другу найденные выше выражения для $\mathbf{F}_A$, мы найдем силу тока $\mathbf{I}$, текущего по контуру качелей:

$$\mathbf{I} = 2\boldsymbol{\mu}\mathbf{T}/\mathbf{LB} \ .$$

В соответствии с законом Ома, записанным для этого контура, величина тока $\mathbf{I}$ определяется величиной Э.Д.С. индукции $\mathbf{E}_{\text{инд}}$, возбужденной в контуре, и сопротивлением контура, равным по условию задачи $\mathbf{r}$ (все остальные проводники идеальные, то есть их сопротивления равны нулю):

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}_{\text{инд}}/\mathbf{r} \ .$$

Соответственно,

$$\mathbf{r} = \mathbf{E}_{\text{инд}}/\mathbf{I} = \mathbf{LBE}_{\text{инд}}/(2\boldsymbol{\mu}\mathbf{T}) \ .$$

Осталось найти $\mathbf{E}_{\text{инд}}$. Поскольку сила Лоренца, действующая на свободные заряды в прутьях, не направлена вдоль прутьев (в этом можно убедиться, проанализировав, куда направлен вектор силы Лоренца в соответствии с правилами векторного произведения векторов), в прутьях Э.Д.С. индукции не возникает. Она не возникает и в верхней планке контура, куда включено сопротивление $\mathbf{r}$, поскольку эта планка в магнитном поле остается неподвижной. Таким образом, Э.Д.С. индукции, приводящая свободные заряды контура в движение и являющаяся причиной тока $\mathbf{I}$, возбуждается только в сидении качелей.

Если бы мы оставили только подвижное сиденье, отсоединив прутья, свободные заряды устремились бы к его краю, "гонимые" силой Лоренца. При этом заряды одного знака собрались бы у одного края, а нескомпенсированные заряды другого знака – у другого. Внутри сиденья возникло бы электрическое поле, напряженность которого, умноженная на длину сиденья **L**, дала бы разность потенциалов между концами сиденья. Эта разность потенциалов численно и равна Э.Д.С. индукции $\mathbf{E}_{инд}$. Вычислим ее.

Рассмотрим один из подвижных положительных (условно) зарядов, расположенных внутри сиденья, по величине равный **q**. При совместном с сиденьем движении на него действует сила Лоренца, направленная, как уже отмечалось выше, влево, если смотреть со стороны, к которой сиденье приближается. Увлеченные этой силой, положительные заряды будут собираться у левого края сиденья, постепенно увеличивая напряженность электрического поля **E**, вектор которого направлен вдоль сиденья вправо. Через некоторое время наступит такой момент, когда электрическая сила **qE**, действующая на очередной свободный заряд, сравняется по величине с силой Лоренца, и разделение зарядов прекратится. Условие равенства сил можно записать так:

$$\mathbf{quB} = \mathbf{qE} \ .$$

Домножив это равенство слева и справа на **L** и сократив **q**, мы придем к выражению для разности потенциалов между концами сиденья, равной **LE** и отражающей *величину* $\boldsymbol{E}_{инд}$:

$$\boldsymbol{E}_{инд} = \boldsymbol{LE} = \boldsymbol{LuB} \ .$$

Заметим, что такое же выражение для $\mathbf{E}_{инд}$ можно было бы получить с использованием закона Фарадея, записанного для контура качелей, но мы опустим этот вывод. Подставив $\mathbf{E}_{инд}$ и ранее найденное соотношение для **u** в выражение для сопротивления **r**, получим окончательно:

$$\mathbf{r} = [\mathbf{L}^2\mathbf{B}^2/(2\boldsymbol{\mu}\mathbf{T})]\sqrt{\mathbf{d}[2\mathbf{T}/(\mathbf{M}+\mathbf{m}) - \mathbf{g}]} \ .$$

Очевидно, что две силы натяжения прутьев, удерживающие качели с бруском, превосходят по величине суммарную силу тяжести, действующую на это комбинированное тело, иначе не было бы центростремительного ускорения, направленного в сторону точки подвеса качелей. По этой причине в последнем выражении всегда должно выполняться условие

$$2\mathbf{T} > (\mathbf{M}+\mathbf{m})\mathbf{g} \ .$$

Также следует обратить внимание на то, что найденная величина сопротивления **r** – это максимальное значение сопротивления, способного привести к скольжению бруска. При значениях **r**, больших найденного, ток, возбужденный в контуре, окажется мал, и сила Ампера не сможет привести к эффективному торможению системы. По этой причине в ответе задачи необходимо отметить, что корректные значения сопротивления должны быть не больше найденного **r**.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{r} \le [\mathbf{L}^2\mathbf{B}^2/(2\boldsymbol{\mu}\mathbf{T})]\sqrt{\mathbf{d}[2\mathbf{T}/(\mathbf{M}+\mathbf{m}) - \mathbf{g}]}$
при условии $2\mathbf{T} > (\mathbf{M}+\mathbf{m})\mathbf{g}$.

ЗАДАЧА № 74 (решение).

Физический принцип, на котором построена эта задача, состоит в следующем. Изменение формы фигуры при неизменном ее периметре (проволока считается нерастяжимой) приводит к изменению площади этой фигуры. В результате изменяется величина потока вектора магнитной индукции **B** через проволочный контур. Согласно закону Фарадея изменение потока приводит к возбуждению Э.Д.С. индукции в контуре и соответствующему движению зарядов вдоль проводника. Суммарная величина заряда, протекшего к моменту окончания деформации фигуры, и измеряется гальванометром.

Запишем условие равенства периметров треугольника и окружности:

$$3\mathbf{a} = 2\pi\mathbf{R} \ ,$$

где **R** – радиус окружности.

Для нахождения потока однородного магнитного поля, пронизывающего контур, нужно знать площадь контура. Площадь треугольника:

$$\mathbf{S}_{\text{треуг}} = (\mathbf{a}^2\sqrt{3})/4 \ ,$$

площадь круга:

$$\mathbf{S}_{\text{круга}} = \pi\mathbf{R}^2 \ .$$

Выразив **R** из соотношения для периметров, получаем

$$\mathbf{S}_{\text{круга}} = 9\mathbf{a}^2/(4\pi)\ .$$

*В однородном магнитном поле поток вектора магнитной индукции **B** через плоскую фигуру площади **S** выражается скалярным произведением векторов **B** и **S**:*

$$\boldsymbol{\Phi_B} = \boldsymbol{BS}\ .$$

При этом принято считать, что вектор площади направлен перпендикулярно плоскости фигуры. В какую сторону смотрит острие вектора, определяется дополнительными условиями, которые для данной задачи несущественны. Поскольку по условию задачи плоскости обеих фигур ориентированы перпендикулярно вектору **B**, угол между векторами **B** и **S** равен нулю (или 180°, что в данном случае не принципиально), поэтому косинус угла в скалярном произведении можно считать равным единице, откуда

$$\mathbf{\Phi}_{\text{B}} = \mathbf{BS}\ .$$

В процессе деформации контура происходит непрерывное изменение его площади $d\mathbf{S}$, а следовательно, и потока $d\mathbf{\Phi}_{\text{B}}$. Поскольку **B** = const, из предыдущего соотношения можно выразить эти изменения:

$$d\mathbf{\Phi}_{\text{B}} = \mathbf{B}d\mathbf{S}\ .$$

В ответ на каждое такое изменение, происходящее в промежутке времени $d\mathbf{t}$, в контуре генерируется Э.Д.С. индукции, величина которой в соответствии с законом Фарадея равна

$$|\mathbf{E}_{\text{инд}}| = \mathbf{B}d\mathbf{S}/d\mathbf{t}\ .$$

Согласно закону Ома, записанному для контура с сопротивлением **r**, Э.Д.С. индукции приводит к протеканию тока **I** по контуру.

Воспользуемся тем, что ток, по определению, это заряд, протекающий через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$\mathbf{I} = d\mathbf{q}/d\mathbf{t}\ .$$

Тогда из закона Ома следует:

$$|\mathbf{E}_{\text{инд}}| = \mathbf{B}d\mathbf{S}/d\mathbf{t} = \mathbf{rI} = \mathbf{r}d\mathbf{q}/d\mathbf{t}\ .$$

Отсюда

$$\mathbf{B}d\mathbf{S} = \mathbf{r}d\mathbf{q} \ ,$$

и

$$d\mathbf{q} = (\mathbf{B}/\mathbf{r})d\mathbf{S} \ .$$

Просуммировав все изменения $d\mathbf{q}$ слева в последнем уравнении, мы получим искомый заряд $\Delta\mathbf{q}$, протекший через контур и, соответственно, через гальванометр, а просуммировав все $d\mathbf{S}$ в выражении справа, получим полное изменение площади фигуры $\Delta\mathbf{S}$. С учетом ранее найденных выражений для площадей треугольника и круга, окончательно получаем:

$$\Delta\mathbf{q} = (\mathbf{B}/\mathbf{r})\Delta\mathbf{S} = (9/\pi - \sqrt{3})\mathbf{a}^2\mathbf{B}/(4\mathbf{r}) \ .$$

Ответ: $\Delta\mathbf{q} = (9/\pi - \sqrt{3})\mathbf{a}^2\mathbf{B}/(4\mathbf{r})$.

ЗАДАЧА № 75 (решение).

*В замкнутом контуре площади **S**, помещенном в однородное переменное магнитное поле с индукцией **B**, согласно закону Фарадея возбуждается Э.Д.С. индукции*

$$\boldsymbol{E}_{инд} = -\,d\boldsymbol{\Phi}_B/d\boldsymbol{t} \ ,$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}_B = \boldsymbol{BS}$$

*– поток вектора магнитной индукции через контур, а **t** – время. Выше в выражении для потока стоит скалярное произведение векторов **B** и **S***, что подробно обсуждено в решении задачи № 74.

Обратим серьезнейшее внимание на отрицательный знак, стоящий в выражении для Э.Д.С. Игнорирование этого знака часто приводит к фатальным ошибкам в решении задач по физике на тему "магнетизм".

По правилам скалярного произведения векторов поток магнитной индукции через кольцо в исходном состоянии

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{BS}\cos\beta = \mathbf{kSt}\cos\beta \ ,$$

где **S** - площадь кольца. В последнем выражении символы **B** и **S** уже представляют собой скалярные величины, выражающие длины соответствующих этим символам векторов.

Таким образом, при изменении потока со временем по закону, заданному последним уравнением, в кольце возникает Э.Д.С. индукции, величина которой согласно закону Фарадея равна

$$|\mathbf{E}_{\text{инд}}| = |-d\mathbf{\Phi}_B/d\mathbf{t}| = \mathbf{kS}\cos\boldsymbol{\beta} .$$

Заметим, что Э.Д.С. индукции получилась не зависящей от времени. Следовательно, кольцо представляет собой электрическую цепь с постоянным напряжением. И в ней есть единственный элемент, на котором падает это напряжение – наша электрическая емкость. Тогда согласно второму правилу Кирхгофа мы можем записать

$$|\mathbf{E}_{\text{инд}}| = \mathbf{kS}\cos\boldsymbol{\beta} = \mathbf{q}/\mathbf{C} ,$$

откуда

$$\mathbf{q} = \mathbf{kSC}\cos\boldsymbol{\beta} .$$

Здесь **q** и **C** – заряд и емкость включенного в цепь конденсатора, соответственно.

Известно, что *емкость плоского конденсатора выражается соотношением*

$$\boldsymbol{C = \varepsilon\varepsilon_0 S_C/d} ,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ *– электрическая постоянная,* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *– относительная диэлектрическая проницаемость вещества между обкладками (в нашем случае* $\boldsymbol{\varepsilon} = 1$*),* $\boldsymbol{S_C}$ *– площадь пластины конденсатора.* Тогда

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{SS}_C\cos\boldsymbol{\beta}/\mathbf{d} .$$

После разворота фигуры угол $\boldsymbol{\beta}$ согласно рисунку условия задачи станет равным нулю, а его косинус – единице. Чтобы после разворота сохранить на обкладках величину заряда **q**, требуется увеличить расстояние между пластинами на $\Delta\mathbf{d}$. При этом можно записать:

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{SS}_C/(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}) .$$

Приравнивая друг другу заряды, найдем

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}(1/\cos\beta - 1)\ .$$

<u>**Ответ**</u>: $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}(1/\cos\beta - 1)$.

ЗАДАЧА № 76 (решение).

В катушке с коэффициентом самоиндукции (индуктивностью) $\boldsymbol{L}$*, по которой протекает ток* $\boldsymbol{I}$*, запасена энергия магнитного поля*

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{LI}^2/2\ .$$

Таким образом, энергия магнитного поля прямо пропорциональна индуктивности катушки.

Нетрудно показать, что *индуктивность цилиндрической катушки, которую часто называют также цилиндрическим соленоидом, равна*

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\mu\mu_0 Sn^2 l}\ ,$$

где $\boldsymbol{\mu_0}$ *– магнитная постоянная,* $\boldsymbol{\mu}$ *– магнитная проницаемость тела, заполняющего внутреннее пространство катушки (часто называемого сердечником катушки),* $\boldsymbol{S}$ *– площадь поперечного сечения катушки,* $\boldsymbol{n}$ *– число витков провода, намотанного на единице длины катушки (другими словами – плотность витков на единицу длины),* $\boldsymbol{l}$ *– длина катушки.*

Из приведенной формулы видно, что при заданной плотности витков индуктивность катушки прямо пропорциональна ее длине. В результате, после отсечения одной трети катушки ее индуктивность уменьшится до $(2/3)\mathbf{L}$.

Так как по условию задачи ток, пущенный через новую катушку, в два раза больше прежнего, то согласно выражению для $\mathbf{W}$ новая энергия $\mathbf{W}_1$ магнитного поля в катушке станет равной

$$\mathbf{W}_1 = (2/3)\mathbf{L}(2\mathbf{I})^2/2 = (8/3)\mathbf{LI}^2/2 = (8/3)\mathbf{W}\ .$$

<u>**Ответ**</u>: Энергия магнитного поля **увеличится в 8/3 раз**.

ЗАДАЧА № 77 (решение).

Рассмотрим опыт 1. До переброски ключа по замкнутой цепи, состоящей из Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon}$, сопротивления $\mathbf{R}$ и катушки индуктивности, протекает постоянный ток $\mathbf{I}$. Поскольку в условии сказано, что все элементы схемы идеальные, внутренними сопротивлениями Э.Д.С. и катушки можно пренебречь. Тогда ток **I** выражается из закона Ома следующим образом:

$$\mathbf{I} = \varepsilon/\mathbf{R} \ .$$

*Энергия $\boldsymbol{W}_1$ магнитного поля, запасенная в катушке с индуктивностью **L** при протекании по ней тока **I**,*

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{L}\mathbf{I}^2/2 \ .$$

Емкость **C**, включенная в схему опыта 1, энергией не обладает. Действительно, из схемы видно, что эта емкость закорочена идеальной катушкой с нулевым сопротивлением, через которую течет постоянный ток. В таких условиях между выводами катушки отсутствует какая-либо ненулевая разность потенциалов, ибо *напряжение (Э.Д.С. индукции) на идеальной катушке индуктивности появляется только тогда, когда электрический ток, протекающий через нее, изменяется во времени. На неидеальной катушке (обладающей электрическим сопротивлением) падение напряжения может иметь место даже при постоянном токе, что диктуется законом Ома.* В нашем же случае сопротивление катушки нулевое, поэтому согласно закону Ома разность потенциалов на ее выводах равна нулю.

Через длительное время после переброски ключа в опыте 1 вся запасенная в цепи энергия $\mathbf{W}_1$ выделится в виде теплоты на резисторе, встроенном в калориметр. При этом ток через катушку прекратится, Э.Д.С. индукции, возникавшая в период переходного процесса, обнулится и, соответственно, присоединенная к катушке емкость останется снова незаряженной. Заметим, что $\mathbf{W}_1$ – это только лишь энергия катушки индуктивности, поскольку остальные элементы нашей схемы энергией не обладают.

Таким образом, таяние снега в опыте 1 обусловлено расходованием энергии $\mathbf{W}_1$, что вызвало выделение теплоты $\mathbf{Q}_1$ на резисторе калориметра, которая, в свою очередь, оказалась равной теплоте плавления массы **m** снега, поскольку согласно условию задачи кристаллический снег изначально находился при температуре плавления (0°C) и остался после плавления при той же температуре. Отсюда

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{m} \ ,$$

где λ – удельная теплота плавления льда.

В опыте 2 до переброски ключа цепь, по которой течет постоянный ток, включает в себя аналогично опыту 1 Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon}$, сопротивление **R** и катушку индуктивности, подключенную к этой цепи через верхний ключ **K**. Поскольку по условию задачи номиналы элементов цепей в обоих опытах одинаковые, исходный постоянный ток **I** в опыте 2 будет таким же, как в опыте 1:

$$\mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}/\mathbf{R} \ .$$

Соответственно, энергия магнитного поля, запасенная в катушке, будет также равна по величине $\mathbf{W}_1 = \mathbf{LI}^2/2$.

В отличие от условий опыта 1, емкость **C** в опыте 2 подсоединена к источнику напряжения напрямую через нижний ключ **K**. В результате, в исходном состоянии эта емкость обладает энергией. Известно, что *энергия $\boldsymbol{W_C}$ электрического поля, запасенная в емкости **C**, заряженной до напряжения $\boldsymbol{\varepsilon}$,*

$$\mathbf{W}_\mathrm{C} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2/2 \ .$$

Таким образом, в исходном состоянии электрической цепи в опыте 2 запасена суммарная энергия

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2/2 + \mathbf{LI}^2/2 \ .$$

После синхронной переброски ключей создается новая единая цепь параллельно соединенных заряженной емкости **C**, индуктивности **L** с током **I** и резистора калориметра. Ясно, что через длительное (вообще говоря, бесконечное) время все токи в этой цепи прекратятся, иначе мы имели бы дело с вечным двигателем. Они прекратятся по той причине, что в период переходного процесса будет непрерывно происходить выделение теплоты $\mathbf{Q}_2$ на сопротивлении калориметра, приводящее, в свою очередь к таянию снега и нагреванию образованной из него воды. Результирующее уравнение теплового баланса в калориметре можно записать так:

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{Q}_2 = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{m} + \mathbf{c}_\mathrm{B}\mathbf{m}(\mathbf{T} - 0) \ .$$

Последнее слагаемое характеризует нагревание воды массы **m**, равной массе снега, от нуля градусов Цельсия до конечной температуры $\mathbf{T}$, выраженной также в градусах Цельсия.

Разделив $\mathbf{W}_2$ на $\mathbf{W}_1$, мы получим

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{C}\mathbf{R}^2/(\mathbf{c}_B\mathbf{L}) = 16°\text{C} \ .$$

Ответ: $\mathbf{T} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{C}\mathbf{R}^2/(\mathbf{c}_B\mathbf{L}) = 16\ °\text{C}$.

ЗАДАЧА № 78 (решение).

Эта задача является аналогом предыдущей, однако, содержит ряд отличающих принципиальных элементов.

Рассмотрим опыт 1. До переброски ключа по замкнутой последовательной цепи, состоящей из постоянной Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon}$, сопротивления $\mathbf{r}$, емкости $\mathbf{C}$ и катушки индуктивности $\mathbf{L}$, ток не протекает, поскольку этому мешает емкость. В отсутствии тока падение напряжения на сопротивлении равно нулю, напряжение на катушке тоже равно нулю, поэтому все напряжение источника падает на емкости. Следовательно, напряжение на емкости равно $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Заметим, к слову, что напряжение на катушке индуктивности может быть ненулевым даже при нулевом токе, протекающем через нее, лишь бы этот ток был переменным, то есть зависящим от времени. Даже если мгновенный ток равен нулю, но в этот момент он нарастает или убывает, на выводах катушки вырабатывается напряжение.

Таким образом, емкость $\mathbf{C}$, включенная в схему опыта 1, до переброски ключа обладает энергией

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2/2 \ .$$

Через длительное время после переброски ключа в опыте 1 вся запасенная в цепи энергия $\mathbf{W}_1$ выделится в форме тепла $\mathbf{Q}_1$ на резисторе, встроенном в калориметр. При этом емкость полностью разрядится, а ток через катушку индуктивности, имевший место в период переходного процесса, прекратится. По условию задачи теплота $\mathbf{Q}_1$ равна теплоте плавления массы $\mathbf{m}$ снега, поскольку согласно условию кристаллический снег изначально находился при температуре плавления (0°C) и остался после плавления при той же температуре. Отсюда

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2/2 = \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{m} \ ,$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – удельная теплота плавления льда.

В опыте 2 до переброски ключа цепь постоянного тока включает в себя Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon}$, сопротивление $\mathbf{r}$ и катушку индуктивности. Поскольку по условию задачи катушка идеальная, то есть сопротивлением не обладает, падение напряжения на ней равно нулю, и все напряжение $\boldsymbol{\varepsilon}$ источника падает на сопротивлении $\mathbf{r}$. Тогда величина тока $\mathbf{I}$ в этой цепи согласно закону Ома

$$\mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}/\mathbf{r} \ .$$

Соответственно, энергия магнитного поля $\mathbf{W}_1$, запасенная в катушке,

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{L}\mathbf{I}^2/2 \ .$$

Емкость $\mathbf{C}$ в опыте 2 присоединена своими выводами к сопротивлению $\mathbf{r}$. В результате, до переброски ключа на ней падает такое же напряжение $\boldsymbol{\varepsilon}$, как на сопротивлении. Соответственно, в этой емкости запасена энергия электрического поля, равная

$$\mathbf{W}_C = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2/2 \ .$$

Таким образом, в исходном состоянии электрической цепи опыта 2 запасена суммарная энергия

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2/2 + \mathbf{L}\mathbf{I}^2/2 \ .$$

После переброски ключа в опыте 2 начинается переходной процесс, представляющий собой затухающие колебания, в ходе которого электрические токи способны циркулировать через все элементы цепи, включающей в себя теперь источник напряжения $\boldsymbol{\varepsilon}$, емкость $\mathbf{C}$, индуктивность $\mathbf{L}$ и резистор калориметра. Через длительное (вообще говоря, бесконечное) время эти токи прекратятся. Источник напряжения, остающийся в цепи, не может поддерживать ток, поскольку последовательно с ним включена емкость, представляющая собой, по сути, разрыв цепи для постоянного тока. Поскольку Э.Д.С. индукции на катушке через длительное время после переброски ключа станет равной нулю, эта катушка для цепи постоянного тока станет по сути представлять собой проводник с нулевым сопротивлением, и, как при этом видно из конечного рисунка, емкость окажется напрямую замкнутой на источник напряжения **ε**, то есть останется под тем же напряжением, что и до переброски ключа.

Соответственно, конечная энергия цепи через длительное время после переброски ключа станет равной

$$\mathbf{W}_2{}' = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^2/2 \ .$$

В период переходного процесса будет непрерывно происходить выделение теплоты $\mathbf{Q}_2$ на сопротивлении калориметра, приводящее, в свою очередь к таянию снега и нагреванию образованной из него воды. Поскольку на эти превращения затрачивается положительная разность между начальной и конечной энергиями цепи, результирующее уравнение теплового баланса в калориметре можно записать так:

$$\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_2{}' = \mathbf{Q}_2 = \mathbf{L}\mathbf{I}^2/2 = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{m} + \mathbf{c}_{\text{В}}\mathbf{m}(\mathbf{T} - 0) \ .$$

Последнее слагаемое характеризует нагревание воды массы **m**, равной массе снега, от нуля градусов Цельсия до конечной температуры **T**, выраженной также в градусах Цельсия.

Разделив выражение, полученное для $\mathbf{Q}_2$, на выражение для $\mathbf{Q}_1$, получаем

$$\mathbf{T} = (\boldsymbol{\lambda}/\mathbf{c}_{\text{В}})[(\mathbf{L}/(\mathbf{C}\mathbf{r}^2) - 1] = 8°\text{C} \ .$$

Заметим, что при записи уравнения теплового баланса мы "проигнорировали" работу Э.Д.С. **ε**, которая, конечно же, совершалась, пока во время переходного процесса токи циркулировали по цепи. Почему мы позволили себе это сделать?

Работа Э.Д.С. $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ *количественно выражается как произведение величины Э.Д.С.* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *на заряд* $\Delta\boldsymbol{q}$*, протекший через нее, при этом работа принимается положительной, если заряд протекает сквозь Э.Д.С. "по стрелке" – от ее минусового полюса к плюсовому, и отрицательной – если наоборот:*

$$\boldsymbol{A}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon}\Delta\boldsymbol{q} \ .$$

Таким образом, в период переходного процесса в нашей задаче Э.Д.С. **ε** периодически совершала то положительную, то отрицательную работу, в зависимости от того, в какую сторону протекал через нее ток. Баланс протекшего заряда $\Delta\mathbf{q}$ определяет при этом итоговую работу, совершенную Э.Д.С.

Вместе с тем, из конечной схемы опыта 2 можно видеть, что во время переходного процесса любой заряд, протекший через Э.Д.С. $\boldsymbol{\varepsilon}$ в ту или другую сторону, тут же оказывался на подсоединенной к этому источнику нижней обкладке емкости **C** (после переброски ключа сопротивление r "висит в воздухе", и на нем никакой заряд не накапливается). Поскольку заряд $\mathbf{q}_C$ на этой емкости через длительное время после переброски ключа оказался равным начальному заряду $\mathbf{q}_C = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$, имевшемуся перед переброской, баланс заряда $\Delta\mathbf{q}$ на обкладках емкости **C** получился равным нулю, а значит, и Э.Д.С. совершила нулевую итоговую работу.

<u>Ответ:</u> $\mathbf{T} = (\boldsymbol{\lambda}/\mathbf{c}_B)[(\mathbf{L}/(\mathbf{Cr}^2) - 1] = 8°C$.

Оптика и распространение света

ЗАДАЧА № 79 (решение).

Поворот зеркала на угол $\Delta\boldsymbol{\beta}$ приведет к повороту нормали к этому зеркалу на такой же угол $\Delta\boldsymbol{\beta}$. Соответственно, угол падения луча увеличится (или уменьшится, в зависимости от того, как повернулось зеркало) на $\Delta\boldsymbol{\beta}$.

Поскольку угол зеркального отражения равен углу падения луча, то относительно новой нормали луч теперь отразится под углом, увеличенным (уменьшенным) относительно прежнего угла падения на $\Delta\boldsymbol{\beta}$. С учетом того, что и сама нормаль повернулась относительно прежнего направления на $\Delta\boldsymbol{\beta}$, суммарный поворот луча составит $2\Delta\boldsymbol{\beta}$.

<u>Ответ:</u> Поворот луча составит $2\Delta\boldsymbol{\beta}$.

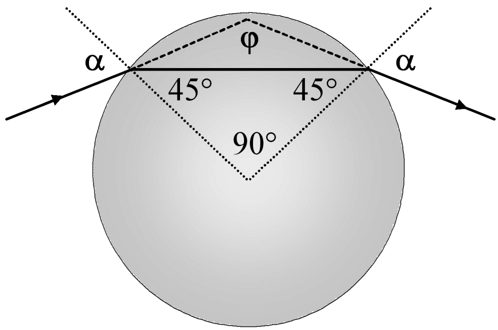
ЗАДАЧА № 80 (решение).

Прежде, чем мы сделаем необходимые для решения задачи геометрические построения, обратим внимание на одно свойство, имеющее место при падении луча на поверхность среды и его преломлении в этой среде. Очевидно, что падающий и преломленный лучи лежат в какой-то общей для них плоскости, которую, собственно, они и задают. Спрашивается, под каким углом эта плоскость расположена относительно плоскости поверхности, на которую падает луч?

Нетрудно догадаться или убедиться путем построения, что *эти две плоскости перпендикулярны друг другу*.

Таким образом, если взглянуть на рисунок, отражающий геометрию нашей задачи, то можно видеть, что падающий луч, преломленный луч и перпендикуляры, восстановленные в точках падения луча и его выхода из шара, лежат в одной плоскости. Причем в данной задаче эта плоскость проходит через центр шара, поскольку перпендикуляры, восстановленные к поверхности шара, проходят через центр.

Из построения хода луча, показанного на рисунке, видно следующее.



а) Угол преломления равен 45°, поскольку он является одним из двух равных друг другу углов при основании равнобедренного прямоугольного треугольника, а то, что треугольник прямоугольный, следует из условия задачи (дуга 90°).

б) Если обозначить угол падения луча на поверхность шара через α, то в показанном на рисунке другом равнобедренном треугольнике с углом при вершине φ каждый из одинаковых углов при основании равен по (α – 45°). При этом сумма углов данного (как и любого другого) треугольника равна 180°, что можно выразить соотношением:

$$180° = \varphi + 2(\alpha - 45°)\ .$$

Из последнего равенства следует:

$$\varphi = 270° - 2\alpha\ .$$

Теперь нам осталось определить α. Этот угол найдем, воспользовавшись законом преломления света (законом Снеллиуса или Снелла). В нашем случае, когда вокруг шара вакуум, а коэффициент преломления вакуума равен единице, этот закон можно выразить так:

$$\sin\alpha/\sin 45° = \mathbf{n}\ ,$$

откуда с учетом того, что $\sin 45° = 1/\sqrt{2}$, получаем

$$\sin\alpha = \mathbf{n}/\sqrt{2}$$

и, следовательно,

$$\alpha = \arcsin\,(\mathbf{n}/\sqrt{2}\,)\ .$$

Подставив последнее соотношение в выражение для φ, получим окончательно:

$$\varphi = 270° - 2\arcsin\,(\mathbf{n}/\sqrt{2}\,) = (3/2)\pi - 2\arcsin\,(\mathbf{n}/\sqrt{2}\,)\ .$$

Ответ: $\varphi = (3/2)\pi - 2\arcsin\,(\mathbf{n}/\sqrt{2}\,)$.

ЗАДАЧА № 81 (решение).

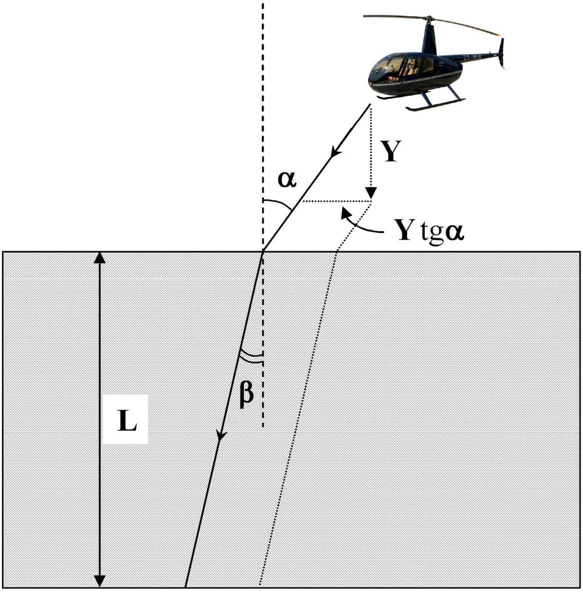
Сделав простое геометрическое построение (см. рис.), можно увидеть, что за время снижения вертолета по вертикали на расстояние $\mathbf{Y}$, луч смещается по воде на

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathrm{tg}\alpha\ .$$

Благодаря тому, что угол α падения луча на воду и угол β преломления луча в воде со временем не изменяются по величине, такое же смещение $\mathbf{X}$ луча будет происходить и по дну озера.

Так как вертолет движется равномерно со скоростью $\mathbf{v}$, его путь $\mathbf{Y}$, пройденный за время $\mathbf{t}$, выражается соотношением

$$\mathbf{Y} = \mathbf{vt}\ ,$$



откуда следует, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathrm{tg}\alpha = \mathbf{vt}\ \mathrm{tg}\alpha\ .$$

С другой стороны, сохранение неизменными углов падения и преломления приводят к тому, что и по дну луч тоже перемещается равномерно со скоростью **u**. Поэтому можно записать

$$\mathbf{X} = \mathbf{ut}\ .$$

Решая совместно последние два уравнения, получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}\ \mathrm{tg}\alpha\ .$$

Обозначим через β угол преломления луча в воде (см. рис.). Тогда из рисунка нетрудно видеть, что свету, испущенному на высоте **h**, нужно преодолеть в воздухе расстояние

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{h}/\cos\alpha\ ,$$

а в воде – расстояние

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{L}/\cos\beta\ .$$

При этом следует учитывать, что *в воздухе световой фронт перемещается со скоростью*

$$c_1 = c,$$

близкой к скорости света в вакууме, а в оптически плотной среде с коэффициентом преломления $\boldsymbol{n}$ *– со скоростью*

$$c_2 = c/n .$$

Таким образом, на перемещение светового фронта от вертолета до поверхности воды и от поверхности воды до дна потребуется суммарное время

$$\mathbf{T} = \mathbf{d}_1/\mathbf{c}_1 + \mathbf{d}_2/\mathbf{c}_2 = \mathbf{h}/(\mathbf{c}\cos\alpha) + \mathbf{nL}/(\mathbf{c}\cos\beta) .$$

Углы $\boldsymbol{\alpha}$ *и* $\boldsymbol{\beta}$ *связаны между собой законом преломления света, который также называют законом Снеллиуса (или Снелла):*

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta ,$$

где $\boldsymbol{n_1}$ *– показатель преломления среды с углом падения* $\boldsymbol{\alpha}$*, а* $\boldsymbol{n_2}$ *– показатель преломления среды с углом преломления* $\boldsymbol{\beta}$*. Обратите внимание на то, что в приведенной форме записи закона преломления синусы углов умножаются на "свои" показатели преломления.*

В случае нашей задачи $\mathbf{n}_1 = 1$, а $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$, поэтому закон преломления выглядит следующим образом:

$$\sin\alpha = \mathbf{n}\sin\beta ,$$

откуда

$$\sin\beta = \sin\alpha / \mathbf{n} .$$

Выразив $\cos\beta$ через $\sin\beta$ с помощью формулы

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 ,$$

затем подставив вместо синуса только что выведенное соотношение для $\sin\beta$, и наконец, подставив соотношение для $\cos\beta$ в записанное выше выражение для $\mathbf{T}$, мы получим окончательно:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{h}/\cos\alpha + \mathbf{n}^2\mathbf{L}/\sqrt{\mathbf{n}^2 - \sin^2\alpha})/\mathbf{c} .$$

<u>**Ответ :**</u> а) $\mathbf{u} = \mathbf{v}\,\mathrm{tg}\alpha$; б) $\mathbf{T} = (\mathbf{h}/\cos\alpha + \mathbf{n}^2\mathbf{L}/\sqrt{\mathbf{n}^2 - \sin^2\alpha})/c$.

ЗАДАЧА № 82 (решение).

Решение этой задачи требует применения формулы линзы, подробно рассмотренной в решении задачи № 83.

По формуле линзы найдем расстояние **b**, на котором находилось бы резкое изображение предмета в случае, если бы зеркала не было:

$$1/\mathbf{a} + 1/\mathbf{b} = 1/\mathbf{F}\ ,$$

откуда

$$\mathbf{b} = \mathbf{aF}/(\mathbf{a} - \mathbf{F}) = 120\ \text{см}\ .$$

Ввиду того, что угол падения луча на зеркало равен углу его отражения и наоборот, ход лучей, идущих от предмета, после отражения от плоского зеркала будет симметричен относительно плоскости зеркала. При этом ход отраженных лучей будет в точности таким же, как если бы данного зеркала не было.

Заметим, что эта задача принадлежит к достаточно редкому классу, где результат решения зависит от исходных численных значений параметров. Действительно, в качестве результата решения возможны следующие варианты:

1) Предмет находится на расстоянии от линзы, меньшем ее фокусного расстояния **F** или равным ему. Такая ситуация, подробно рассмотренная в решении задачи № 83, не позволяет получить действительное изображение предмета. Согласно значениям параметров, заданным в условии задачи (**a** = 40 см, **F** = 30 см) эта ситуация в нашем случае не реализуется, поэтому за линзой будет сформировано действительное изображение.

2) Зеркало расположено от линзы дальше, чем **b** (**L** > **b**) В этом тривиальном случае ответом является величина **b**, найденная выше. Однако, по условию задачи расстояние от линзы до зеркала (**L** = 90 см) меньше **b** (120 см), поэтому лучи, прежде чем сформировать резкое изображение, испытают отражение от зеркала.

3) Расстояние **b** больше 2**L**. В этом случае лучи после отражения от зеркала вновь пройдут сквозь линзу, и только после этого можно пытаться искать плоскость резкого изображения предмета. Однако, численные параметры показывают, что такое условие в нашей задаче не выполняется, поэтому резкое изображение будет сформировано между линзой и зеркалом еще до вторичного прохождения лучей

сквозь линзу.

Итак, ввиду того, что согласно численным значениям, заданным в условии задачи,

$$\mathbf{b} - \mathbf{L} < \mathbf{L} \,,$$

резкое действительное изображение предмета будет с той же стороны от линзы, с которой находится зеркало, а именно, на расстоянии

$$\mathbf{b} - \mathbf{L} = 30 \text{ см}$$

от зеркала, то есть на расстоянии

$$\mathbf{x} = \mathbf{L} - (\mathbf{b} - \mathbf{L}) = 2\mathbf{L} - \mathbf{b} = 2\mathbf{L} - \mathbf{aF}/(\mathbf{a} - \mathbf{F}) = 60 \text{ см}$$

от линзы.

Ответ : $\mathbf{x} = 2\mathbf{L} - \mathbf{aF}/(\mathbf{a} - \mathbf{F}) = 60$ см при выполнении условий:
$\mathbf{a} > \mathbf{F}$, $2\mathbf{L} > \mathbf{aF}/(\mathbf{a} - \mathbf{F})$.

ЗАДАЧА № 83 (решение).

Решение этой довольно простой задачи требует знания двух формул из разных разделов физики – оптики и теории колебаний.

Первая – это, так называемая, *формула (плоской) линзы. Она связывает между собой расстояние* ***a*** *от предмета (источника лучей) до линзы и расстояние* ***b*** *от линзы до резкого изображения этого предмета в данной линзе. "Связующим звеном" для параметров* ***a*** *и* ***b*** *служит фокусное расстояние* ***F*** *линзы:*

$$1/\boldsymbol{a} + 1/\boldsymbol{b} = 1/\boldsymbol{F} \,.$$

При этом предполагается, что предмет расположен не слишком далеко от оптической оси линзы. Приведенная формула позволяет узнать о некоторых особенностях изображения.

Например, если $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{F}$*, то есть предмет удален от линзы на расстояние, большее фокусного расстояния, то расположив проекционный экран на расстоянии* ***b*** *от линзы с противоположной предмету стороны, мы получим на этом экране резкое изображение предмета. При этом изображение может оказаться как увеличенным (при* $\boldsymbol{a} < 2\boldsymbol{F}$*), так и уменьшенным (при* $\boldsymbol{a} > 2\boldsymbol{F}$*). При* $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{F}$ *размеры предмета и изображения будут одинаковыми.*

Если $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{F}$*, то есть предмет расположен очень близко от лин-*

*зы, легко увидеть, что формуле линзы удовлетворяют только отрицательные значения **b**. О чем это говорит? О том, что теперь резкое изображение предмета будет находиться не с противоположной предмету стороны, а с той же стороны, где сам предмет.*

*Вы скажете: "Это невозможно, ведь если лучи, идущие от предмета, прошли сквозь линзу, они не могут вернуться обратно, чтобы сформировать изображение!" И будете совершенно правы. Лучи после линзы уйдут в сторону, противоположную предмету, причем будут за линзой расходиться. Однако, если искусственно продолжить эти расходящиеся лучи в ту область вблизи линзы, где находится предмет, то на расстоянии **b** эти продолжения сойдутся в виде изображения предмета. Поскольку ни на каком экране, поставленном в плоскость схождения лучей, не возникает реального изображения, такое изображение называют мнимым.*

Отметим, что формула линзы справедлива и для вогнутых (рассеивающих) линз, у которых принято считать, что фокусное расстояние отрицательное, поскольку за фокус принимают не точку схождения параллельных лучей, находящуюся за выпуклой линзой, а точку перед вогнутой линзой, куда сходятся продолжения расходящихся лучей.

*В стандартной ситуации, когда предмет находится перед вогнутой линзой и потому параметр **a** для формулы линзы положительный, параметр **b** получается отрицательным, в чем легко убедиться. Это означает, что изображение в одиночной вогнутой линзе всегда получается мнимым.*

*Интересно, что в формуле линзы расстояние от предмета до линзы тоже бывает отрицательным. Это случается тогда, когда линза является частью составной оптической системы. В оптической системе изображение, полученное в оптическом элементе с порядковым номером n, всегда является источником (предметом) для элемента с номером (n+1), идущим вслед за элементом n, где порядок устанавливается согласно последовательности прохождения системы лучами. При таком правиле может оказаться, что изображение, сформированное элементом n окажется не перед элементом (n+1), как это имеет место в стандартной ситуации, а за элементом (n+1). Тогда и параметр **a** в формуле линзы для элемента (n+1) следует брать с отрицательным знаком.*

Обозначим через **L** длину нити маятника. Тогда в согласии с условием задачи формулу линзы можно записать в следующем виде:

$$1/\mathbf{L} + 1/(\mathbf{L}/3) = 1/\mathbf{F}\ .$$

Величину **L** можно найти из известного выражения для периода колебаний математического маятника:

$$\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\mathbf{L}/\mathbf{g}}\ ,$$

откуда

$$\mathbf{L} = \mathbf{g}\mathbf{T}^2/(4\pi^2)\ .$$

Подставив **L** в формулу линзы, получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{L}/4 = \mathbf{g}\mathbf{T}^2/(16\pi^2) = 2.5\ (\text{м}).$$

Ответ: $\mathbf{F} = \mathbf{g}\mathbf{T}^2/(16\pi^2) = 2.5$ (м).

ЗАДАЧА № 84 (решение).

В первоначальной ситуации можно записать уравнение состояния идеального газа, заполняющего один из отсеков (левый или правый):

$$\mathbf{PV} = \boldsymbol{\nu}\mathbf{RT}\ ,$$

где **P** – давление газа, **V** – объем отсека, **ν** – число молей газа в отсеке, **R** – универсальная газовая постоянная.

По условию задачи значения параметров **ν** и **T** в обоих отсеках одинаковые. После прихода системы в равновесие давление **P** тоже станет одинаковым. В противном случае на линзу слева или справа действовала бы избыточная сила, и линза, вместо того, чтобы оставаться в покое, приобрела бы ускорение.

Отсюда следует, что и объемы

$$\mathbf{V} = \mathbf{Sd}$$

отсеков длиной **d** с площадью поперечного сечения **S** в исходном состоянии должны быть одинаковыми. Поскольку через **L** в условии задачи обозначена длина всего цилиндра, то мы можем записать

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}/2\ .$$

Теперь можно воспользоваться тем обстоятельством, что резкое изображение левой стенки цилиндра находится на правой. Соответственно, формула линзы для исходного случая выглядит так:

$$1/(\mathbf{L}/2) + 1/(\mathbf{L}/2) = 1/\mathbf{F}\ ,$$

откуда

$$\mathbf{L} = 4\mathbf{F}\ .$$

Пусть **x** – смещение линзы вправо после нагрева газа в левом отсеке. Тогда уравнение состояния идеального газа для левого отсека записывается в виде

$$\mathbf{P}_1\mathbf{S}(\mathbf{L}/2 + \mathbf{x}) = \boldsymbol{\nu}\mathbf{R}\mathbf{T}_1\ ,$$

а для правого – в виде

$$\mathbf{P}_1\mathbf{S}(\mathbf{L}/2 - \mathbf{x}) = \boldsymbol{\nu}\mathbf{R}\mathbf{T}\ .$$

В новом состоянии равновесия давление $\mathbf{P}_1$ в отсеках снова одинаковое по уже указанной выше причине.

Разделив верхнее из последней пары уравнений на нижнее, можно выразить **x**:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{L}/2)(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T})/(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T})\ .$$

Применим формулу линзы к новой ситуации:

$$1/(\mathbf{L}/2 - \mathbf{x}) + 1/(\mathbf{L}/2 + \mathbf{x}) = 1/\mathbf{F}_1\ .$$

Подставив в последнее уравнение выражение, полученное для x, найдем окончательно:

$$\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{T}_1/(\mathbf{T}+\mathbf{T}_1)^2\ .$$

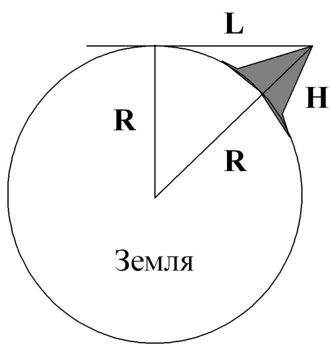
Ответ: а) $\mathbf{L} = 4\mathbf{F}$; б) $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{F}\mathbf{T}\mathbf{T}_1/(\mathbf{T}+\mathbf{T}_1)^2$.

ЗАДАЧА № 85 (решение).

Поскольку в условии задачи сказано, что корабль альпинистов был небольшим, а следовательно, невысоким по сравнению с высотой вулкана, то можно с хорошей точностью считать, что оптическая ось прибора, направленного на флаг, шла практически по касательной к земному шару, причем точка касания находилась в том месте, где располагался корабль с альпинистами.

Расстояние **L**, которое проходил при этом солнечный свет, отраженный от флага, пока ни достигал глаз альпинистов, можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника со сторонами **R**, (**R** + **H**) и **L** (см. рис.):

$$\mathbf{L} = \sqrt{(\mathbf{R}+\mathbf{H})^2 - \mathbf{R}^2} = \sqrt{\mathbf{H}(2\mathbf{R}+\mathbf{H})} \approx \sqrt{2\mathbf{RH}} \approx 226.3\ (\text{км})\ .$$



В приведенных расчетах мы пренебрегли высотой **H** вулкана (4 км) по сравнению с диаметром Земного шара 2**R**. (12800 км), поскольку этот диаметр больше высоты вулкана в 3200 раз.

На данном примере целесообразно снова повторить следующее (впервые мы обращали внимание на этот факт в решении задачи № 43). *Несмотря на то, что физика – наука точная, достижение любого количественного результата с ее помощью не должно быть лишено здравого смысла, поэтому в расчетах необходимо учитывать лишь те величины, которые не приводят к превышению точности. К примеру, учет величины **H** в сумме (2**R** + **H**) "улучшил" бы точность результата на величину, которая оказалась бы меньше размеров палубы, с которой альпинисты рассматривали флаг. А коль уж размерами палубы вы пренебрегли в своем решении, стоило ли придавать значение малым поправкам, которые привносило слагаемое **H** в приведенной выше сумме?*

В подобных случаях не вредно помнить, что учет незначимых мелочей не просто является бессмысленными действиями, но часто расценивается как ошибка в решении, поскольку демонстрирует, что автор поступает чисто формально, не предавая смысл тому, про что решает данную задачу.

Искомое время перемещения светового фронта мы найдем, воспользовавшись формулой кинематики равномерного движения:

$$\mathbf{t} = \mathbf{L}/\mathbf{c} \approx \sqrt{2\mathbf{RH}}\,/\mathbf{c} \approx 0.754\ (\text{мс})\ .$$

Если все-таки не пренебрегать высотой **h** корабля, выступающего над поверхностью воды, то легко убедиться, сделав соответствующие геометрические построения, что выражение для величины **L** с учетом данного фактора станет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{L} = \sqrt{\mathbf{H}(2\mathbf{R} + \mathbf{H})}\ \{1 + \sqrt{(\mathbf{h}/\mathbf{H})[1 + \mathbf{h}/(2\mathbf{R})]/[1 + \mathbf{H}/(2\mathbf{R})]}\} \approx$$

$$\approx (1 + \sqrt{\mathbf{h}/\mathbf{H}})\sqrt{2\mathbf{RH}}\ .$$

Видно, что для достаточно высокого корабля ($\mathbf{h} \cong 40$ м и больше) поправка к полученному выше результату составит более 10%, а потому должна быть учтена в решении.

<u>**Ответ:**</u> $\mathbf{t} \approx (1/\mathbf{c})\sqrt{2\mathbf{RH}} \approx 0.754$ (мс) .

ЗАДАЧА № 86 (решение).

Ключом к решению этой задачи может служить всего лишь наблюдательность, проявленная при анализе "радуги" спектра видимого излучения, возникающей после прохождения белого света сквозь толстую стеклянную пластину (или призму), если падающие на стекло лучи направить с отклонением от нормали к поверхности. Можно увидеть, что *зеленый луч при косом падении на плоскость прозрачного материала испытывает более сильное преломление, чем красный.*

То есть получается, что при одинаковых углах падения α (в едином пучке белого света) угол преломления β для зеленого света оказывается меньше, чем для красного. В этом месте необходимо напомнить, что *углы падения и преломления лучей принято отсчитывать не от поверхности, а от нормали к этой поверхности!*

При падении света из вакуума (или воздуха) на поверхность оптически плотной среды с показателем преломления **n** свет испытывает в среде преломление, при этом угол его падения α и угол преломления β связаны законом Снеллиуса (или Снелла), который можно записать в форме

$$\sin\alpha/\sin\beta = \mathbf{n}\ .$$

Таким образом, наблюдение за разложением в спектр белого света (сравнение углов преломления) позволяет сделать вывод, что *показатель преломления **n** для зеленого света больше, чем для красно-*

го.

Известно, что *скорость* $\boldsymbol{c_0}$ *распространения света в вакууме является наибольшей из достижимых в природе скоростей.* Однако, такое, например, утверждение, как "скорость света – самая большая из возможных скоростей" является, все-таки, некорректным. Дело в том, что при распространении света в среде (не в вакууме) скорость света меньше, чем $\mathbf{c}_0$, и соответственно, скорость света, к примеру, в стекле не будет "самой большой из возможных скоростей". *В среде свет распространяется со скоростью*

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c_0}/\boldsymbol{n}\ ,$$

где $\boldsymbol{n}$ *– показатель преломления этой среды.*

Следовательно, *скорость зеленого света в среде меньше, чем скорость красного*, и потому красный луч достигнет центра шара быстрее, чем зеленый.

Внесем дополнительный комментарий к полученному результату. Пожалуй, каждому известно мнемоническое правило, позволяющее легко запомнить последовательность цветов радуги, совпадающей с последовательностью цветов разложения белого света в оптический спектр:

Каждый	(**К**расный)
Охотник	(**О**ранжевый)
Желает	(**Ж**елтый)
Знать	(**З**еленый)
Где	(**Г**олубой)
Сидит	(**С**иний)
Фазан	(**Ф**иолетовый)

Мы сравнили в настоящей задаче всего два цвета лучей – красный и зеленый. Однако, все соотношения, полученные нами для углов преломления, показателей преломления и скоростей света остаются справедливыми для любой пары перечисленных выше семи основных цветов (и, конечно, не только для основных), лишь бы эти цвета соответствовали последовательности, приведенной выше. К примеру, можно смело утверждать, глядя на список вышеперечисленных цветов, что скорость синего цвета в среде больше, чем скорость фиолетового.

А поскольку закономерность в мнемоническом правиле устанавливается не последовательностью букв, а длиной волны излучения, которая у красного цвета больше, чем у зеленого или фиолетового, то полученные нами соотношения могут быть привязаны непосредственно к длинам волн: *чем больше длина волны излучения, тем больше скорость света в среде, меньше показатель преломления и больше сам угол преломления*.

Наконец, нельзя не сделать еще одно замечание. Все, о чем шла речь в приведенном выше решении, полностью справедливо лишь для довольно простых и стандартных ситуаций, с которыми мы сталкиваемся в оптике. В реальных твердых оптических средах показатель преломления представляет собой весьма непростую функцию, зависящую не только от длины волны излучения, но также от ориентации атомов в кристалле, от электропроводности и магнитных свойств среды, интенсивности падающего излучения и ряда других физических параметров, о чем не стоит забывать, когда вы приступаете к работе с реальными оптическими системами.

<u>Ответ:</u> **Красный луч достигнет центра шара быстрее**, чем зеленый.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПРАВКИ

Ниже приведены некоторые полезные соотношения и формулы, часто встречающиеся при решении физических задач:

$sin30° = cos60° = 1/2$, $tg30° = \sqrt{3}/3$,

$sin60° = cos30° = \sqrt{3}/2$, $tg60° = \sqrt{3}$,

$sin45° = cos45° = \sqrt{2}/2$, $tg45° = 1$,

$sin0° = sin180° = 0$, $sin90° = 1$,

$cos0° = 1$, $cos90° = 0$, $cos180° = -1$,

$tg\boldsymbol{\beta} = sin\boldsymbol{\beta}/cos\boldsymbol{\beta}$, *где* $\boldsymbol{\beta}$ *– угол .*

Длина дуги окружности равна $\alpha\boldsymbol{R}$,
где α *– центральный угол дуги (в радианах!).*

Длина окружности равна $2\pi\boldsymbol{R}$,
где $\boldsymbol{R}$ *– радиус окружности.*

Площадь круга равна $\pi\boldsymbol{R}^2$,
где $\boldsymbol{R}$ *– радиус круга.*

Площадь поверхности сферы равна $4\pi\boldsymbol{R}^2$,
где $\boldsymbol{R}$ *– радиус сферы.*

Объем шара равен $(4/3)\,\pi\boldsymbol{R}^3$,
где $\boldsymbol{R}$ *– радиус шара.*

$\pi \approx 3.14$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{2} \approx 1.41$.

Учебное издание

Вайнер Борис Григорьевич

ОТ МЕХАНИКИ ДО ОПТИКИ

**Задачи
с обучающими решениями**

Учебное пособие

Графический материал и оригинал-макет
подготовил Б. Г. Вайнер

Подписано в печать 02.10.2012 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 14,3. Усл. печ. л. 11,7. Тираж экз.

Заказ № .

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2