

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра теоретической физики

Е. В. Подивилов, Е. Г. Шапиро, Д. А. Шапиро

**РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ФИЗИКИ**

Учебное пособие

Новосибирск
2012

УДК 530.1:51
ББК В311я73-1
П442

Подивилов Е. В., Шапиро Д. А., Шапиро Е. Г. Рабочая тетрадь по математическим методам физики: Учеб. пособие/ Новосиб. гос. ун-т, Новосибирск, 2012. 126 с. ISBN 978-5-4437-0098 - 4.

В пособии рассмотрены темы, которые изучаются в курсе «Методы математической физики»: уравнения в частных производных, специальные функции, асимптотические методы, применение теории групп в физике и метод функций Грина. Делается упор на умение решать задачи из разных разделов физики, применять теоретические знания, полученные на лекциях. Рабочая тетрадь содержит более 260 задач, которые рекомендуется решить на семинарах в течение учебного года. Каждый семинар начинается с краткого изложения теории. Затем идут задачи, как правило снабженные решениями, указаниями или ответами. Звездочками отмечены задачи повышенной сложности, решение которых не является обязательным, и дополнительные разделы, не входящие в программу.

Издание предназначено для студентов 3-го курса физического факультета НГУ.

Рецензент:

д.ф.-м.н., проф. А. И. Мильштейн

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

ISBN 978-5-4437-0098 - 4

© Новосибирский государственный университет, 2012
© Подивилов Е. В., Шапиро Д. А., Шапиро Е. Г., 2012

Оглавление

1. Линейные операторы	5
1.1. Матрицы	5
1.1.1. След	5
1.1.2. Определитель	5
1.2. Функции матрицы	6
1.2.1. Резольвента	7
1.2.2. Проекторы	8
1.3. Унитарные и эрмитовы матрицы	8
1.4. Матрицы Паули	9
1.5. Операторы в пространстве функций	10
2. Уравнения в частных производных	12
2.1. Линейные уравнения первого порядка	12
2.1.1. Характеристики	12
2.1.2. Задача Коши	13
2.2. Квазилинейные уравнения	14
2.3. Нелинейные уравнения I порядка *	15
2.4. Системы уравнений	18
2.4.1. Канонический вид при $n = 2$	18
2.4.2. Инварианты Римана	20
2.4.3. Гиперболические системы с $n > 2$ *	22
2.5. Линейные уравнения II порядка	23
2.6. Автомодельность	26
2.7. Нелинейные уравнения II порядка	28
2.7.1. Бегущая волна	28
2.7.2. Подстановки	30
2.8. Метод Фурье	31
2.8.1. Гиперболический тип	31
2.8.2. Параболический тип	33
2.8.3. Эллиптический тип	34
2.9. Разделение переменных	36
2.9.1. Ортогональные системы координат	36
2.9.2. Параболоидальные координаты	36
2.9.3. Сфероидальные координаты	37

3. Специальные функции	39
3.1. Гипергеометрические функции	39
3.2. Ортогональные полиномы	42
3.3. Функции Бесселя	44
4. Асимптотические методы	47
4.1. Интеграл Лапласа	47
4.2. Метод стационарной фазы	49
4.3. Метод перевала	52
4.4. Метод усреднения	55
5. Применение теории групп	57
5.1. Основные понятия теории групп	57
5.1.1. Группа, подгруппа, порядок	57
5.1.2. Смежные классы, индекс подгруппы	59
5.1.3. Инвариантная подгруппа, фактор-группа	61
5.1.4. Сопряженные элементы	62
5.2. Группа квадрата и куба	63
5.3. Матричные представления	65
5.4. Применение теории представлений	68
5.4.1. Кратность вырождения нормальных колебаний	69
5.4.2. Снятие вырождения	73
5.4.3. Правила отбора	75
5.5. Группы Ли. Инвариантные тензоры	76
5.5.1. Неприводимые представления группы $SO(2)$	79
5.5.2. Группы $O(2)$ и $SO(3)$	82
5.5.3. Представления группы $SO(3)$	85
5.5.4. Представления группы $O(3)$	88
5.5.5. Симметризация тензорных представлений	90
5.5.6. Группа $SU(2)$ и ее неприводимые представления	93
6. Функции Грина	97
6.1. Функция Грина обыкновенного дифференциального уравнения	97
6.2. Обобщенные функции Грина для ОДУ	101
6.3. Функции Грина эллиптических уравнений	105
6.4. Функции Грина параболических уравнений	108
6.5. Функции Грина волновых уравнений	113
Приложение А: Симметризаторы Юнга	116
А.1. Циклы	116
А.2. Схемы Юнга	118
А.3. Симметризаторы	120
А.4. Симметризация базиса	121
А.5. Характеры симметризованных представлений	122
А.6. Независимые компоненты инвариантных тензоров	123
А.7. Неприводимые характеры групп подстановок	125

Глава 1

Линейные операторы

1.1. Матрицы

1.1.1. След

Будем рассматривать квадратные матрицы.

Определение. След матрицы равен сумме ее диагональных элементов.

Задача 1. Доказать, что матрицы можно циклически переставлять под знаком следа

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n \mathbf{A}_1).$$

Указание. Сначала проверьте, что для двух матриц $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$.

Задача 2. Матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} подобны ($\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), если существует невырожденная квадратная матрица \mathbf{T} такая, что $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$. Покажите, что подобные матрицы имеют одинаковый след. Какие еще инварианты преобразования подобия вы знаете?

Собственные значения матрицы находятся из решения характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$.

Иногда матрицу можно привести к диагональному виду

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Тогда на главной диагонали стоят собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, поэтому след — это сумма собственных значений:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

1.1.2. Определитель

Если матрица приводится к диагональному виду, ее определитель равен произведению собственных чисел

$$\det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Если матрица приводится к жордановой форме, то определитель равен произведению ее диагональных элементов.

Задача 3. Показать, что если $AC = CA$, $|A| \neq 0$, то

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{AD} - \mathbf{CB}|. \quad (1.2)$$

Указание. Умножить слева на блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

и превратить матрицу в блочно-верхнетреугольную.

Определение. Экспонентой от матрицы называется разложение экспоненты, в которое вместо аргумента подставлена матрица

$$e^{\mathbf{A}} = 1 + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots$$

Задача 4. Доказать, что

$$\det e^{\mathbf{A}} = e^{\operatorname{tr} \mathbf{A}}. \quad (1.3)$$

Указания. 1. Проверить, что равенство выполнено для диагональной матрицы Λ .

2. Проверить, что если $\mathbf{B} = \mathbf{TAT}^{-1}$, то равенство (1.3) выполнено и для подобной матрицы \mathbf{B} .
3. Вывести равенство (1.3) для жордановой клетки.
4. Показать, что если для каждой клетки равенство (1.3) выполнено, то оно справедливо и для блочно-диагональной матрицы, составленной из таких клеток.

1.2. Функции матрицы

Определение. Если функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots,$$

то эта функция от квадратной матрицы \mathbf{A} дается тем же рядом

$$f(\mathbf{A}) = f(0) + f'(0)\mathbf{A} + \frac{f''(0)}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots$$

Задача 5. Показать, что если матрица приводится к диагональному виду (1.1), то функцию от матрицы можно вычислить в собственном базисе

$$f(\mathbf{TAT}^{-1}) = \mathbf{T}f(\mathbf{A})\mathbf{T}^{-1}.$$

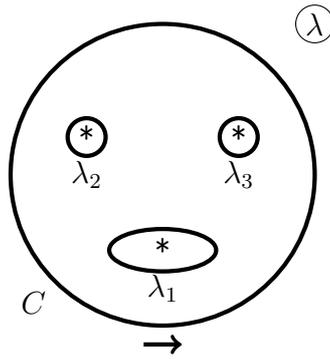


Рис. 1.1. Контуры интегрирования резольвенты

Задача 6. Вычислить

$$\ln \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

при $|x| < 1$.

Указание. Найти собственные векторы и построить из них матрицу \mathbf{T} , приводящую к диагональному виду (1.1):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$\ln \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ln(1-x^2) & \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \ln \frac{1+x}{1-x} & \ln(1-x^2) \end{pmatrix}.$$

Можно ли сказать заранее, что матрица в последней задаче приводится к диагональному виду? Приводится ли к диагональному виду большинство матриц?

1.2.1. Резольвента

Определение. Резольвента матрицы $\mathbf{R}_\lambda = (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ позволяет вычислить функцию от матрицы по формуле

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathbf{R}_\lambda f(\lambda) d\lambda,$$

где контур C охватывает все полюсы резольвенты (рис. 1.1).

Задача 7. Решить предыдущую задачу методом резольвенты.

Задача 8. Найти

$$\sin \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание.

$$\mathbf{R}_\lambda = \frac{1}{(\lambda-x)(\lambda^2-x^2)} \begin{pmatrix} \lambda(\lambda-x) & 0 & x(\lambda-x) \\ 0 & \lambda^2-x^2 & 0 \\ x(\lambda-x) & 0 & \lambda(\lambda-x) \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin x \\ 0 & \sin x & 0 \\ \sin z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Проекторы

Пусть все собственные значения невырождены. Если проинтегрировать резольвенту не по контуру C , а по контуру C_i (см. рис. 1.1), обходящему в положительном направлении только один полюс $\lambda = \lambda_i$, то получится оператор проектирования

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \mathbf{R}_\lambda d\lambda.$$

Квадрат проектора равен проектору

$$\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i.$$

Сумма вычетов по всем полюсам равна интегралу по контуру C , откуда сумма проекторов равна единичной матрице

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = \mathbf{1}.$$

Матрицу можно разложить по проекторам

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}_i.$$

Задача 9. Найти проектор \mathbf{P}_1 на подпространство матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, отвечающее собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Ответ.

$$\mathbf{R}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det \mathbf{A} = \lambda^3 - 1;$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \mathbf{R}_\lambda d\lambda = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Унитарные и эрмитовы матрицы

Определение. Скалярное произведение двух векторов из \mathbb{C}^n имеет следующие свойства:

- 1) $\langle a|b + \lambda c \rangle = \langle a|b \rangle + \lambda \langle a|c \rangle$ (линейность);
- 2) $\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle^*$ (эрмитовость);

3) $\langle a|a \rangle \geq 0$ (положительность), причем $\langle a|a \rangle = 0$ только для нулевого вектора $a = 0$.

Эрмитово сопряжение оператора определяется через скалярное произведение

$$\langle a|\mathbf{L}b \rangle = \langle \mathbf{L}^\dagger a|b \rangle \equiv \langle a|\mathbf{L}|b \rangle. \quad (1.4)$$

Определение. Матрица U унитарная, если $U^{-1} = U^\dagger$.

Задача 10. Проверьте, что все собственные числа унитарной матрицы по модулю равны 1 и что унитарное преобразование не меняет нормы вектора.

Указание. Подействуем оператором U^\dagger на обе части уравнения

$$U|n \rangle = \lambda_n|n \rangle. \quad (1.5)$$

Получится

$$U^\dagger U|n \rangle = \lambda_n^* \lambda_n |n \rangle.$$

Определение. Матрица \mathbf{H} эрмитова, если $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$.

Задача 11. Покажите, что все собственные значения эрмитовой матрицы действительны и что у эрмитовой матрицы существует ортогональный базис из собственных векторов.

Указание. Запишем спектральную задачу

$$\mathbf{H}|n \rangle = \lambda_n|n \rangle, \quad (1.6)$$

умножим слева на $\langle n|$ и получим

$$\langle n|\mathbf{H}|n \rangle = \lambda_n \langle n|n \rangle \Rightarrow \lambda_n = \frac{\langle n|\mathbf{H}|n \rangle}{\langle n|n \rangle} = \frac{\langle n|\mathbf{H}^\dagger|n \rangle}{\langle n|n \rangle}.$$

Для доказательства ортогональности выпишите два уравнения (1.6) для $n = i, j$ и умножьте одно на $\langle j|$, а другое на $\langle i|$.

Может ли матрица быть одновременно эрмитовой и унитарной?

1.4. Матрицы Паули

Определение. Матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно условно записать матрицы Паули в виде вектора $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Задача 12. Вывести формулу для произведения матриц Паули

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + ie_{ijk} \sigma_k$$

и получить из нее формулы для коммутатора $[\sigma_i, \sigma_j] = 2ie_{ijk} \sigma_k$ и антикоммутатора $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$. Здесь e_{ijk} — полностью антисимметричный тензор ранга 3.

Задача 13. Найти коэффициенты разложения произвольной матрицы 2×2 по матрицам Паули. Показать, что коэффициенты разложения эрмитовой матрицы действительны.

Ответ.

$$\mathbf{A} = a_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^3 a_i \boldsymbol{\sigma}_i, \quad a_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}, \quad a_i = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{A},$$

где $\boldsymbol{\sigma}_0$ — единичная матрица. Можно ввести 4-вектор $\boldsymbol{\sigma}_\mu = (\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma})$. В этих обозначениях формулы запишутся короче:

$$\mathbf{A} = a_\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu, \quad a_\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{A}.$$

Задача 14. Найти общий вид проектора 2×2 .

Ответ.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

где \mathbf{n} — единичный вектор. Проверьте формулу для $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

Задача 15. Решить задачу 6 с помощью разложения матрицы \mathbf{A} по матрицам Паули.

Указание.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = 1 + \boldsymbol{\sigma}_1 x,$$

$$\ln(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 x) = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots\right) + \boldsymbol{\sigma}_1 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots\right) = \ln \sqrt{1-x^2} + \boldsymbol{\sigma}_1 \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Задача 16. Доказать, что если матрица \mathbf{H} эрмитова, то $\mathbf{U} = e^{i\mathbf{H}}$ — унитарная.

1.5. Операторы в пространстве функций

В пространстве функций скалярное произведение имеет те же свойства и обозначается так же, как и в конечномерном. Если функции заданы на отрезке $[0, 1]$, то

$$\langle v|u \rangle = \int_0^1 v^*(x)u(x) dx. \quad (1.7)$$

Линейные операторы в Гильбертовом пространстве — интегральные:

$$Lu(x) = \int_0^1 K(x, x')u(x') dx',$$

где ядро интегрального преобразования $K(x, x')$ — обобщенная функция. Сопряженный оператор определяется так же, как в конечномерном пространстве.

Скалярное произведение

Задача 17. Проверьте, что скалярное произведение функций (1.7) обладает теми же свойствами, что и для векторов конечномерного пространства (стр. 8). Останутся ли эти свойства, если в определение добавить весовую функцию?

Задача 18. Выполнить ортогонализацию последовательности $1, x, x^2, \dots$ на отрезке $[-1, 1]$.

Самосопряженный оператор

Задача 19. Показать, что оператор Штурма — Лиувилля

$$L = \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

самосопряженный, если заданы граничные условия вида 1) $u(0) = u(1) = 0$; 2) $u'(0) = u'(1) = 0$ либо в виде линейной комбинации 1 и 2.

Указание.

$$\langle v|L|u \rangle = \int_0^1 v \left(\frac{d}{dx}p \frac{du}{dx} + qu \right) dx = \langle Lv|u \rangle + (vp'u' - upv')|_0^1.$$

В случае 1 второе слагаемое внеинтегрального члена обращается в нуль в силу граничных условий. Чтобы обратилось в нуль первое слагаемое, надо наложить точно такое же условие на пространство функций $v(x)$: $v(0) = v(1) = 0$.

Задача 20. Каким условиям должны удовлетворять функции $p(x), q(x)$ в случае $u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)$ (периодических граничных условий), чтобы оператор Штурма — Лиувилля был самосопряженным?

Функция Дирака

Определение. Дельта-функция определена только под знаком интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$$

Другими словами, функция Дирака — это ядро тождественного интегрального оператора, аналогичная единичной матрице в конечномерном пространстве.

Задача 21. Показать, что дельта-функция может быть представлена в виде предела

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}.$$

Задача 22. Показать, что дельта-функция может быть представлена в виде предела

$$\delta(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^2 \varepsilon}{(\varepsilon^2 + x^2)^2}.$$

Указание. Вычет в полюсе порядка n вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} w(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n w(z).$$

Задача 23. Доказать тождество

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{a_n\}} \frac{\delta(x-a_n)}{|f'(a_n)|},$$

где $\{a_n\}$ — множество простых нулей функции $f(x)$ ($f'(a_n) \neq 0$).

Указание. Разбейте интервал интегрирования на отрезки, где функция $f(x)$ монотонна, и сделайте на каждом отрезке замену независимой переменной $x \rightarrow f$.

Задача 24. Доказать тождество $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Задача 25. Доказать формулу Племеля $\frac{1}{x-i0} = \frac{P}{x} + i\pi\delta(x)$.

Глава 2

Уравнения в частных производных

2.1. Линейные уравнения первого порядка

Для квазилинейного уравнения первого порядка

$$a(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x, u)$$

уравнения характеристик имеют вид

$$\dot{x} = a, \quad \dot{u} = b.$$

Общее решение дается произвольной функцией первых интегралов

$$G(F_1, \dots, F_n) = 0.$$

Если уравнение линейное, последнее уравнение характеристик решается отдельно. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ — n -мерные действительные векторы.

2.1.1. Характеристики

Задача 26. $u_x - y^2 u_y = 0$.

Ответ. $u = g(x - \frac{1}{y})$.

Задача 27. $xu_x - yu_y = 0$.

Ответ. $u = g(xy)$.

Задача 28. $\frac{1}{x}u_x - yu_y = 0$.

Ответ. $u = g(y \exp(x^2/2))$.

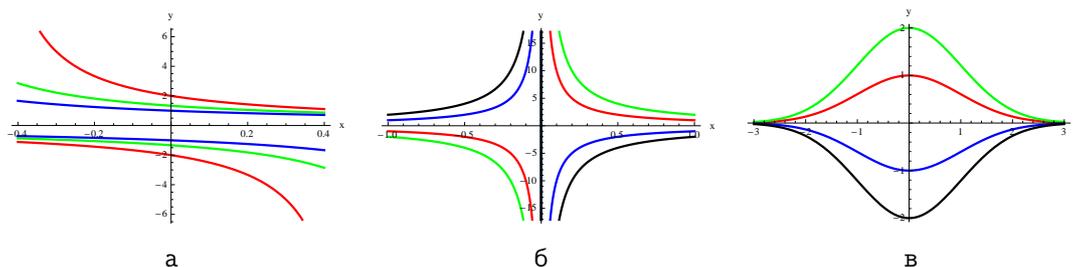


Рис. 2.1. Характеристики задач 26 (а), 27 (б), 28 (в)

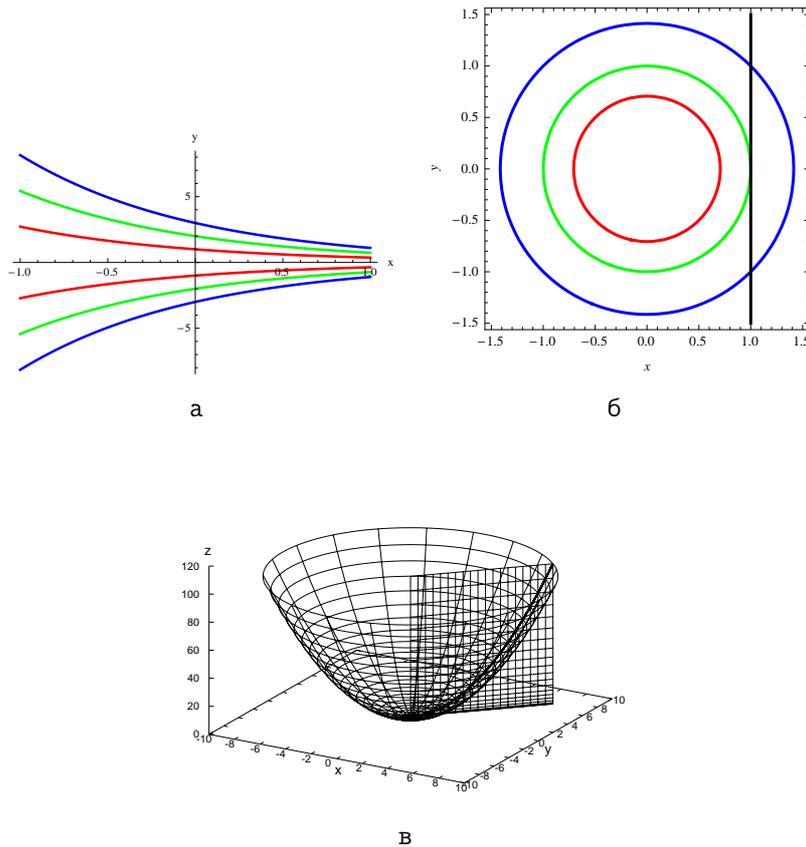


Рис. 2.2. Характеристики задач 29 (а), 30 (б). Характеристики задачи 31 (параболы) лежат на пересечении параболоида вращения и плоскости $y/x = \text{const}$ (в)

2.1.2. Задача Коши

Теория гарантирует единственность решения задачи с начальными условиями только в окрестности начальной точки: задача Коши разрешима в окрестности точки x_0 , если проходящая через эту точку характеристика трансверсальна начальной гиперповерхности. В задачах надо получить решение в конечной области. Следует проверять, что характеристики не пересекают начальную поверхность в двух точках. Иначе может возникнуть конфликт между значениями, которое задано начальными условиями и которое приносится характеристиками.

Задача 29. $u_x = yu_y, u(0, y) = y^2$.

Задача 30. $yu_x - xu_y = 0, u(1, y) = y^2$. Проверьте условие трансверсальности характеристик по отношению к начальной гиперповерхности.

Указание. Характеристики являются окружностями $x^2 + y^2 = C$ (рис. 2.2, б) и пересекают прямую $x = 1$, на которой заданы начальные условия, в двух точках каждая при $C > 1$ и ни разу при $C < 1$. Есть всего одна точка $(1, 1)$, в которой не выполнено условие трансверсальности. Этого достаточно, чтобы задача Коши не была разрешимой. Чтобы задача стала разрешимой, достаточно ограничить начальную прямую условием $y > 0$ либо задать симметричное начальное условие $u(1, y) = u(1, -y)$. Но даже в этих случаях решение при $C < 1$ отсутствует. Проверьте на примере начальных условий $u(1, y) = y$.

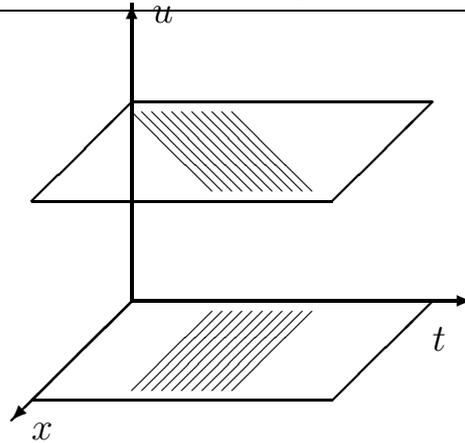


Рис. 2.3. Характеристики уравнения Хопфа представляют собой параллельные прямые в каждой плоскости $u = \text{const}$

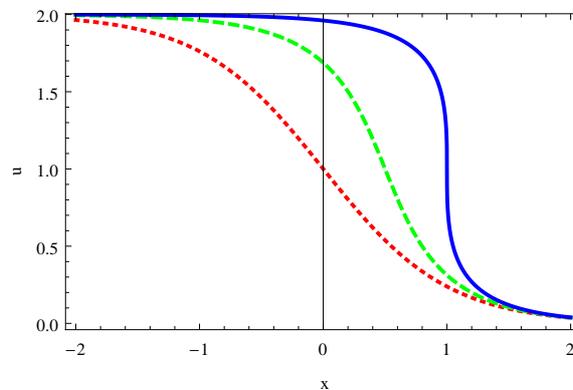


Рис. 2.4. Укручение профиля в задаче 35: $t = 0$ (точки), 0,5 (штрихи), 1 (сплошная)

Задача 31. $xu_x + yu_y + 2(x^2 + y^2)u_z = 0, u|_{z=0} = x^2 + y^2$. Нарисуйте характеристики, проверьте условие трансверсальности.

Указание. В цилиндрических координатах уравнение станет проще:

$$ru_r - 2r^2u_z = 0.$$

2.2. Квазилинейные уравнения

Задача 32. Найти и проверить общее решение уравнения $u_t + u_x = u$.

Указание. Если разделить на u , уравнение сведется к линейному.

Задача 33. Найти и проверить общее решение уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$. Нарисовать характеристики.

Ответ. $u = g(x - ut)$ (рис. 2.3).

Задача 34. Найти общее решение уравнения Хопфа для осциллятора $u_t + uu_x = -x$.

Ответ. $G(x \cos t - u \sin t, x \sin t + u \cos t) = 0$.

Задача 35. Найти частное решение уравнения Хопфа с начальным условием $u(x, 0) = 1 - \text{th } x$ и точкой опрокидывания.

Ответ.

$$u = 1 - \operatorname{th}(x - ut), \quad u_x = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x - ut) - t} \Rightarrow t^* = 1; (x - ut)^* = 0 \Rightarrow u^* = 1, x^* = 1.$$

Задача 36. Решить предыдущую задачу в лагранжевых координатах.

Указание.

$$\ddot{x} = 0, \quad x = x_0 + u_0(x_0)t, \quad \frac{dx}{dx_0} = 1 + u'_0 t = 0.$$

Задача 37. То же для начального условия $u(x, 0) = a/(a^2 + x^2)$.

Ответ. Опрокидывание происходит в точке с максимальной по абсолютной величине отрицательной производной начального профиля. Для функции Лоренца это точка перегиба $x^* = a/\sqrt{3}$. Момент опрокидывания $t^* = 8a\sqrt{3}/9$.

Задача 38. * Найти закон расширения области неоднозначности в задаче 35.

Указание.

$$1 - \operatorname{th} \xi = 1 - \xi + \frac{\xi^3}{3} + \dots = \frac{x - \xi}{t}, \quad t = \operatorname{ch}^2 \xi = 1 + \xi^2 + \dots \Rightarrow \xi = \pm \sqrt{t - 1};$$

$$x = \xi + (1 + \xi^2 + \dots) \left(1 - \xi + \frac{\xi^3}{3} + \dots \right) = t - \frac{2}{3} \xi^3.$$

Ответ. Полукубическая парабола, которая всегда получается в окрестности точки сборки

$$x(t) = t \pm \frac{2}{3}(t - 1)^{3/2}, \quad t > 1.$$

Задача 39. Найти частное решение уравнения Хопфа в однородном поле $u_t + uu_x = 1$ с начальным условием $u(x, 0) = 1 - \operatorname{th} x$. Изменится ли точка опрокидывания?

Ответ. Общее решение для равноускоренного движения $u = t + g(x - ut + t^2/2)$. Точка опрокидывания $t^* = 1, u^* = 2, x^* = 3/2$. Время опрокидывания останется тем же, а координата и скорость возрастут вследствие ускорения пылинок внешним полем.

2.3. Нелинейные уравнения I порядка *

Нелинейные уравнения первого порядка $F(x, u, p) = 0$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = \partial u / \partial x = (p_1, \dots, p_n)$, сводится к системе квазилинейных. Продифференцируем нелинейное уравнение по x_i :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} = 0. \quad (2.1)$$

Теперь заменим в уравнении (2.1) $p_i = \partial u / \partial x_i$ и перекрестные производные $\partial p_j / \partial x_i = \partial p_i / \partial x_j$. Получилась система квазилинейных уравнений на функции p_i :

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial u}.$$

К уравнениям характеристик

$$\dot{x}_j = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial u}$$

добавляется уравнение для u

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} p_i.$$

Если функция F не зависит от u , нелинейное уравнение называется уравнением Гамильтона — Якоби. Уравнения характеристик в этом случае сводятся к уравнениям Гамильтона

$$\dot{x}_j = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

Задача 40. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби

$$S_t + \frac{1}{2} S_x^2 = 0, \quad S(x, 0) = x^2.$$

Указание. Обозначим $E = S_t, p = S_x$ и продифференцируем уравнение по x . Получится квазилинейное уравнение

$$p_t + pp_x = 0.$$

Методом характеристик найдем общее решение $p = g(x - pt)$. Из начального условия найдем начальный импульс $p(x, 0) = 2x$, а подставляя его в общее решение, получим $p = 2x/(1 + 2t)$.

Ответ.

$$S(x, t) = \frac{x^2}{1 + 2t}.$$

Задача 41. Решить задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби

$$S_t + \frac{1}{2} S_x^2 = 0, \quad S(x, 0) = \ln x, \quad x > 0.$$

Указание.

$$p(x, 0) = \frac{1}{x} \Rightarrow p = \frac{1}{x - pt}.$$

На импульс получается квадратное уравнение. Оставляем то решение, которое ведет себя как x^{-1} при $t \rightarrow 0$:

$$p = \frac{x}{2t} - \sqrt{\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{1}{t}}.$$

Функция F в данном случае $F = E + p^2/2$. На характеристике $\dot{S} = EF_E + pF_p = E + p^2 = p^2/2$. Отсюда общее решение для действия $S = p^2 t/2 + h(x - pt)$. Неизвестную функцию h найдем из начальных условий $S(x, 0) = h(x) = \ln x$. Решение можно проверить с помощью тождества

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{x}{2t} - \sqrt{\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{1}{t}} \right) = -\frac{1}{2t} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{1}{t}}}.$$

Ответ.

$$S = \frac{t}{2} \left(\frac{x}{2t} - \sqrt{\left(\frac{x}{2t}\right)^2 - \frac{1}{t}} \right)^2 - \ln \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - t} \right).$$

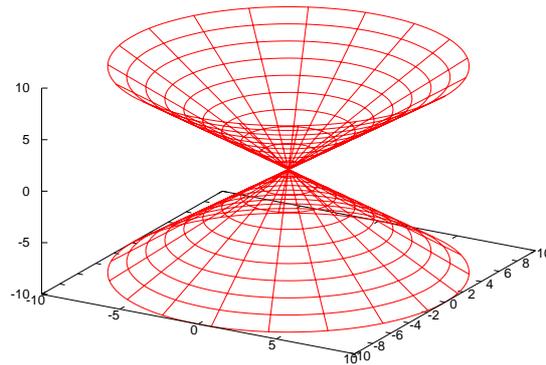


Рис. 2.5. Волновой фронт задачи 42

Задача 42. * Решить задачу Коши для уравнения эйконала

$$\psi_t^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2 = 0, \quad \psi(x, y, 0) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Указание. Обозначим $\omega = \psi_t$, $k_1 = \psi_x$, $k_2 = \psi_y$, тогда уравнение эйконала превратится в линейный закон дисперсии $\omega = \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Если разрешить уравнение эйконала относительно ψ_t , получатся два решения $\psi_t = \pm \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}$.

Уравнений характеристик будет 5. Из $\dot{t} = 2\omega$, $\dot{x} = -2k_1$, $\dot{y} = -2k_2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{k_1}{\omega}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{k_2}{\omega}, \\ \frac{dk_1}{dt} &= \frac{dk_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = 0. \end{aligned}$$

К ним добавится уравнение на ψ :

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{k_1^2}{\omega} - \frac{k_2^2}{\omega} \equiv 0.$$

Находим константы $c_1 = x + k_1 t / \omega$, $c_2 = y + k_2 t / \omega$ и получаем общее решение $\psi = g(x + k_1 t / \omega, y + k_2 t / \omega)$.

Получаем частное решение:

$$\psi = \sqrt{\left(x + \frac{k_1 t}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{k_2 t}{\omega}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Чтобы явно найти ω , k_1 , k_2 , надо продифференцировать (2.2) по координатам:

$$\psi_x = \frac{x + \frac{k_1 t}{\omega}}{\psi} = k_1, \quad \psi_y = \frac{y + \frac{k_2 t}{\omega}}{\psi} = k_2 \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = 1.$$

Значит, $\omega = \pm 1$. Зная наклон волнового вектора

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{x + \frac{k_1 t}{\omega}}{y + \frac{k_2 t}{\omega}} \Rightarrow k_1 y = k_2 x,$$

¹В механике $S_t = -E$.

найдем его компоненты

$$k_1 = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad k_2 = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

При $t = 0$ $\psi_x = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому надо выбрать знак «плюс». Подставляя компоненты волнового вектора и частоту в уравнение (2.2), найдем решение.

Ответ. Поверхность постоянной фазы — волновой фронт — это пола конуса

$$\psi = \pm t + \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const},$$

в зависимости от знака обращенная в прошлое или будущее (рис. 2.5).

Задача 43. * Решить задачу Коши (№ 113) для негамильтоновского нелинейного уравнения

$$u_t u_x - u = 0, \quad u(x, 0) = x^2.$$

Указание. Обозначим $u_t = E$, $u_x = p$ и запишем квазилинейное уравнение для E, p : $EE_x + pE_t = E$, $Ep_x + pp_t = p$. Соответствующие уравнения характеристик

$$\dot{t} = p, \quad \dot{x} = E, \quad \dot{E} = E, \quad \dot{p} = p$$

имеют 3 первых интеграла

$$t - p = \text{const}, \quad x - E = \text{const}, \quad p/E = \text{const}.$$

Из общего решения $p - t = g(x - E, p/E)$ можно найти частное. При $t = 0$ подставляем $p = 2x$, $E = x/2$ (последнее получается из исходного уравнения). Найдем $g(\xi, \eta) = 4\xi$, получится $p - t = 4(x - E)$.

Вспоминая обозначения E, p , выпишем линейное уравнение на u :

$$u_x - t = 4(x - u_t).$$

Методом характеристик найдем общее решение $u - xt = h(x - t/4)$. Из начального условия получим $h(\xi) = \xi^2$.

Ответ.

$$u(x, t) = \left(x + \frac{t}{4}\right)^2.$$

2.4. Системы уравнений

2.4.1. Канонический вид при $n = 2$

Однородная система

$$A\psi_t + B\psi_x = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где A, B — матрицы $n \times n$, с невырожденной матрицей A сводится к виду $\psi_t + C\psi_x = 0$, $C = A^{-1}B$. Если матрица $C = T\Lambda T^{-1}$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, причем собственные числа вещественны, система называется гиперболической. Гиперболическая система приводится к каноническому виду заменой неизвестной вектор-функции $\psi = T\phi$:

$$\phi_t + \Lambda\phi_x = \dots, \quad (2.4)$$

где правая часть не содержит производных функции ϕ . Иногда канонический вид позволяет найти общее решение гиперболической системы.

Задача 44. Вывести канонический вид (2.4) и найти правую часть.

Ответ.

$$\dots = (T^{-1}T_t + \Lambda T^{-1}T_x)\phi.$$

Задача 45.

$$\begin{cases} u_x + v_x + 2u_y - 3v_y = 0, \\ u_x + v_x - 3u_y + 2v_y = 0. \end{cases}$$

Указание.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A вырожденная, поэтому умножим систему на $B^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Получится матрица $C = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ с собственными значениями -2 и 0 .

Ответ.

$$u = f(x) + g(x + 2y), \quad v = -f(x) + g(x + 2y).$$

Задача 46. Привести к каноническому виду и найти общее решение системы

$$\begin{cases} (x-1)u_t - (x+1)v_t + u_x = 0, \\ (x+1)u_t - (x-1)v_t - v_x = 0. \end{cases}$$

Указание. Чтобы матрица при ψ_x стала единичной, надо сменить знак во втором уравнении. Матрица C получается симметричной, поэтому ее собственные значения вещественны $\lambda_1 = 2x$, $\lambda_2 = -2$. Матрица преобразования к собственному базису получилась постоянной $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому канонические уравнения однородные

$$\phi_x + \Lambda\phi_t = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T\phi, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$\begin{cases} u = f(t - x^2) + g(t + 2x), \\ v = -f(t - x^2) + g(t + 2x). \end{cases}$$

2.4.2. Инварианты Римана

Коэффициенты квазилинейной системы зависят от ψ :

$$A(x, t, \psi)\psi_t + B(x, t, \psi)\psi_x = b(x, t, \psi).$$

Характеристики и соотношения на характеристиках даются соответственно формулами

$$\begin{vmatrix} A & B \\ dt & dx \end{vmatrix} = 0, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ dt & dx \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & B & b \\ dt & dx & d\psi \end{pmatrix}.$$

Первые интегралы соотношений на характеристиках называются инвариантами Римана. Если один из инвариантов не зависит от координаты, второй можно найти из квазилинейного уравнения. Такое решение называется простой волной (Римана).

Задача 47. Найти инварианты Римана системы одномерной дозвуковой газодинамики

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + \frac{c^2}{\rho}\rho_x + uu_x = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Указание. Найдём собственные значения матрицы системы

$$B = C = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = u \pm c$. Значит, характеристики системы $\frac{dx}{dt} = u \pm c$. Соотношения на характеристиках получаются из ранга расширенной матрицы системы. Полученные соотношения один раз интегрируются, полученные интегралы называются инвариантами Римана.

Ответ.

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{c(\rho) d\rho}{\rho}.$$

Задача 48. Вывести уравнения на инварианты Римана из системы (2.5).

Указание. Надо первое уравнение умножить на c/ρ и сложить со вторым уравнением или вычесть.

Ответ.

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{\pm}}{\partial t} + (u + c)\frac{\partial J_{\pm}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial J_{\pm}}{\partial t} + (u - c)\frac{\partial J_{\pm}}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Задача 49. Найти условие совместности системы (2.5) для автомодельного решения $u = f(\rho)$.

Ответ.

$$f' = \pm \frac{c}{\rho}.$$

Задача 50. Найти инварианты Римана для политропного газа $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$.

Ответ.

$$J_{\pm} = u \pm \frac{2}{\gamma - 1}(c - c_0).$$

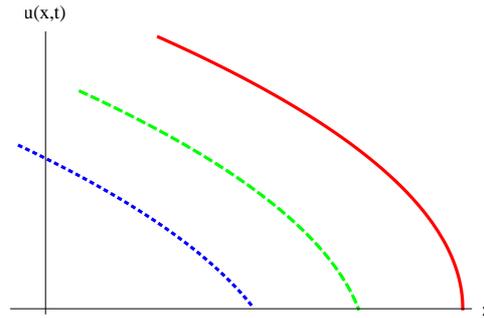


Рис. 2.6. Профиль скорости газа при $t/t^* = 0,6$ (точки), $0,8$ (штрихи), 1 (сплошная линия)

Задача 51. Справа от поршня находится политропный газ. Поршень движется равноускоренно по закону $v(t) = at$, $x(t) = at^2/2$. Найти скорость, плотность газа и точку опрокидывания начального профиля.

Указание. Поскольку далеко справа от поршня газ неподвижен, инвариант J_- не зависит от координаты, $J_- = 0$, откуда $c = c_0 + (\gamma - 1)u/2$. Значит, можно искать решение в виде простой волны. В простой волне второй инвариант $J_+ = 2u$, на него получается одно квазилинейное уравнение $u_t + (c + u)u_x = 0$, похожее на уравнение Хопфа. Общее решение запишем как $x - (u + c)t = f(u)$ и найдем функцию f из граничных условий

$$\frac{at^2}{2} - (at + c)t = f(at) \Rightarrow f(v) = -\frac{v^2}{2a} - \frac{cv}{a},$$

где $c = c_0 + (\gamma - 1)u/2$ для политропного газа, см. задачу 50. В простой волне $J_+ = 2u$, а постоянная равна нулю, потому что в неподвижном газе $u = 0, c = c_0$. Отсюда $c = c_0 + (\gamma - 1)u/2$. Запишем частное решение для политропного газа

$$x - (c + u)t = -\frac{u^2}{2a} - \frac{cu}{a} \Rightarrow x - c_0t - \frac{\gamma - 1}{2}ut - ut = -\frac{u}{a} \left(c_0 + \frac{\gamma}{2}u \right).$$

Для u получилось квадратное уравнение, которое решается явно. Осталось исследовать его корни

$$u = \frac{a}{\gamma} \left[-\frac{c_0 - \frac{\gamma+1}{2}at}{a} \pm \sqrt{\frac{(c_0 - \frac{\gamma+1}{2}at)^2}{a^2} - 2\gamma \frac{x - c_0t}{a}} \right]. \quad (2.6)$$

При $x \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ скорость тоже стремится к нулю, значит надо выбрать корень со знаком «плюс», причем $u = 0$ при $x > c_0t$.

Простая волна (2.6) находится между поршнем и невозмущенным газом $at^2/2 < x < c_0t$. В конце концов поршень догонит правую границу и область применимости решения исчезнет. Разберитесь, что произойдет раньше: поршень догонит границу или случится опрокидывание фронта волны и применимость уравнений пропадет раньше?

Ответ. Опрокидывание произойдет в наиболее далекой от поршня точке при $t = t^* = 2c_0/a(\gamma + 1)$, т. е. раньше, чем поршень догонит эту точку. При $t > t^*$ сформируется ударная волна и исходные уравнения потеряют применимость. Профиль скорости изображен на рис. 2.6.

2.4.3. Гиперболические системы с $n > 2$ *

Система линейных уравнений с $n = 4$ переменными имеет вид

$$A\psi_t + B\psi_x + C\psi_y + D\psi_z = b(x, y, z, t),$$

где ψ — вектор-столбец неизвестных функций, A, B, C, D — матрицы, зависящие от координат и времени. Уравнения характеристик имеют вид

$$|A\phi_t + B\phi_x + C\phi_y + D\phi_z| = 0.$$

Характеристики представляют собой 3-мерные гиперповерхности в 4-мерном пространстве. Характеристические поверхности — это поверхности постоянного уровня функции $\phi(x, y, z, t) = \text{const}$. Характеристики являются линиями только для систем с $n = 2$ переменными. Компоненты вектора 4-мерного градиента функции ϕ

$$\tau = \phi_t, \quad \xi = \phi_x, \quad \eta = \phi_y, \quad \zeta = \phi_z$$

образуют 4-вектор характеристической нормали. Удобнее найти характеристические нормали, а по ним восстановить характеристики.

Задача 52. Найти характеристики уравнений Максвелла в пустоте

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3}, & \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial E_3}{\partial t} &= \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3}, & \frac{\partial H_3}{\partial t} &= \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Указание. Зафиксируем вектор-функцию в виде $\psi = (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)^T$, тогда можно выписать матрицы $A = E$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остается найти определитель симметричной матрицы 6×6 , в которой два антисимметричных блока

$$|A\tau + B\xi + C\eta + D\zeta| = \begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 & 0 & \zeta & -\eta \\ 0 & \tau & 0 & -\zeta & 0 & \xi \\ 0 & 0 & \tau & \eta & -\xi & 0 \\ 0 & -\zeta & \eta & \tau & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & -\xi & 0 & \tau & 0 \\ -\eta & \xi & 0 & 0 & 0 & \tau \end{vmatrix}.$$

Упростим определитель по формуле (1.2) и получим уравнение характеристических нормалей

$$\left| \tau^2 E + \begin{pmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 0.$$

Разлагаем матрицу 3×3 на два множителя. Остается найти определитель 3×3 :

$$\begin{vmatrix} i\tau & \zeta & -\eta \\ -\zeta & i\tau & \xi \\ \eta & -\xi & i\tau \end{vmatrix} = i\tau(-\tau^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0.$$

Ответ. Характеристические нормали образуют трехмерный конус в 4-мерном пространстве

$$\tau = \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Значит и характеристика — поверхность светового конуса. В двумерном случае соответствующий конус найден в задаче 42.

Задача 53. Найти характеристические нормали уравнения Дирака

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + m\beta\psi = 0,$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание. Матрица β не влияет на главную дифференциальную часть, а матрицы $\vec{\alpha}$ включают два нулевых блока и два блока из матриц Паули. Определитель $|\alpha_0\tau + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta|$ можно упростить по формуле (1.2), останется матрица 2×2 . Последнюю можно разложить на два множителя.

Ответ. Получился световой конус

$$\begin{vmatrix} \tau + \zeta & \xi - i\eta \\ \xi + i\eta & \tau - \zeta \end{vmatrix} = \tau^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

Если бы задача была двумерной $\psi_z = 0$, конус можно было нарисовать, см. рис. 2.5 (к задаче 42).

2.5. Линейные уравнения II порядка

Тип ² уравнения второго порядка с $n = 2$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f$$

определяется главной дифференциальной частью уравнения. Решения квадратного уравнения характеристик $ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0$ зависят от знака дискриминанта $D = b^2 - ac$:

²Тип уравнения определен локально (в точке).

Таблица 2.1. Классификация линейных уравнений второго порядка по типам

Знак	Тип	Канонический вид	Канонические переменные
$D > 0$	гиперболический	$u_{\xi\eta} = f$	ξ, η — интегралы уравнения характеристик
$D = 0$	параболический	$u_{\eta\eta} = f$	ξ — интеграл уравнения характеристик, η произвольна
$D < 0$	эллиптический	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = f$	ξ, η — вещественная и мнимая части интегралов уравнения характеристик

Задача 54. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} + u_x - u_y = 0.$$

Указание. Система приводится к каноническому виду

$$3u_{\xi\eta} + u_{\eta} = 0.$$

Полученное уравнение можно два раза проинтегрировать.

Ответ. Гиперболическое, общее решение

$$u(x, y) = e^{-\frac{x+y}{3}} [f(y+x) + g(y-2x)].$$

Задача 55. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$$

Указание. Канонические переменные $\xi = x + \operatorname{arctg} y, \eta = x - \operatorname{arctg} y$. Заменяя дифференциальные операторы $\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta, \partial_y = (1+y^2)^{-1}(\partial_\xi - \partial_\eta)$. Коэффициенты уравнения не постоянные, значит при замене переменных войдут первые производные коэффициентов.

Ответ. Гиперболическое, общее решение

$$u = f(\xi) + g(\eta).$$

Задача 56. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0.$$

Указание. Канонические переменные $\xi = x - y, \eta = -2x$.

Ответ. Эллиптическое, двумерное уравнение Лапласа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Задача 57. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 u_{xx} + u_{yy} + x u_x = 0.$$

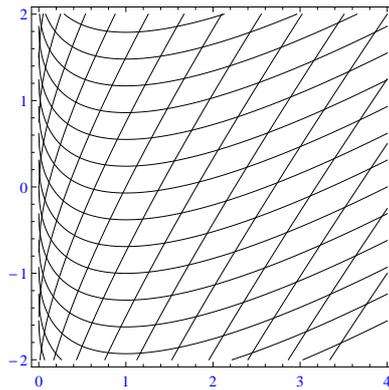


Рис. 2.7. Два семейства характеристик $y - x \pm \sqrt{x} = \text{const}$ к задаче 59 в области гиперболичности $x > 0$

Указание. Канонические переменные $\xi = y, \eta = \ln x$.

Ответ. Эллиптическое, двумерное уравнение Лапласа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Задача 58. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - u_x = 0.$$

Указание. Канонические переменные $\xi = y + x, \eta = y$.

Ответ. Параболическое, уравнение теплопроводности

$$u_{\eta\eta} - u_{\xi} = 0.$$

Задача 59. Определить тип и привести к каноническому виду уравнение

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x - 1)u_{yy} = 0.$$

Указание. Знак дискриминанта $D = x$ зависит от координат. Значит, при $x > 0$ расположена область гиперболичности, а при $x < 0$ — область эллиптичности. Канонические виды в этих областях будут разные.

Ответ. В области гиперболичности

$$u_{\xi\eta} - \frac{u_{\xi} - u_{\eta}}{\xi - \eta} = 0.$$

Сделайте замену неизвестной функции $u(\xi, \eta) = p(\xi, \eta)v(\xi, \eta)$ и подберите функцию $p(\xi, \eta)$ так, чтобы уничтожить первые производные. Найдите общее решение.

В области эллиптичности получается уравнение

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_{\eta} = 0.$$

2.6. Автомоделность

Автомоделное решение уравнения теплопроводности с точечным начальным условием $u_t = u_{xx}$, $u(x, 0) = \delta(x)$ мы ищем в виде $u(x, t) = A(t)f(\xi)$, $\xi = x/l(t)$. Показатели степенных функций $A(t)$, $l(t)$ подбираются из условий инвариантности уравнения и начального условия относительно масштабных преобразований

$$x \rightarrow \lambda x, \quad t \rightarrow \mu t, \quad u \rightarrow \nu u; \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{\nu}{\lambda^2}, \quad \nu = \frac{1}{\lambda}.$$

В результате замены должно получиться обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию $f(\xi)$. В данном примере получается

$$u(x, t) = t^{-1/2} f(xt^{-1/2}). \quad (2.7)$$

При такой подстановке параметр μ сокращается

$$xt^{-1/2} \rightarrow (\lambda x)(\mu t)^{-1/2} = (\mu^{-1/2} x)(\mu t)^{-1/2} = xt^{-1/2}, \quad ut^{1/2} \rightarrow (\nu u)(\mu t)^{1/2} = \mu^{-1/2} u(\mu t)^{1/2}.$$

Задача 60. Убедитесь, что подстановка (2.7) — автомоделная.

Указание. Получается обыкновенное уравнение $f'' + \frac{1}{2}(\xi f' + f) = 0$. Константу интегрирования можно выбрать равной нулю, поскольку $f \rightarrow 0$ на бесконечности вместе со своими производными. Значит подстановка автомоделная, более того, уравнение интегрируется: $f' + \xi f/2 = C_1$. Константа $C_1 = 0$, что следует из убывания на бесконечности функции f и ее производной.

Ответ.

$$u(x, t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Постоянная $C = 1/\sqrt{\pi}$ находится из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dt = 1$.

Задача 61. Найти автомоделное решение задачи при $x > 0$

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = x^3, \quad u(0, t) = 0.$$

Указание. Автомоделная подстановка $u = t^{3/2} f(xt^{-1/2})$ приводит к обыкновенному уравнению

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' - \frac{3}{2}f = 0$$

с граничным условием $f(0) = 0$. Надо найти решение с асимптотикой $f = \xi^3$, $\xi \rightarrow \infty$. Уравнение не меняется при замене $\xi \rightarrow -\xi$, значит решения — четные или нечетные функции. Нас интересует нечетное решение с кубической асимптотикой, поэтому ищем его в виде разложения в ряд по нечетным степеням $u = c_1 x + c_3 x^3 + \dots$. Найдем решение задачи, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях и обращая в нуль коэффициент c_5 .

Ответ. $u = x^3 + 6xt$.

Задача 62. * Решить нелинейное уравнение теплопроводности с точечным начальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u(x, 0) = \delta(x).$$

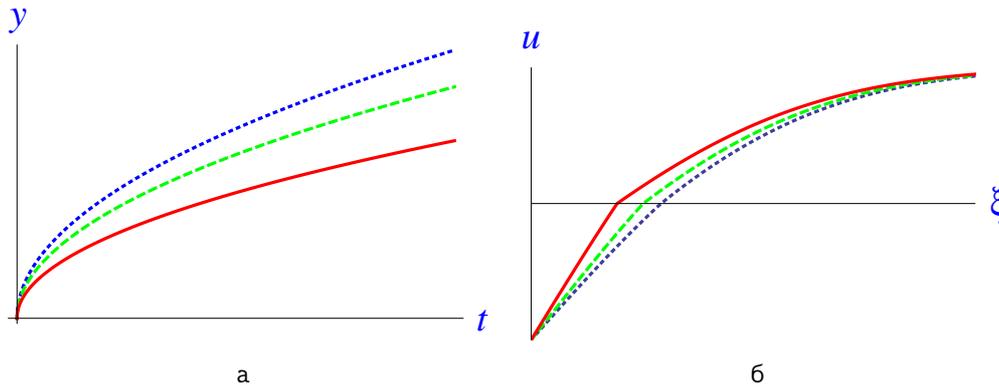


Рис. 2.8. Положение фронта кристаллизации $y(t)$ (а); температура u как функция автомодельной переменной ξ (б) при $Q = 0, 3$ (точки), 1 (штрихи), 3 (сплошная линия)

Указание. Автомоделная замена $u = t^{-1/4} f(xt^{-1/4})$. Обыкновенное уравнение $(f^2 f')' + \frac{1}{4}(\xi f' + f) = 0$ интегрируется: одно решение $f = 0$, второе находится из алгебраического уравнения $f^2 + \xi^2/4 = \text{const}$. Константа находится из условия нормировки.

Ответ. Профиль тепловой волны представляет собой половину эллипса. Для нахождения нормировки надо вспомнить формулу для площади эллипса.

$$u = \begin{cases} \frac{t^{-1/4}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4t^{1/2}}}, & |x| < \frac{2}{\pi} t^{1/4}, \\ 0, & |x| > \frac{2}{\pi} t^{1/4}. \end{cases}$$

Задача 63. * Найти автомодельное решение одномерной задачи Стефана

$$u_t - \chi u_{xx} = Q \dot{y} \delta(x - y(t)), \quad (2.8)$$

где $y(t)$ — закон движения фронта волны кристаллизации, Q — удельное количество тепла, которое выделяется при плавлении вещества. Считается, что плавление происходит при нулевой температуре, т. е. $u(y(t), t) = 0$. Граничные условия ставятся на полубесконечном отрезке $u(0, t) = -u_0$, $u(+\infty, t) = u_0$. Найти закон движения фронта при $Q \rightarrow \infty$ и $Q \rightarrow 0$.

Указание. При переходе к автомодельной переменной $\xi = x/\sqrt{\chi t}$, $u(x, t) = f(\xi)$ левая часть уравнения (2.8) преобразуется к виду

$$-\frac{\xi}{2t} f' - \frac{1}{t} f''.$$

Значит, чтобы уравнение имело автомодельное решение, надо выбрать $y(t) = 2a\sqrt{\chi t}$, где a — безразмерная константа. Тогда уравнение (2.8) сведется к обыкновенному

$$f'' + \frac{\xi}{2} f' + Qa\delta(\xi - 2a) = 0.$$

Решение однородного уравнения $Q = 0$ содержит две постоянных интегрирования $f = A + B \int \exp(-\xi^2/4) d\xi$. Надо считать их разными по разные стороны фронта. и найти константы из граничных условий и условий при $u = 0$. На фронте кристаллизации функция f непрерывна, а ее первая производная терпит скачок $[f']_{\xi=2a} = -Qa$.

Граничные условия можно учесть сразу:

$$f = \begin{cases} -u_0 + B_1 \int_0^\xi \exp(-\tau^2/4) d\tau, & \xi < 2a; \\ +u_0 + B_2 \int_\xi^\infty \exp(-\tau^2/4) d\tau, & \xi > 2a. \end{cases}$$

Из непрерывности при $\xi = 2a$ получаем

$$-u_0 + B_1 \int_0^{2a} \exp(-t^2/4) dt = +u_0 + B_2 \int_{2a}^\infty \exp(-t^2/4) dt = 0.$$

Из этих условий найдем

$$B_1 = \frac{u_0}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf} a}, \quad B_2 = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi} (1 - \operatorname{erf} a)},$$

где $\operatorname{erf} a = 2 \int_0^a e^{-t^2} dt / \sqrt{\pi}$ — функция ошибок (или интеграл вероятности). Из условия на скачок производной получится

$$B_2 e^{-a^2} + B_1 e^{-a^2} = Qa.$$

Отсюда получилось трансцендентное уравнение на параметр a :

$$\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\operatorname{erf} a} - \frac{1}{1 - \operatorname{erf} a} \right) = Qa e^{a^2}.$$

Ответ. При $Q \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$, тогда $\operatorname{erf} a \approx 2a/\sqrt{\pi}$, $a = \sqrt{u_0/2Q}$,

$$y(t) = \sqrt{\frac{2u_0 \chi t}{Q}}.$$

При большой теплоте кристаллизации скорость фронта снижается (рис. 2.8, а). При малой теплоте $Q \rightarrow 0, a \rightarrow 0,48$, тогда $\operatorname{erf} a \approx 1/2$, $y = 0,96\sqrt{\chi t}$. В этом предельном случае скачок производной практически не заметен, см. рис. 2.8, б.

2.7. Нелинейные уравнения II порядка

2.7.1. Бегущая волна

Решение в виде бегущей волны $u = f(x - Vt)$ тоже иногда сводит нелинейное уравнение в частных производных к обыкновенному.

Задача 64. Найти решение уравнения Бюргера

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}$$

с условиями $u \rightarrow V_0, x \rightarrow -\infty, u \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$.

Указание. Обыкновенное уравнение второго порядка один раз интегрируется сразу

$$\mu f' - \frac{1}{2} f^2 + Vf = 0.$$

Константа интегрирования равна нулю в силу граничного условия при $x \rightarrow +\infty$. Дальше остается разделить переменные

$$\xi = \mu \int \frac{df}{\frac{f^2}{2} - Vf} \Rightarrow f = \frac{2V}{1 + e^{V\xi/\mu}}.$$

Вторая константа — произвольна, это начало отсчета переменной ξ . Скорость фронта $V = V_0/2$ находится из граничного условия при $x \rightarrow -\infty$.

Ответ. Кинк (ступентка)

$$u(x, t) = \frac{V_0}{1 + \exp\left[\frac{V_0}{2\mu}\left(x - \frac{V_0}{2}t\right)\right]}.$$

Учет вязкости подавляет опрокидывание решения уравнения Хопфа. Вместо этого формируется ударная волна с шириной фронта порядка $V_0/2\mu$.

Задача 65. * Показать, что уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

имеет решение в виде уединенной бегущей волны. Найти решение, в котором $f \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm\infty$ вместе с производными.

Указание. Подставляя решение в виде бегущей волны, получим обыкновенное уравнение третьего порядка

$$-Vf' + 6ff' + f''' = 0.$$

Один раз оно интегрируется непосредственно, а константа выбирается нулевой из условия уединенности

$$-Vf + 3f^2 + f'' = 0.$$

Если умножить последнее уравнение на f' , оно еще раз интегрируется. Вторая константа равна нулю из того же условия. Получается уравнение, аналогичное закону сохранения энергии в механике одномерного движения:

$$\frac{1}{2}f'^2 + f^3 - \frac{1}{2}Vf^2 = 0.$$

Остается проинтегрировать это уравнение первого порядка

$$\xi = \pm \int \frac{df}{f\sqrt{V-2f}}.$$

Третья константа произвольна, это начало отсчета переменной ξ . Интеграл берется подстановкой Эйлера $\tau = \sqrt{V-2f}$.

Ответ. Простой солитон

$$u = \frac{V}{2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{V}}{2}(x - Vt)},$$

высота, скорость и ширина которого определяются одним параметром V .

2.7.2. Подстановки

Некоторые нелинейные уравнения сводятся к линейным с помощью специальных подстановок.

Задача 66. * Найти общее решение уравнения взаимодействия встречных волн в нелинейной среде

$$u_t - u_x = uv, \quad v_t + v_x = -uv.$$

Указание. Перейдем к конусным переменным (характеристикам) $\xi = (x - t)/2$, $\eta = (x + t)/2$. Система упростится

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -uv, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = -uv. \end{cases} \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что $u_\xi = v_\eta$, а стало быть, можно ввести логарифмический потенциал Φ такой, что

$$u = \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \eta}, \quad v = \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \xi}.$$

Можно проверить тождество

$$\frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\partial \ln \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \eta} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9), получим линейное гиперболическое уравнение $\Phi_{\xi\eta} = 0$. Его общее решение $\Phi = f(\xi) + g(\eta)$.

Ответ.

$$v = \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \xi} = \frac{g'(\eta)}{f(\xi) + g(\eta)}, \quad u = \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \eta} = \frac{f'(\xi)}{f(\xi) + g(\eta)}.$$

Задача 67. * Свести к линейному уравнение Бюргерса $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$.

Указание. Введем потенциал скорости такой, чтобы $u = \Phi_x$. После интегрирования уравнение останется нелинейным: $\Phi_t + \Phi_x^2/2 = \mu \Phi_{xx}$. Теперь ищем логарифмический потенциал Θ такой, чтобы $\Phi = a \ln \Theta$. Постоянную a подберем так, чтобы уравнение стало линейным (подстановка Коула—Хопфа).

После вычисления производных получим $a = -2\mu$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Theta_t}{\Theta} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Theta_{xx}}{\Theta} = 0.$$

Интегрируя по x , находим линейное уравнение для функции $\Theta(x, t)$:

$$\Theta_t - \mu \Theta_{xx} = \lambda(t) \Theta.$$

Уравнение можно упростить заменой неизвестной функции

$$\Theta = \phi(t)v(x, t).$$

Ответ. Выберем в качестве функции $\phi(t)$ решение уравнения $\phi' = \lambda(t)\phi$. Получится уравнение теплопроводности $v_t = v_{xx}$.

Задача 68. Свести к линейному квазилинейное уравнение второго порядка

$$\nabla^2 u - (\nabla u)^2 = 0.$$

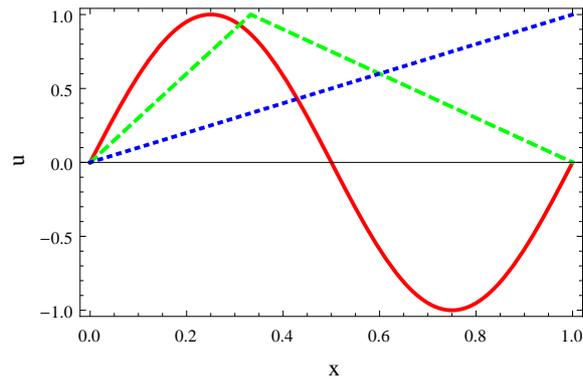


Рис. 2.9. Профиль начального условия в задачах 69 (сплошная линия), 71 (штрихи), 73 (точки)

Указание. Подбираем замену неизвестной функции вида $u = \omega(v)$ так, чтобы сократились нелинейности.

Ответ. Сводится к уравнению Лапласа

$$\omega'' - \omega'^2 = 0 \Rightarrow \nabla^2 v = 0.$$

2.8. Метод Фурье

2.8.1. Гиперболический тип

Решение уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ с нулевыми граничными условиями на концах единичного отрезка $u(0, t) = u(1, t) = 0$ имеет решение в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \pi n t + B_n \sin \pi n t) \sin \pi n x. \quad (2.11)$$

Коэффициенты Фурье A_n, B_n находятся из начальных условий. Если начальные и граничные условия не согласованы, решение получается с разрывом функции или производной.

Задача 69.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin 2\pi x$$

(рис. 2.9, сплошная кривая).

Указание.

$$A_n = 0, \quad \pi n B_n = 2 \int_0^1 u_t(x, 0) \sin \pi n x \, dx = \delta_{2,n}.$$

Ответ.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \sin 2\pi x.$$

Задача 70.

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin \pi x e^{-\gamma t}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

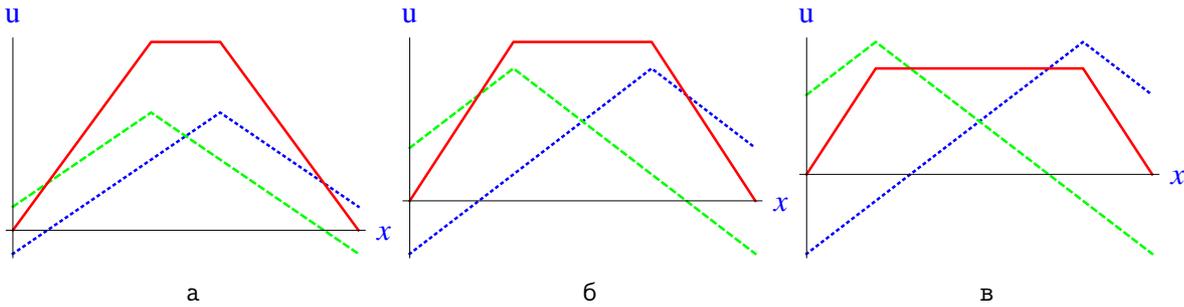


Рис. 2.10. Волны, бегущие направо и налево (точки и штрихи), и их сумма — решение волнового уравнения (сплошная линия) при $t = 0, 1$ (а), $0, 2$ (б), $0, 3$ (в)

Указание. Ищите решение неоднородного уравнения в виде $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \sin \pi n x$. На функцию $c_n(t)$ получится обыкновенное уравнение $\ddot{c}_n + \pi^2 n^2 c_n = e^{-\gamma t} \delta_{n,1}$. При $n \neq 1$ имеется только нулевое решение. При $n = 1$ уравнение можно решить методом неопределенных коэффициентов либо комплексной подстановкой $z = \pi c_1 + i \dot{c}_1$. На комплексную функцию $z(t)$ получится уравнение I порядка

$$\dot{z} + i\pi z = i e^{-\gamma t}.$$

Ответ.

$$c_1 = \frac{\pi(-\cos \pi t + e^{-\gamma t}) + \gamma \sin \pi t}{\pi(\pi^2 + \gamma^2)}.$$

Задача 71.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} h \frac{x}{a}, & x < a, \\ h \frac{1-x}{1-a}, & x > a \end{cases}$$

(рис. 2.9, штрихи).

Указание.

$$B_n = 0, \quad A_n = 2 \int_0^1 u(x, 0) \sin \pi n x \, dx.$$

Интеграл можно взять по частям.

Ответ.

$$u(x, t) = \frac{2h}{a(1-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n a \cos \pi n t \sin \pi n x}{(\pi n)^2}.$$

Почему убывание коэффициентов получилось со скоростью $1/n^2$? Если $a = 1/2$, то четные члены исчезают. Объясните это с точки зрения теории рядов Фурье.

Задача 72. Найдите графически форму струны при $a = 1/2$.

Указание. Общее решение одномерного волнового уравнения состоит из волн, бегущих вправо и влево $u(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$. Начальное отклонение струны имеет форму равнобедренного треугольника, поэтому каждая из волн имеет такую же форму, но половинной высоты. Надо достроить треугольник нечетным образом при $-1 < x < 0$ и периодически продолжить на всю числовую ось. Если сложить две полуволны, в общем случае получится равнобедренная трапеция (рис. 2.10).

Задача 73.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

(рис. 2.9, точки).

Указание.

$$B_n = 0, \quad A_n = \frac{2}{(\pi n)^2} (1 - (-1)^n).$$

Ответ.

$$u(x, t) = -4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \pi(2k+1)t \cos \pi(2k+1)x}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Почему остались только нечетные гармоники? Что изменится, если $u(x, 0)_t = 1$? Как изменится пространство функций, если в начальный момент $u_x(0, t) = 0, u(1, t) = 0$?

2.8.2. Параболический тип

Решение задачи $u_t = \hat{L}u$ при условии $u|_S = 0$ ищем в виде суммы

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \psi_n(x),$$

где ψ_n — собственные функции оператора: $\hat{L}\psi_n = \lambda_n\psi_n$ с граничным условием $\psi_n|_S = 0$. Тогда для функций $C_n(t)$ получатся обыкновенные дифференциальные уравнения.

Задача 74. Решить задачу Коши

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x(1 - x).$$

Указание. Решение имеет вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x.$$

Коэффициенты A_n найдем из начального условия

$$A_n = 2 \int_0^1 x(1 - x) \sin \pi n x \, dx.$$

Ответ.

$$u = 8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \pi(2k+1)x}{\pi^3(2k+1)^3} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t}.$$

Почему коэффициенты убывают быстро, как куб номера? Почему исчезли четные коэффициенты?

Задача 75. Решить неоднородное уравнение

$$u_t = u_{xx} - \beta u + \sin \pi x, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

Указание. Подставим в гиперболическое уравнение решение $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_n(t) \sin \pi n x$, получим обыкновенные уравнения

$$\dot{c}_n + (\pi^2 n^2 + \beta) c_n = \delta_{n,1}.$$

Его решение с нулевым начальным условием можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Ответ.

$$u(x, t) = \frac{\sin \pi x}{\beta + \pi^2} \left[1 - e^{-(\beta + \pi^2)t} \right].$$

Задача 76. Решить трехмерное уравнение теплопроводности в шаре радиуса a с точечным источником в начале координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + Q\delta(\vec{r})$$

с граничным условием $u(a, t) = 0$ и нулевым начальным условием.

Указание. Решение $u(r, t)$ не зависит от углов. Ищем решение в виде суммы стационарного решения неоднородного уравнения и нестационарного решения однородного

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r), \quad v_t = \Delta v, \quad \Delta w + Q\delta(\vec{r}) = 0.$$

Стационарное уравнение интегрируем по шару радиуса r и преобразуем интеграл по теореме Гаусса. Получим естественно электростатический потенциал точечного заряда

$$4\pi r^2 w' = -Q \Rightarrow w = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Нестационарное решение ищем в виде

$$v = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n r}{a} \exp \left[- \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 t \right],$$

а коэффициенты A_n найдем из начальных условий

$$v|_{t=0} = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{r} \sum_n A_n \sin \frac{\pi n r}{a}.$$

Ответ.

$$u = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{Q}{2\pi^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n r}{a} e^{-\pi^2 n^2 t / a^2}.$$

2.8.3. Эллиптический тип

Задача 77. Решить уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в промежутке между двумя коаксиальными цилиндрами радиусами $b > a$ с граничными условиями $u(a, \varphi) = 1, u(b, \varphi) = \cos \varphi$.

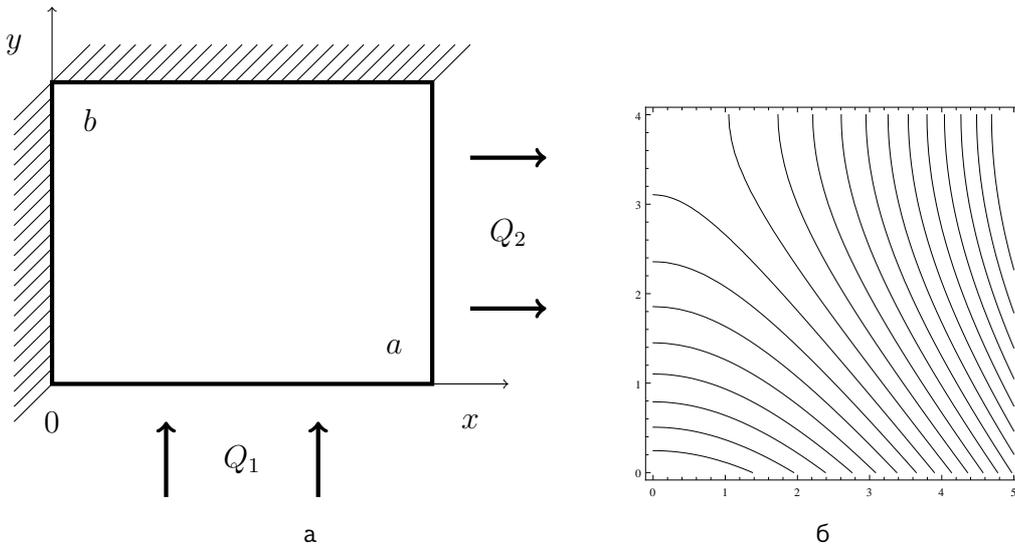


Рис. 2.11. Граничные условия (а) и линии равной температуры (б) к задаче 78

Указание. Ищем решение в виде $u = R(r)\Phi(\varphi)$. Находим $\Phi = e^{im\varphi}$ и радиальное уравнение

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R = 0. \quad (2.12)$$

Для внутреннего цилиндра $m = 0$ имеется два независимых решения (2.12): 1 и $\ln r$. Для внешнего цилиндра $m = \pm 1$, решения r и $1/r$. Значит, надо искать решение краевой задачи в виде

$$u(r, \varphi) = [e^{i\varphi} (Ar + B/r) + c.c.] + A_0 + B_0 \ln r.$$

Подставляя решение в граничные условия, найдем 4 уравнения на коэффициенты

$$Aa + B/a = 0, \quad A_0 + B_0 \ln a = 1, \quad (Ab + B/b) \cos \varphi = \cos \varphi, \quad A_0 + B_0 \ln b = 0.$$

Ответ.

$$u(r, \varphi) = \frac{\cos \varphi}{b^2 - a^2} \left(br - \frac{a^2 b}{r} \right) + \frac{1}{\ln(b/a)} (\ln b - \ln r).$$

Задача 78. Решить уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $a \times b$ с граничными условиями

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = Q_1, \quad u_x|_{x=a} = Q_2, \quad u_y|_{y=b} = 0.$$

Указание. Левая и верхняя стенка теплоизолированы, в нижнюю стенку втекает поток плотностью Q_1 , а из правой вытекает поток плотностью Q_2 (рис. 2.11, а). Переменные разделяются, если искать решение в виде суммы $u = X(x) + Y(y)$. Обыкновенные уравнения легко решаются:

$$X = \alpha \frac{x^2}{2} + C_1 x, \quad Y = -\alpha \frac{y^2}{2} + C_2 y + C_3,$$

где α — параметр разделения.

Подставляя решение в граничные условия, найдем $C_1 = 0, C_2 = \alpha b$ и параметр разделения $\alpha = Q_2/a = Q_1/b$. Получается условие разрешимости $Q_1 a = Q_2 b$. Почему задача не решается при нарушении этого условия? Еще одна аддитивная константа C_3 не может быть найдена из граничных условий.

Ответ.

$$u(x, y) = \frac{Q_1}{2b}(x^2 - y^2) + Q_1 y + C_3.$$

Нарисуйте изотермы и линии тока. Покажите, что изотермы ортогональны изолированным стенкам (рис. 2.11, б).

2.9. Разделение переменных

2.9.1. Ортогональные системы координат

Из заданного преобразования в ортогональную систему координат

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

можно вычислить коэффициенты Ламе

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

По ним можно найти выражение для оператора Лапласа в новой системе координат

$$\Delta = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{h}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \right],$$

где $h = h_1 h_2 h_3$ — коэффициент преобразования объема.

2.9.2. Параболоидальные координаты

Задача 79. Переход к параболическим (или параболоидальным) координатам задан формулами

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad \xi, \eta > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2.13)$$

1. Нарисовать координатные поверхности.
2. Найти коэффициенты Ламе, выписать оператор Лапласа.
3. Разделить переменные в уравнении Шредингера для атома водорода

$$\left(-\frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{r} \right) \psi = E\psi.$$

Указание. Номера соответствуют номерам пунктов в задаче.

1. В полуплоскости $\varphi = 0$ исключить последовательно ξ, η , построить графики $z(x)$. А затем вращать графики вокруг оси z (рис. 2.12, а).
2. $h = (\xi + \eta)/2$. Обратите внимание, что координаты симметричны относительно замены $\xi \leftrightarrow \eta, z \rightarrow -z$.

3. Искать решение вида $\psi = X(\xi)Y(\eta)\Phi(\varphi)$ и воспользоваться тождеством $r = (\xi + \eta)/2$.

Ответ.

$$z = \frac{\xi - x^2/\xi}{2}, z = \frac{x^2/\eta - \eta}{2};$$

$$h_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi}}, \quad h_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi + \eta}{\eta}}, \quad h_\varphi = \sqrt{\xi\eta};$$

$$\Delta = \frac{4}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

$$\xi X'' + X' + \left(-\frac{m^2}{4\xi} - \kappa^2 \frac{\xi}{4} \right) X + \lambda_1 X = 0,$$

$$\eta Y'' + Y' + \left(-\frac{m^2}{4\eta} - \kappa^2 \frac{\eta}{4} \right) Y + \lambda_2 Y = 0.$$

Здесь $\Phi = e^{im\varphi}$, $\kappa^2 = -2E$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Два последних уравнения получились одинакового вида.

2.9.3. Сфероидальные координаты

Задача 80. Переход к эллиптическим (или сфероидальным) координатам задан формулами

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi\eta}{2}, \quad (2.14)$$

$$-1 < \eta < 1, \quad 1 < \xi^2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

1. Нарисовать координатные поверхности.
2. Найти коэффициенты Ламе, выписать оператор Лапласа.
3. Разделить переменные в уравнении Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u = 0.$$

Ответ. 1. В плоскости $\varphi = 0$ получаются эллипсы

$$\frac{4x^2}{\xi^2 - 1} + \frac{4z^2}{\xi^2} = 1$$

и гиперболы

$$-\frac{4x^2}{1 - \eta^2} + \frac{4z^2}{\eta^2} = 1.$$

Значит координатные поверхности в данном случае — вытянутые сфероиды³ и двухполостные гиперболоиды вращения (рис. 2.12, б и в). Отсюда название координатной системы «вытянутые сфероидальные» координаты.

³Сфероидом называют эллипсоид вращения. В зависимости от соотношения осей сфероида делятся на вытянутые и сплюснутые.

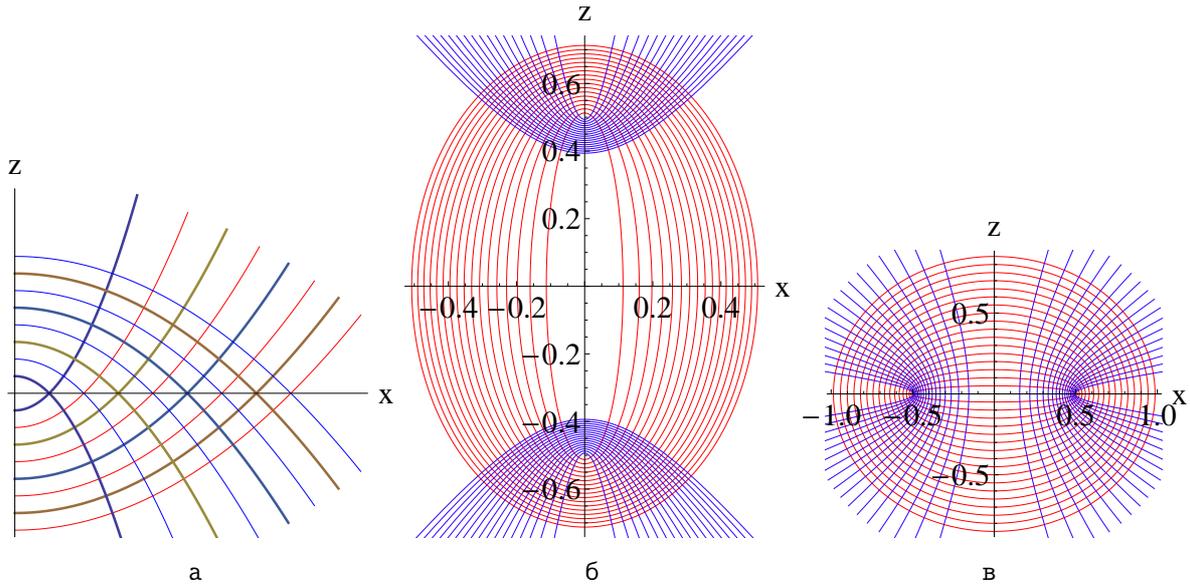


Рис. 2.12. Координатные линии параболоидальной (а), вытянутой сфероидальной (б) и сплюснутой (в) сфероидальной системы координат в плоскости $\varphi = 0$

2.

$$h_\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad h = \frac{1}{8} (\xi^2 - \eta^2).$$

$$\Delta = \frac{8}{\xi^2 - \eta^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi^2 - 1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1 - \eta^2}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{4}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

3.

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)X'' + 2\xi X' + \left(\frac{k^2 \xi^2}{4} - \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right) X &= \lambda X, \\ (1 - \eta^2)Y'' - 2\eta Y' + \left(-\frac{k^2 \eta^2}{4} - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) Y &= -\lambda Y. \end{aligned}$$

Оба уравнения формально совпадают, отличие только в интервалах изменения координат ξ, η .

Задача 81. * Если в формулах (2.14) сменить знаки, получится

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi \eta}{2}, \\ -1 < \eta < 1, \quad 0 < \xi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Покажите, что в этом случае координатные поверхности — сплюснутые сфероиды и однополостные гиперболоиды («сплюснутые сфероидальные» координаты).

Глава 3

Специальные функции

3.1. Гипергеометрические функции

Гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0$$

имеет решение в виде ряда

$$w(z) \equiv {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Уравнение Гаусса имеет регулярные особые точки $z = 0, 1, \infty$.

Вырожденное гипергеометрическое уравнение Куммера

$$zw'' + [\gamma - z]w' - \alpha w = 0$$

имеет решение в виде ряда

$$w(z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z/\beta) \equiv {}_1F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Уравнение Куммера имеет регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную $z = \infty$.

Задача 82. Выразить через гипергеометрические функции $\ln(1+z)/z$.

Указание.

$$1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots = {}_2F_1(1, 1; 2; -z).$$

Задача 83. Выразить через гипергеометрические функции $(1-z)^n$.

Ответ.

$${}_2F_1(-n, \beta; \beta; z).$$

Задача 84. Выразить через гипергеометрические функции $\exp(z)$.

Ответ.

$${}_1F_1(\alpha; \alpha; z).$$

Линейная замена независимой переменной

Задача 85. Выразить функции Лежандра, удовлетворяющие уравнению

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

через функцию Гаусса. Найти условие обрыва ряда.

Указание. Чтобы регулярные особые точки $x = \pm 1, \infty$ перешли в стандартные положения, выполним преобразование $z = (1 - x)/2$.

Ответ.

$$y = {}_2F_1(\alpha, \beta; 1; -z), \quad \alpha, \beta = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}, \quad \lambda = l(l + 1), l = 0, 1, 2, \dots$$

Задача 86. Свести к вырожденной гипергеометрической функции решение уравнения Бесселя

$$R'' + \frac{1}{x}R' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0.$$

Указание. Асимптотики при $x = 0$ (ПОТ) $R = x^{\pm m}$, при $x = \infty$ (ИОТ) $R = e^{\pm ix}$. Преобразование Лежандра $R = x^m e^{-ix} u(x)$ и замена независимой переменной $z = 2ix$ приводят уравнение Бесселя к уравнению Куммера.

Ответ.

$$J_\nu(x) = x^\nu e^{-ix} {}_1F_1(\nu + 1/2; 2\nu + 1; 2ix).$$

Задача 87. Свести к вырожденной гипергеометрической функции решение уравнения Шредингера для атома водорода

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(\frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \kappa^2\right)R = 0.$$

Указание. Асимптотики при $r = 0$ (ПОТ) $R_1 = x^l, R_2 = r^{-l-1}$, при $r = \infty$ (ИОТ) $R_{1,2} = e^{\pm \kappa r}$. Преобразование Лежандра $R = r^l e^{-\kappa r} u(x)$ и замена независимой переменной $z = 2\kappa r$ приводят уравнение Шредингера к уравнению Куммера.

Ответ.

$$R = r^l e^{-\kappa r} {}_1F_1(\alpha; \gamma; 2\kappa r), \quad \alpha = l + 1 - \kappa^{-1}, \gamma = 2(l + 1).$$

Найдите условие обрыва ряда (формулу Бальмера).

Задача 88. * Свести к вырожденной гипергеометрической функции решение уравнения Шредингера для атома водорода в параболических координатах из задачи 79

$$\xi X'' + X' + \left(-\frac{m^2}{\xi} - \kappa^2 \frac{\xi}{4}\right)X + \lambda_1 X = 0.$$

Найдите условие обрыва ряда (формулу Бальмера).

Указание. Выполнить преобразование Лиувилля $X = \xi^{m/2} e^{-\kappa \xi/2} u(\xi), m > 0$.

Нелинейная замена *

Иногда, чтобы свести уравнение к гипергеометрическому, требуется нелинейная замена независимой переменной. В общем случае решение в иррегулярной особой точке ищется в виде $\exp(\lambda x^\sigma)$, $x \rightarrow \infty$, а замена независимой переменной должна быть $\xi = x^\sigma$.

Задача 89. Свести к вырожденной гипергеометрической функции решение уравнения Эйри

$$\psi'' - x\psi = -k^2\psi.$$

Указание. Параметр k^2 можно убрать сдвигом начала отсчета координаты x . Асимптотику на бесконечности искать в виде $\psi = \exp(\lambda x^\sigma)$. Получится $\sigma = 3/2$, $\lambda = \pm 2/3$. Отсюда видно, что замена независимой переменной нелинейна $t = x^{3/2}$.

Ответ.

$$\psi = ue^{-2x^{3/2}/3}, \quad u = {}_1F_1(1/6, 1/3; 4x^{3/2}/3),$$

что сводится к цилиндрическим функциям порядка $\nu = -1/3$.

Сведите уравнение $y'' - xy = 0$ прямо к уравнению Бесселя заменой $y = x^{1/2}u$, $\xi = 2x^{3/2}/3$. Получится уравнение Макдональда

$$u'' + \frac{1}{3\xi}u' - \left(1 + \frac{1}{9\xi^2}\right)u = 0.$$

Задача 90. Свести к вырожденной гипергеометрической функции решение уравнения Шредингера для линейного осциллятора

$$\psi'' - x^2\psi = -k^2\psi.$$

Указание. Асимптотику на бесконечности искать в виде $\psi = \exp(\lambda x^\sigma)$. Получится $\sigma = 2$, $\lambda = \pm 1/2$. Отсюда видно, что неизвестную функцию надо искать в виде $\psi = e^{-x^2/2}u$, а замена независимой переменной нелинейна $\xi = x^2$. Однако при такой замене мы получим только четные состояния осциллятора. Чтобы получить нечетные уровни, нужна замена $\psi = xe^{-x^2/2}u$.

Ответ. Для четных

$$\xi \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \frac{du}{d\xi} + \frac{k^2 - 1}{4}u = 0,$$

для нечетных

$$\xi \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{2} - \xi\right) \frac{du}{d\xi} + \frac{k^2 - 3}{4}u = 0.$$

Найдите условия обрыва ряда (уровни одномерного осциллятора).

Задача 91. * Свести к гипергеометрическому одномерное уравнение Шредингера с безотражательным потенциалом

$$\psi'' + \left(-\kappa^2 + \frac{a}{\operatorname{ch}^2 x}\right)\psi = 0, \quad a = N(N+1).$$

Указание. Замена независимой переменной $z = \operatorname{th} x$ сводит уравнение Шредингера к уравнению с полиномиальными коэффициентами

$$(1 - z^2) \frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d\psi}{dz} + [-\kappa^2 + a(1 - z^2)] \psi = 0.$$

Исключаем асимптотику при $z \rightarrow \pm 1$ заменой неизвестной функции $\psi = (1 - z^2)^{\kappa/2} u(z)$. Получится

$$(1 - z^2) u'' - 2(1 + \kappa) z u' + [a - \kappa(\kappa + 1)] u = 0.$$

Это уравнение с РОТ при $x = \pm 1, \infty$, которое перейдет в гипергеометрическое после замены независимой переменной $\xi = (z + 1)/2$.

Ответ.

$$u = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z), \quad \gamma = 1 + \kappa, \quad \alpha, \beta = \kappa + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)^2 - \kappa(\kappa + 1) + a}.$$

Найдите условие обрыва ряда. Покажите, что при $a = N(N + 1)$ в такой яме ровно N уровней.

3.2. Ортогональные полиномы

Напомним обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, которым подчиняются полиномы.

Уравнение Лежандра

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0.$$

Уравнение Эрмита

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Уравнение Лагерра

$$xy'' + (\nu + 1 - x)y' + ny = 0. \quad (3.1)$$

Задача 92. Найти интегральное представление полиномов Лежандра

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

Указание. Воспользоваться формулой для вычета в полюсе порядка n :

$$\operatorname{Res}_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Ответ.

$$P_l(x) = 2^{-l} \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - x)^{l+1}}, \quad (3.2)$$

где C — единичная окружность.

Задача 93. Найти производящую функцию

$$F(r, x) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), \quad r < 1.$$

Указание. Воспользуемся комплексным представлением (3.2). Получим

$$F = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - x - (z^2 - 1)r/2}.$$

Из полюсов

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2rx + r^2}}{r}$$

при $r < 1$ только z_2 лежит внутри контура C .

Ответ.

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}}.$$

Задача 94. Выполнить в (3.2) замену переменной $z = x + i\sqrt{1 - x^2} \exp(i\varphi)$, т. е. перейти к интегрированию по окружности радиуса $\sqrt{1 - x^2}$ вокруг полюса.

Ответ.

$$P_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x + i\sqrt{1 - x^2} \cos \varphi]^l d\varphi.$$

Оказался ли ответ вещественным?

Задача 95. Вывести соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_\nu(x) dx = \frac{2}{2l + 1} \delta_{l,\nu}.$$

Указание. Ортогональность можно доказать с помощью формулы Родрига, интегрируя по частям l раз. Другой способ — воспользоваться уравнением Лежандра.

Задача 96. Найти рекуррентные соотношения для полиномов Эрмита

$$H_n = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}.$$

Ответ.

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}, \quad H'_n = 2nH_{n-1}.$$

Задача 97. Найти производящую функцию

$$F(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \frac{H_n(x)}{n!}.$$

Указание. Найти F_h, F_x и решить как уравнения в частных производных.

Ответ.

$$F = e^{2xh - h^2}.$$

Задача 98. Решить уравнение (3.1) при $\nu = 0$ методом Лапласа.

Указание. Правила преобразования Лапласа:

- 1) $x \rightarrow -\frac{d}{dp}$;
- 2) $\frac{d}{dx} \rightarrow p$;
- 3) порядок операторов сохраняется.

Ответ.

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(p-1)^n}{p^{n+1}} e^{px} dp. \quad (3.3)$$

Задача 99. Вычислить контурный интеграл (3.3).

Ответ.

$$L_n = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}.$$

Задача 100. Найти производящую функцию

$$F(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n L_n(x).$$

Указание. Воспользоваться интегральным представлением (3.3).

Ответ.

$$F = \frac{\exp\left(-x \frac{h}{1-h}\right)}{1-h}.$$

3.3. Функции Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (3.4)$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(-1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (3.5)$$

Модифицированное уравнение Бесселя (3.5) получается из (3.4) заменой $x \rightarrow ix$ (поворотом в комплексной плоскости на прямой угол). Решения (3.4) — функции Бесселя $J_m(x)$ и Неймана $Y_m(x)$ (иногда последние обозначают $N_m(x)$). Функции Неймана иногда называют функциями Бесселя второго рода. Решения уравнения (3.5) — это модифицированные функции Бесселя $I_m(x)$ и функции Макдональда $K_m(x)$. Иногда требуется решение уравнения (3.4) в виде линейных комбинаций $H_m^{(1,2)}(x) = J_m(x) \pm iY_m(x)$, так называемые функции Ганкеля (или функции Бесселя третьего рода).

Задача 101. Из разложения функции Бесселя в ряд

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

вывести рекуррентное соотношение для $J_{m-1} - J_{m+1}$.

Ответ.

$$J_{m-1} - J_{m+1} = 2J'_m.$$

Задача 102. Из разложения функции Бесселя в ряд

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

доказать, что $J_{-m} = (-1)^m J_m$.

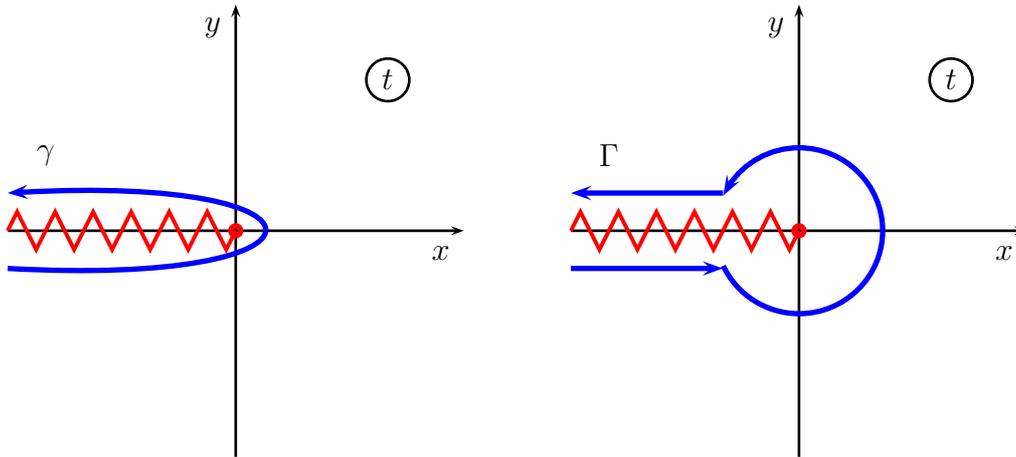


Рис. 3.1. Преобразование контура интегрирования в представлении Шлефли

Задача 103. Пользуясь рекуррентными соотношениями, найти производящую функцию

$$F(x, h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^m J_m(x).$$

Ответ.

$$F = \exp \left[\frac{x}{2} \left(h - \frac{1}{h} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Задача 104. Пользуясь производящей функцией (3.6), найти интегральное представление.

Ответ. Представление Шлефли

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]}{t^{m+1}} dt. \quad (3.7)$$

Покажите, что замена $t = e^{i\varphi}$ сводит (3.7) к представлению Бесселя.

Задача 105. Представление (3.7) обобщается на произвольное ν , если заменить единичную окружность C на контур γ , обходящий в положительном направлении разрез $(-\infty, 0)$:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]}{t^{\nu+1}} dt.$$

Преобразуя контур интегрирования к единичной окружности и двум горизонтальным прямым, идущим по берегам разреза, как показано на рис. 3.1, свести контурный интеграл к обычному.

Ответ.

$$J_\nu(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ix \sin \varphi - i\nu\varphi} - \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{sh} z - \nu z} dz.$$

Задача 106. Найти интегральное представление для функции Бесселя нулевого порядка J_0 , решив уравнение Бесселя методом Лапласа.

Ответ. Представление Пуассона

$$J_0(x) = \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{\exp(px)}{\sqrt{1+p^2}}.$$

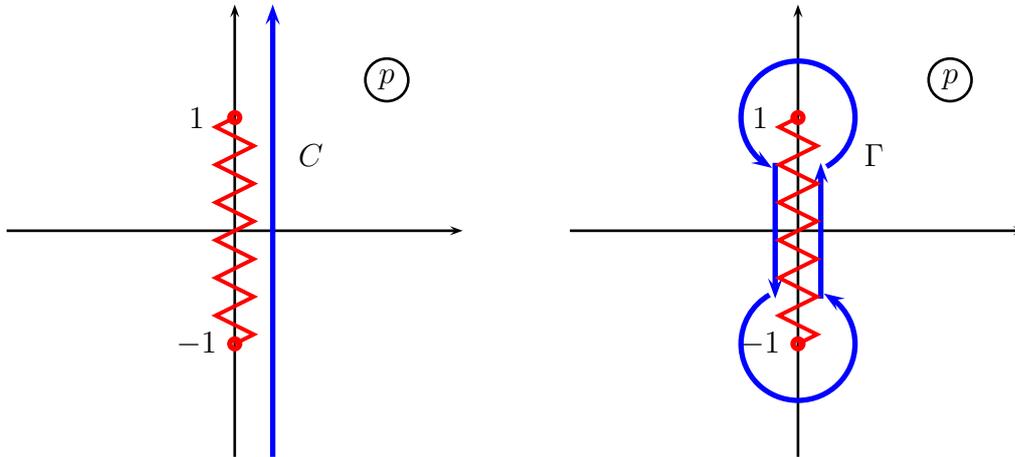


Рис. 3.2. Преобразование контура интегрирования в представлении Пуассона

К чему сведется представление Пуассона после преобразования Жуковского $p = (z - 1/z)/2$?

Задача 107. Контур интеграла в представлении Пуассона можно замкнуть. Новый контур Γ будет обходить разрез $(-i, i)$ в положительном направлении. Преобразуя контур к двум отрезкам по берегам разреза и двум окружностям радиуса $\rho \rightarrow +0$, свести представление к действительному интегралу (рис. 3.2).

Ответ.

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{itx}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Глава 4

Асимптотические методы

4.1. Интеграл Лапласа

Главный член асимптотики интеграла Лапласа

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t)e^{\lambda S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

находится по формуле

$$F(\lambda) \sim \begin{cases} -\frac{A(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}, & S' \neq 0, S(a) > S(b), \\ A(t_0)e^{\lambda S(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(t_0)}}, & S'(t_0) = 0, a < t_0 < b. \end{cases}$$

Чтобы найти следующие члены, в случае 1 надо интегрировать по частям, а в случае 2 разлагать фазу в ряд, удерживая более высокие степени.

Задача 108. Функция ошибок

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Указание. Замена $t = x\tau$ делает пределы интегрирования независимыми от параметра x . Далее надо интегрировать по частям (случай 1).

Ответ.

$$F(\lambda) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \dots \right).$$

Задача 109. Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Указание. После замены $t = x\tau$ реализуется случай 2.

Ответ. Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Задача 110. Найти следующий член разложения $\Gamma(x+1)$.

Указание. Разложим фазу вплоть до четвертой степени. В области $\xi^2 \ll x^{-1}$, где набирается интеграл, члены третьей и четвертой степени малы. Разложим соответствующие экспоненты в ряд:

$$S(\tau) = \ln \tau - \tau, \quad \tau_0 = 1, \quad S(\xi) = -1 - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{1}{4}\xi^4 + \dots, \\ e^{xS} \approx e^{-x} e^{-x\xi^2/2} \left(1 + \frac{x}{3}\xi^3 + \frac{x^2}{18}\xi^6 + \dots \right) \left(1 - \frac{x}{4}\xi^4 + \dots \right).$$

Куб исчезает при интегрировании в симметричных пределах. Четвертая и шестая степень дают $-\sqrt{2\pi}3x^{-3/2}/4$ и $\sqrt{2\pi}5x^{-3/2}/6$.

Ответ.

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left[1 + \frac{1}{12x}\right]. \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{e} = 0,922, \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{e} \left[1 + \frac{1}{12}\right] = 0,999.$$

Задача 111. Модифицированная функция Бесселя

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos n\theta \, d\theta, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Указание. $S' = 0$ в точках $0, \pi$, но второй корень — минимум.

Ответ.

$$I_n(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x.$$

Задача 112. Функция Лежандра

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta\right)^l \, d\theta, \quad l \rightarrow +\infty, \quad x > 1.$$

Указание.

$$S = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta\right), \quad S'(0) = S'(\pi) = 0, \quad S''(0) < 0 < S''(\pi).$$

Ответ.

$$P_l \sim \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/4}} \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{l+1/2}.$$

Разложение неравномерно при $x \rightarrow \pm 1$.

Задача 113.

$$F(a) = \int_0^\infty (t^4 - a)^{2n} e^{-t^2 - a/t^2} \, dt, \quad a \rightarrow +\infty. \quad (4.1)$$

Указание. Чтобы остановить точку, перейдем к новой переменной интегрирования $t = a^{1/4}\tau$.

$$S = -\tau^2 - \tau^{-2}, \quad S'(1) = 0, \quad S(1) = -2, \quad S''(1) = -8.$$

При $n = 0$ формула дает правильный ответ, даже если $a = 0$. Заменой $z = a^{1/2}/t$ (4.1 сводится к $a^{1/2} \int_0^\infty dz/z^2 \exp[-a/z^2 - z^2]$. Записав интеграл в виде полусуммы интеграла (4.1) и преобразованного интеграла, вычислите его точно и сравните с асимптотикой.

Ответ.

$$F \sim \frac{\Gamma(n+1/2)}{2} (2a)^{3n/2} e^{-2\sqrt{a}}.$$

Задача 114. Функция Макдональда

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\nu t - x \operatorname{ch} t) dt, \quad \nu \rightarrow +\infty.$$

Указание.

$$S = \nu t - x \operatorname{ch} t, \quad S' = \nu - x \operatorname{ch} t = 0, \\ t_0 = \operatorname{arsh} \frac{\nu}{x} \approx \ln \frac{2\nu}{x}, \quad S''(t_0) = -x \operatorname{ch} t = -\sqrt{\nu^2 + x^2}.$$

При больших ν стационарную точку можно остановить приближенно заменой

$$t = \ln(2\nu/x) + \tau.$$

Ответ.

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \left(\frac{2\nu}{x}\right)^\nu e^{-\nu}.$$

4.2. Метод стационарной фазы

Главный член асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) e^{i\lambda S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

находится по формуле

$$F(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{A(b)e^{i\lambda S(b)} - A(a)e^{i\lambda S(a)}}{i\lambda S'(b)} - \frac{A(a)e^{i\lambda S(a)}}{i\lambda S'(a)}, & S'(t) \neq 0, \\ A(t_0) e^{i\lambda S(t_0) + i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} S''(t_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(t_0)|}}, & S'(t_0) = 0, a < t_0 < b. \end{cases}$$

Асимптотика специальных функций

Задача 115. Функция Бесселя

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \varphi - im\varphi} d\varphi, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Указание. Раз в условии ничего не сказано про параметр m , значит, его надо держать фиксированным:

$$S(\varphi) = \sin \varphi, \quad \varphi_{1,2} = \pm\pi/2, \quad S(\pm\pi/2) = \pm 1, \quad S''(\pm\pi/2) = \mp 1.$$

Ответ.

$$J_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(x^{-1})].$$

Задача 116. Найти асимптотику $J_m(m)$, $m \rightarrow \infty$.

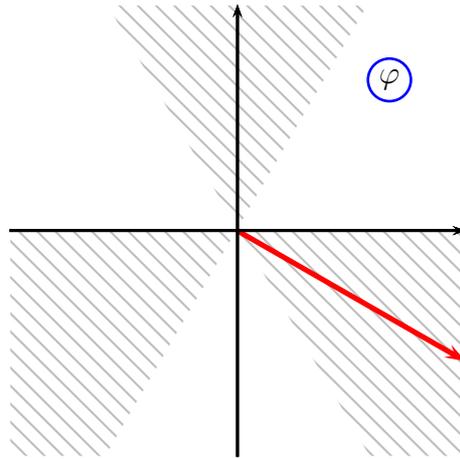


Рис. 4.1. Секторы сходимости и контур интегрирования к задаче 116

Указание. Теперь оба параметра растут одинаково

$$S(\varphi) = \sin \varphi - \varphi, \quad \varphi_0 = 0, \quad S(0) = 0, S'(0) = 0, S''(0) = 0, S'''(0) = -1,$$

получается

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-im\frac{\varphi^3}{6}\right) d\varphi.$$

Интеграл по отрицательным φ комплексно сопряжен интегралу по положительным. Прежде чем распространить пределы интеграла до ∞ , надо найти секторы сходимости и повернуть контур интегрирования так, чтобы он шел по биссектрисе сектора сходимости. Получается замена $\varphi = e^{-i\pi/6}\tau$ (см. рис. 4.1).

Ответ.

$$J_m(m) \sim \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{6} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{6}{m}\right)^{1/3} [1 + O(m^{-2/3})].$$

Задача 117. * Найти асимптотику

$$J_\nu(\xi), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \frac{\nu}{\xi} = c < 1.$$

Задача 118. Функция Эйри

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\right] dt, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Указание. Надо остановить стационарную точку заменой $t = |x|^{1/2}\tau$. Тогда

$$S(\tau) = \tau^3/3 - \tau, \quad \tau_{1,2} = \pm 1, \quad S(\pm 1) = \mp \frac{2}{3}, \quad S''(\pm 1) = \pm 2.$$

Ответ. Асимптотика функции Эйри в классически разрешенной области

$$\text{Ai}(x) \sim \sqrt{\frac{1}{\pi}} |x|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(|x|^{-3/2})].$$

Асимптотика Фурье-образа

Задача 119. Пусть функция $f(x)$ ее первые $n - 1$ производных непрерывны, а $f^{(n)}$ терпит скачок в точке $x = 0$:

$$[f] = [f'] = \dots = [f^{(n-1)}] = 0, \quad [f^{(n)}] = 1.$$

Найти асимптотику ее Фурье-образа.

Указание. Надо найти асимптотику интеграла

$$J_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx, \quad k \rightarrow \infty.$$

Осталось проинтегрировать n раз по частям.

Ответ.

$$J_k \sim \frac{[f^{(n)}]_{x=0}}{(-ik)^{n+1}} = \frac{1}{(-ik)^{n+1}}.$$

Задача 120. Найти асимптотику

$$F_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Указание. Замкнуть контур и найти вычет в полюсе.

Ответ.

$$F_k \sim \frac{\pi}{a} e^{-ka}.$$

Асимптотика экспоненциальная, показатель экспоненты определяется расстоянием от вещественной оси до ближайшей особенности.

Задача 121.

$$G_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + e^{\alpha x}} dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Указание. Полюсы подынтегральной функции лежат на мнимой оси на равных расстояниях в точках $\alpha x = i\pi(2n + 1)$. Интеграл дается суммой вычетов, которая сводится к геометрической прогрессии.

Ответ. Показатель экспоненты в асимптотике дается расстоянием до ближайшей особенности

$$G_k \sim -\frac{\pi i}{\alpha} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{\alpha}} \sim -\frac{2\pi i}{\alpha} e^{-\pi k/\alpha}.$$

*Задача 122.**

$$H_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Указание. Функция H_k сводится к интегралу вокруг разреза $(ia, i\infty)$, контур обходит точку ветвления в отрицательном направлении. Интеграл по окружности $x = ia + \varepsilon e^{i\varphi}$, $-3\pi/2 < \varphi < \pi/2$ стремится к нулю в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Интегралы по берегам разреза $x = ia(1 + t)$, $0 < t < \infty$ набираются при малых $t \rightarrow 0$.

Ответ.

$$H_k \sim \sqrt{\frac{2\pi}{ka}} e^{-ka}.$$

Показатель экспоненты задается расстоянием до точки ветвления. Предэкспонента дает дополнительную слабую зависимость.

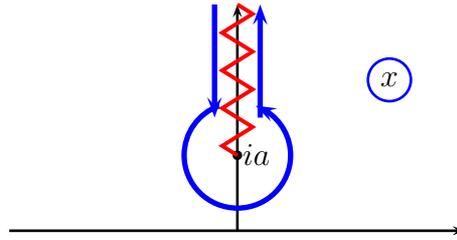


Рис. 4.2. Контур интегрирования к задаче 122, проходящий по берегам разреза в отрицательном направлении

4.3. Метод перевала

Надо оценить асимптотику интеграла

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} e^{\lambda S(z)} dz, \lambda \rightarrow +\infty$$

по контуру γ с аналитической фазой $S(z)$ в окрестности контура. Сначала найдем стационарную точку $z_0, S'(z_0) = 0$. Оценка выполняется в два шага.

1. *Топологическая часть*: деформировать контур так, чтобы он прошел через стационарную точку по линии наискорейшего спуска. Такие линии, где $\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_0) = \text{const}$ называются линиями Стокса. Надо проверить, переходит ли контур интегрирования в ЛС, учитывая правила:
 - а) если интеграл в бесконечных пределах, надо следить, чтобы концы контура не выходили за границы секторов сходимости;
 - б) нельзя при деформации контура пересекать полюса, т. е. выходить за границы области аналитичности подынтегральной функции.
2. *Аналитическая часть*. В окрестности стационарной точки $S(z) \approx S(z_0) + \frac{1}{2}S''(z_0)(z - z_0)^2$. Повернем контур $z - z_0 = \xi e^{i\varphi}$ так, чтобы квадратичная часть разложения убывала быстрее всего $S(z) - S(z_0) = -\frac{1}{2}|S''(z_0)|\xi^2$. Для этого надо обеспечить выполнение условия

$$\text{Im} [S''(z_0)e^{2i\varphi}] = 0, \quad \text{Re} [S''(z_0)e^{2i\varphi}] < 0.$$

Тогда асимптотика интеграла дается формулой

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(z_0)|}} \exp[\lambda S(z_0) + i\varphi] [1 + O(\lambda^{-1})]:$$

- а) если под интегралом есть амплитуда $A(z)$, ее надо взять в точке z_0 ;
- б) если стационарных точек несколько и расстояние между ними не зависит от параметра λ , оценка дается суммой по точкам. В этой сумме следует выделить точку с главным вкладом. Если же точки сближаются при $\lambda \rightarrow +\infty$, говорят об их «слиянии». Интеграл в этом случае сводится к другому эталонному интегралу;

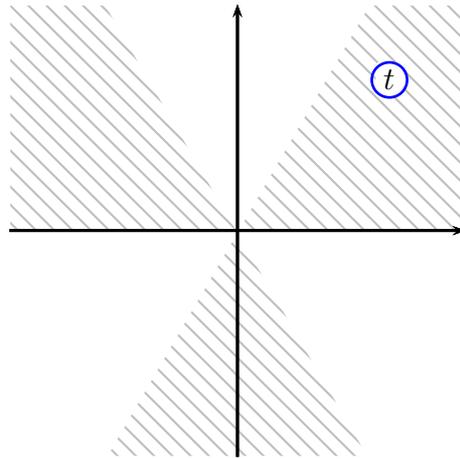


Рис. 4.3. Секторы сходимости интеграла Эйри

в) в стационарной точке $S'' = 0$, надо свести интеграл к другому эталонному интегралу.

Задача 123. Найти секторы сходимости интеграла Эйри

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) \right] dt, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Указание. Возьмем $t = Re^{i\theta}$, $R \rightarrow \infty$ и найдем, когда вещественная часть показателя экспоненты отрицательна: $\text{Re } iR^3 e^{3i\theta} < 0$.

Ответ.

$$\sin 3\theta < 0, \text{ см. рис. 4.3.}$$

Задача 124. Нарисовать линии уровня мнимых и вещественных частей функций:

а) $S(z) = z$; б) $S(z) = z^2 - 1$; в) $S(z) = z^3$; г) $S(z) = \ln z$; д) $S(z) = \ln(z^2 - 1)$.

Задача 125. Найти асимптотику функции Эйри в классически запрещенной области

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{t^3}{3} + \xi t \right) \right] dt, \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (4.2)$$

Указание. Остановим точку заменой $t = \xi^{1/2}\tau$. Тогда $S(\tau) = i(\tau^3/3 + \tau)$. Разделяя вещественную и мнимую части $\tau = x + iy$, найдем линии Стокса

$$\text{Im } i \left[\frac{(x + iy)^3}{3} + (x + iy) \right] = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x = 0.$$

Чтобы не выйти из секторов сходимости, контур можно преобразовать только в верхнюю ветвь гиперболы $y = \sqrt{x^2/3 + 1}$, проходящей через стационарную точку $\tau = i$.

Ответ.

$$\text{Ai}(\xi) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\xi^{1/4}} \exp \left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2} \right).$$

Задача 126. * Методом перевала найти асимптотику функции Эйри (4.2) в классически разрешенной области при $\xi \rightarrow -\infty$.

Указание. $t = |\xi|^{1/2}\tau$, $S(\tau) = \tau^3/3 - \tau$. Линии Стокса $x^3/3 - xy^2 - x = \pm 2/3$ можно нарисовать, разрешая относительно y :

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3x} - 1 + \frac{x^2}{3}}.$$

Значит, середину контура $\tau = 0$ надо сдвинуть в $-i\infty$, контур пустить вдоль двух симметричных ветвей графа Стокса.

Ответ.

$$\text{Ai}(\xi) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}|\xi|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Задача 127.

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{z^3}{3} + \xi z\right)\right] \frac{dz}{1+z^2}, \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

Указание. При попытке поднять и деформировать контур, как это делалось при решении задачи 125, он «зацепится» за полюс $z = +i$. В то же время вклад точки перелома $-\exp(-2\xi^{3/2}/3)/2\sqrt{\pi}\xi^{1/4}$ экспоненциально мал по сравнению с вычетом в полюсе.

Ответ.

$$F \sim \frac{1}{2}e^{1/3-\xi}.$$

Задача 128. Найти асимптотику функции Бесселя нецелого порядка, пользуясь представлением Шлефли

$$J_\nu(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\exp\left[\frac{\xi}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]}{t^{\nu+1}} dt, \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

где контур γ обходит точку 0 в положительном направлении (см. рис. 3.1).

Указание.

$$S(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right), \quad t_{1,2} = \pm i.$$

Деформируем контур так, чтобы он проходил по линиям Стокса

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{y \pm 2}} |y \pm 1|.$$

Ответ. Асимптотика такая же, как для целого порядка

$$J_\nu(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Покажите, что в следующем порядке появится поправка $O(\xi^{-1})$. Если ν — целое число, то поправка получается порядка $O(\xi^{-3/2})$.

Задача 129. Найти квазиклассическую асимптотику полиномов Лежандра при $l \gg 1$

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{2^l} \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - \xi)^{l+1}}.$$

Контур γ обходит точку $z = \xi \equiv \cos \theta$ в положительном направлении.

Указание. Выбрать амплитуду $A(z) = (z - \xi)^{-1}$ и фазу

$$S(z) = \ln \frac{z^2 - 1}{z - \cos \theta}.$$

Ответ.

$$P_l(\cos \theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi l |\sin \theta|}} \cos \left(l\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

4.4. Метод усреднения

Усреднение системы уравнений

$$\dot{\varphi} = \omega + \varepsilon f(I, \varphi), \quad \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi), \quad (4.3)$$

где $I = (I_1, \dots, I_n)$ — вектор медленных (амплитудных) переменных, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — вектор быстрых (фазовых) переменных, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — вектор угловых частот, f, g — заданные функции $2n$ переменных, а ε — малый параметр, сводит ее к системе вдвое меньшей размерности

$$\dot{J} = \varepsilon G(J), \quad G(J) = \overline{g(J, \varphi)}. \quad (4.4)$$

Здесь черта означает усреднение по фазам. Последняя система называется усредненным уравнением и описывает эволюцию амплитуд на больших временах.

Задача 130. Преобразовать уравнение слабонелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon p(x, \dot{x})$$

к виду (4.3) с помощью преобразования Боголюбова — Крылова

$$x = a \cos \varphi, \quad \dot{x} = -a \sin \varphi, \quad \varphi = t + \theta.$$

Указание. Продифференцировать x и приравнять к выражению для \dot{x} , затем продифференцировать \dot{x} и приравнять к $-x - \varepsilon p$. Получившуюся систему можно разрешить относительно $\dot{a}, \dot{\theta}$.

Ответ. $\dot{a} = \varepsilon p \sin \varphi$, откуда следует усредненное уравнение (4.4) с

$$G(J) = \overline{p(J \cos \varphi, -J \sin \varphi) \sin \varphi}.$$

Медленная эволюция определяется Фурье-компонентой силы на частоте первой гармоники.

Задача 131. Найти нелинейный сдвиг частоты осциллятора

$$\ddot{x} + x = \frac{x^3}{6}.$$

Указание. Сдвиг дается уравнением

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{a} \overline{p \cos \varphi}.$$

Ответ.

$$\omega = 1 - \frac{a^2}{16}.$$

Задача 132. Найти эволюцию амплитуды в задачах о резонансе $p = f_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ и параметрическом резонансе $f = -x \cos 2(\varphi - \varphi_0)$.

Ответ. После усреднения соответственно получаем

$$G = \frac{1}{2} f_0 \sin \varphi_0$$

для резонанса и

$$G = -\frac{1}{4} J \sin 2\varphi_0$$

для параметрического резонанса. По какому закону меняется амплитуда в том и другом случае? Проверьте, что при включении трения $2\gamma\dot{x}$ у параметрического резонанса появляется порог.

Задача 133. Найти эволюцию за много периодов амплитуды осциллятора

$$\ddot{x} + \varepsilon p(\dot{x}) + x = 0$$

со слабым трением трех видов:

- 1) вязкое трение $p = 2\dot{x}$;
- 2) сухое трение $p = 2\text{sign}(\dot{x})$;
- 3) нелинейное трение $p = 2\dot{x}^3$.

Ответ. Затухание осциллятора происходит по разным законам:

- 1) $J = J_0 e^{-\varepsilon t}$;
- 2) $J = J_0 - \frac{4\varepsilon t}{\pi}$, $t < \pi J_0/4\varepsilon$, $J = 0$, $t > \pi J_0/4\varepsilon$;
- 3) $J = \frac{1}{J_0^{-1} + 3\varepsilon t/8}$.

Почему при сухом трении затухание происходит быстрее, а при нелинейном — медленнее?

Задача 134. Найти устойчивые предельные циклы двух осцилляторов Ван дер Поля: $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ и $\ddot{x} - \varepsilon(1 - |x|)\dot{x} + x = 0$.

Указание. В первом случае усредненное уравнение $\dot{J} = \varepsilon \frac{J}{2} \left(1 - \frac{J^2}{4}\right)$, во втором $\dot{J} = \varepsilon \frac{J}{2} \left(1 - \frac{4}{3\pi} J\right)$.

Ответ. При $\varepsilon < 0$ устойчиво только решение $J = 0$. При $\varepsilon > 0$ становится устойчивым предельный цикл $J = 2$ у первого осциллятора и $J = 3\pi/4$ у второго.

Глава 5

Применение теории групп

В физике применения теории групп тесно связано с симметрией. Например, симметричные молекулы описываются конечными группами, а сдвиги и повороты в однородном пространстве или времени — группами Ли.

5.1. Основные понятия теории групп

5.1.1. Группа, подгруппа, порядок

Определение. Пусть имеется множество элементов G , на котором определена бинарная операция (которую будем называть умножением), такая, что $\forall a, b \in G$:

$$a \cdot b = c \in G.$$

Если выполняются следующие аксиомы:

- 1) $\exists e \in G$ такой, что $\forall a \in G$ выполняется $e \cdot a = a \cdot e = a$ (единица);
- 2) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$, такой что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (обратный элемент);
- 3) $\forall a, b, c \in G$ справедливо $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность),
то G называется группой.

Пример.

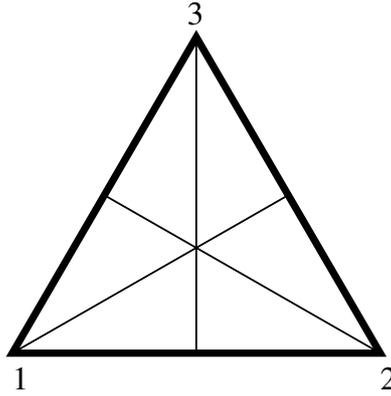
1. Для $G = \{x \geq 0\}$ с операцией $x + y = z$. (Отсутствует обратный элемент.)
2. Для $G = \{x \in R\}$ с операцией $x + y = z$. (G — группа.)
3. Для $G = \{x > 0\}$ с операцией $x \cdot y = z$. (G — группа.)
4. Для $G = \{x \in (0, 2)\}$ с операцией $x \cdot y = z$. (Множество не замкнуто относительно операции.)

Задача 135. Доказать, что $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$.

Определение. Порядком конечной группы $|G|$ называется число элементов в группе G .

Определение. Порядком элемента $|a| = n$ называется минимальное n такое, что $a^n = e$.

Задача 136. Доказать: $|ab| = |ba|$.

Рис. 5.1. Группа треугольника S_{3v}

Решение. Пусть $|ab| = n$ (т. е. $(ab)^n = e$), тогда $e = b(ab)^{n-1} = (ba)^n$. Если существует $k < n$ такое, что $(ba)^k = e$, тогда $(ab)^k = a(ba)^k a^{-1} = e$, что противоречит определению порядка ab .

Задача 137. Доказать: $|a| \leq |G|$.

Решение. Если $|a| = n$, то все элементы $g_k = a^k$ при $1 \leq k \leq n$ различны, так как если существуют $k < q \leq n$ такие, что $g_k = g_q$, то $g_{q-k} = e$. Если $|a| > |G|$, то число различных элементов g_k больше, чем элементов в группе.

Задача 138. Доказать: $|a| = |a^{-1}|$.

Решение. Пусть $|a| = n$, тогда $(a^{-1})^n = (a^{-1})^n a^n = e$. Если существует $k < n$ такое, что $(a^{-1})^k = e$, тогда $a^k = a^k (a^{-1})^k = e$, что противоречит определению порядка a .

Определение. Если $H \subset G$ и H — группа, то H называется подгруппой в G : $H < G$.

Замечание. $H = e$ и $H = G$ являются тривиальными подгруппами и не обсуждаются.

Пример. Группа симметрии правильного треугольника. Элементами этой группы являются: $\{e\}$ — тождественное преобразование, $\{r, r^2\}$ — поворот на 120 и 240 градусов, а также три отражения $\{p, pr, pr^2\}$ относительно биссектрис углов (рис. 5.1). Все аксиомы выполняются. Обратные элементы $r^{-1} = r^2$ и $p^{-1} = p$, остальные находятся аналогично.

Каждому элементу соответствует какая-нибудь перестановка вершин треугольника: $e = (1)(2)(3)$, $r = (123)$, $r^2 = (132)$, $p = (1)(23)$, $pr = (2)(13)$, $pr^2 = (3)(12)$. Все эти перестановки образуют группу подстановок P_3 . Взаимно однозначное соответствие элементов и операций умножения в двух группах называют изоморфизмом. Мы не будем различать изоморфные группы, считая их одной и той же группой.

Можно построить всю таблицу умножения элементов группы друг на друга, но достаточно знать порождающие элементы и определяющие соотношения. В группе треугольника проверим, что $rp = pr^2$. Этого соотношения достаточно, чтобы найти все произведения элементов, например

$$r^2 p = r(rp) = rpr^2 = pr^4 = pr,$$

$$(rp)(r^2 p) = (rp)(pr) = r^2.$$

По любому элементу группы можно построить циклическую подгруппу. Для примера возьмем элемент r . В подгруппе должен быть элемент e , и она должна быть замкнута относительно операции. Рассматривая степени r , получим, что $|r| = 3$ и циклическая подгруппа, которую порождает этот элемент, $C_3 = \{e, r, r^2\}$, состоит из трех элементов, $|C_3| = 3$. Для циклических групп $C_n = \{g^n\}$ выполняется равенство $|C_n| = |g|$, только если g — порождающий элемент. Другие циклические подгруппы $\{e, p\}$, $\{e, pr\}$, $\{e, pr^2\}$ имеют порядок 2, такой же, как и порядок порождающих их элементов.

Подгруппа C_3 состоит из вращений треугольника относительно центра — оси третьего порядка, т. е. порядок оси равен порядку подгруппы. Остальные подгруппы порядка 2 соответствуют отражениям относительно плоскостей симметрии, таких плоскостей три, поэтому здесь три таких подгруппы. Более сложных подгрупп в P_3 нет.

Определение. Группа G называется абелевой или коммутативной, если $\forall g_1, g_2 \in G$ выполняются равенства $g_1g_2 = g_2g_1$

Проверить, что

а) группа P_3 — не абелева ($rp \neq pr$),

б) все циклические группы — абелевы ($\forall g_n = g^n \in G$ выполняется $g_n g_k = g^{n+k} = g_k g_n$).

Задача 139. Доказать, что если $\forall x \in G$ выполняется соотношение $x^2 = 1$, то группа G — абелева.

Решение. $x_1 x_2 = (x_2)^2 x_1 x_2 (x_1)^2 = x_2 (x_2 x_1)^2 x_1 = x_2 x_1$

5.1.2. Смежные классы, индекс подгруппы

Определение. Пусть $H < G$ и $g \in G$. Тогда множество всех элементов вида $\{hg \mid h \in H\}$ с фиксированным g называется правым смежным классом и обозначается Hg . Аналогично $gH = \{gh \mid h \in H\}$ называется левым смежным классом.

Задача 140. Доказать, что либо $Hg_1 = Hg_2$ (множества совпадают) либо $Hg_1 \cap Hg_2 = \emptyset$ (пересечение множеств пусто).

Указания. 1. Сначала покажем, что если $g \in H$, то $hg \in H \forall h \in H$, а значит $Hg = H$.

2. Если $g_1 \notin H$, тогда $\forall h \in H$ имеем $hg_1 \notin H$, а значит $Hg_1 \cap H = \emptyset$.

3. Если $g_2 \in Hg_1$, тогда $\forall h \in H$ имеем $hg_2 \in Hg_1$, а значит $Hg_2 = Hg_1$.

4. Если $g_2 \notin Hg_1$, т. е. $g_2 g_1^{-1} \notin H$, тогда $\forall h \in H$, $hg_2 \notin Hg_1$, а значит $Hg_2 \cap Hg_1 = \emptyset$.

Поэтому множество элементов группы G является объединением непересекающихся смежных классов ее подгруппы H :

$$G = H \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_{m-1},$$

любой элемент из G принадлежит одному и только одному классу Hg_i

Задача 141. Доказать $|Hg| = |H|$.

Решение. Если множество из n различных элементов группы $\{h_k\}$ умножить на один и тот же элемент группы g , то все n элементов множества $\{h_k g\}$ являются различными и составляют правый смежный класс Hg .

Значит, порядок подгруппы обязан быть делителем порядка группы: $|G| = |H|m$.

Определение. Число смежных классов $m = |G : H|$ называется индексом подгруппы H в группе G .

Заметим, что множество элементов $\{g^l \mid l \in Z\}$ является подгруппой, откуда следует: $|G| = |g|k$ — порядок любого элемента группы является делителем порядка группы.

Задача 142. Подгруппы какого порядка могут быть в P_3 ?

Ответ. Подгруппы порядка 2 могут порождаться только элементами порядка 2. Таких элементов три и они порождают три разных подгруппы. Подгруппы порядка 3 могут порождаться только элементами порядка 3. Таких элементов два, и они порождают одну подгруппу. Подгрупп другого порядка быть не может.

Задача 143. Построить правые и левые смежные классы по подгруппе $\{e, p\}$ в группе P_3 .

Ответ. $P_3 = \{e, p\} \cup \{r, pr\} \cup \{r^2, pr^2\}$.

$P_3 = \{e, p\} \cup \{r, rp \equiv pr^2\} \cup \{r^2, r^2p \equiv pr\}$.

Как видим, разбиение по правым и левым классам различно.

Пример. Геометрическая интерпретация.

Рассмотрим все элементы группы P_3 , оставляющие вершину 1 на месте. Доказать, что они образуют подгруппу.

0. Произведение таких элементов очевидно оставляет вершину 1 на месте.

Аксиомы.

1. Тожественное преобразование оставляет вершину 1 на месте.

2. Для любого из этих элементов обратное преобразование оставляет вершину 1 на месте.

3. Ассоциативность очевидна.

Подгруппа $H = \{e, p\}$. Все элементы, переводящие вершину 1 в вершину 2, составляют левый смежный класс $rH = \{r, rp = pr^2\}$, а все элементы, переводящие вершину 1 в вершину 3, составляют левый смежный класс $r^2H = \{r^2, r^2p = pr\}$.

Аналогично правые смежные классы — это сама подгруппа H , все элементы, переводящие вершину 2 в вершину 1, и все элементы, переводящие вершину 3 в вершину 1.

Таким образом, порядок группы можно найти, умножив число элементов, оставляющих одну вершину на месте $|H|$ (порядок подгруппы), на число вершин m , в которые можно перевести эту вершину (индекс подгруппы).

Задача 144. Найти порядок группы куба.

Решение. Всего $m = 8$ вершин. Среди элементов, оставляющих вершину на месте, есть e — тождественное преобразование, r, r^2 — два поворота вокруг главной диагонали куба (ось третьего порядка), а также три отражения p, pr, pr^2 относительно трех плоскостей, проходящих через эту ось и одно из трех прилегающих к этой вершине ребер.

Ответ. $|O_d| = 8 \cdot 6 = 48$.

Задача 145. Найти порядок группы куба без отражений.

Ответ. $|O| = 8 \cdot 3 = 24$.

Задача 146. Найти порядок группы правильного многоугольника D_n .

Ответ. $|D_n| = 2n$.

Задача 147. * Доказать, что если $|G|$ — простое число, то G — абелева.

Задача 148. * Доказать, что если $|G|$ не простое число, то существует нетривиальная подгруппа H группы G .

5.1.3. Инвариантная подгруппа, фактор-группа

Определение. Если разбиение группы G на левые и правые смежные классы подгруппы H совпадает, т. е. $\forall g \in G$ выполняется $Hg = gH$, то подгруппа H называется инвариантной: $H \triangleleft G$.

Замечание. Выражение $Hg = gH$ вовсе не означает, что равенство выполняется для каждого элемента $h \in H$. Его смысл в том, что оба множества содержат одни и те же элементы.

Задача 149. Доказать, что любая подгруппа индекса 2 является инвариантной.

Решение. $|G|/|H| = 2$, значит, $G = H \cup Hg = H \cup gH$, следовательно, $gH = Hg$.

Задача 150. Найти инвариантные подгруппы в группе P_3 .

Решение. Мы видели, что подгруппы второго порядка не являются инвариантными. Поэтому осталось проверить подгруппу $C_3 = \{e, r, r^2\}$:

$$P_3 = C_3 \cup \{p, pr, pr^2\} (= C_3 \cup pC_3) = C_3 \cup \{p, rp, r^2p\} (= C_3 \cup C_3p).$$

Подгруппа C_3 инвариантна, так как $rp = pr^2$ и $r^2p = pr$.

Определение. Пусть $H \triangleleft G$. Рассмотрим множество F , элементами которого являются смежные классы. Это множество $F = G/H$ является группой и называется фактор-группой.

Рассмотрим произведение двух смежных классов $Hg_1Hg_2 = \{h_1g_1h_2g_2 \mid h_1, h_2 \in H\}$. Для инвариантной подгруппы $Hg_1Hg_2 = HHg_1g_2 = Hg_3$, где $g_3 = g_1g_2$. Поэтому операция умножения смежных классов определена.

F является группой, так как существует единичный элемент $E = H$, существует обратный элемент $Q^{-1} = (Hq)^{-1} = q^{-1}H = Hq^{-1}$, ассоциативность очевидна.

Задача 151. Проверить, что операция в фактор-группе P_3/C_3 определена.

Решение. Есть два элемента $E = C_3, P = C_3p$. Для любого $x_k \in C_3$ проверяем, что $x_kx_l \in C_3$, т. е. $EE = E$. Для любого $y_n \in C_3p$ и $x_k \in C_3$ проверяем, что выполняется $x_ky_n \in C_3p$, т. е. $EP = P$ (элемент E есть единица группы). Наконец, проверяем, что $y_ny_l \in C_3$, т. е. $PP = E$. Ассоциативность очевидна. Фактор-группа является циклической группой 2-го порядка: $P_3/C_3 \cong C_2$.

Замечание. Факторизация сохраняет операцию на множестве, поэтому отображение $G \rightarrow G/H$ является гомоморфизмом.

Замечание. Физическая интерпретация фактор-группы.

Заметим, что все элементы входящие в C_3 оставляют ось третьего порядка неизменной. Все отражения, т. е. элементы класса pC_3 , переводят эту ось в себя с обратным направлением вращения. Таким образом, фактор-группа описывает преобразование ориентации оси третьего порядка, игнорируя все остальные преобразования правильного треугольника.

Задача 152. * Найти инвариантную подгруппу в группе вращений куба O , которая содержит элементы, оставляющие неподвижными оси четвертого порядка. Построить фактор-группу.

5.1.4. Сопряженные элементы

Определение. Введем понятие эквивалентных элементов на множестве M . Пусть существует бинарное отношение (обозначим его \sim), обладающее тремя свойствами:

- 1) $x \sim x$ — рефлексивность;
- 2) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ — симметричность;
- 3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ — транзитивность.

Тогда можно ввести классы эквивалентности $K_x = \cup x_i \sim x$, которые обладают свойством: либо $K_x = K_y$, если $x \sim y$ либо $K_x \cap K_y = \emptyset$. При этом все множество можно разбить на классы (непересекающиеся подмножества) $M = \cup K$.

Определение. Два элемента a и b сопряжены, если $\exists g \in G$ такое, что $a = bg^{-1}$.

Проверяем, что для сопряжения все три свойства эквивалентности выполняются, а значит можно ввести классы эквивалентности, так что каждый элемент группы будет входить только в один класс. Таким образом, в группах можно ввести классы сопряженных элементов (КСЭ) K , используя операцию сопряжения. Далее сопряженность элементов a и b будем обозначать $a \sim b$.

Задача 153. Найти классы сопряженных элементов в P_3 .

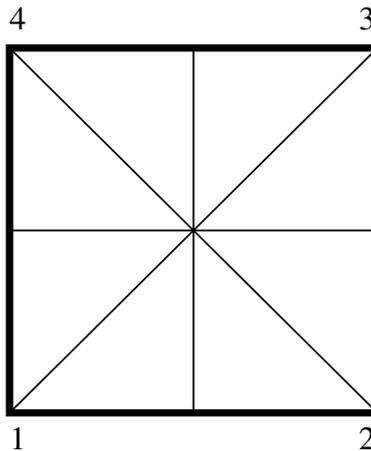
Ответ. $P_3 = \{e\} \cup \{r, r^2\} \cup \{p, pr, pr^2\}$ — всего три класса сопряженных элементов.

Замечание. Не путать классы сопряженных элементов со смежными классами. Это совершенно разные разбиения множества.

Задача 154. Доказать, что, если $x \sim y, |x| = |y|$. В одном КСЭ могут быть элементы только одного порядка.

Задача 155. Доказать, что $ab \sim ba$.

Задача 156. Пусть $H < G$. Доказать, что $H \triangleleft G$ тогда и только тогда, когда $H = \cup K$.

Рис. 5.2. Группа квадрата D_4

Решение. Если в инвариантной подгруппе содержится хотя бы один элемент x класса K_x , то в ней содержатся все элементы этого класса: $gH = Hg, \forall g \in G$ значит $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$, и, следовательно, если $x \in H$, то $gxg^{-1} \in H, \forall g \in G$. Если подгруппа представима в виде суммы КСЭ, то $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$, значит, $gH = Hg, \forall g \in G$. Таким образом, инвариантная подгруппа H состоит из КСЭ группы G .

Задача 157. Проверить свойства 154–156 в группе треугольника.

Задача 158. * Проверить свойства 154–155 в группе куба.

Задача 159. Найти число классов сопряженных элементов в абелевой группе.

Ответ. $|G| = n$.

5.2. Группа квадрата и куба

Элементы групп симметрии молекул могут быть трех видов:

- 1) повороты вокруг осей симметрии n -го порядка на угол $2\pi k/n$;
- 2) отражение относительно плоскостей симметрии;
- 3) зеркально-поворотные преобразования, т. е. последовательное отражение и поворот вокруг оси, ортогональной плоскости отражения.

Задача 160. Найти элементы и их порядок в группе квадрата D_4 (рис. 5.2).

Ответ. e , повороты r, r^3 — порядок 4, поворот r^2 — порядок 2, повороты относительно диагоналей p, pr^2 — порядок 2, повороты относительно осей, проходящих через середины противоположных ребер, pr, pr^3 — порядок 2. Соотношение: $rp = pr^3$, остальные правила умножения получаются из этого соотношения.

Задача 161. * Найти элементы и их порядок в группе куба.

Определение. 1. Если две оси переводятся друг в друга групповым преобразованием, то они сопряжены.

2. Если две плоскости переводятся друг в друга групповым преобразованием, то они сопряжены.

3. Если ось переводится в себя с другим направлением вращения групповым преобразованием, то она называется двусторонней.

Как находить классы сопряженных элементов для точечной группы?

1. Повороты на одинаковый угол вокруг сопряженных осей сопряжены: $r_1^k = gr_2^k g^{-1}$, где g — элемент группы, переводящий одну ось в другую.

2. Взаимно обратные повороты вокруг двусторонней оси сопряжены: $r = gr^{-1}g$, где g — элемент группы, переворачивающий ось. (Ось является двусторонней, только если в группе существует перпендикулярная ей ось второго порядка либо плоскость симметрии, проходящая через эту ось.)

3. Отражения от сопряженных плоскостей сопряжены: $\sigma_1^k = g\sigma_2^k g^{-1}$, где g — элемент группы, переводящий одну плоскость в другую.

Задача 162. Найти классы сопряженных элементов в группе квадрата.

Ответ. $D_4 = \{e\} + \{r^2\} + \{r, r^3\} + \{p, pr^2\} + \{pr, pr^3\}$ — пять классов.

Задача 163. * Найти классы сопряженных элементов в группе куба.

Определение. Множество Z , состоящее из элементов z , перестановочных со всеми элементами группы G , называется центром группы: $zg = gz \forall g \in G$.

Задача 164. Доказать, что $Z \triangleleft G$.

Решение. Каждый элемент z из центра Z составляет класс эквивалентности $K_z = \{z\}$.

Задача 165. Найти центр группы квадрата.

Ответ. $Z = \{e, r^2\}$.

Задача 166. * Найти центр группы куба.

Ответ. $Z = \{e, i\}$, где i — инверсия.

Задача 167. Найти подгруппы в группе квадрата, указать инвариантные.

Решение. Порядок $D_4 = 8$, делители 2 и 4. По элементу $|r| = 4$ строим циклическую подгруппу C_4 , поскольку ее индекс $m = |D_4|/|C_4| = 2$, то $C_4 \triangleleft D_4$. По элементу $|r^2| = 2$ строим циклическую подгруппу Z , поскольку это центр группы, то $Z \triangleleft D_4$. По элементу $|p| = 2$ строим циклическую подгруппу C_2 , поскольку в нее не входит элемент $pr^2 \in K_p$, то она не инвариантна. Аналогично для элементов pr^2 , pr и pr^3 . Ищем, нет ли еще подгрупп порядка 4. Находим $\{e, p, pr^2, r^2\} \cong D_2 \triangleleft D_4$, аналогично $\{e, pr, pr^3, r^2\} \cong D_2 \triangleleft D_4$ — обе инвариантны.

Задача 168. Найти правые и левые смежные классы по подгруппе $H = \{e, p\}$ группы квадрата.

Ответ. $D_4 = \{e, p\} + \{r, pr\} + \{r^2, pr^2\} + \{r^3, pr^3\} = \{e, p\} + \{r, pr^3\} + \{r^2, pr^2\} + \{r^3, pr\}$.

Задача 169. Построить фактор-группу $F = D_4/Z$.

Ответ. $F = \{E, R, P, PR\} \cong D_2$.

Задача 170. Построить фактор-группу $F = D_4/C_4$.

Ответ. $F = \{E, P\} \cong C_2$.

Задача 171. * Доказать, что если $F = G/Z$ — циклическая, то G — абелева.

5.3. Матричные представления

Определение. Гомоморфизм данной группы G в группу квадратных матриц $GL(C, n)$ называется матричным представлением этой группы D .

Задача 172. Доказать, что любое представление D фактор-группы G/H является представлением группы.

Решение. Факторизация сохраняет операцию на множестве, поэтому отображение $G \rightarrow G/H \rightarrow D$ является гомоморфизмом $G \rightarrow D$.

Определение. Порядком матричного представления группы называется порядок матрицы $D(g)$: $n = \dim D(g)$.

Пример. Выделяют следующие важные представления.

1. Всегда существует тривиальное представление $D(g) = 1$.
2. Точным представлением называют изоморфизм $G \cong D(g)$.
3. Регулярным представлением группы $|G| = n$ называют представление порядка n и вида $D_{ij}(g_k) = 1$, если $g_i = g_k g_j$ и $D_{ij}(g_k) = 0$, если $g_i \neq g_k g_j$.

Задача 173. Построить точное двумерное представление группы C_{3v} , используя матрицы преобразования координат в плоскости треугольника.

Задача 174. Построить точное двумерное представление группы C_{3v} , используя матрицы преобразования переменных z, z^* комплексной плоскости, на которую помещен треугольник.

Задача 175. Построить точное трехмерное представление группы C_{3v} , используя матрицы преобразования вершин равностороннего треугольника $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$.

Ответ.

$$T(e) = E, \quad T(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(r^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(pr) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(pr^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 176. * Построить регулярное представление группы C_{3v} .

Задача 177. Выразить через матрицу $D(g)$ следующие матрицы:

- 1) $D(g^n) = D^n(g)$;
- 2) $D(g^{-1}) = D^{-1}(g)$,

и показать, что если $x \sim y$, то $D(x) \sim D(y)$.

Определение. Представления $\phi : g \rightarrow D(g)$ и $\phi' : g \rightarrow D_1(g)$ называются эквивалентными, если $\exists S$ такая, что $D_1(g) = S^{-1}D(g)S, \forall g \in G$.

Задача 178. * Доказать, что для любого представления конечной группы существует эквивалентное ему унитарное представление: $D(g)D^\dagger(g) = E, \forall g \in G$.

Задача 179. Показать, что точные представления из задач 173–175 являются унитарными.

Замечание. Далее нас будут интересовать неэквивалентные представления. Введем характер представления.

Определение. *Характером представления называются след матрицы $\chi(D(g)) = \text{Tr}(D(g))$.*

Задача 180. Показать, что если $D_1 \sim D$, то $\chi(D_1(g)) = \chi(D(g)) \forall g \in G$. Характеры эквивалентных представлений совпадают.

Задача 181. Найти $\chi(D(e))$.

Ответ. $\chi(D(e)) = \dim D$.

Задача 182. Показать, что если $g_1 \sim g$, то $\chi(g_1) = \chi(g)$. Таким образом, $\chi(g) = \chi(K_g)$ зависит только от класса сопряженных элементов для любого представления.

Задача 183. * Пользуясь решением задачи 178, показать, что $\chi(g^{-1}) = \chi(g)^*$ для любого представления $D(g)$.

Решение. Пусть U — унитарное представление и $U \sim D$, тогда $\chi(D(g))^* = \chi(U(g))^* = \chi(U^\dagger(g)) = \chi(U^{-1}(g)) = \chi(U(g^{-1})) = \chi(D(g^{-1}))$.

Задача 184. Пользуясь решением задачи 178, показать, что для любого N -мерного представления $D(g)$ имеет место формула $\chi(g) = \sum_{k=1}^N \exp(\frac{2\pi i p_k}{n})$, где $|g| = n$ и p_k — целые.

Решение. Пусть U — унитарное представление и $U \sim D$, тогда $\chi(D(g)) = \chi(U(g)) = \sum_{k=1}^N \exp(i\phi_k)$. Поскольку $U(g^n) = (U(g))^n = E$, то $\phi_k = 2\pi p_k/n$, где p_k — целые.

Определение. *Если существует базис, в котором все матрицы $D(g)$ принимают блочно-диагональный вид, то представление $D(g)$ называется вполне приводимым.*

Замечание. Таким образом, существует базис, в котором все матрицы любого приводимого представления конечной группы есть прямая сумма матриц неприводимых представлений: $D(g) \sim \oplus D^{(k)}(g)$. Причем очевидно, что $\dim D = \sum_k \dim D^{(k)}$, где $D^{(k)}(g)$ — неприводимые представления.

Задача 185. Доказать, что порядок любого неприводимого представления абелевой группы равен 1.

Решение. Поскольку все g коммутируют, то все матрицы любого представления $D(g)$ коммутируют, а значит, существует базис, в котором $S^{-1}D(g)S$ диагональна. Все матрицы представления диагональны, т. е. приводимы, если $\dim D > 1$.

Задача 186. Найти все неприводимые представления для циклической группы C_n .

Решение. Обозначим $g_k = g^k$, тогда $D(g_k) = D^k(g)$. Любое одномерное представление обладает свойством $D^n(g) = D(g^n) = 1$. Существует n решений этого уравнения $D^{(j)}(g) = \exp(2\pi i j/n)$. Таким образом, имеется n одномерных представлений вида $D^{(j)}(g_k) = \exp(2\pi i jk/n)$.

Замечание. Приведем без доказательства следующие два свойства неприводимых представлений.

1. Число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов.

2. Справедливо соотношение ортогональности неприводимых представлений $D^{(i)}$

$$\sum_{g_k \in G} D_{\alpha, \beta}^{(i)*}(g_k) D_{\gamma, \delta}^{(j)}(g_k) = \frac{n}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha, \gamma} \delta_{\beta, \delta}, \quad (5.1)$$

где $|G| = n$, а n_i — размерность представления $D^{(i)}(g)$.

Задача 187. * Доказать, что $|G| \geq \sum_i n_i^2$, где суммирование выполнено по всем неэквивалентным неприводимым представлениям.

Указание. Каждому матричному элементу каждого неприводимого представления можно поставить в соответствие n -мерный вектор с компонентами, нумеруемыми элементами группы, $n = |G|$. Вследствие (5.1) все векторы ортогональны, значит, таких векторов может быть не больше n . Прямой подсчет числа матричных элементов дает необходимую формулу.

Задача 188. Вывести соотношение ортогональности для характеров неприводимых представлений.

$$\sum_{g_k \in G} \chi^{(i)*}(g_k) \chi^{(j)}(g_k) = \sum_l \chi^{(i)*}(K_l) \chi^{(j)}(K_l) p_l = n \delta_{ij}, \quad (5.2)$$

где p_l — число элементов в классе эквивалентности K_l .

Указание. Воспользоваться (5.1) для следов матриц.

Задача 189. Из соотношения ортогональности для характеров неприводимых представлений вывести соотношение

$$\sum_i \chi^{(i)*}(K_l) \chi^{(i)}(K_m) = \frac{n}{p_l} \delta_{lm}. \quad (5.3)$$

Указание. Заметим, что матрица $U_{jl} = \chi^{(j)}(K_l) \sqrt{p_l/n}$ унитарна: $U^\dagger U = E$. Тогда искомое соотношение имеет вид $UU^\dagger = E$.

Задача 190. Пользуясь (5.3), доказать, что $|G| = \sum_i n_i^2$ — сумма квадратов размерностей всех неэквивалентных неприводимых представлений.

Указание. Рассмотреть $K_l = K_m = \{e\}$.

Пример. Найти таблицу характеров группы треугольника.

В группе 3 класса сопряженных элементов, значит, имеется три неприводимых представления. Их размерности задаются равенством $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$. Единственное разложение в сумму квадратов имеет вид $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Первая строка таблицы это всегда характер тривиального представления $\chi^{(1)}(K_l) = 1$. Первый столбец это характеры неприводимых представлений от e , т. е. $\dim D^{(i)} = n_i$. Характер второго одномерного представления от элемента 3-го порядка r должен удовлетворять уравнениям $(\chi^{(2)}(r))^3 = 1$ и $\chi^{(2)}(r) = \chi^{(2)}(K_2) = \chi^{(2)*}(r)$, откуда $\chi^{(2)}(r) = 1$. Для элементов второго порядка $\chi^{(2)}(K_3) = \pm 1$, а из ортогональности характеров $(1 + 2 + 3\chi^{(2)}(K_3) = 0)$, следует, что $\chi^{(2)}(K_3) = -1$. Наконец, последняя строка таблицы характеров строится из ортогональности столбцов

	e	r, r^2	p, pr, pr^2
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	0

Задача 191. Найти таблицу характеров группы квадрата.

Решение. В группе 5 классов сопряженных элементов, значит имеется 5 неприводимых представлений. Их размерности задаются равенством $\sum n_i^2 = 8$. Отсюда получаем для размерностей неприводимых представлений $n_i = (1, 1, 1, 1, 2)$. Первая строка таблицы — это всегда характер тривиального представления $\chi^{(1)}(K_l) = 1$. Первый столбец — это характеры неприводимых представлений от e , т. е. $\dim D^{(i)} = n_i$. Характеры оставшихся одномерных представлений найдем с помощью неприводимых представлений фактор-группы $D_4/Z = D_2$, которая состоит из e и 3-х элементов 2-го порядка. Она абелева, значит, у нее 4 одномерных неприводимых представления, которые являются также и искомыми представлениями группы квадрата. Поскольку при факторизации два КСЭ группы квадрата: $\{e\}$ и $\{r^2\}$ сливаются в один класс группы D_2 , то имеем для всех одномерных представлений группы квадрата $\chi^{(i)}(r^2) = 1$, а из ортогональности столбцов $\chi^{(5)}(r^2) = -2$ для двумерного представления. Для элементов второго порядка, принадлежащих классам K_3, K_4, K_5 , имеем $\chi^{(i)}(K_j) = \pm 1$, а из ортогональности характеров D_2 следует, что $\chi^{(2)}(K_{3,4,5}) = (1, -1, -1)$ и $\chi^{(3)}(K_{3,4,5}) = (-1, 1, -1)$ и $\chi^{(4)}(K_{3,4,5}) = (-1, -1, 1)$. Наконец, последняя строка таблицы для характеров двумерного представления строится из ортогональности столбцов:

	e	r^2	r	p	pr
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

Задача 192. * Найти таблицу характеров группы куба O_d .

Указание. Показать, что $O_d = C_2 \otimes O$, где $C_2 = \{e, i\}$, а элемент $i \in Z$ — есть инверсия. Убедится, что для каждого класса сопряженных элементов $K_j = \{x_1, \dots, x_n\}$ группы O в группе O_d появляется класс $iK_j = \{ix_1, \dots, ix_n\}$, т. е. число классов удваивается ($x_i \sim x_j \Rightarrow ix_i \sim ix_j$). Таблица характеров группы O_d получается прямым произведением таблиц характеров C_2 и O :

$$\chi_{O_d}^{ij}(K_{nm}) = \chi_{C_2}^i(K_n)\chi_O^j(K_m).$$

5.4. Применение теории представлений

Замечание. Любое представление конечной группы $D(G) = \oplus a_i D^{(i)}(G)$ есть прямая сумма неприводимых представлений. Пользуясь ортогональностью неприводимых характеров (5.2), можно найти, сколько копий i -го неприводимого представления входит в эту сумму:

$$a_i = \frac{1}{|G|} \sum_l \chi^{(i)*}(K_l) p_l \chi(K_l).$$

Задача 193. Разложить представление из задачи (175) по неприводимым.

Находим характеры этого трехмерного представления $\chi(K_i) = (3, 0, 1)$ и, пользуясь ортогональностью характеров неприводимых представлений (5.2), получаем $T(g) = D^{(1)} \oplus D^{(3)}$. Таким образом, существует такой базис, в котором все матрицы представления одновременно имеют блочно-диагональный вид с блоками тривиального и двумерного неприводимых представлений группы треугольника.

Определение. Пусть $T(g)$ — матрицы приводимого представления группы G , а его разложение на неприводимые представления имеет вид $T(g) = \oplus a_i D^{(i)}(g)$. Тогда матрица

$$P_i = \frac{\dim D^{(i)}}{|G|} \sum_g \chi^{(i)*}(g) T(g)$$

является проектором на подпространство векторов $\vec{q}_\alpha^{(i)}$, соответствующих i -му представлению, т.е. в пространстве, порожденном этими векторами, реализуются a_i копий представления $D^{(i)}(g)$.

Пример. Найти базис векторов, в котором представление из задачи 175 принимает блочно-диагональный вид.

Составим проектор на тривиальное представление

$$P_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя на какой-нибудь вектор, например, (100) , получим собственный вектор $\vec{q}^{(1)} = (1, 1, 1)$, преобразующийся по тривиальному представлению. Действительно, для любого группового преобразования этот вектор переходит в себя $T(g)\vec{q}^{(1)} = \vec{q}^{(1)}$.

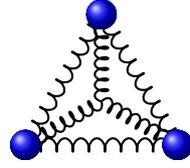
Проектор для неприводимого представления $D^{(2)}$ равен нулю, так как это представление отсутствует в разложении $T(g)$ по неприводимым. Наконец, проектор на подпространство 2-мерного неприводимого представления имеет вид

$$P_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

P_3 проецирует трехмерное пространство на подпространство, натянутое на векторы $\vec{q}_1^{(3)} = (2, -1, -1)$ и $\vec{q}_2^{(3)} = (0, 1, -1)$ (можно выбрать другой базис в этом подпространстве). И при любом групповом преобразовании каждый из этих векторов отображается в линейную комбинацию $\vec{q}_1^{(3)}$ и $\vec{q}_2^{(3)}$.

5.4.1. Кратность вырождения нормальных колебаний

Пример. Найти кратности вырождения частот колебаний системы трех одинаковых грузиков, расположенных в плоскости и соединенных друг с другом одинаковыми пружинками, а также соединенных одинаковыми пружинками с неподвижным центром.



У каждого грузика есть два направления движения x_i, y_i , т. е. всего 6 обобщенных координат q_j . При любом преобразовании симметрии $g \in D_3$ эти координаты переходят в линейную комбинацию друг друга: $\vec{q} \rightarrow \hat{T}(g)\vec{q}$, а значит, $T(g)$ есть 6-мерное матричное представление D_3 . Из аналитической механики мы знаем, что существует базис из собственных векторов гамильтониана задачи. Нетрудно понять, что в этом базисе матрицы $T(g)$ принимают блочно диагональный вид. Если \vec{q}^α собственный для гамильтониана с частотой ω_α , то при любом преобразовании он должен оставаться собственным с той же частотой. Это означает, что либо $\hat{T}(g)\vec{q}^\alpha = \lambda_g \vec{q}^\alpha$, т. е. переходит в себя, тогда он преобразуется по одномерному неприводимому представлению $D^{(i)}(g) \equiv \lambda_g$, и его частота невырождена, либо $\hat{T}(g)\vec{q}^\alpha$ раскладывается в сумму базисных векторов $\vec{q}_1^\alpha, \dots, \vec{q}_n^\alpha$, каждый из которых обязан отвечать колебанию с той же самой частотой. Тогда набор этих векторов преобразуется по n -мерному неприводимому представлению, а движение с частотой ω_α является n -кратно вырождено. Таким образом, достаточно разложить исходное представление по неприводимым, тогда число неприводимых представлений равно числу различных собственных частот всех колебаний системы, а размерности неприводимых представлений равны кратности вырождения соответствующих частот. Найдем характеры: $\chi(e) = 6$, при повороте все грузики меняются местами, а значит, на диагонали $T(r)$ стоят 0, т. е. $\chi(r) = 0$,

$$T(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, при отражении только один грузик остается на месте, а матрица преобразования его координат имеет вид

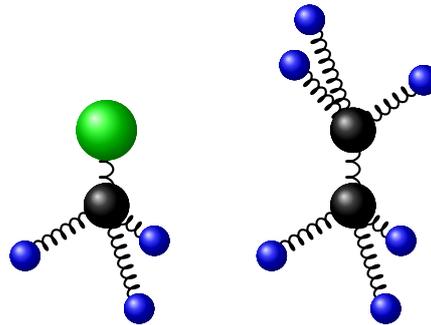
$$T(p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому $\chi(K_3) = 0$. Разложение характера $(6, 0, 0)$ по неприводимым дает вид разложения представления в сумму неприводимых: $T(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \oplus 2D^{(3)}(g)$, два одномерных и два двумерных представления, т. е. в спектре колебаний будет 4 разных частоты, две из которых двукратно вырождены.

Если в системе допустимо вращение вокруг центра, то в спектре колебаний станет на одну частоту меньше. Чтобы найти, какому неприводимому представлению отвечает вращение, вычислим его характер: поскольку вращение имеет одну компоненту,

то $\chi^{(M)}(e) = 1$. Собственный вектор вращения есть $\vec{q}^M = (1, 0, -1/2, \sqrt{3}/2, -1/2, -\sqrt{3}/2)$, умножая его на $T(r)\vec{q}^M = \vec{q}^M$, т. е. $\chi^{(M)}(r) = 1$, а умножая на $T(p)$, получим $\chi^{(M)}(p) = -1$. Это характер неприводимого представления $\chi^{(2)}$. Соответственно в разложении колебательных движений это неприводимое представление будет отсутствовать. Собственные векторы, отвечающие разным колебаниям, можно найти с помощью проектора на подпространство неприводимого представления, отвечающее данной частоте.

Замечание. Характер вращения может быть вычислен гораздо проще. Из аналитической механики мы знаем, что вращение полностью описывается псевдовектором полного момента импульса \vec{M} . В нашем случае он имеет всего одну компоненту M_z . При поворотах r она переходит в себя, значит $\chi^M(r) = 1$, а при отражениях меняет знак, значит $\chi^M(p) = -1$.



Задача 194. Найти кратности вырождения частот в колебательном спектре молекулы CH_3F (группа C_{3v}).

Задача 195. Найти кратности вырождения частот в колебательном спектре молекулы C_2H_6 .

Решение. Для нахождения таблицы характеров группы симметрий G молекулы C_2H_6 найдем их элементы. Это 6 элементов $\{e, r, r^2, p, pr, pr^2\}$ подгруппы C_{3v} и еще 6 элементов, имеющих вид $iC_{3v} = C_{3v}i$, где i — инверсия, она принадлежит центру группы. Такая группа называется прямым произведением групп: $G = \{e, i\} \times C_{3v} = C_2 \times C_{3v}$. В результате с каждым классом K_l группы C_{3v} появляется еще один класс iK_l , соответственно, число неприводимых представлений удваивается. Более того, таблица характеров G также равна прямому произведению таблиц характеров $\chi(G) = \chi(C_2) \otimes \chi(C_{3v})$. Таблицу характеров C_{3v} мы находили, а для C_2 она имеет вид

	e	g
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

Прямое произведение дает искомую таблицу характеров группы D_{3v} :

	e	r	p	i	ir	ip
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	0	2	-1	0
$\chi^{(4)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi^{(5)}$	1	1	-1	-1	-1	1
$\chi^{(6)}$	2	-1	0	-2	1	0
χ_{os}	18	0	4	0	0	2

Теперь рассмотрим, как преобразуются векторы отклонений \vec{q}_α атомов от положения равновесия. Всего 8 атомов и 3 компоненты отклонения на каждый, т. е. имеем 24-мерный вектор отклонений и представление порядка $\dim T(g) = 24$, значит $\chi(e) = 24$. При поворотах вокруг оси 3-го порядка только 2 атома углерода остаются на месте, для каждого из них \vec{q}_α преобразуется матрицей поворотов, след которой равен $\chi_v(\phi) = 1 + 2 \cos(\phi)$. Общая формула для нахождения характера поворота вокруг любой оси имеет вид

$$\chi(\phi) = N_a(1 + 2 \cos \phi),$$

где N_a — число атомов на оси, а ϕ — угол поворота, т. е. $\chi(r) = 0$. При отражении для вектора отклонения атома матрица диагональна, а ее след равен 1. Общая формула имеет вид

$$\chi(p) = N_s,$$

где N_s — число атомов, лежащих в плоскости симметрии, т. е. $\chi(p) = 4$. При инверсии все координаты меняют знак, поэтому $\chi(i) = -3N_0$, где N_0 — число атомов в центре инверсии, у нас $\chi(i) = 0$. Для зеркальноповоротных элементов 3-мерная матрица для одного вектора имеет вид $D(\sigma)D(\phi) = D(i)D(\phi + \pi) = -D(\phi + \pi)$, где $D(\phi)$ — матрица поворота на угол ϕ вокруг некоторой оси, а $D(\sigma)$ — отражение относительно плоскости, ортогональной этой оси:

$$\chi(\sigma r_\phi) = N_0(-1 + 2 \cos \phi),$$

где N_0 — число атомов в центре. Наконец, элементы ipr^k суть повороты вокруг осей второго порядка, и можно пользоваться выведенной формулой, для нас $N_0 = 0$. Окончательно получим

$$\chi(g) = (24, 0, 4, 0, 0, 0).$$

Кроме колебаний, молекула может двигаться как целое, что полностью описывается полным импульсом \vec{P} , а также вращаться как целое, что описывается моментом импульса \vec{M} . Чтобы получить чисто колебательный спектр молекулы, необходимо вычесть из полного представления два 3-мерных представления, отвечающих этим движениям. Для вектора \vec{P} , пользуясь матрицами поворотов и отражений, получим для характера:

$$\chi_v(g) = (3, 0, 1, -3, 0, -1),$$

а для момента импульса

$$\chi_M(g) = (3, 0, -1, 3, 0, -1).$$

Вычитая эти характеры из полного, для колебательных степеней свободы получим

$$\chi_{os}(g) = (18, 0, 4, 0, 0, 2).$$

Раскладывая по неприводимым, получим

$$a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 3, a_4 = 2, a_5 = 1, a_6 = 3.$$

Ответ. 12 частот в спектре, из них 6 частот двукратно вырождены.

Замечание. Удобно пользоваться формулами для характеров в подпространстве колебательных степеней свободы. Вычитая из исходных характеров характеры в подпространстве импульса и момента импульса, получим:

$$\begin{aligned}\chi_{os}(e) &= 3(N_A - 2), & \chi_{os}(\phi) &= (N_a - 2)(1 + 2 \cos \phi), \\ \chi_{os}(p) &= N_s, & \chi_{os}(\sigma r_\phi) &= N_0(-1 + 2 \cos \phi).\end{aligned}$$

5.4.2. Снятие вырождения

Колебания круглой мембраны описываются амплитудой смещения $u(\vec{r})$ относительно равновесного положения точек мембраны. Из решения, найденного методом разделения переменных:

$$u = \sum_m [a_m(r) \cos(m\phi) + b_m(r) \sin(m\phi)],$$

следует, что все колебания двукратно вырождены (за исключением $m = 0$), поскольку $a_m(r)$ и $b_m(r)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению с одинаковыми граничными условиями.

Задача 196. Найти спектр колебаний мембраны, если на нее поместили 3 груза в вершины правильного треугольника, и симметрия понизилась с группы $O(2)$ до C_{3v} .

Решение. Рассмотрим, как преобразуются функции $\cos(m\phi)$ и $\sin(m\phi)$ под действием преобразований группы треугольника, и вычислим характеры: $\chi_m(e) = 2$,

$$D(r) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi m/3) & -\sin(2\pi m/3) \\ \sin(2\pi m/3) & \cos(2\pi m/3) \end{pmatrix},$$

откуда $\chi_m(r) = 2 \cos(2\pi m/3)$,

$$D(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда $\chi_m(p) = 0$.

Чтобы понять, какие кратности вырождения остались в новой системе, надо разложить характер представления, соответствующий m азимутальной моде, по неприводимым характерам группы треугольника. Имеем

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos(2\pi m/3)); \\ a_2 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos(2\pi m/3)) = a_1; \\ a_3 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cos(2\pi m/3)) = 1 - a_1.\end{aligned}$$

Ответ. Если m кратно 3, то вырождение снимается, так как соответствующее двумерное представление при понижении симметрии становится приводимым и распадается на два одномерных $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, а если не кратно 3, то вырождение остается.

Задача 197. Атом с моментом $J = 1$ имеет 3-кратное вырождение по уровням энергии вследствие того, что состояния с разным значением проекции момента на ось z ($|M| \leq J$) имеют одну и ту же энергию из-за симметрии относительно группы вращений $O(3)$. Найти, как снимается это вырождение, если атом поместили в поле с треугольной симметрией C_{3v} .

Решение. Зависимость собственных функций с разной проекцией момента от азимутального угла можно записать в виде $\Psi_M \sim (\exp(i\phi), 1, \exp(-i\phi))$. Рассмотрим, как преобразуются эти функции под действием преобразований группы треугольника, и вычислим характеры: $\chi(e) = 3$,

$$D_{J=1}(r) = \begin{pmatrix} \exp(i2\pi/3), & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \exp(-i2\pi/3) \end{pmatrix},$$

откуда $\chi(r) = 0$,

$$D_{J=1}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\chi(p) = 1$.

Чтобы понять, какие кратности вырождения остались в новой системе, надо разложить характер этого представления по неприводимым характерам группы треугольника. Имеем

$$a_1 = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1) = 1;$$

$$a_2 = \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 1) = 0;$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 + 0) = 1,$$

откуда получаем $D_{J=1}(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(3)}(g)$, 3-кратное вырождение снимается до двукратного и однократного. Чтобы понять, какие из собственных функций остаются двукратно вырождены, найдем проектор на 2-мерное неприводимое представление:

$$P_3 = \frac{1}{6} \sum_g \chi^{(3)}(g) D_{J=1}(g) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя этим проектором на любой вектор, получим $\Psi_M \sim (1, 0, 1)$, т. е. вырожденными остаются функции с противоположными значениями проекции момента: $M = \pm 1$.

Задача 198. * Атом с моментом $J = 1$ имеет $(2J + 1)$ -кратное вырождение по уровням энергии вследствие того, что состояния с разным значением проекции момента на ось z ($|M| \leq J$) имеют одну и ту же энергию из-за симметрии относительно группы вращений $O(3)$. Найти, как снимается это вырождение, если атом поместили в поле с треугольной симметрией C_{3v} .

5.4.3. Правила отбора

Определение. Пусть имеется n -мерное представление D^1 группы G , действующее на пространстве \vec{v}_1 , и t -мерное представление D^2 группы G , действующее на пространстве \vec{v}_2 . Тогда прямое (кронекерово) произведение двух представлений $D(g) = D^1(g) \otimes D^2(g)$ (или покомпонентно $D_{i_1 i_2, j_1 j_2} = D_{i_1, j_1}^1 D_{i_2, j_2}^2$) является $(k = n \cdot t)$ -мерным представлением группы G , действующем на пространстве k -мерных векторов $\vec{v} = \vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2$ (или покомпонентно $v_{j_1 j_2} = v_{j_1}^1 v_{j_2}^2$). Двухкомпонентный индекс $j_1 j_2$ пробегает $k = n \cdot t$ различных значений. Аналогично можно построить представление группы с помощью прямого произведения трех и более представлений. В общем случае, даже если исходные представления $D^{(1,2)}$ были неприводимыми, прямое произведение будет приводимым представлением и есть сумма неприводимых представлений $D(g) = \bigoplus_{\alpha} a_{\alpha} D^{(\alpha)}$.

Задача 199. Доказать, что $\chi(D^1(g) \otimes D^2(g)) = \chi(D^1(g)) \cdot \chi(D^2(g))$.

Определение. Пусть молекула обладает группой симметрии G , тогда любая собственная функция Ψ гамильтониана этой молекулы преобразуется под действием групповых элементов по какому-либо из неприводимых представлений этой группы $D^{(\alpha)}(g)$ размерности n_{α} : $\Psi = \Psi_i^{\alpha}$, где $i = 1, \dots, n_{\alpha}$. Рассмотрим вероятности перехода из начального состояния системы $\Psi_{i_1}^{\alpha_1}$ в конечное $\Psi_{i_2}^{\alpha_2}$ под действием внешнего возмущения, например электрического поля \vec{E} , преобразующегося по 3-мерному представлению $D^V(g)$. По определению матричный элемент перехода $A_{i_1, i_2} \propto \langle \Psi_{i_1}^{\alpha_1} | E_i | \Psi_{i_2}^{\alpha_2} \rangle$ преобразуется по прямому произведению $D^A(g) = D^{(\alpha_1)}(g) \otimes D^V(g) \otimes D^{(\alpha_2)}(g)$, являющемуся приводимым представлением.

Поскольку матричный элемент не может изменяться под действием группы G , то либо матричный элемент равен нулю либо в разложении представления $D^A(g)$ по неприводимым присутствует тривиальное $D^{(1)}(g) = 1$ представление. Только проекция $(k = n_{\alpha_1} \cdot 3 \cdot n_{\alpha_2})$ -мерного вектора амплитуды перехода A_{i_1, i_2} на подпространство, соответствующее тривиальному представлению, отлична от нуля. Запрет на переходы между некоторыми состояниями называется правилами отбора.

Задача 200. Найти правила отбора для переходов под действием электрического поля для молекулы, обладающей симметрией треугольника.

Решение. Сначала найдем характер трехмерного представления на \vec{E} :

$$\chi^V(e) = 3, \quad \chi^V(r) = 1 + 2 \cos(2\pi/3) = 0, \quad \chi^V(p) = 1.$$

Рассмотрим характеры представлений для перехода из состояния с представлением $D^{(1)}$ в $D^{(1)}$:

$$\chi_{1 \rightarrow 1}^A(e) = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3, \quad \chi_{1 \rightarrow 1}^A(r) = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0, \quad \chi_{1 \rightarrow 1}^A(p) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Вычислим коэффициент a_1 в разложении на неприводимые представления: $a_1 = 1$, т. е. переход разрешен. Для перехода из $D^{(1)}$ в $D^{(2)}$:

$$\chi_{1 \rightarrow 2}^A(e) = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3, \quad \chi_{1 \rightarrow 2}^A(r) = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0, \quad \chi_{1 \rightarrow 2}^A(p) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

Тогда $a_1 = 0$, т. е. переход запрещен. Для перехода из $D^{(1)}$ в $D^{(3)}$:

$$\chi_{1 \rightarrow 3}^A(e) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6, \quad \chi_{1 \rightarrow 3}^A(r) = 1 \cdot 0 \cdot -1 = 0, \quad \chi_{1 \rightarrow 3}^A(p) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Тогда $a_1 = 1$ и переход разрешен. Если разрешен прямой переход, то разрешен и обратный. Поэтому нам осталось проверить переходы $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 3$. Заметим, что в разложении прямого произведения трех представлений присутствует тривиальное в том и только в том случае, если в разложении прямого произведения двух из этих представлений присутствует третье.

Возьмем прямое произведение $\chi(D^V(g) \otimes D^{(2)}(g)) = (3, 0, -1)$ и разложим его в сумму по неприводимым $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$. Таким образом, разрешены переходы $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$, а переход $2 \rightarrow 1$ запрещен, что уже известно. Наконец, характер прямого произведения $\chi(D^V(g) \otimes D^{(3)}(g)) = (6, 0, 0)$. Его разложение на неприводимые дает $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, т. е. все переходы из состояния, принадлежащего $D^{(3)}$, разрешены.

Задача 201. * Найти правила отбора для переходов под действием магнитного поля для молекулы, обладающей симметрией квадрата.

Задача 202. * Найти правила отбора для переходов под действием квадрупольного поля для молекулы, обладающей симметрией тетраэдра.

5.5. Группы Ли. Инвариантные тензоры

Элементы группы Ли нумеруются набором непрерывных параметров. Нас будут интересовать только матричные группы Ли.

Определение.

Размерностью группы Ли называется наименьшее число независимых вещественных параметров $x = (x_1, \dots, x_n)$, достаточных для задания элементов группы. В качестве таблицы умножения $g(x)g(y) = g(z)$ используется функция $z = f(x, y)$.

1. Можно считать, что функция $f \in C_\infty$.

2. Единицей матричной группы $g(0)$ является единичная матрица.

Пример. Абелевы однопараметрические группы преобразований плоскости.

1. Повороты в плоскости $SO(2)$. Сохраняет длину $r^2 = x^2 + y^2$, один параметр, в качестве которого удобно выбрать угол поворота $0 \leq \phi < 2\pi$. Группа компактная. Многообразие группы — это окружность.

2. Гиперболические повороты в плоскости $SO^+(1, 1)$. Сохраняется интервал $s^2 = t^2 - x^2$. Здесь один параметр, в качестве которого удобно выбрать буст ($\text{th}(\beta) = v/c$, где v — скорость системы отсчета, в которую делается переход) $-\infty < \beta < \infty$. Группа некомпактная. Многообразие группы — это прямая,

$$A(\beta) = \begin{pmatrix} \text{ch } \beta & \text{sh } \beta \\ \text{sh } \beta & \text{ch } \beta \end{pmatrix}.$$

Проверим $s_1^2 = t_1^2 - x_1^2 = (t \text{ch } \beta + x \text{sh } \beta)^2 - (x \text{ch } \beta + t \text{sh } \beta)^2 = t^2 - x^2 = s^2$. Умножение оставляет в группе: $A(\beta_1)A(\beta_2) = A(\beta_1 + \beta_2)$. Для скорости получаем правило сложения

скоростей специальной теории относительности $v = c \operatorname{th}(\beta_1 + \beta_2) = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2/c^2)$. Использование v в качестве параметра неудобно. Полная группа, сохраняющая интервал s^2 , кроме матриц гиперболических поворотов содержит инверсию по координате $x \rightarrow -x$ и инверсию по времени $t \rightarrow -t$ и все произведения этих матриц.

Если от t, x перейти к повернутым координатам $\eta = x + t, \zeta = t - x$, то получим в этом базисе группу преобразований, соответствующую сдвиговым деформациям, сохраняющим объем $\zeta\eta = \operatorname{const}$. Матрица диагональна: $A = \operatorname{diag}(\exp(\beta), \exp(-\beta))$.

3. Растяжения $x'_i = \lambda x_i$. Группа $GL(1, \mathbb{R}^+)$ — некомпактная, сохраняет $\rho = x/y$, удобный параметр $\lambda = \exp(\beta)$; $-\infty < \beta < \infty$.

4. Группы сдвигов по координатам x и y : $x' = x + \beta$ ($GL(1, \mathbb{R})$).

Задача 203. Найти размерности следующих групп:

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $\dim GL(n, \mathbb{R}) = n^2$; | 5) $\dim O(n) = n(n-1)/2$; |
| 2) $\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$; | 6) $\dim SO(n) = n(n-1)/2$; |
| 3) $\dim GL(n, \mathbb{C}) = 2n^2$; | 7) $\dim U(n) = n^2$; |
| 4) $\dim SL(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 2$; | 8) $\dim SU(n) = n^2 - 1$. |

Задача 204. Показать, что дробно-линейные преобразования над \mathbb{R} составляют группу: $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad \neq cb$).

Указание. Найти

$$x_2 = \frac{a_1 x_1 + b_1}{c_1 x_1 + d_1} = \frac{(a_1 a + b_1 c)x + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)x + (c_1 b + d_1 d)}.$$

Затем найти размерность $\dim G = 3$. (Если все коэффициенты поделить на одинаковое число λ , то преобразование не изменится. Удобно выбрать $ad - cb \rightarrow (ad - cb)/\lambda^2 = \pm 1$).

Затем показать изоморфизм с группой $SL(2, \mathbb{R}) \otimes C_2$: если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $A_2 = A_1 \cdot A$ и $\det A = \pm 1$.

Задача 205. * Показать, что дробно-линейные преобразования над \mathbb{C} составляют группу. Размерность равна 6. Показать изоморфизм с группой $SL(2, \mathbb{C})$.

Задача 206. Показать изоморфизм:

- а) $SO(2) \cong U(1)$;
 б) $SO^+(1, 1) \cong GL(1, \mathbb{R}^+)$.

Замечание. В силу изоморфизма $U(1) = \exp(i\phi)$ является точным одномерным представлением абелевой группы $SO(2)$. Аналогично $GL(1, \mathbb{R}^+) = \{\exp(\beta)\}$ является точным одномерным представлением абелевой группы гиперболических поворотов $SO^+(1, 1)$. Для непрерывных групп имеется бесконечное количество неприводимых представлений.

Определение. Генератором группы называется производная по параметру:

$$I_j = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x_j} = \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \right|_{x=0}.$$

Замечание. Важно выбрать параметр так, чтобы $g(\dots, x_j, \dots)g(\dots, x'_j, \dots) = g(\dots, x_j + x'_j, \dots)$. Остается произвол в растяжении параметров $x_j \rightarrow \lambda x_j$, он выбирается из соображений удобства. Очевидно, что конкретный вид генератора зависит как от параметризации, так и от представления группы.

Задача 207.

а) Найти генераторы группы $SO(2)_\phi$ и ее одномерного представления $U(1)_\phi$.

Ответ.

$$ASO(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AU(1) = i.$$

б) Найти генераторы группы $SO^+(1, 1)$ и ее представления $GL(1, \mathbb{R}^+)$.

Ответ.

$$ASO(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AGL(1, \mathbb{R}^+) = 1.$$

Замечание. Мы обнаружили общее правило: для компактных однопараметрических групп генератор является антиэрмитовой матрицей (оператором):

$$I^\dagger = -I.$$

Для некомпактных однопараметрических групп (подгрупп) генератор является эрмитовой матрицей (оператором):

$$I^\dagger = I.$$

Замечание. Для однопараметрических групп справедлива формула восстановления группы по генератору. В силу абелевости таких групп, уравнение

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{dg(x + \delta)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} = \frac{dg(x)g(\delta)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} = g(x)I$$

решается в явном виде. Справедлива экспоненциальная формула:

$$g(x) = g(0) \exp(Ix) = \exp(Ix).$$

Задача 208.

а) Восстановить группы $SO(2)_\phi$ и $U(1)_\phi$ по генераторам.

Ответ.

$$SO(2) = \exp \left(\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad U(1) = \exp(i\phi).$$

б) Восстановить группы $SO^+(1, 1)_\beta$ и $GL(1, \mathbb{R}^+)_\beta$.

Ответ.

$$SO^+(1, 1) = \exp \left(\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \text{ch } \beta & \text{sh } \beta \\ \text{sh } \beta & \text{ch } \beta \end{pmatrix}, \quad GL(1, \mathbb{R}^+) = \exp(\beta).$$

Пример. Произведение генератора на число также является генератором. Рассмотрим генератор $SO(2)$ вида $I' = \lambda I$. Восстановим по нему группу:

$$SO(2) = \exp(\phi I') \begin{pmatrix} \cos(\phi\lambda) & \sin(\phi\lambda) \\ \sin(\phi\lambda) & \cos(\phi\lambda) \end{pmatrix}.$$

Теперь параметр меняется в пределах $0 \leq \phi < 2\pi/\lambda$, это также угол поворота, но в растянутом масштабе (например в градусах, если $\lambda = 2\pi/360$), что не очень удобно.

Задача 209. Найти генераторы группы $SL(2, R)$.

Решение.

$$g = SL(2, R) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad \dim SL(2, R) = 3.$$

Надо выбрать параметры (x, y, z) так, чтобы $g = E$ при $x = y = z = 0$. Кроме того, надо сделать выбор так, чтобы генераторы были эрмитовыми или антиэрмитовыми матрицами:

$$g = \begin{pmatrix} 1+z & x+y \\ x-y & \frac{1+x^2-y^2}{1+z} \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$I_3 = \frac{\partial g}{\partial z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{\partial g}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \frac{\partial g}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.5.1. Неприводимые представления группы $SO(2)$

Задача 210. Найти генераторы группы $SO(2)$ в представлении на функциях $F(x, y)$.

Поворот на угол α против часовой стрелки функции $F(x, y)$ эквивалентен повороту системы координат на угол $-\alpha$, поэтому

$$g(\alpha)F(x, y) = F(x \cos \alpha + y \sin \alpha, y \cos \alpha - x \sin \alpha).$$

Для генератора получим

$$IF = \left. \frac{dg(\alpha)F(x, y)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{F(x \cos \alpha + y \sin \alpha, y \cos \alpha - x \sin \alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) F(x, y).$$

Генератор $I = -\frac{d}{d\phi}$ является оператором и действует в бесконечно мерном (но счетном, поскольку область задания функции компактна) гильбертовом пространстве. Восстановление группы дает явный вид группового элемента $g(\alpha) = \exp(-\alpha \frac{d}{d\phi})$. Действуя этим элементом на произвольную гладкую функцию, получим:

$$\exp(-\alpha \frac{d}{d\phi}) F(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{d^n F(\phi)}{d\phi^n} = F(\phi - \alpha).$$

Задача 211. Найти все неприводимые представления группы $SO(2)$.

Решение. Поскольку группа абелева, то каждый элемент составляет собственный класс и все неприводимые представления одномерные. В этом случае достаточно найти собственные функции генератора:

$$IF = -\frac{dF}{d\phi} = \lambda F, \quad F_\lambda = A \exp(-\lambda\phi).$$

Поскольку ϕ лежит на окружности, то имеется дополнительное условие периодичности (отсутствует у некомпактных групп), которое дает $\lambda = im$. Теперь действие группы на каждом из одномерных подпространств гильбертова пространства, заданных функциями $F_m = \exp(-im\phi)$, сводится к умножению на одномерную матрицу:

$$g(\alpha)F_m = D_m(g(\alpha))F_m = \exp(im\alpha)F_m.$$

Таким образом, имеется бесконечное счетное число одномерных неприводимых представлений, характеры задаются таблицей:

	α
$\chi^{(m)}$	$\exp(im\alpha)$

Ортогональность характеров очевидна.

Замечание. Заметим, что $F_m = \exp(-im\phi)$ является компонентой вектора в гильбертовом пространстве, а $D_m(\alpha) = \exp(im\alpha)$ — матрицей (оператором) в подпространстве, натянутом на этот вектор.

Задача 212. * Найти неприводимые представления группы $SO(1, 1)$.

Ответ. $D^{(q)}(\beta) = \exp(q\beta)$, $q \in \mathbb{R}$.

Определение.

1. Тензором ранга k называется прямое произведение k векторов: $T^k = \bigotimes_{\nu=1}^k \vec{r}_\nu = \vec{r}_1 \vec{r}_2 \dots \vec{r}_k$.

2. Тензорным представлением называется прямое произведение векторных представлений: $D^T(g) = \bigotimes_{\nu=1}^k D^\nu(g)$.

3. Тензор является вектором в пространстве прямого произведения векторных пространств, поэтому сумма тензоров одного ранга является тензором, умножение тензора на число является тензором того же ранга.

4. Прямое произведение двух тензоров ранга k и m есть тензор ранга $k + m$.

5. Свертка тензора по двум компонентам является обратной операцией к прямому произведению и уменьшает ранг тензора на 2.

6. По аналогии с нормой вещественного вектора можно ввести $\|T\|^2 = \sum T_{i,j,\dots,k} T_{i,j,\dots,k} \geq 0$ — свертка по одинаковым компонентам, T вещественны.

Задача 213. Векторы для группы $SO(2)$ двухкомпонентные $\vec{r}_\nu = (x_\nu, y_\nu)$, а векторным представлением $D^\nu(g)$ являются матрицы самой группы.

1. Найти размерность тензорного представления k -го ранга.

Ответ. $\dim D = 2^k$.

2. Разложить векторное представление по неприводимым.

Решение. Характер векторного представления $\chi_v(\alpha) = 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ значит $D^v = D^{(1)} \oplus D^{(-1)}$. Можно найти коэффициенты разложения, пользуясь таблицей характеров: $\kappa_{\pm} = \int_0^{2\pi} (d\alpha/2\pi) 2 \cos \alpha e^{\pm i\alpha}$.

3. Разложить прямое произведение неприводимых представлений по неприводимым.

Ответ. $D^{(m)} \otimes D^{(n)} = D^{(m+n)}$.

4. Разложить представление тензора 2-го ранга по неприводимым.

Решение. $D^T = D^v \otimes D^v = (D^{(1)} \oplus D^{(-1)}) \otimes (D^{(1)} \oplus D^{(-1)}) = D^{(2)} \oplus 2D^{(0)} \oplus D^{(-2)}$.

Задача 214. Найти компоненты тензора 2-го ранга $T_{ij}^2 = r_i p_j$, преобразующиеся по неприводимым представлениям.

Решение. Запишем тензор в виде столбца $(T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22})$ размерности 2^k и найдем проекторы в этом базисе:

$$P^{(2)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \chi^{(2)*}(\alpha) \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица ранга 1, поэтому достаточно найти первый столбец $(1/4, i/4, i/4, -1/4)$, проекция на него тензора (с учетом нормировки) дает амплитуду $T_{(2)} = (T_{11} + iT_{12} + iT_{21} - T_{22}) = (x + iy)(p_x + ip_y)$, которая при повороте переходит в себя, умноженную на $\exp(2i\alpha)$. Аналогично первый столбец проектора $P^{(-2)}$ дает амплитуду $T_{(-2)} = (T_{11} - iT_{12} - iT_{21} - T_{22}) = (x - iy)(p_x - ip_y)$, которая при повороте переходит в себя, умноженную на $\exp(-2i\alpha)$. Наконец, проектор на скалярные компоненты тензора имеет ранг 2, и надо найти два столбца. Первый столбец $\delta_{ij}/2 = (1, 0, 0, 1)/2$, дает $T_{(0)} = (T_{11} + T_{22}) = \delta_{ij} T_{ij} = (\vec{r} \cdot \vec{p})$, скалярное произведение, а второй столбец $\epsilon_{ij}/2 = (0, 1, -1, 0)/2$ дает $T_{(0')} = (T_{12} - T_{21}) = \epsilon_{ij} T_{ij} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, антисимметричное произведение, которое для $SO(2)$ есть скаляр.

Складывая неприводимые компоненты, получим

$$T_{(2)} \begin{pmatrix} 1/4 \\ i/4 \\ i/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} + T_{(-2)} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -i/4 \\ -i/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} + T_{(0)} \frac{\delta_{ij}}{2} + T_{(0')} \frac{\epsilon_{ij}}{2} = T_{ij}.$$

Замечание. В группе $SO(2)$ имеется два инвариантных (т. е. не меняющихся при поворотах) тензора 2-го ранга δ_{ij} и ϵ_{ij} . Проверим, что

$$D_{i,i'}^v(\alpha) D_{j,j'}^v(\alpha) \delta_{i',j'} = \delta_{i,j}, \quad D_{i,i'}^v(\alpha) D_{j,j'}^v(\alpha) \epsilon_{i',j'} = \epsilon_{i,j}.$$

Вместо использования громоздких матриц проекторов можно разлагать тензор на неприводимые компоненты с помощью инвариантных тензоров.

Задача 215. 1. Разложить представление тензора k -го ранга по неприводимым.

Решение. $D_T = \otimes_{j=1}^k (D^{(1)} \oplus D^{(-1)}) = \sum_{j=1}^k C_j^k \oplus D^{(k-2j)}$.

В тензоре четного ранга имеется $C_{k/2}^k$ компонент, преобразующихся по $D^{(0)}$, т. е. не меняющихся при повороте. А в тензоре нечетного ранга таких нет.

2. Найти общий вид тензора, инвариантного относительно поворотов плоскости и выражающегося через тензор 4-го ранга. Другими словами, надо найти все компоненты тензора 4-го ранга $T_{ijkl} = r_i p_j q_k s_l$, преобразующиеся по скалярному неприводимому представлению $D^{(0)}$, и сложить их с произвольными коэффициентами.

Решение. Число таких компонент равно $C_2^4 = 6$. Чтобы не выписывать матрицы проекторов в $2^4 = 16$ -мерном пространстве, воспользуемся инвариантными тензорами. Инвариантный тензор 4-го ранга можно составить из δ_{ij} тремя способами: $\delta_{ij}\delta_{kl}$, $\delta_{ik}\delta_{jl}$, $\delta_{il}\delta_{kj}$, заменяя δ на ϵ , получим еще три, а смешанные произведения дадут еще 6 — всего 12. Однако они линейно зависимы, так как из теории характеров следует, что линейно независимых всего 6. Заметим, что любая квадратичная комбинация антисимметричного инвариантного тензора выражается через квадратичные комбинации симметричного инвариантного тензора: $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{kj}$, поэтому они линейно зависимы. Произведения типа $\epsilon_{ij}\delta_{kl}$ ортогональны тензорам, построенным из δ по симметрии относительно перестановок индексов, поэтому из 6 таких произведений только 3 линейно независимы. Общий вид гамильтониана для задачи, обладающей симметрией относительно вращений плоскости, имеет вид

$$\begin{aligned} H &= (A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{kj} + D\delta_{ij}\epsilon_{kl} + E\delta_{ik}\epsilon_{jl} + F\delta_{il}\epsilon_{jk})T_{ijkl} \\ &= A(\vec{r} \cdot \vec{p})(\vec{q} \cdot \vec{s}) + B(\vec{r} \cdot \vec{q})(\vec{p} \cdot \vec{s}) + C(\vec{r} \cdot \vec{s})(\vec{q} \cdot \vec{p}) + \\ &\quad D(\vec{r} \cdot \vec{p})[\vec{q} \times \vec{s}] + E(\vec{r} \cdot \vec{q})[\vec{p} \times \vec{s}] + F(\vec{r} \cdot \vec{s})[\vec{q} \times \vec{p}]. \end{aligned}$$

Для удобства можно нормировать и ортогонализировать инвариантные тензоры, например $|\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl}|^2 = 1$, к нему ортогонален нормированный тензор $\frac{1}{\sqrt{3}}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl})$, а к ним обоим ортогонален тензор $\frac{\sqrt{3}}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})$.

5.5.2. Группы $O(2)$ и $SO(3)$

Задача 216. Найти все неприводимые представления группы $O(2)$.

Решение. К поворотам $g(\alpha)$ добавляются элементы отражений относительно плоскостей, проходящих через ось вращения $pg(\alpha)$, которые входят в один бесконечный класс сопряженных элементов $C_{p\alpha}$. Повороты на угол α становятся сопряжены с поворотами на угол $-\alpha$ и входят в один класс C_α (кроме углов $\alpha = 0, \pi$). Для нахождения неприводимых представлений надо найти оператор Казимира K , который коммутирует со всеми элементами группы (генератор $I = -(d/d\phi)$ очевидно не коммутирует с p). Оператор Казимира ищут в виде квадратичной формы генераторов группы, здесь единственный вариант — это $K = I^2$, легко видеть, что он коммутирует как с p , так и с $g(\alpha) = \exp(\alpha I)$. Теперь надо найти собственные функции оператора K :

$$KF = \frac{d^2 F}{d\phi^2} = -m^2 F, \quad F_{\pm m} = \exp(\pm im\phi).$$

Поскольку для любого элемента группы g набор функций $F_{\pm m}$ и $gF_{\pm m}$ лежит в одном и том же подпространстве гильбертова пространства, то на этом подпространстве действует неприводимое представление размерности этого подпространства:

$$K(gF_{\pm m}) = g(KF_{\pm m}) = -m^2(gF_{\pm m}).$$

Набор из двух собственных функций, отвечающих одному собственному числу $m^2 \neq 0$ оператора K , образуют базис двумерного представления. Матрица отражения в этом базисе имеет вид

$$D^{(m)}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

характер $\chi^{(m)}(p\alpha) = 0$, а характер $\chi^{(m)}(\alpha) = 2 \cos(m\alpha)$.

Для $m = 0$, кроме тривиального представления, есть псевдоскалярное представление (оно находится из представлений фактор-группы $O(2)/SO(2) = C_2$). Таким образом, таблица характеров неприводимых представлений имеет вид ($m > 0$)

	e	C_α	C_π	$C_{p\alpha}$
$\chi^{[0]}$	1	1	1	1
$\chi^{[0']}$	1	1	1	-1
$\chi^{[m]}$	2	$2 \cos(m\alpha)$	$2 \cos(m\pi)$	0

Ортогональность характеров

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{2\pi} \chi^{[m]*}(\alpha) \chi^{[n]}(\alpha) + \int_0^\pi \frac{d\alpha}{2\pi} \chi^{[m]*}(p\alpha) \chi^{[n]}(p\alpha) = \delta_{m,n}$$

следует из ортогональности косинусов на интервале $(0, \pi)$.

Задача 217. В этой группе векторное представление неприводимо: $D^v = D^{[1]}$.

1. Разложить прямое произведение неприводимых представлений по неприводимым.

Ответ. $D^{[m]} \otimes D^{[n]} = D^{[m+n]} \oplus D^{[m-n]}$ для $m \neq n$,
 $D^{[m]} \otimes D^{[m]} = D^{[2m]} \oplus D^{[0]} \oplus D^{[0']}$.

2. Разложить представление тензора 3-го ранга по неприводимым.

Решение. $D^{T^3} = D^{[1]} \otimes D^{[1]} \otimes D^{[1]} = D^{[1]} \otimes (D^{[2]} \oplus D^{[0]} \oplus D^{[0']}) = D^{[3]} \oplus 3D^{[1]}$.

3. Найти общий вид гамильтониана симметричного относительно $O(2)$ и выражающегося через тензор 4-го ранга.

Указание. $D^{T^4} = D^{[1]} \otimes (D^{[3]} \oplus 3D^{[1]}) = 3D^{[0]} \oplus \dots$

Имеется 3 вклада в гамильтониан. Тензор ϵ_{ij} для этой группы является псевдоинвариантным, так как он меняет знак при отражении. Поэтому все три вклада в гамильтониан составлены из δ_{ij} . Если сравнить его с гамильтонианом для $SO(2)$, то он имеет тот же вид, только коэффициенты при трех последних слагаемых тождественно равны нулю в силу большей симметрии задачи.

Замечание. Прямые произведения представлений можно строить и для конечных групп. Разложение прямых произведений по неприводимым делается абсолютно аналогично с помощью характеров, а неприводимые компоненты тензоров находятся с помощью проекторов.

Замечание. Мы знаем, что любой поворот в 3-мерном пространстве (группа $SO(3)$) может быть осуществлен последовательными поворотами вокруг каждой из трех ортогональных осей:

$$g(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = g_x(\phi_1)g_y(\phi_2)g_z(\phi_3).$$

Это самая удобная параметризация тремя углами поворотов, хотя есть и другие.

Задача 218. Найти генераторы группы $SO(3)$ в этой параметризации в представлении 3-мерными матрицами вращения:

$$I_j = \left. \frac{dg}{d\phi_j} \right|_{\phi_j=0}.$$

Ответ.

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Независимо от представления, генераторы группы Ли обладают следующими свойствами.

1. Линейная комбинация генераторов является генератором:

$$I = \sum_i a_i I_i.$$

2. Коммутатор генераторов (скобка Ли — бинарная операция) является генератором:

$$[I_i, I_j] = \sum_k c_{i,j}^k I_k.$$

Коэффициенты $c_{i,j}^k$ называются структурными константами алгебры. Все аксиомы алгебры выполнены. Алгебра генераторов группы Ли G называется алгеброй Ли AG .

Задача 219. Найти структурные константы $ASO(3)$.

Решение. Поскольку структурные константы не зависят от представления (точного), то, вычисляя коммутаторы матриц генераторов в 3-мерном представлении, получим

$$[I_i, I_j] = \epsilon_{ijk} I_k.$$

Таким образом, для нашей параметризации $c_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$.

Замечание. Если бы мы задали вращение в обратном направлении, то все генераторы и, как можно заметить, все структурные константы поменяли бы знак. Если бы мы задали какую-либо абстрактную параметризацию, то генераторы и, следовательно, структурные константы стали бы неузнаваемы.

Задача 220. Показать, что генератор $I = \sum_j n_j I_j$ для нормированного на 1 вектора $|\vec{n}| = 1$ является генератором поворотов вокруг оси \vec{n} .

Решение. Поскольку генератор всегда коммутирует сам с собой, то, решая уравнение

$$\frac{dg_{\vec{n}}(\phi)}{d\phi} = g_{\vec{n}}(\phi)I,$$

получим

$$g_{\vec{n}}(\phi) = \exp(\phi I) = \exp \left[\phi \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Раскладывая в ряд Тейлора и замечая, что матричные элементы $I_{ij} = -\epsilon_{ijk}n_k$, откуда $I_{ij}^2 = n_i n_j - \delta_{ij}$, получим

$$g_{ij}^{\vec{n}}(\phi) = \delta_{ij} + \phi I_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\phi^2)^k}{(2k+1)!} - I_{ij}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\phi^2)^k}{(2k)!} = n_i n_j - (n_i n_j - \delta_{ij}) \cos(\phi) - \epsilon_{ijk} n_k \sin(\phi).$$

Проверим, что вектор

$$\vec{r}' = g_{\vec{n}}(\phi)\vec{r} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) + (\vec{r} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r})) \cos(\phi) - [\vec{r} \times \vec{n}] \sin(\phi)$$

повернут на угол ϕ вокруг вектора \vec{n} .

Пример. Часто используется параметризация из задачи (220) параметрами \vec{a} , где угол поворота задан $\phi = |\vec{a}|$, а ось поворота задана $\vec{n} = \vec{a}/\phi$:

$$g(\vec{a}) = \exp(\vec{a} \cdot \vec{I}).$$

Здесь вектор генераторов $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$. Такая параметризация удобна тем, что она задает однопараметрическую подгруппу. Кроме того, эта параметризация позволяет легко найти многообразие параметров группы. Заметим, что поворот на угол $\phi = \pi$ вокруг оси \vec{n} совпадает с поворотом на угол $\phi = \pi$ вокруг оси $-\vec{n}$. Поэтому параметр \vec{a} находится в 3-мерном шаре радиуса $|\vec{a}| = \pi$, причем противоположные точки ограничивающей его сферы отождествлены (многообразие $SO(3)$ является проективным пространством). Значит, группа компактна, связна, но не односвязна (поскольку петлю, выходящую из центра, проходящую через границу, оказывающуюся на другой стороне шара и затем замыкающуюся в центре, невозможно стянуть в точку непрерывным преобразованием).

5.5.3. Представления группы $SO(3)$

Задача 221. Найти генераторы группы $SO(3)$ в представлении на функциях $F(x, y, z)$.

Решение. Поворот на угол α против часовой стрелки функции $F(x, y, z)$ эквивалентен повороту системы координат на угол $-\alpha$, поэтому

$$g_z(\alpha)F(x, y, z) = F(x \cos \alpha + y \sin \alpha, y \cos \alpha - x \sin \alpha, z).$$

Для генератора I_3 получим

$$\begin{aligned} I_3 F &= \left. \frac{dg(\alpha)F(x, y, z)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{F(x \cos \alpha + y \sin \alpha, y \cos \alpha - x \sin \alpha, z)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) F(x, y, z). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично для других генераторов получим

$$I_1 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z};$$

$$I_2 = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}.$$

Проверим, что коммутаторы генераторов выражаются через структурные константы:

$$[I_i, I_j] = \epsilon_{ijk} I_k.$$

Поскольку гильбертово пространство функций содержит базисные векторы всех представлений, то (1) скобка Ли одинакова для всех представлений и (2) можно найти все неприводимые представления группы $SO(3)$.

Определение. *Оператором Казимира группы называется квадратичная комбинация генераторов группы $K = q_{ij} I_i I_j$, коммутативная со всеми генераторами группы в любом представлении.*

Задача 222. Найти оператор Казимира для $SO(3)$.

Решение. Поскольку свойство коммутативности должно выполняться для любого представления, необходимо при вычислениях пользоваться скобкой Ли.

$$[K, I_n] = q_{ij} [I_i I_j, I_n] = q_{ij} (I_i [I_j, I_n] + [I_i, I_n] I_j) = q_{ij} (I_i \epsilon_{jnk} I_k + \epsilon_{ink} I_k I_j) = 0 \quad \forall n.$$

Для $n = 3$ получим $q_{i1} I_i I_2 - q_{i2} I_i I_1 + q_{i1} I_2 I_i - q_{i2} I_1 I_i = 0$, что $0 = q_{12} + q_{21} = q_{11} - q_{22} = q_{31} = q_{32} = q_{13} = q_{23}$. Повторяя для других значений n , получим выражение для оператора Казимира

$$K = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$$

(общий множитель неважен). Это с точностью до знака оператор квадрата момента импульса. В представлении на функциях он равен угловой части оператора Лапласа.

$$K = r^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = r^2 \Delta_\Omega.$$

Задача 223. Найти все неприводимые представления группы $SO(3)$ и их характеры.

Решение. Для этого достаточно найти все собственные аналитические функции оператора Казимира. Мы знаем, что это сферические функции

$$KY_m^l(\theta, \phi) = -l(l+1)Y_m^l(\theta, \phi), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Для фиксированного собственного числа оператора K имеется набор из $2l+1$ собственных функций с номерами $-l \leq m \leq l$. Поскольку K коммутирует со всеми генераторами, а значит и с произвольной функцией генераторов, в частности с любым элементом группы, получим

$$K(g(\vec{a})Y_m^l) = \exp(\vec{a} \cdot \vec{I})(KY_m^l) = -l(l+1)(g(\vec{a})Y_m^l),$$

что $g(\vec{a})Y_m^l$ является собственной функцией с тем же собственным значением, а значит представима в виде суммы по всем Y_n^l с тем же l . Теперь действие группы на каждом

из $(2l+1)$ -мерных подпространств гильбертова пространства, заданных функциями Y_m^l , сводится к умножению на матрицу $(2l+1) \times (2l+1)$:

$$g(\vec{a})Y_m^l = D_{mn}^{(l)}Y_n^l.$$

Таким образом, имеется бесконечное счетное число нечетномерных неприводимых представлений.

Все повороты на фиксированный угол α вокруг любой оси эквивалентны и составляют класс сопряженных элементов $C(\alpha)$, где $0 \leq \alpha < \pi$. Характер удобно вычислять для поворота вокруг оси z , когда матрица диагональна $D^{(l)}(\alpha) = \text{diag}(e^{i\alpha}, \dots, e^{-i\alpha})$. Суммируя, получим

$$\chi^{(l)}(\alpha) = \frac{\sin((l+1/2)\alpha)}{\sin(\alpha/2)}.$$

Чтобы доказать ортогональность характеров, надо знать плотность числа элементов в каждом классе (меру Хаара) $p(\alpha) = (2 \sin(\alpha/2))^2$. Легко видеть, что они ортогональны:

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{2\pi} p(\alpha) \chi^{(l)*}(\alpha) \chi^{(l')}(\alpha) = \delta_{l,l'}.$$

Задача 224. Найти таблицу характеров группы $O(3)$.

Решение. Поскольку эта группа есть прямое произведение $O(3) = SO(3) \otimes \{e, i\}$, то число представлений удваивается, кроме $D^{(l)}$ появляются нечетномерные представления $D^{(l)}$, а таблица характеров есть прямое произведение

$$\chi^{(l)}(\alpha) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Кроме скалярного $D^{(0)}$ есть псевдоскалярное $D^{(0)}$, к векторному $D^{(1)}$ добавляется псевдовекторное $D^{(1)}$, наряду с квадрупольным $D^{(2)}$ имеется псевдоквадрупольное $D^{(2)}$ и так далее.

Задача 225. Разложить прямое произведение $D^{(l_1)}(g) \otimes D^{(l_2)}(g)$ неприводимых представлений группы $SO(3)$ по неприводимым $D^{(j)}(g)$.

Решение. Вычислим интеграл

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{2\pi} p(\alpha) \chi^{(l_1)}(\alpha) \chi^{(l_2)}(\alpha) \chi^{(j)*}(\alpha) =$$

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} (\cos(|l_1 - l_2|\alpha) - \cos((l_1 + l_2 + 1)\alpha)) \left(1 + \sum_{m=1}^j 2 \cos m\alpha\right) = \Theta(j - |l_1 - l_2|) - \Theta(j - (l_1 + l_2 + 1)).$$

Таким образом, получаем правило Клебша — Гордана:

$$D^{(l_1)} \otimes D^{(l_2)} = \sum_{j=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \oplus D^{(j)}.$$

Суммарный момент двух квантовых частиц с моментами l_1, l_2 может принимать значения от $j = |l_1 - l_2|$ до $j = l_1 + l_2$.

Задача 226. Разложить прямое произведение неприводимых представлений группы $O(3)$ по неприводимым.

Решение. Под действием инверсии скаляр не меняет знака $D^{(0)}(i)Y^0 = Y^0$, вектор меняет $D^{(1)}(i)Y_m^1 = -Y_m^1$, тензор второго ранга опять не меняет знака $D^{(2)}(i)Y_m^2 = Y_m^2$ и т.д. $D^{(l)}(i)Y_m^l = (-1)^l Y_m^l$. Такое свойство в физике называется четностью $D^{(l)}(i) = (-1)^l D^{(l)}(e)$. Все штрихованные представления группы $O(3)$ обладают противоположной четностью. К правилу Клебша Гордона для представлений группы $O(3)$ надо добавить правило четности: если $(-1)^{l_1+l_2} = (-1)^j$, то входит $D^{(j)}$, а если нет, то входит $D^{(j')}$.

Задача 227. Найти правила отбора в квантовой механике для переходов между состояниями с определенным значением орбитального момента l под действием электродипольного взаимодействия.

Решение. Электрическое поле преобразуется по $D^{(1)}$. Раскладывая прямое произведение

$$D^{(1)} \otimes D^{(l)} = D^{(l-1)} \oplus D^{(l')} \oplus D^{(l+1)},$$

получаем, что переходы в дипольном приближении разрешены только между состояниями с орбитальным моментом, различающимся на 1, поскольку состояний орбитального момента со штрихованными представлениями нет.

5.5.4. Представления группы $O(3)$

Задача 228. Вектор для группы $SO(3)$ трехкомпонентный $\vec{r} = (x, y, z)$, а векторным представлением $D^v(g)$ являются ортогональные матрицы с определителем 1, т. е. матрицы поворота.

1. Показать эквивалентность представлений $D^v(g) \sim D^{(1)}(g)$.

Решение. Выражая компоненты вектора \vec{r} через Y_m^1 , получим $\vec{r} = S\vec{Y}^1$, где матрица

$$S = r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Откуда получаем } S^{-1}D^v(g)S = D^{(1)}(g). \text{ Поскольку это одно и то}$$

же представление, записанное в разных базисах, то $D^{(1)}(g)$ есть векторное представление.

2. Найти размерность тензорного представления k -го ранга.

Ответ. $\dim D^{T^k} = 3^k$.

3. Разложить представление тензора 2-го ранга по неприводимым.

Решение. $D^{T^2} = D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(2)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(0)}$.

4. Разложить представление тензора 2-го ранга по неприводимым в группе $O(3)$:

Решение. Из четности следует, что

$$D^{T^2} = D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(2)} \oplus D^{(1')} \oplus D^{(0)}.$$

Поскольку этот тензор четный, то вместо векторного представления в разложение входит псевдовекторное представление $D^{(1')}$, которое не меняет знака при инверсии. Очевидно, что смешанное тензорное произведение

$$D^{(1)} \otimes D^{(1')} = D^{(2')} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(0')}$$

обладает противоположной четностью.

Замечание. В группе $SO(3)$ имеется два инвариантных (т. е. не меняющихся при поворотах) тензора: δ_{ij} — тензор 2-го ранга, задающий скалярное произведение (длина вектора), и ϵ_{ijk} — тензор 3-го ранга, задающий смешанное произведение (объем, натянутый на три вектора). Проверим, что $D_{i,i'}^v(\alpha)D_{j,j'}^v(\alpha)\delta_{i'j'} = \delta_{ij}$, а $D_{i,i'}^v(\alpha)D_{j,j'}^v(\alpha)D_{k,k'}^v(\alpha)\epsilon_{i'j'k'} = \epsilon_{ijk}$.

С помощью инвариантных тензоров можно раскладывать тензор на неприводимые компоненты, т. е. можно выразить проекторы через инвариантные тензоры вместо выписывания громоздких матриц $3^k \times 3^k$. В группе $O(3)$ тензор ϵ_{ijk} не является инвариантным, поскольку меняет знак при инверсии.

Задача 229. Найти проекторы на подпространства неприводимых представлений для тензора 2-го ранга $T_{ij}^2 = r_i p_j$.

Решение. Из инвариантных тензоров можно составить две комбинации для тензора 2-го ранга, это $S\delta_{ij}$ и $\epsilon_{ijk}V_k$, где S — скаляр, а V_k — компоненты вектора (псевдовектора для группы $O(3)$). Они ортогональны. Нам необходимо представить 9-мерный T_{ij} в виде суммы трех частей: одно- трех- и пятимерных, каждая из которых преобразуется по своему неприводимому представлению:

$$T_{ij} = S\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}V_k + Q_{ij},$$

где Q_{ij} — неприводимый симметричный тензор второго ранга, дающий ноль при свертке по индексам (например $Q_{ij} = x_i x_j - x^2 \delta_{ij}/3$ — тензор квадрупольного момента), имеющий 5 независимых компонент. Пользуясь ортогональностью представлений, найдем явные выражения для S, \vec{V}, \vec{Q} через компоненты тензора (последовательно умножаем на δ_{ij} и ϵ_{ijl}):

$$3S = \delta_{ij}T_{ij}, \quad 2V_k = \epsilon_{ijk}T_{ij}, \quad Q_{ij} = T_{ij} - S\delta_{ij} - \epsilon_{ijk}V_k.$$

Таким образом, неприводимый базис имеет вид

$$r_i p_j = T_{ij} = \delta_{ij} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})}{3} \oplus \frac{\epsilon_{ijk}}{2} [\vec{r} \times \vec{p}]_k \oplus \left(r_i p_j - \delta_{ij} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})}{3} - \frac{\epsilon_{ijk}}{2} [\vec{r} \times \vec{p}]_k \right).$$

Это скалярная, векторная и квадрупольная части. Пользуясь правилом свертки антисимметричного тензора, это выражение можно упростить:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\delta_{ij}T_{kk}}{3} + \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} + \left(\frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} - \frac{\delta_{ij}T_{kk}}{3} \right) = \\ &= \left[\frac{\delta_{ij}\delta_{lm}}{3} + \frac{\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}}{2} + \left(\frac{\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}}{2} - \frac{\delta_{ij}\delta_{lm}}{3} \right) \right] T_{lm}, \\ \hat{T} &= (P^{(0)} \oplus P^{(1)} \oplus P^{(2)})\hat{T}. \end{aligned}$$

Как видим, проекторы $P^{(i)}$ также выражаются через инвариантные тензоры. Заметим, что скалярное и квадрупольное представления входят в симметричную по перестановке индексов часть тензора, содержащую $5 + 1 = 6$ компонент, а псевдовекторное в антисимметричную часть, содержащую 3 компоненты. Разложение на симметричную и антисимметричную части упрощает нахождение неприводимых компонент тензора.

Задача 230. Проверить, что тензор квадрупольного момента преобразуется как $Q_{ij} = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} - \frac{\delta_{ij}T_{kk}}{3} \sim Y_{2,m}$.

Решение. Этот тензор симметричен по перестановке индексов, поэтому он преобразуется как прямое произведение одинаковых векторов: $Q_{ij} \sim r_i r_j - r^2 \delta_{ij}/3$. Сравнивая со сферическими функциями, найдем:

$$r^2 Y_{2,\pm 2} = a(x \pm iy)^2, \quad r^2 Y_{2,\pm 1} = b(x \pm iy)z, \quad r^2 Y_{2,0} = c(2z^2 - x^2 - y^2),$$

так что Q_{ij} и Y_m^2 — два разных базиса в одном и том же пространстве неприводимого представления $D^{(2)}$. Здесь a, b, c — нормировочные константы.

5.5.5. Симметризация тензорных представлений

Замечание. Симметризация по перестановке двух индексов возможна и для тензоров высокого ранга. Обозначим за \hat{g} операцию перестановки индексов тензора ранга k , тогда множество всех \hat{g} образует группу перестановок P_k порядка $k!$. У этой группы есть неприводимые представления с характерами $\chi^{(\alpha)}(g)$. С помощью этих характеров можно составить проекторы на подпространства, отвечающие определенной симметрии относительно перестановок:

$$\hat{S}^{(\alpha)} = \frac{\chi^{(\alpha)}(e)}{|P_k|} \sum_g \chi^{(\alpha)}(g) \cdot \hat{g}.$$

Задача 231. Разложить тензор 3-го ранга на компоненты с различной симметрией по перестановкам индексов.

Решение. Группа P_3 изоморфна группе треугольника и имеет три неприводимых представления. Тривиальное представление дает

$$\hat{S}^{(1)} T_{ijk} = \frac{1}{6} \sum_g \chi^{(1)}(g) \hat{g} T_{ijk} = \frac{1}{6} (T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{jik} + T_{ikj} + T_{kji}),$$

симметричную по всем индексам часть тензора. Второе представление дает

$$\hat{S}^{(2)} T_{ijk} = \frac{1}{6} \sum_g \chi^{(2)}(g) \hat{g} T_{ijk} = \frac{1}{6} (T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji}),$$

антисимметричную по перестановке пары индексов часть. Наконец, последнее представление

$$\hat{S}^{(3)} T_{ijk} = \frac{1}{3} \sum_g \chi^{(3)}(g) \cdot \hat{g} T_{ijk} = \frac{1}{3} (2T_{ijk} - T_{jki} - T_{kij})$$

дает оставшуюся часть тензора. Сумма всех трех компонент дает исходный тензор. Каждая из компонент может быть приводима, неприводима или пуста. Представление тензора 3-го ранга разлагается в прямую сумму трех представлений, каждое из которых может быть приводимым, неприводимым или пустым.

Задача 232. Найти число независимых членов в гамильтониане 3 степени по полю \vec{E} для симметрии треугольника (повороты C_3 и C_2).

Решение. Гамильтониан выражается через симметричную часть тензора 3-го ранга: $\hat{S}^{(1)} T$. Подействуем матрицей тензорного представления группы треугольника с элементами h :

$$D(h) \hat{S}^{(1)} T = D(h)_{ijk, i'j'k'} \hat{S}^{(1)} T_{i'j'k'}.$$

Поскольку симметризатор переставляет индексы у тензора под знаком суммы, можно его действие перенести на штрихованные индексы матрицы D и вычислить след:

$$\begin{aligned}\chi_T(\hat{S}^{(1)}D(h)) &= \frac{1}{6} \left(D(h)_{ijk,ijk} + D(h)_{ijk,jik} + D(h)_{ijk,ikj} + D(h)_{ijk,kji} + D(h)_{ijk,jki} + D(h)_{ijk,kij} \right) \\ &= \frac{1}{6} (\chi_v^3(h) + 3\chi_v(h)\chi_v(h^2) + 2\chi_v(h^3)),\end{aligned}$$

где $\chi_v(h) = (3, 0, -1)$ - характер векторного представления в группе треугольника. Подставляя $\chi_v(h^2) = (3, 0, 3)$ и $\chi_v(h^3) = (3, 3, -1)$, получим характер представления симметричного тензора 3-го ранга: $\chi_T(\hat{S}^{(1)}D(h)) = \frac{1}{6} \left((3^3, 0, -1^3) + 3(9, 0, -3) + 2(3, 3, -1) \right) = (10, 1, -2) = \chi^{(1)}(h) \oplus 3\chi^{(2)}(h) \oplus 3\chi^{(3)}(h)$. Значит, имеется всего один вклад в гамильтониан.

Замечание. Особенный интерес представляет полностью симметричная часть тензора, так как она всегда отлична от нуля и образует инвариантное подпространство. Поскольку симметричный тензор не меняется при любой перестановке индексов, то он преобразуется так же, как прямое произведение одного вектора самого на себя: $T_{i_1, i_2, \dots, i_k} = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}$, а это есть однородный полином степени k от компонент вектора. Таким образом, есть изоморфизм между представлением на симметричном тензоре и представлением на однородном полиноме.

Задача 233. Найти размерность представления на полиноме степени k для $SO(3)$. Выписать компоненты полиномов для $k \leq 2$.

Ответ.

$$P_k = \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^l C_{klm} x^{k-l} y^{l-m} z^m,$$

$$\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

$$P_1 = \{x, y, z\},$$

$$P_2 = \{x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx\} \sim (T_{ij} + T_{ji})/2.$$

Представление P_2 приводимо, так как $\dim P_2 = 6$, а четно мерных неприводимых представлений в $SO(3)$ нет.

Задача 234. * Найти размерность представления на полиноме степени k для $SO(n)$.

Ответ. $\dim P_k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}$.

Задача 235. Найти разложение представления на полиномах на неприводимые в группе $SO(3)$.

Решение. Подействуем оператором Казимира на полином степени n :

$$KP_n = r^2 \Delta P_n - n(n+1)P_n.$$

Если выделить из всех P_n только гармонические полиномы: $\Delta P_n^h = 0$, то получим, что подпространство гармонических полиномов совпадает с пространством сферических функций ($KP_n^h = -n(n+1)P_n^h$), которое имеет размерность $\dim(P_n^h) = \dim(Y_m^n) = 2n+1$.

Как разложить оставшиеся $(n+1)(n+2)/2 - (2n+1) = (n-1)n/2$ компонент на неприводимые? Достаточно заметить, что в полиноме 2-го порядка содержится скаляр $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, поэтому оставшуюся часть можно представить в виде произведения полиномов:

$$P^n - P_h^n = r^2 P^{n-2}.$$

Размерность оставшейся части в точности совпадает с размерностью пространства полиномов степени $n-2$, значит, мы учли все компоненты и дальше можно выделить гармонический полином P_h^{n-2} из оставшейся части, и т. д. В результате мы нашли разложение представления симметричного тензора на неприводимые представления:

$$D_{T^n}^S \sim D_{P_n} = D^{(n)} \oplus D^{(n-2)} \oplus \dots$$

Для симметричной части тензора 2-го ранга мы уже получали, что он раскладывается на $D^{(2)} \oplus D^{(0)}$. В явном виде можно записать разложение по гармоническим полиномам: $P_2 = (x^2 - y^2, 2z^2 - x^2 - y^2, xy, yz, zx) \oplus r^2 = r^2(a_m Y_m^2 \oplus Y^0)$ и найти матрицу S перехода между базисами.

Замечание. Для группы $O(3)$ разложение в точности такое же, поскольку четности неприводимых представлений, входящих в разложение, совпадают.

Задача 236.

1. Найти количество независимых компонент у тензора второго ранга инвариантного относительно групп $[O(3), C_{3v}, SO(2)]$.

Ответ. $T_{ij} = [\delta_{ij}, A\delta_{ij} + Bn_in_j, A\delta_{ij} + Bn_in_j + C\epsilon_{ijk}n_k]$.

2. То же для симметричного тензора 2-го ранга.

Задача 237.

1. Найти общий вид поправки к гамильтониану четвертой степени по электрическому полю.

Ответ. Симметричный тензор 4-го ранга имеет

$$S^{(1)} : D^{(1)} \otimes D^{(1)} \otimes D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(4)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(0)} \quad -$$

одну скалярную компоненту, поэтому единственное слагаемое $H = A(|\vec{E}|^2)^2$.

2. Найти общий вид поправки к гамильтониану второй степени по электрическому полю и второй степени по магнитному полю.

Ответ. Прямое произведение симметричных тензоров 2-го ранга имеет

$$(S^{(1)} : D^{(1)} \otimes D^{(1)}) \otimes (S^{(1)} : D^{(1)} \otimes D^{(1)}) = (D^{(2)} \oplus D^{(0)}) \otimes (D^{(2)} \oplus D^{(0)}) = 2D^{(0)} \oplus \dots \quad -$$

две скалярных компоненты, поэтому $H = A_1|\vec{E}|^2|\vec{B}|^2 + A_2(\vec{E} \cdot \vec{B})^2$.

5.5.6. Группа $SU(2)$ и ее неприводимые представления

Зачем физикам нужны представления этой, казалось бы, экзотической группы? Эта группа пришла в физику с квантовой механикой. Дело в том, что Ψ — функция не наблюдаемая, поэтому она не обязана преобразоваться по группе $SO(3)$. Однако билинейная комбинация $\Psi^*\Psi$ входит во все средние, которые наблюдаемые и обязаны преобразоваться по $SO(3)$. Мы увидим, что если Ψ преобразуются по группе $SU(2)$, то все наблюдаемые будут принадлежать представлениям $SO(3)$.

Поскольку после нахождения генераторов мы будем пользоваться экспоненциальным восстановлением элементов группы, то проще сразу искать матрицу g группового преобразования в виде $g = \exp(A)$. Для унитарной g матрица $A^\dagger = -A$ должна быть антиэрмитовой, а равенство единице определителя $\det g = 1$ ограничивает нас безследовыми матрицами $\text{tr } A = 0$. Безследовая антиэрмитовая матрица

$$A = i \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} = i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$$

имеет 3 параметра, как и должно быть для группы $SU(2)$.

Задача 238. Найти генераторы группы $SU(2)$ в этой параметризации в представлении 2-мерными матрицами.

$$I_j = \left. \frac{\partial g}{\partial a_j} \right|_{a_j=0}.$$

Ответ.

$$I_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 239. Найти структурные константы $ASU(2)$.

Решение. Хотя структурные константы зависят от параметризации, они не зависят от конкретного представления при фиксированной параметризации. Поэтому вычислим коммутаторы матриц генераторов в 2-мерном представлении: $[I_i, I_j] = -2\epsilon_{ijk}I_k$. Они в (-2) раза отличаются от структурных констант алгебры $ASO(3)$. Чтобы они совпадали, достаточно растянуть параметры в (-2) раза: $a_j = -\phi_j/2$. Тогда для новой параметризации $c_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$ и алгебры совпадают $ASO(3) = ASU(2)$. В стандартной параметризации ϕ_j генераторы имеют вид

$$I_1 = \frac{-i\sigma_1}{2}, \quad I_2 = \frac{-i\sigma_2}{2}, \quad I_3 = \frac{-i\sigma_3}{2}.$$

Задача 240. Найти явный вид матриц $SU(2)$ и вычислить характер.

Решение. Матрицы группы $SU(2)$ в стандартной параметризации $\vec{\phi} = \phi\vec{n}$, где ϕ имеет смысл угла поворота вокруг оси \vec{n} , принимают вид

$$\begin{aligned} g(\vec{\phi}) &= \exp\left(\frac{-i\vec{\phi} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right) = \cos(\phi/2) - i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\phi/2) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) - in_3 \sin(\phi/2) & (-in_1 + n_2) \sin(\phi/2) \\ (-in_1 - n_2) \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) + in_3 \sin(\phi/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Характер двумерного представления равен $\chi(\phi) = \cos(\phi/2)$.

Замечание. Область изменения параметров. Вектор \vec{n} лежит на сфере S^2 , а угол задан в области $0 \leq \phi \leq 2\pi$ в два раза больше, чем у $SO(3)$. При полном повороте на 2π матрица переходит не в единицу, а в минус единицу (т. е. Ψ -функция меняет знак), чтобы вернуться к тождественному преобразованию, необходимо совершить двойной оборот на 4π . Поскольку группа $SU(2)$ в два раза больше, чем $SO(3)$, у нее больше неприводимых представлений.

Для выяснения вида многообразия параметров группы введем обозначения $x_0 = \cos(\phi/2)$ и $x_j = n_j \sin(\phi/2)$, для которых выполняется

$$\sum_{\mu=0}^3 x_{\mu}^2 = 1.$$

Многообразием является сфера S_3 — оно очевидно связно и односвязно. Если поместить единицу группы в северный полюс сферы, то при увеличении ϕ пройдем экватор при $\phi = \pi$ и окажемся на южном полюсе при $\phi = 2\pi$, соответствующая матрица $g(2\pi) = -E$ лежит в центре группы $Z = \{g(0), g(2\pi)\}$.

Задача 241. Показать, что $SU(2)/Z \cong SO(3)$.

Решение. Если взять фактор, то двум матрицам $g_{\vec{n}}(\phi)$ и $g_{\vec{n}}(2\pi + \phi) = -g_{\vec{n}}(\phi)$ сопоставляется одна матрица $O_{\vec{n}}(\phi)$, где $0 \leq \phi \leq \pi$, т. е. область изменения параметров совпадает. Поскольку есть формула экспоненциального восстановления

$$g_{\vec{n}}(\phi) = \exp(\phi(\vec{n} \cdot \vec{I}))$$

и

$$O_{\vec{n}}(\phi) = \exp(\phi(\vec{n} \cdot \vec{I})),$$

где генераторы принадлежат одной и той же алгебре, т. е. имеют одинаковые коммутационные соотношения, то умножение двух элементов дает одинаковые ответы.

Поскольку доказан гомоморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3)$, т. е. $SO(3)$ является представлением $SU(2)$, то все $D^{(l)}$ неприводимые представления $SO(3)$ являются неприводимыми представлениями $SU(2)$. А поскольку нет изоморфизма, то в $SU(2)$ есть и другие неприводимые представления.

Задача 242. * Найти полный угол поворота после двух последовательных поворотов вокруг разных осей.

Указание. Воспользоваться гомоморфизмом $SU(2) \rightarrow SO(3)$ и тем, что характер матриц $SU(2)$ выражается через угол поворота $\chi(\phi) = 2 \cos(\phi/2)$.

Ответ. $\cos(\phi/2) = \cos(\phi_1/2) \cos(\phi_2/2) - (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) \sin(\phi_1/2) \sin(\phi_2/2)$.

Задача 243. Найти генераторы и оператор Казимира в представлении на функциях двух комплексных переменных $F(u, v)$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 I_3 F &= \left. \frac{d}{d\alpha} g_{n_3}(\alpha) \right|_{\alpha=0} F(u, v) = \left. \frac{d}{d\alpha} F(u \exp(i\alpha/2), v \exp(-i\alpha/2)) \right|_{\alpha=0} \\
 &= \frac{i}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) F(u, v). \\
 I_2 F &= \left. \frac{d}{d\alpha} g_{n_2}(\alpha) \right|_{\alpha=0} F(u, v) = \left. \frac{d}{d\alpha} F(u \cos(\alpha/2) + v \sin(\alpha/2), v \cos(\alpha/2) - u \sin(\alpha/2)) \right|_{\alpha=0} \\
 &= \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} \right) F(u, v). \\
 I_1 F &= \left. \frac{d}{d\alpha} g_{n_1}(\alpha) \right|_{\alpha=0} F(u, v) = \left. \frac{d}{d\alpha} F(u \cos(\alpha/2) + iv \sin(\alpha/2), v \cos(\alpha/2) + iu \sin(\alpha/2)) \right|_{\alpha=0} \\
 &= \frac{i}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial u} \right) F(u, v). \\
 K &= -\frac{1}{4} \left(\left(u \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + \left(v \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} v \frac{\partial}{\partial v} - u \frac{\partial}{\partial v} v \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial}{\partial v} \right) = \\
 &= -\frac{1}{4} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right).
 \end{aligned}$$

Задача 244. Проверить коммутационные соотношения для генераторов.

Задача 245. С помощью оператора Казимира найти конечномерные неприводимые представления группы $SU(2)$.

Указание. Собственными функциями оператора Казимира и генератора I_3 являются однородные полиномы степени n

$$\Pi_{n,k} = u^k v^{n-k}.$$

Собственные значения генератора $I_3 \Pi_{n,k} = i(k - n/2) \Pi_{n,k}$, а собственные значения оператора Казимира $K \Pi_{n,k} = (n(n+2)/4) \Pi_{n,k}$. Размерности неприводимых представлений равны числу полиномов от u, v степени n , т. е. $\dim \Pi_n = n + 1$.

Если обозначить за $l = n/2$, то целые l соответствуют представлениям группы $SO(3)$, а неприводимые представления с полуцелыми значениями l имеются только в $SU(2)$. Формула для характера неприводимого представления для полуцелых значений l точно такая же, как и для целых l в группе $SO(3)$. Тогда разложение прямого произведения в сумму неприводимых одинаково для обеих групп.

Задача 246. Показать, что однородные функции с ненатуральными значениями степени q не принадлежат к конечномерным представлениям.

Решение. Однородные функции с ненатуральными значениями степени q (или вообще комплексным), например $u^a v^b$ являются собственными для оператора Казимира, но число таких функций, отвечающих заданному собственному числу $\lambda = (a+b)(a+b+2)/4$, бесконечно. Для того чтобы проверить это, построим повышающий и понижающий операторы:

$$I_+ = I_1 + iI_2 = iv \frac{\partial}{\partial u}, \quad I_- = I_1 - iI_2 = iu \frac{\partial}{\partial v}.$$

Действие этих операторов на собственные функции генератора I_3

$$I_3(u^a v^b) = \frac{i(a-b)}{2} (u^a v^b)$$

приводит к

$$I_-(u^a v^b) = ib(u^{a+1} v^{b-1}), \quad I_+(u^a v^b) = ia(u^{a-1} v^{b+1}),$$

изменяет собственное значение генератора I_3 на $\pm i$ и не выводит из подпространства собственных функций K . Если значения a или b ненатуральные, то действуя последовательно повышающим или понижающим генераторами, мы получим бесконечное число функций, т. е. бесконечномерное неприводимое представление.

Задача 247. Разложить тензорное спинорное представление 4-го ранга по неприводимым.

Решение. Векторное представление действует на 2-мерный комплексный вектор $\Psi = (u, v)$, матрицей представления является сама матрица $g = D^{(1/2)} \in SU(2)$, оно очевидно неприводимо. Чтобы отличать от обычных векторов в $SO(3)$, такие векторы называют спинорами, а соответствующие тензорные представления — спинорными. Тензорные спинорные представления

$$D^r = g \otimes g \otimes \dots \otimes g$$

строятся абсолютно аналогично тому, как это делалось для $SO(3)$. Размерность тензорного представления ранга r равна $\dim T^r = 2^r$. Тогда $\dim T^4 = 16$, а разложение имеет вид

$$\begin{aligned} D &= D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)} = (D^{(1)} \oplus D^{(0)}) \otimes (D^{(1)} \oplus D^{(0)}) \\ &= D^{(2)} \oplus 3D^{(1)} \oplus 2D^{(0)}. \end{aligned}$$

Замечание. 1. Как не трудно видеть, спинорные тензоры четного ранга преобразуются по представлениям группы $SO(3)$, более того, прямое произведение любого представления $SU(2)$ на себя (или себя с комплексным сопряжением) преобразуется по представлениям $SO(3)$, что и требуется в квантовой механике.

2. Симметричный тензор ранга r эквивалентен полиному степени r от компонент спинора, поэтому преобразуется по неприводимому представлению размерности $r + 1$. В предыдущей задаче это $D^{(2)}$.

Глава 6

Функции Грина

6.1. Функция Грина обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n -го порядка

$$\hat{L}_x u(x) = f(x)$$

в области $a < x < b$ с граничными условиями при $x = a$ и/или $x = b$

$$\hat{M}_k u = h_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Задача состоит в нахождении явного выражения искомой функции $u(x)$ через функцию $f(x)$ и граничные условия h_k .

Напоминание. Альтернатива Фредгольма Если у однородной самосопряженной задачи ($f(x) = 0, h_k = 0$) решений нет, то решение неоднородной задачи единственно. Если же однородная задача имеет нетривиальные решения, то излагаемый в этом разделе подход не даст решений.

Сначала находим полную систему решений (ФСР) однородного уравнения:

$$\hat{L}_x \phi(x) = 0,$$

состоящую из n решений $\phi_k(x)$. Граничные условия можно выполнить для функции

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x),$$

подобрав n коэффициентов a_k так, чтобы $\hat{M}_k u_1 = h_k$ для $k = 1, \dots, n$. Тогда неоднородная задача сводится к решению полуоднородной задачи $\hat{M}_k v = 0$ для функции $v(x) = u(x) - u_1(x)$.

Решение полуоднородной задачи дается в виде

$$v(x) = \int_a^b dx' G(x, x') f(x'),$$

где функция Грина $G(x, x')$ есть ядро интегрального оператора, обратного к \hat{L} :

$$\hat{L}_x G(x, x') = \delta(x - x'),$$

удовлетворяющее нулевым граничным условиям:

$$\hat{M}_k G = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Функция Грина является комбинацией ФСР однородного уравнения:

$$G_{<}(x, x') = \sum_{k=1}^n A_k(x') \phi_k(x) \quad \text{при } x < x',$$

$$G_{>}(x, x') = \sum_{k=1}^n B_k(x') \phi_k(x) \quad \text{при } x > x'.$$

Функции A_k , B_k находятся из n нулевых граничных условий и n условий сшивки при $x = x'$.

Задача 248. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad u(0) = a, \quad u(1) = b.$$

Решение. Сначала найдем ФСР однородного уравнения:

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = x,$$

из которых составим функцию $u_1 = a(1 - x) + bx$, удовлетворяющую граничным условиям. Затем для функции $v = u - u_1$ полуоднородной задачи выпишем уравнение на функцию Грина:

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} = \delta(x - x'), \quad G(0, x') = 0, \quad G(1, x') = 0.$$

Условия сшивки получим, интегрируя это уравнение по бесконечно малой области вблизи $x = x'$:

$$\left. \frac{dG_{>}(x, x')}{dx} \right|_{x=x'} - \left. \frac{dG_{<}(x, x')}{dx} \right|_{x=x'} = 1,$$

где введено обозначение $G_{>}$ для $x > x'$ и $G_{<}$ для $x < x'$. Интегрируя второй раз, получим последнее условие непрерывности

$$G_{>}(x', x') = G_{<}(x', x').$$

Составляя функцию Грина из ФСР и пользуясь граничными условиями, получим

$$G_{<}(x, x') = Ax, \quad G_{>}(x, x') = B(1 - x).$$

Осталось найти A и B из условий сшивки:

$$Ax' = B(1 - x'), \quad -B - A = 1,$$

откуда находим, что $A = x' - 1$, и $B = -x'$. Окончательно для функции Грина получаем

$$G(x, x') = xx' - \min\{x, x'\} = xx' - x_{<},$$

где введены обозначения $x = x_{<}$, $x' = x_{>}$ для $x < x'$ и $x = x_{>}$, $x' = x_{<}$ для $x > x'$.

Ответ. Решение неоднородной задачи имеет вид

$$u(x) = a(1 - x) + bx + \int_a^b dx' G(x, x') f(x').$$

Задача 249. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - m^2 u = f(x), \quad u(\infty) = u(-\infty) = 0.$$

Решение. ФСР дифференциального уравнения для удобства составим из функций

$$\phi_1 = \exp(mx), \quad \phi_2 = \exp(-mx),$$

каждая из которых удовлетворяет одному из нулевых граничных условий.

Функция Грина полуоднородной задачи удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} - m^2 G(x, x') = \delta(x - x'), \quad G(\infty, x') = 0, \quad G(-\infty, x') = 0.$$

Условия сшивки такие же, как в предыдущей задаче. Составляя функцию Грина из ФСР и пользуясь граничными условиями, получим

$$G_{<}(x, x') = A \exp(mx), \quad G_{>}(x, x') = B \exp(-mx).$$

Осталось найти A и B из условий сшивки:

$$A \exp(mx') = B \exp(-mx'), \quad -mB \exp(-mx') - mA \exp(mx') = 1,$$

откуда находим, что $A = -\exp(-mx')/2m$ и $B = -\exp(mx')/2m$. Окончательно для функции Грина получаем

$$G(x, x') = -\frac{\exp(-m|x - x'|)}{2m}.$$

Ответ.

$$u(x) = -\int dx' \frac{\exp(-m|x - x'|)}{2m} f(x').$$

Напоминание. Напомним, что функцию Грина полуоднородной задачи можно найти по формуле

$$G(x, x') = \frac{\phi_1(x_{<})\phi_2(x_{>})}{p(x')W(x')},$$

где $p(x)$ — коэффициент при второй производной,

$$W(x) = \frac{d\phi_2(x)}{dx}\phi_1(x) - \frac{d\phi_1(x)}{dx}\phi_2(x) \quad (6.1)$$

вронскиан, а $\phi_{1,2}(x)$ — решения однородного уравнения, удовлетворяющие левому или правому граничному условию соответственно.

Задача 250. * Найти функцию Грина краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - m^2 u = f(x), \quad u(\infty) = u(0) = 0.$$

Ответ.

$$G(x, x') = -\frac{\operatorname{sh}(mx_{<}) \exp(-mx_{>})}{m}.$$

Задача 251. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = f(x), \quad u(0) = a, \quad u(1) = b.$$

Решение. ФСР дифференциального уравнения для удобства составим из функций

$$\phi_1 = \sin(kx), \quad \phi_2 = \sin(k(1-x)),$$

каждая из которых удовлетворяет одному из нулевых граничных условий. Тогда функция

$$u_1 = a \frac{\sin(k(1-x))}{\sin(k)} + b \frac{\sin(kx)}{\sin(k)}$$

удовлетворяет однородному уравнению и неоднородным граничным условиям. Задача на функцию $v = u - u_1$ является полуоднородной.

Функция Грина задачи удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} + k^2 G(x, x') = \delta(x - x'), \quad G(0, x') = 0, \quad G(1, x') = 0.$$

Условия сшивки такие же, как в предыдущей задаче. Составляя функцию Грина из ФСР и пользуясь граничными условиями, получим:

$$G_{<}(x, x') = A \sin(kx), \quad G_{>}(x, x') = B \sin(k(1-x)).$$

Осталось найти A и B из условий сшивки:

$$A \sin(kx') = B \sin(k(1-x')), \quad -kB \cos(k(1-x')) - kA \cos(kx') = 1,$$

откуда находим, что $A = -\sin(k(1-x'))/k \sin(k)$ и $B = -\sin(kx')/k \sin(k)$. Окончательно для функции Грина получаем

$$G(x, x') = -\frac{\sin(kx_{<}) \sin(k(1-x_{>}))}{k \sin(k)}.$$

Этот же ответ можно получить, вычислив определитель Вронского (6.1).

Замечание. При $k = \pi n$ процедура ломается, формально это выражается в том, что функция Грина обращается в бесконечность (так же как и функция u_1). Это связано с тем, что при $k = \pi n$ у однородной задачи возникает решение $\phi_0 = \sin(kx)$, которое называется нулевой модой. В этом случае решение неоднородной задачи не единственно, а решение надо искать другим методом обобщенной функции Грина (ОФГ), который рассмотрен в следующем разделе.

Задача 252. Найти функцию Грина задачи с периодическими граничными условиями:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = f(x), \quad u(0) = u(1), \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1}.$$

Решение. ФСР дифференциального уравнения состоит из функций вида $A \sin(kx + \phi)$. Задача является полуднородной. Функция Грина задачи удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} + k^2 G(x, x') = \delta(x - x'), \quad G(0, x') = G(1, x'), \quad \left. \frac{dG(x, x')}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dG(x, x')}{dx} \right|_{x=1}.$$

Условия сшивки такие же, как в предыдущей задаче. Составляя функцию Грина из ФСР и пользуясь граничными условиями, получим:

$$G_{<}(x, x') = A \cos(kx + \alpha), \quad G_{>}(x, x') = A \cos(k(x - 1) + \alpha).$$

Осталось найти A и α из условий сшивки:

$$\cos(kx' + \alpha) = \cos(k(x' - 1) + \alpha), \quad -kA \sin(k(x' - 1) + \alpha) + kA \sin(kx' + \alpha) = 1,$$

откуда находим, что $\alpha = -kx' + k/2$ и $A = 1/2k \sin(k/2)$. Окончательно для функции Грина получаем

$$G(x, x') = -\frac{\cos(k(x - x') - k \operatorname{sign}(x - x')/2)}{2k \sin(k/2)}.$$

Замечание. Опять при $k = 2\pi n$ функция Грина обращается в бесконечность, у однородной задачи возникает сразу два решения — $\sin(kx)$ и $\cos(kx)$, т. е. две нулевые моды.

6.2. Обобщенные функции Грина для ОДУ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$\hat{L}_x u(x) = f(x)$$

в области $a < x < b$ с граничными условиями при $x = a$ и (или) $x = b$

$$\hat{M}_k u = h_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть однородная задача имеет нулевую моду $\phi_0(x)$:

$$\hat{L}_x \phi_0(x) = 0, \quad \hat{M}_k \phi_0(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Нам не удастся использовать ФСР для удовлетворения граничных условий. Однако можно взять произвольную функцию $u_1(x)$ (например полином), удовлетворяющую граничным условиям, и задача сведется к полуднородной задаче на функцию $v = u - u_1$ вида

$$\hat{L}_x v(x) = f(x) - \hat{L}_x u_1 \equiv \tilde{f}(x) \quad \hat{M}_k v = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Оператор \hat{L} необратим, поскольку имеет нулевое собственное значение. Однако из нормированной нулевой моды $\int_a^b dx \phi_0(x) = 1$ можно сделать проектор на подпространство этой моды в гильбертовом пространстве: интегральный оператор с ядром вида $P(x, x') = \phi_0(x)\phi_0(x')$. А значит, можно обратить оператор и получить уравнение на обобщенную функцию Грина (ОФГ) в подпространстве, ортогональном нулевой моде:

$$\hat{L}_x G(x, x') = \delta(x - x') - \phi_0(x)\phi_0(x'), \quad \hat{M}_k G(x, x') = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Решение ищется в виде суммы ФСР и частного решения неоднородного уравнения, затем сшивается при $x = x'$. Ясно, что решение не единственно, поскольку всегда можно добавить нулевую моду с произвольным коэффициентом.

Задача 253. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \pi^2u = f(x), \quad u(0) = a, \quad u(1) = b.$$

Решение. ФСР дифференциального уравнения содержит нулевую моду

$$\phi_0 = \sin(\pi x).$$

Второе решение $\phi_2 = \cos(\pi x)$ не удовлетворяет ни одному из нулевых граничных условий.

Рассмотрим функцию $u_1 = a + (b - a)x$, которая удовлетворяет неоднородным граничным условиям, однако не является решением уравнения. Тогда задача на функцию $v = u - u_1$ является полуоднородной с модифицированной правой частью:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \pi^2v = f(x) - \pi^2(a + (b - a)x) = \tilde{f}(x), \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Функция Грина модифицированной задачи удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2G(x, x')}{dx^2} + \pi^2G(x, x') = \delta(x - x') - 2\sin(\pi x)\sin(\pi x'), \quad G(0, x') = 0, \quad G(1, x') = 0.$$

Условия сшивки такие же, как в предыдущих задачах.

Составляя функцию Грина из ФСР и частного решения неоднородного уравнения $\frac{x}{\pi} \cos(\pi x) \sin(\pi x')$ и снова пользуясь граничными условиями, получим:

$$G_{<}(x, x') = \frac{x}{\pi} \cos(\pi x) \sin(\pi x') + A \sin(\pi x), \quad G_{>}(x, x') = \frac{x - 1}{\pi} \cos(\pi x) \sin(\pi x') + B \sin(\pi x).$$

Осталось найти A и B из условий сшивки:

$$A \sin(\pi x') = (B - \cos(\pi x')/\pi) \sin(\pi x'), \quad \pi B \cos(\pi x') + \sin^2(\pi x') - \pi A \cos(\pi x') = 1,$$

откуда находим, что $A = B - \cos(\pi x')/\pi$ и B — произвольная функция от x' . Окончательно для обобщенной функции Грина получаем

$$G(x, x') = \frac{x}{\pi} \cos(\pi x) \sin(\pi x') - \frac{\cos(\pi x_{>}) \sin(\pi x_{<})}{\pi} + B(x') \sin(\pi x).$$

Решение имеет вид

$$u(x) = a + (b - a)x + C \sin(\pi x) + \int_0^1 dx' G(x, x') \tilde{f}(x').$$

Обобщенная функция Грина определена в подпространстве, ортогональном нулевым модам, поэтому коэффициент $B(x')$ находится из условия ортогональности нулевой моде: $\int_0^1 \sin(\pi x) G(x, x') = 0$. Однако при нахождении решения эту громоздкую процедуру можно пропустить. Коэффициент $B(x')$ можно положить произвольной функции (например, $B = 0$ либо $B = x' \cos(\pi x')/\pi$, чтобы ОФГ была симметричной, как и положено для эрмитовой задачи), поскольку он дает лишь изменение в неопределенной константе C при нулевой моде. В последнем случае обобщенная функция Грина будет найдена с точностью до проектора на подпространство нулевой моды: $G(x, x') + C\phi_0(x)\phi_0(x')$. Кроме того, нужно явно выделить вклад от граничных условий, взяв интеграл от $-\pi^2 G(x, x')(a + (b - a)x')$, и представить ответ в стандартном виде суммы вкладов от $f(x)$ и от граничных условий.

Определение.

1. Оператор называется эрмитовым, если $\hat{L}^\dagger = \hat{L}$.

2. Если оператор эрмитов и нулевые граничные условия правой и левой задач совпадают, то задача называется самосопряженной. Тогда собственные функции левой и правой задач совпадают.

Замечание. Для предыдущей задачи домножим $\hat{L}u$ на функцию $w^*(x)$ и проинтегрируем по частям:

$$(w, \hat{L}u) = \int_0^1 dx w^*(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} - \pi^2 \right] u(x) = w^* \frac{du}{dx} \Big|_0^1 - \frac{dw^*}{dx} u(x) \Big|_0^1 +$$

$$\int_0^1 dx u(x) \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \pi^2 w(x) \right]^* = w^* \frac{du}{dx} \Big|_0^1 - \frac{dw^*}{dx} u(x) \Big|_0^1 + (\hat{L}^\dagger w, u).$$

Мы получили, что оператор эрмитовый. Теперь подставим нулевые граничные условия для $u(0) = u(1) = 0$, тогда второй внеинтегральный член обратится в ноль. Граничные условия на левую задачу (функцию w) обязаны быть такими, чтобы оставшиеся внеинтегральные слагаемые обратились в ноль. В нашем случае это $w(0) = w(1) = 0$, т. е. они в точности совпадают с граничными условиями правой задачи. Мы доказали, что задача самосопряженная.

Домножим исходное уравнение на нулевую моду и воспользуемся выведенным равенством при $w = \sin(\pi x)$:

$$\int_0^1 dx f(x) \sin(\pi x) = - \frac{d \sin(\pi x)}{dx} u(x) \Big|_0^1 = \pi(b + a).$$

Если повторить это для модифицированной (полуоднородной) задачи, то получим

$$\int_0^1 dx \tilde{f}(x) \sin(\pi x) = 0.$$

Очевидно, что это одно и то же равенство. Приходим к альтернативе Фредгольма: либо правая часть уравнения в полуоднородной задаче ортогональна нулевым модам (и тогда решение не единственно) либо задача некорректна и не имеет решений. Для неоднородной задачи условие разрешимости на правую часть уравнения зависит от значения на границах.

Задача 254. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad \frac{du}{dx} \Big|_0 = a, \quad \frac{du}{dx} \Big|_1 = b.$$

Решение. ФСР $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = x$ содержит нулевую моду. Для полуоднородной задачи выпишем уравнение на функцию Грина:

$$\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} = \delta(x - x') - 1, \quad G(0, x') = 0, \quad G(1, x') = 0.$$

Составляя функцию Грина из ФСР и частного решения $-x^2/2$ и пользуясь граничными условиями, получим:

$$G_{<}(x, x') = -\frac{x^2}{2} + A, \quad G_{>}(x, x') = -\frac{x^2}{2} + B + x.$$

Осталось найти A и B из условий сшивки: $A = B + x'$, $1 = 1$, опять один коэффициент при нулевой моде не определен. Окончательно для функции Грина получаем

$$G(x, x') = -\frac{x^2}{2} + x_{>} + B(x'),$$

чтобы ОФГ была симметричной (поскольку задача самосопряженная), выберем $B = -x'^2/2 + \text{const}$. Произвол в выборе константы фиксируется условием ортогональности ОФГ с нулевой модой. Теперь ОФГ удовлетворяет нулевым граничным условиям по x и x' .

Осталось учесть граничные условия и найти условие разрешимости задачи. Умножая уравнение на нулевую моду и интегрируя по частям, находим условие разрешимости:

$$\int_0^1 dx f(x) = \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = b - a.$$

Теперь, чтобы учесть ненулевые граничные условия, умножим уравнение на ОФГ и проинтегрируем по частям:

$$\int_0^1 dx' G(x, x') f(x') = G(x, x') \frac{du}{dx'} \Big|_0^1 + u(x) - \int_0^1 dx' u(x').$$

Ответ.

$$u(x) = \int_0^1 dx' G(x, x') f(x') + aG(x, 0) - bG(x, 1) + C\phi_0 =$$

$$\int_0^1 dx' G(x, x') f(x') + ax(1 - x/2) + bx^2/2 + C.$$

Подставляя решение в уравнение, убеждаемся, что оно выполняется, если выполнено условие разрешимости, в противном случае задача некорректна.

Задача 255. * Найти ОФГ краевой задачи

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = f(x), \quad u(0) = \frac{du}{dx} \Big|_0 + a, \quad u(1) = \frac{du}{dx} \Big|_1 + b.$$

Указание. ФСР $\phi_0 = \exp(x)$, $\phi_1 = \exp(-x)$ содержит нулевую моду, вронскиан равен 2. Для полуднородной задачи выпишем уравнение на функцию Грина:

$$\frac{d^2G(x, x')}{dx^2} - G(x, x') = \delta(x - x') - \frac{2 \exp(x + x')}{e^2 - 1}, \quad G(0, x') = G(1, x'), \quad \frac{dG}{dx} \Big|_0 = 0.$$

Решение имеет вид

$$G(x, x') = -\frac{x \exp(x + x')}{e^2 - 1} + \frac{\text{sh}(x - x')}{e^2 - 1} (e^2 \theta(x - x') + \theta(x' - x)).$$

Условие разрешимости получим, интегрируя уравнение с нулевой модой:

$$\int_0^1 dx \exp(x) f(x) = a - eb.$$

Ответ.

$$u(x) = \int_0^1 dx' G(x, x') f(x') + G(x, 1)b - G(x, 0)a =$$

$$\int_0^1 dx' G(x, x') f(x') + \left(\frac{\operatorname{sh}(x-1) - x \exp(x+1)}{e^2 - 1} \right) b - \left(\frac{e^2 \operatorname{sh}(x) - x \exp(x)}{e^2 - 1} \right) a.$$

6.3. Функции Грина эллиптических уравнений

Задача 256. Найти функцию Грина для уравнения Пуассона

$$\Delta u(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечности $u(\infty) = 0$.

Решение. Уравнение на функцию Грина имеет вид

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (6.2)$$

с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Поскольку правая часть зависит только от разности $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ и граничные условия поставлены при $R = \infty$, будем искать ФГ как функцию \vec{R} . В сферической системе координат для размерности пространства d получим

$$\operatorname{div} \nabla G(R) = \delta(\vec{R}).$$

Интегрируя по шару радиуса R , получим

$$\int_{R' < R} dR'^d \operatorname{div}' \nabla' G(\vec{R}') = \int_{R'=R} d\vec{S} \nabla G(R) = \Omega_d R^{d-1} \frac{dG(R)}{dR} = 1,$$

где Ω_d — площадь поверхности d -мерной сферы единичного радиуса. Интегрируем еще раз и получаем

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{(d-2)\Omega_d |\vec{r} - \vec{r}'|^{d-2}} \quad \text{при } d > 2.$$

Для размерности пространства меньше $d < 3$ нулевые условия на бесконечности выполнить нельзя.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\ln(|\vec{r} - \vec{r}'|)}{2\pi} \quad \text{при } d = 2,$$

$$G(x, x') = \frac{|x - x'|}{2} \quad \text{при } d = 1.$$

В электростатике ФГ задает поле (потенциал) точечного заряда. Для $d = 2$ — это потенциал заряженной нити, он логарифмически растет на бесконечности, а $d = 1$ — потенциал заряженной плоскости, он растет линейно.

Задача 257. Найти решение уравнения Пуассона в области $z > 0$ трехмерного пространства с граничным условием $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$ (задача Дирихле: на границе задано распределение потенциала).

Решение. Начнем с решения полуоднородной задачи $G(x, y, 0; \vec{r}') = 0$. ФГ найдем методом изображения. В силу симметрии относительно отражения от плоскости $z = 0$ ищем в виде суммы двух ФГ из предыдущей задачи, отличающихся заменой $z \rightarrow -z$:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} + A \frac{-1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|},$$

где $x'' = x', y'' = y', z'' = -z'$. Лапласиан от второго слагаемого равен нулю в области определения функции, поэтому функция Грина удовлетворяет уравнению (6.2). А используя граничные условия, получим $A = -1$. Формально ФГ задает поле от точечного заряда и заряда его изображения другого знака.

Чтобы найти вклад от граничных условий, умножим уравнение Пуассона на ФГ и проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_{z' > 0} dr'^3 G(\vec{r}, \vec{r}') \operatorname{div}' \nabla' u(\vec{r}') &= - \int dx' dy' G(\vec{r}; x', y', 0) \left. \frac{du}{dz'} \right|_{z'=0} + \\ \int dx' dy' u(x', y', 0) \left. \frac{dG(\vec{r}, \vec{r}')}{dz'} \right|_{z'=0} + u(\vec{r}) &= \int_{z' > 0} dr'^3 G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}'). \end{aligned}$$

Поскольку $G(\vec{r}; x', y', 0) = 0$, то получим ответ в виде

$$u(\vec{r}) = \int_{z' > 0} dr'^3 G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') - \int dx' dy' \left. \frac{dG(\vec{r}, \vec{r}')}{dz'} \right|_{z'=0} \phi(x', y'),$$

где функция $-(dG(\vec{r}, \vec{r}')/dz')|_{z'=0}$ называется функцией Грина второго рода в задаче Дирихле. Она задает поле в трехмерной области пространства по заданному значению потенциала на его границе.

$$G_2(\vec{r}, x', y') = \frac{1}{4\pi} \frac{2z}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{z'=0}.$$

Задача 258. Найти решение уравнения Пуассона в области $r < 1$ двумерного пространства с граничным условием $u(1, \phi) = h(\phi)$ (задача Дирихле).

Решение. Начнем с решения полуоднородной задачи $G(1, \phi; \vec{r}') = 0$. ФГ найдем методом изображения. В силу симметрии относительно инверсии $\vec{r} \rightarrow \vec{r}/r^2$, которая является конформной, т. е. оставляет лапласиан без изменения, к ФГ из предыдущей задачи надо добавить слагаемое с инверсией:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} [\ln |\vec{r} - \vec{r}'| + A \ln (|\vec{r} - \vec{r}'/r'^2|) + \ln(C(r'))].$$

Лапласиан от второго слагаемого равен нулю в области определения функции $r < 1$, поэтому она удовлетворяет уравнению на функцию Грина. Используя граничные условия, получим, что

$$\ln[(r'^2 - 2(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + 1)(r'^{-2} - 2(\vec{r}' \cdot \vec{n})/r'^2 + 1)^A C^2(r')] = 0,$$

откуда $A = -1$, а $C = 1/r'$.

Замечание. Заметим, что $|r'\vec{r} - \vec{r}'/r'| = |\vec{r}/r - r\vec{r}'|$, поэтому функция Грина симметрична по замене $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$.

Чтобы найти вклад от граничных условий, умножим уравнение Пуассона на $\Phi\Gamma$ и проинтегрируем по частям

$$\int_{r' < 1} dr'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \operatorname{div}' \nabla' u(\vec{r}') = \int d\phi' G(\vec{r}; 1, \phi') \frac{du}{dr'} \Big|_{r'=1} - \int d\phi' u(1, \phi') \frac{dG(\vec{r}, \vec{r}')}{dr'} \Big|_{r'=1} + u(\vec{r}) = \int_{r' < 1} dr'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}').$$

Поскольку $G(\vec{r}; 1, \phi') = 0$, мы находим ответ в виде

$$u(\vec{r}) = \int_{r' < 1} dr'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') + \int d\phi' \frac{dG(\vec{r}, \vec{r}')}{dr'} \Big|_{r'=1} h(\phi'),$$

где функция $(dG(\vec{r}, \vec{r}')/dr')|_{r'=1}$ называется функцией Грина второго рода в задаче Дирихле. Она позволяет найти поле в двухмерной области пространства по заданному значению потенциала на его границе:

$$G_2(\vec{r}, \phi') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - (\vec{r} \cdot \vec{n}')}{|\vec{r} - \vec{n}'|^2} - \frac{1 - (\vec{r} \cdot \vec{n}')/r^2}{|\vec{r}/r^2 - \vec{n}'|^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{r^2 + 1 - 2(\vec{r} \cdot \vec{n}')}$$

Задача 259. Найти решение уравнения Пуассона в области $r < 1$ двухмерного пространства с граничным условием $(du(\vec{r})/dr)|_{r=1} = h(\phi)$ (задача Неймана: на границе задана нормальная компонента электрического поля).

Решение. Начнем с решения полуоднородной задачи $(dG(\vec{r}; \vec{r}')/dr)|_{r=1} = 0$. Однородная задача имеет решение $u_0 = 1$ — нулевую моду. Поэтому уравнение на $\Phi\Gamma$ надо писать в подпространстве, ортогональном нулевой моде:

$$\operatorname{div} \nabla G(R) = \delta(\vec{R}) - \frac{1}{\pi}.$$

$\Phi\Gamma$ найдем методом изображения. В силу симметрии относительно инверсии $\vec{r} \rightarrow \vec{r}/r^2$, которая является конформной, т. е. оставляет лапласиан без изменения, нужно искать решение в виде суммы вкладов заряда и изображения плюс частное решение и нулевую моду $-r^2/4\pi + C(r')$:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \left(\ln |\vec{r} - \vec{r}'| + A \ln (|r'\vec{r} - \vec{r}'/r'|) - \frac{r^2}{2} + C \right).$$

Лапласиан от второго слагаемого равен нулю в области определения функции $r < 1$, поэтому она удовлетворяет уравнению на функцию Грина. Накладывая нулевые граничные условия, получим

$$\frac{dG(\vec{r}; \vec{r}')}{dr} \Big|_{r=1} = \frac{1 - (\vec{r}' \cdot \vec{n})}{r'^2 - 2(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + 1} + A \frac{1 - (\vec{r}' \cdot \vec{n})/r'^2}{r'^{-2} - 2(\vec{r}' \cdot \vec{n})/r'^2 + 1} - 1 = 0,$$

откуда $A = 1$. Заметим, что $|r'\vec{r} - \vec{r}'/r'| = |\vec{r}/r - r\vec{r}'|$, поэтому функция Грина будет симметрична по замене $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$, если выбрать $C = -r'^2/2$. Мы нашли обобщенную функцию Грина:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \left(\ln (|\vec{r} - \vec{r}'| |r'\vec{r} - \vec{r}'/r'|) - \frac{r^2 + r'^2}{2} \right).$$

Чтобы найти вклад от граничных условий, умножим уравнение Пуассона на ОФГ и проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_{r' < 1} dr'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \operatorname{div}' \nabla' u(\vec{r}') &= \int d\phi' G(\vec{r}; 1, \phi') \frac{du}{dr'} \Big|_{r'=1} - \int d\phi' u(1, \phi') \frac{dG(\vec{r}, \vec{r}')}{dr'} \Big|_{r'=1} + u(\vec{r}) \\ &= \int_{r' < 1} dr'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}'). \end{aligned}$$

Поскольку $dG(\vec{r}; \vec{r}')/dr' |_{r'=1} = 0$ (для симметричной формы ОФГ), то находим ответ в виде

$$u(\vec{r}) = \int_{r' < 1} dr'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') - \int d\phi' G(\vec{r}; 1, \phi') h(\phi') + \text{const},$$

где функция $G_2(\vec{r}, \phi') = -G(\vec{r}; 1, \phi')$ называется функцией Грина второго рода в задаче Неймана. Она позволяет найти поле в двумерной области пространства по заданному значению нормальной компоненты напряженности поля на его границе.

Поскольку в задаче есть нулевая мода $u_0 = \text{const}$, то поле определено с точностью до произвольной константы, что физически понятно, так как измеряется только напряженность поля. Чтобы найти условие разрешимости задачи, умножим уравнение Пуассона на нулевую моду и проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_{r' < 1} dr'^2 \pi^{-1/2} \operatorname{div}' \nabla' u(\vec{r}') &= \int d\phi' \pi^{-1/2} \frac{du}{dr'} \Big|_{r'=1} - \int d\phi' u(1, \phi') \frac{d\pi^{-1/2}}{dr'} \Big|_{r'=1} \\ &= \int_{r' < 1} dr'^2 (\pi)^{-1/2} f(\vec{r}'). \end{aligned}$$

Условие разрешимости

$$\int_{r' < 1} dr'^2 f(\vec{r}') = \int d\phi' h(\phi')$$

выражает интеграл от нормальной компоненты напряженности электрического поля по поверхности через полный заряд внутри области.

6.4. Функции Грина параболических уравнений

Задача 260. Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = h(x)$$

найти функцию Грина второго рода.

Решение. Пусть $u(x, -0) = 0$. Для того чтобы $u(x, +0) = h(x)$, достаточно добавить в правую часть уравнения дельта-функциональный член $\delta(t)h(x)$. Проверим это соотношение, интегрируя модифицированное уравнение по t от -0 до $+0$. Таким образом,

неоднородная задача всегда сводится к полуоднородной, а функция Грина второго рода выражается соотношением

$$G_{II}(x, t; x') = G(x, t; x', 0)$$

через функцию Грина.

Задача 261. Найти функцию Грина уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с граничными условиями

$$u(\pm\infty, t) = 0$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = h(x) \equiv \frac{\exp(-x^2/2a^2)}{\sqrt{2\pi a}}.$$

Решение. Сделаем Фурье-преобразование уравнения на функцию Грина $G(t - t', x - x') = \int G(t - t', k) \exp(ik(x - x')) dk / 2\pi$:

$$\frac{dG}{dt} + k^2 G = \delta(t - t').$$

Воспользуемся начальными условиями $G(-\infty, k) = 0$ и введем обозначение $\tau = t - t'$. Интегрируя уравнение первого порядка, получим

$$G(\tau, k) = \theta(\tau) \exp(-k^2 \tau).$$

Замечание. Обращение функции Грина в ноль при $t < t'$ означает, что отклик на любое воздействие возникает только после совершения этого действия.

Выполняя обратное Фурье-преобразование, получим для функции Грина

$$G(t - t', x - x') = \frac{\theta(t - t')}{\sqrt{4\pi(t - t')}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4(t - t')}\right].$$

Выражая функцию Грина второго рода через функцию Грина, найдем решение:

$$u(x, t) = \int dx' G_{II}(x, t; x') h(x') = \frac{\theta(t)}{\sqrt{2\pi(2t + a^2)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t + 2a^2}\right].$$

Задача 262. Найти функцию Грина 3-мерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

с граничными условиями

$$u(\infty, t) = 0$$

в разных Фурье-представлениях.

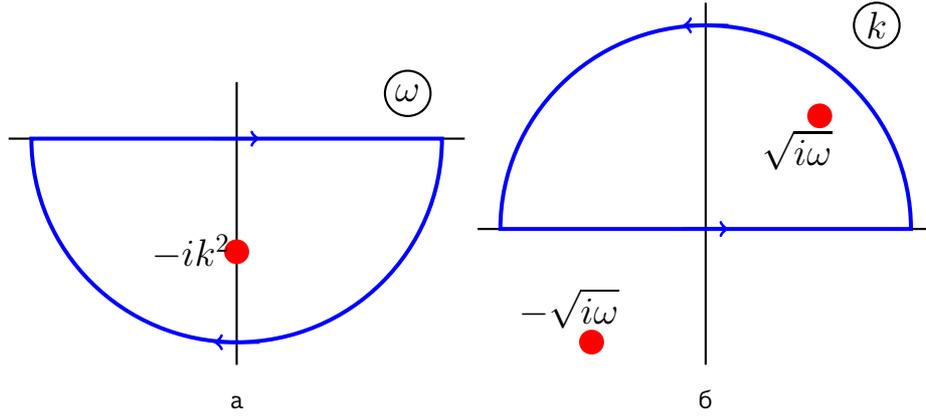


Рис. 6.1. Контур интегрирования в ω -плоскости (а) при $t > t'$ и в k -плоскости (б) для уравнения теплопроводности

Решение. Сделаем Фурье-преобразование уравнения на функцию Грина

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G = \delta(t - t')\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

по всем переменным $G(t - t', x - x') = \int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} G(\omega, \vec{k}) \exp(i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}') - i\omega(t - t'))$ и получим

$$G(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{-i\omega + k^2}.$$

Сделаем обратное Фурье-преобразование. При $t > t'$ контур интегрирования по частоте можно замкнуть только в нижней полуплоскости комплексного переменного, как показано на рис. 6.1, а. Вычет при $\omega = -ik^2$ даст для функции Грина

$$G(t - t', \vec{k}) = \theta(t - t') \exp(-k^2(t - t')).$$

При $t < t'$ контур можно замкнуть только в верхней полуплоскости, где подынтегральная функция аналитична, поэтому интеграл равен нулю.

Замечание. Обращение функции Грина в ноль при $t < t'$ означает, что отклик на любое воздействие возникает только после совершения этого действия. Процессы, описываемые уравнением теплопроводности, необратимы по времени. В ω -представлении этот принцип выражается в том, что полюса могут лежать только в нижней полуплоскости (при выбранном нами знаке фазы в Фурье-преобразовании).

Теперь сделаем Фурье-преобразование по координатам:

$$G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') = \frac{\theta(t - t')}{(4\pi(t - t'))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{4(t - t')}\right).$$

Наконец, найдем функцию Грина в ω, \vec{r} -представлении. Введем обозначение $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, тогда

$$\begin{aligned} G(\omega, \vec{R}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\vec{k}\vec{R})}{k^2 - i\omega} = \int_0^\infty \frac{kdk}{4\pi^2 iR} \frac{\exp(ikR)}{k^2 - i\omega} + \text{c.c.} = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{kdk}{4\pi^2 iR} \frac{\exp(ikR)}{k^2 - i\omega} = \frac{\exp(iR\sqrt{i\omega})}{4\pi R}. \end{aligned}$$

Контур интегрирования можно замкнуть только в верхней полуплоскости, поэтому вклад дает только вычет при $k = \sqrt{i\omega}$, где $\text{Im}\sqrt{i\omega} > 0$ (рис. 6.1, б). Осталось выразить функцию Грина второго рода через функцию Грина первого рода

$$G_{II}(\vec{r}, t; \vec{r}') = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{4t}\right).$$

Задача 263. Найти функцию Грина второго рода уравнения Шредингера свободной частицы

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Delta\Psi.$$

Решение. Это уравнение отличается от уравнения теплопроводности формальной заменой в последнем $t \rightarrow it$. Делая эту замену в функции Грина второго рода уравнения теплопроводности, получим ответ:

$$G_{II}(\vec{r}, t; \vec{r}') = \frac{\theta(t)}{(4\pi it)^{3/2}} \exp\left[-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{4it}\right].$$

Эта функция Грина позволяет найти решение для ψ -функции свободной частицы по начальной амплитуде волновой функции:

$$\Psi(t, \vec{r}) = \int d^3r' G_{II}(\vec{r}, t; \vec{r}') \Psi(0, \vec{r}').$$

Замечание. Уравнение Шредингера обратимо по времени, поэтому в ответе можно сделать замену $t \rightarrow -t$ и получить опережающую функцию Грина, с помощью которой можно найти решение для ψ -функции назад по времени.

Задача 264. Найти функцию Грина второго рода уравнения Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(xu + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u(x, 0) = h(x).$$

Решение. Уравнение на функцию Грина можно сделать однородным, используя ненулевые начальные условия:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(xG + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x} \right); \quad G(x, x', 0) = \delta(x - x').$$

Делая Фурье преобразование по переменной x , получим квазилинейное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial G_k}{\partial t} - k \frac{\partial G_k}{\partial k} = -\frac{k^2}{2} G_k.$$

Решая его методом характеристик, получим общее решение

$$\ln G_k = -\frac{k^2}{4} + f(ke^{-t}).$$

Подстановка начальных условий $G_k(0) = \exp(-ikx')$ дает нам частное решение

$$G_k = \exp\left(-\left(1 - e^{-2t}\right)\frac{k^2}{4} - ikx'e^{-t}\right).$$

Делая обратное Фурье преобразование, получим ответ в виде

$$G(x, x', t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - e^{-2t})}} \exp\left[-\frac{(x - x'e^{-t})^2}{1 - e^{-2t}}\right].$$

Задача 265. * Получить интегральное уравнение теории рассеяния свободной частицы на локализованном возмущении с потенциалом $U(\vec{r})$. Падающая волна задана в виде $\Psi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \exp(i\vec{k}\vec{r})$.

Решение. Стационарное уравнение Шредингера имеет вид уравнения Гельмгольца

$$(-E - \Delta)\Psi_E(\vec{r}) = -U(\vec{r})\Psi_E(\vec{r}).$$

Будем рассматривать правую часть заданной, тогда левая часть совпадает с уравнением теплопроводности при $\omega = -iE$. Поэтому можно воспользоваться полученным ранее решением для функции Грина

$$G(E, \vec{R}) = \frac{\exp(iR\sqrt{E})}{4\pi R}.$$

Однако имеется существенное отличие. Для того чтобы понять это, повторим вывод. В E, \vec{q} представлении имеем

$$G(E, \vec{q}) = \frac{1}{-E + q^2}.$$

Функция Грина обращается в бесконечность при $E = q^2$, что отражает существование решений в виде плоских волн однородного уравнения (бесконечное число нулевых мод). Наличие нулевых мод приводит к неопределенности при обратном Фурье-преобразовании, так как полюса лежат на вещественной оси. Эта неопределенность снимается, если мы воспользуемся принципом причинности. Функция Грина обращается в ноль при $t < t'$, если полюса по энергии лежат в нижней полуплоскости: $E = q^2 - i0$. Дроопределенная таким образом функция Грина имеет вид

$$G(E, \vec{q}) = \frac{1}{q^2 - i0 - E}.$$

Фактически принцип причинности диктует правило обхода полюсов. Теперь сделаем обратное Фурье преобразование по импульсам:

$$G(E, \vec{R}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\vec{q}\vec{R})}{q^2 - i0 - E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qdq}{4\pi^2 iR} \frac{\exp(iqR)}{q^2 - i0 - E} = \frac{\exp(iR\sqrt{E})}{4\pi R}.$$

Контур интегрирования можно замкнуть только в верхней полуплоскости, поэтому вклад дает только один вычет при $q = \sqrt{E + i0}$, где $\text{Im}\sqrt{E + i0} > 0$. Решение имеет вид свертки правой части уравнения с функцией Грина плюс общее решение (нулевая мода), совпадающее на бесконечности с падающей волной (откуда находим $E = k^2$):

$$\Psi_E(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}\vec{r}) - \int d^3r' \frac{\exp(i|\vec{r} - \vec{r}'|k)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} U(\vec{r}')\Psi_E(\vec{r}').$$

Это интегральное уравнение можно решать итерациями, если потенциал есть малое возмущение.

6.5. Функции Грина волновых уравнений

Задача 266. Найти функцию Грина волнового уравнения в калибровке $\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$:

$$\square A_\mu(t, \vec{r}) = 4\pi j_\mu(t, \vec{r}), \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Здесь \square обозначает оператор Даламбера.

Решение. Используя обозначения $\tau = t - t'$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, для функции Грина получим уравнение

$$\square G(\tau, \vec{R}) = \delta(\tau)\delta(\vec{R}),$$

которое в Фурье представлении имеет простой вид

$$G(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{k^2 - \omega^2}.$$

Полюсы функции Грина на вещественной оси $\omega = \pm k$ являются следствием существования решений волнового уравнения в отсутствие зарядов $j_\mu = 0$, т. е. полю электромагнитных волн. Будем искать запаздывающую функцию Грина, удовлетворяющую принципу причинности, т. е. сдвинем полюса по частоте в нижнюю полуплоскость: $\omega = \pm k - i0$. Таким образом, запаздывающая функция Грина имеет вид

$$G^r(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{k^2 - (\omega + i0)^2}.$$

При переходе к t, \vec{k} -представлению надо замкнуть контур интегрирования снизу при $t > t'$ (рис. 6.2) и сверху при $t < t'$, что дает

$$G^r(\tau, \vec{k}) = i\theta(\tau) \frac{\exp(-ik\tau)}{2k} + \text{с.с.}$$

Интегрируя это выражение по волновому вектору, получим хорошо известную формулу

$$\begin{aligned} G^r(\tau, \vec{R}) &= 2\text{Re} \theta(\tau) \int_0^\infty \frac{dk}{8\pi^2 R} \exp(-ik\tau) (\exp(ikR) - \exp(-ikR)) = \\ &= \theta(\tau) \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{8\pi^2 R} \exp(-ik\tau) (\exp(ikR) - \exp(-ikR)) = \frac{\theta(\tau)}{4\pi R} (\delta(R - \tau) - \delta(R + \tau)) = \\ &= \theta(\tau) \frac{\delta(R - \tau)}{4\pi R}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

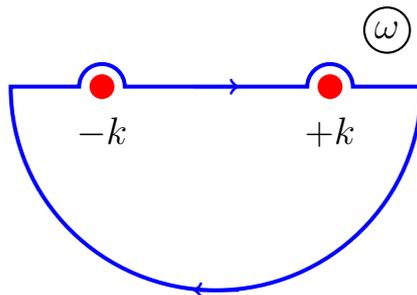


Рис. 6.2. Контур интегрирования в ω -плоскости для волнового уравнения при $t > t'$

Наконец, посмотрим, как выглядит запаздывающая функция Грина в ω, \vec{R} -представлении:

$$G^r(\omega, \vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kdk}{4\pi^2 i R} \frac{\exp(ikR)}{k^2 - (\omega + i0)^2} = \frac{\exp(iR\omega)}{4\pi R}.$$

Поскольку замкнуть контур можно только в верхней полуплоскости, вклад дает только один полюс $k = \omega + i0$.

Задача 267. Найти функцию Грина уравнения Клейна — Гордона (пропагатор скалярной релятивистской частицы с массой m):

$$(\square + m^2)A(t, \vec{r}) = J(t, \vec{r}).$$

Решение. Используя обозначения $\tau = t - t'$, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, для функции Грина получим уравнение

$$(\square + m^2)G(\tau, \vec{R}) = \delta(\tau)\delta(\vec{R}),$$

которое в Фурье представлении имеет простой вид

$$G(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{m^2 + k^2 - \omega^2 - i0}.$$

Запаздывающая функция Грина не является релятивистски инвариантной, поскольку меняет свой вид в разных системах отсчета. Требование инвариантности относительно Лоренцевских преобразований позволяет использовать только лоренцевские скаляры и оставляет только две возможности обхода полюсов на вещественной оси $\omega^2 = m^2 + k^2 \mp i0$ (поскольку $\omega^2 - k^2$ есть лоренцевский скаляр). Мы выбрали знак $-$, чтобы для корня, задающего положительную частоту, полюс лежал в нижней полуплоскости, обеспечивая причинность в нерелятивистском пределе.

Делая обратное преобразование Фурье по частоте, получим

$$G(\tau, \vec{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\exp(-i\omega\tau)}{m^2 + k^2 - \omega^2 - i0} = i\theta(\tau) \frac{\exp(-i\tau\sqrt{m^2 + k^2})}{2\sqrt{m^2 + k^2}} + i\theta(-\tau) \frac{\exp(i\tau\sqrt{m^2 + k^2})}{2\sqrt{m^2 + k^2}}.$$

Для $t > t'$ контур можно замкнуть только снизу, и вклад дает только полюс $\omega = \sqrt{m^2 + k^2}$, а для $t < t'$ контур можно замкнуть только сверху, и вклад дает только полюс $\omega = -\sqrt{m^2 + k^2}$.

Если вместо преобразования Фурье по частоте сделаем преобразование по волновому вектору, то получим

$$G(\omega, \vec{R}) = \int \frac{kdk}{4\pi^2 i R} \frac{\exp(ikR)}{m^2 + k^2 - \omega^2 - i0} = \frac{\exp(iR\sqrt{-m^2 + \omega^2})}{4\pi R}.$$

Вклад дает только полюс в верхней полуплоскости $k = \sqrt{-m^2 + \omega^2}$ при $|\omega| > m$ или $k = i\sqrt{m^2 - \omega^2}$ при $|\omega| < m$. При $\omega = 0$ эта формула дает потенциал Юкавы для статического массивного поля неподвижного заряда.

$$A(\vec{R}) = \frac{\exp(-Rm)}{4\pi R}.$$

В отличие от электромагнитного поля массивные поля экспоненциально спадают на расстояниях больших обратной массы $R > \hbar/mc$.

Наконец, чтобы найти пропагатор в t, \vec{r} -представлении, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{m^2 + k^2 - \omega^2 - i0} = \int_0^\infty d\alpha \exp(-\alpha(m^2 + k^2 + k_0^2 - i0)),$$

пользуясь тем, что расположение полюсов позволяет нам аналитически повернуть контур по $\omega = ik_0$, направив его вдоль мнимой оси. В результате получим

$$G(\tau, \vec{R}) = \int_0^\infty d\alpha \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \exp(-\alpha(m^2 + k^2 + k_0^2) + k_0\tau + i\vec{k}\vec{R}) =$$

$$\int_0^\infty \frac{id\alpha}{16\pi^2\alpha^2} \exp(-\alpha m^2 - \frac{R^2 - \tau^2}{4\alpha}) = \frac{imc}{4\pi^2\hbar\sqrt{R^2 - (c\tau)^2}} K_1\left(\frac{mc\sqrt{R^2 - (c\tau)^2}}{\hbar}\right).$$

На больших расстояниях сигнал экспоненциально затухает, так как не может распространяться со скоростью больше световой. При $c\tau > R$ функция Макдональда переходит в функцию Ганкеля $H_1^{(1)}(mc\sqrt{(c\tau)^2 - R^2}/\hbar)$ расходящейся волны. В пределе безмассовой частицы пропагатор переходит в

$$G(\tau, \vec{R}) = \frac{i}{4\pi^2(R^2 - (c\tau)^2)}.$$

Как нетрудно видеть, он имеет Лоренц-инвариантный вид.

А. Симметризаторы Юнга

А.1. Циклы

В конечном множестве из n одинаковых элементов все преобразования множества в себя исчерпываются перестановками элементов. Занумеруем элементы числами $k = 1, \dots, n$. *Подстановкой* (или *перестановкой*) из n элементов называется правило $1 \rightarrow i_1, \dots, n \rightarrow i_n$, по которому переставляются n элементов конечного множества. Здесь $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ — те же числа, но в другом порядке. Подстановку записывают в виде матрицы из двух строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

При умножении двух подстановок получается их композиция, как видно из примера

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

В правой части стоит результат последовательного действия преобразований $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2$. Все перестановки из n элементов образуют *группу подстановок* π_n порядка $|\pi_n| = n!$. Запись подстановки сокращается, если ее разбить на циклы. Чтобы найти все циклы, надо соединять элементы, переходящие друг в друга, до тех пор, пока путь не замкнется.

Задача 268. Разбить на циклы подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запись (1243) означает схему переходов элементов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1243)(5).$$

Задача 269. Разбить на циклы подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (15)(243).$$

Обратим внимание, что циклы можно писать в произвольном порядке, поэтому их называют *коммутующие циклы*. Номера внутри цикла можно циклически переставлять. От этого правило преобразования не меняется. Цикл из двух элементов называется *транспозицией*.

Свойства

1. **Сопряжение.** Подстановка QPQ^{-1} получается из подстановки P , если ее элементы переставить согласно Q .

$$QPQ^{-1} = Q[P]. \tag{A.5}$$

Задача 270. Вычислить двумя способами $(12)(123)(12)^{-1}$.

Решение. $P = (123), Q = (12) = Q^{-1}$. В подстановке $Q = (12)(3)$ элемент 3 остается на месте, и мы это не пишем. Переставим в подстановке P местами элементы 1 и 2, получим $Q[P] = (213)$. Теперь вычислим

$$QPQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перепишем цикл (213) в подробных обозначениях

$$(213) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

т. е. ответы совпали.

2. **Соединение.** Циклы с общим крайним элементом сливаются:

$$(a \dots bm)(mp \dots q) = (a \dots bmp \dots q).$$

Если общий элемент не крайний, его надо переместить в начало или конец циклическими перестановками.

3. **Транспозиции.** Любая подстановка есть совокупность транспозиций. Разложение на транспозиции не единственно, однако у разных разложений четность числа транспозиций совпадает. Произведение двух четных подстановок является четной подстановкой, поэтому четные подстановки образуют подгруппу $A_n < \pi_n$, которая называется *знакопеременной*.

Задача 271. Записать перестановку (31254) в виде произведения транспозиций.

Решение. $(31254) = (312)(54) = (13)(32)(45)$.

4. **Подгруппы.** Все $\pi_m, m < n$ являются подгруппами π_n . Четные подстановки образуют нормальную подгруппу: $A_n \triangleleft \pi_n$. Действительно, если P — четная подстановка, то и QPQ^{-1} — четная.

Задача 272. Проверить, что $A_3 \triangleleft \pi_3$, и найти ее в группе треугольника.

Ответ. $A_3 \approx C_3 < D_3$.

5. **Сопряженные классы.** Каждый класс сопряженных элементов группы $\sigma \in \pi_n$ отвечает определенному разбиению подстановки на циклы. Действительно, если $P_1 \sim P_2$, т. е. $P_1 = QP_2Q^{-1}$, то по формуле (А.5) они имеют одинаковое количество циклов, длины циклов также совпадают. Значит, количество всевозможных разбиений подстановки на циклы равно числу классов сопряженных элементов.

А.2. Схемы Юнга

Пусть τ_k — число циклов длины k в данном разбиении, тогда

$$1\tau_1 + 2\tau_2 + \dots + n\tau_n = n. \quad (\text{А.6})$$

Каждое разбиение обозначим символом $\{1^{\tau_1} 2^{\tau_2} \dots n^{\tau_n}\}$. Первую степень можно не писать, а если степень нулевая, то можно пропустить это число.

Задача 273. Написать все разбиения и циклы группы π_3 и найти соответствующие им классы сопряженных элементов в группе треугольника.

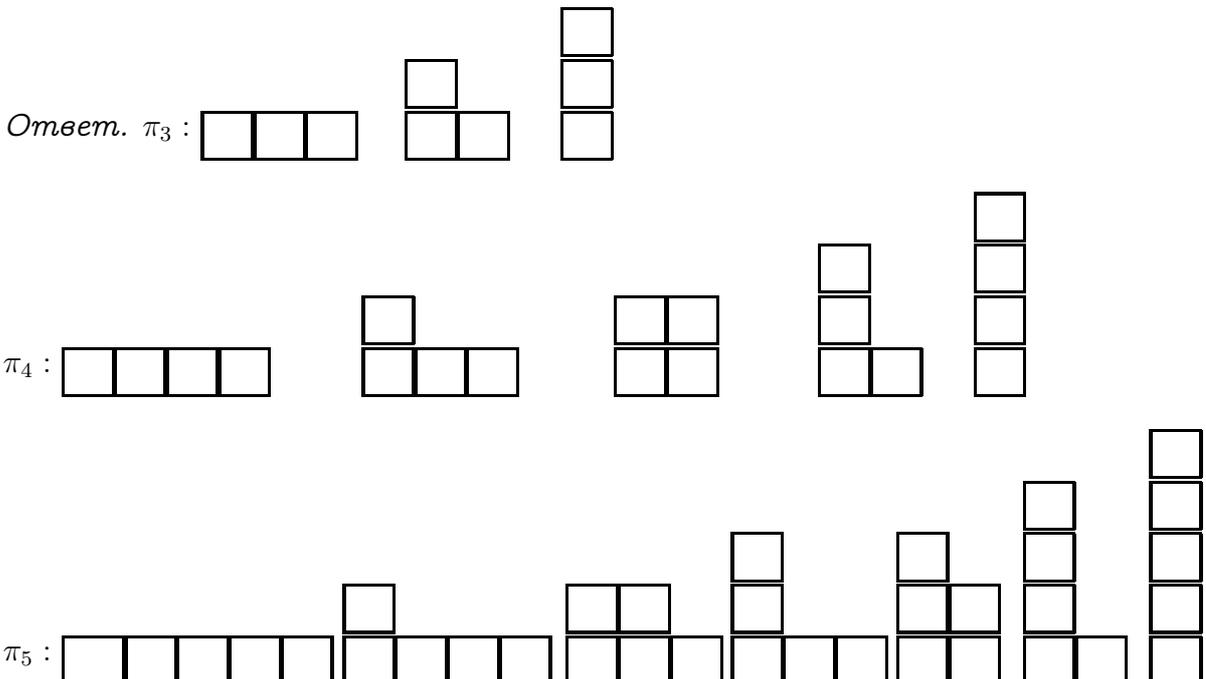
Ответ.

$$\{3\} : (231), (132); \quad \{12\} : (1)(23), (2)(13), (3)(12); \quad \{1^3\} : (1)(2)(3). \quad (\text{А.7})$$

Разбиению на 3 цикла длины 1 соответствует 1, циклы длины 1 и 2 отвечают элементам p, pr, pr^2 , одному циклу длины 3 — элементы r, r^2 .

Чтобы подсчитать число разбиений (А.6), будем рисовать «домики», составленные из n клеток. Число клеток на каждом «этаже» — это длина цикла, число этажей дает полное число циклов. Чтобы не считать одно разбиение дважды, договоримся, что на верхнем этаже клеток всегда не больше, чем на нижнем (для «устойчивости» домиков). Такие картинки называются *схемами Юнга*.

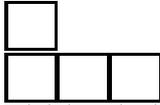
Задача 274. Нарисовать все схемы Юнга для групп π_3, π_4, π_5 .



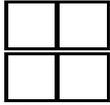
Задача 275. Для каждой схемы Юнга группы π_4 выписать все различные циклы и подсчитать их количество.

Решение. 

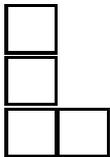
$\{4\} : (1234), (1324), (1423), (1243), (1342), (1432); |\sigma_1| = 6.$



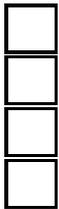
$\{13\} : (1)(234), (2)(134), (3)(124), (4)(123), (1)(324), (2)(214), (3)(214), (4)(213); |\sigma_2| = 8.$



$\{2^2\} : (12)(34), (13)(24), (14)(23); |\sigma_3| = 3.$



$\{1^2 2\} : (1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23), (3)(4)(12), (2)(4)(13), (2)(3)(14); |\sigma_4| = 6.$



$\{1^4\} : (1)(2)(3)(4); |\sigma_5| = 1.$

Проверим сумму $|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3| + |\sigma_4| + |\sigma_5| = 24.$

Задача 276. Группа подстановок $\pi_4 \approx T_d$ изоморфна полной группе тетраэдра. Найти в полной группе тетраэдра классы сопряженных элементов предыдущей задачи.

Решение. $\sigma_1 \sim S_4$ циклическую перестановку вершин осуществляет зеркальный поворот. $\sigma_2 \sim C_3$ — повороты вокруг осей третьего порядка. $\sigma_3 \sim C_2$ — повороты вокруг осей второго порядка. $\sigma_4 \sim \sigma$ — отражение в зеркальной плоскости, проходящей через ребро и высоту тетраэдра. $\sigma_5 \sim 1$ — единичное преобразование.

Задача 277. Найдите, какие из классов сопряженных элементов отвечают четным подстановкам. Покажите, что их объединение дает разбиение на классы группы вращений тетраэдра $T \approx A_4.$

Задача 278. Показать, что число циклов, отвечающих данной схеме Юнга, дается формулой

$$g(\{1^{\tau_1} \dots n^{\tau_n}\}) = \frac{n!}{(\tau_1! \dots \tau_n!)(2^{\tau_2} \dots n^{\tau_n})}. \tag{A.8}$$

Решение. Выведем формулу с помощью комбинаторики. Всего в группе $|\pi_n| = n!$ элементов. Пусть имеется класс $\{1^{\tau_1} \dots n^{\tau_n}\}$. Расположим элементы внутри циклов в порядке натурального ряда и подействуем на подстановку всеми $P \in \pi_n$. Если при действии меняется только взаимное положение циклов, то получится перестановка, совпадающая с исходной. Всего имеется $\tau_1! \dots \tau_n!$ таких вариантов. Кроме того, исходная перестановка не меняется при циклическом перемещении элементов внутри одного цикла. Число таких перестановок $2^{\tau_2} \dots n^{\tau_n}$. В итоге получается формула (A.8).

Задача 279. Проверить, что формула (А.8) дает правильные порядки классов сопряженных элементов в группах π_3, π_4 .

Решение.

$$\pi_3: \quad \sigma_1 = \{3\}, g = \frac{3!}{3} = 2, \quad \sigma_2 = \{12\}, g = \frac{3!}{2} = 3, \quad \sigma_3 = \{1^3\}, g = \frac{3!}{3!} = 1.$$

$$\pi_4: \quad \sigma_1 = \{4\}, g = \frac{4!}{4} = 6, \quad \sigma_2 = \{13\}, g = \frac{4!}{3} = 8, \\ \sigma_3 = \{2^2\}, g = \frac{4!}{2! \cdot 2^2} = 3, \quad \sigma_4 = \{1^2 2\}, g = \frac{4!}{2! \cdot 2} = 6, \quad \sigma_5 = \{1^4\}, g = \frac{4!}{4!} = 1.$$

Задача 280. С помощью формулы (А.8) найти порядки классов сопряженных элементов в группе π_5 .

Решение.

$$g(\{5\}) = \frac{5!}{5} = 24, \quad g(\{14\}) = \frac{5!}{4} = 30, \\ g(\{23\}) = \frac{5!}{2 \cdot 3} = 20, \quad g(\{1^2 3\}) = \frac{5!}{2! \cdot 3} = 20, \\ g(\{12^2\}) = \frac{5!}{2! \cdot 2^2} = 15, \quad g(\{1^3 2\}) = \frac{5!}{3! \cdot 2} = 10, \quad g(\{1^5\}) = \frac{5!}{5!} = 1.$$

Задача 281. Найти, какие из циклов предыдущей задачи четные. Порядки четных классов применить для разбиения на классы знакопеременной группы $A_5 \approx Y$.

Ответ. $g(\{5\}) + g(\{1^2 3\}) + g(\{12^2\}) + g(\{1^5\}) = 24 + 20 + 15 + 1 = 60$, а циклы $\{23\}, \{14\}, \{1^3 2\}$ — нечетные.

Количество неприводимых представлений группы совпадает с числом классов сопряженных элементов, поэтому можно обозначить неприводимые представления теми же комбинациями чисел, что и классы, но в квадратных скобках: $[1^{\tau_1} \dots n^{\tau_n}]$. В приложении на с.125 приведены таблицы неприводимых характеров простейших групп перестановок $\pi_2 \div \pi_5$. Буквой g обозначены порядки классов $\{1^{\tau_1} \dots n^{\tau_n}\}$.

А.3. Симметризаторы

Рассмотрим тензор $T \in \mathbb{R}^N \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^N$ ранга p . Тензором мы называем элемент прямого произведения p евклидовых пространств \mathbb{R}^N . Мы ограничились евклидовым пространством, поэтому все индексы будем писать снизу. Перестановка индексов осуществляется подстановкой $\hat{\sigma} \in \pi_p$:

$$\hat{\sigma} T_{i_1 \dots i_p} = T_{\sigma \cdot (i_1 \dots i_p)}.$$

Пусть в каждом экземпляре \mathbb{R}^N действует группа $G < GL(N)$, тогда действия элементов группы и перестановок индексов коммутируют. Поэтому можно разбить тензорное представление на части с определенной симметрией. Для этого надо подействовать на тензор проектором на подпространство неприводимого представления α группы π_p

$$\hat{P}_\alpha = \frac{n_\alpha}{p!} \sum_{\sigma \in \pi_p} \chi^{(\alpha)*}(\sigma) \hat{\sigma},$$

где $n_\alpha = \dim D^{(\alpha)}(\sigma)$ — размерность неприводимого представления $D^{(\alpha)}(\sigma)$, а $\chi^{(\alpha)} = \text{tr } D^{(\alpha)}$ — характер неприводимого представления $D^{(\alpha)}$.

Задача 282. Вывести формулу для симметризатора и антисимметризатора

$$\hat{S} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \pi_p} \hat{\sigma}, \quad \hat{A} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \pi_p} \det \sigma \cdot \hat{\sigma},$$

где $\det \sigma$ — четность подстановки.

Решение. У каждой группы π_p имеется единичное неприводимое представление $\alpha = [p]$. Всегда имеется также нечетное представление $\alpha = [1^p]$, представление факторгруппы по знакопеременной подгруппе $C_2 = \pi_p/A_p$. Эти представления соответствуют схемам Юнга в виде вертикальной и горизонтальной полосок из клеток, самого высокого и самого низкого домиков, которые можно построить из заданного числа клеток p («башни» и «ангара»).

Задача 283. Выписать все симметризаторы Юнга для тензора третьего ранга.

Ответ.

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \frac{1}{6} [(123) + (312) + (231) + (213) + (132) + (321)], \\ \hat{A} &= \frac{1}{6} [(123) + (312) + (231) - (213) - (132) - (321)], \\ \hat{B} &= \frac{1}{3} [2(123) - (312) - (231)]. \end{aligned}$$

А.4. Симметризация базиса

Действие представления $D(g)$ размерности N группы G на базисные векторы можно снова разложить по базису

$$D(g)|i\rangle = \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j|D(g)|i\rangle = \sum_{j=1}^N |j\rangle D_{ji}(g). \quad (\text{A.9})$$

Базис тензорного представления есть прямое произведение базисов отдельных экземпляров \mathbb{R}^N . Например, для $p = 2$ разложение по прямому произведению базисов пишется как

$$[D(g) \otimes D(g)] |i\rangle \otimes |k\rangle = \sum_{j,l=1}^N |j\rangle \otimes |l\rangle D_{ji}(g) D_{lk}(g). \quad (\text{A.10})$$

Если подействовать на базисные векторы симметризаторами Юнга, получатся симметризованные базисы. Поскольку перестановки индексов и действие группы происходят в разных пространствах, симметризованные базисы являются инвариантными подпространствами при действии группы. Значит, матрица тензорного представления при переходе к симметризованным комбинациям базисных векторов становится блочно-диагональной.

Задача 284. Найти симметричную и антисимметричную части (инвариантные подпространства) базиса $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N$.

Ответ.

$$\Psi_{ik}^s = \frac{1}{2} (|i\rangle \otimes |k\rangle + |k\rangle \otimes |i\rangle), \quad \Psi_{ik}^a = \frac{1}{2} (|i\rangle \otimes |k\rangle - |k\rangle \otimes |i\rangle). \quad (\text{A.11})$$

Задача 285. Найти инвариантные подпространства базиса $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N$.

Ответ.

$$\begin{aligned}\Psi_{ijk}^s &= \frac{1}{6} \left(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle + |k\rangle \otimes |i\rangle \otimes |j\rangle + |j\rangle \otimes |k\rangle \otimes |i\rangle + \right. \\ &\quad \left. + |j\rangle \otimes |i\rangle \otimes |k\rangle + |i\rangle \otimes |k\rangle \otimes |j\rangle + |k\rangle \otimes |j\rangle \otimes |i\rangle \right), \\ \Psi_{ijk}^a &= \frac{1}{6} \left(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle + |k\rangle \otimes |i\rangle \otimes |j\rangle + |j\rangle \otimes |k\rangle \otimes |i\rangle + \right. \\ &\quad \left. - |j\rangle \otimes |i\rangle \otimes |k\rangle - |i\rangle \otimes |k\rangle \otimes |j\rangle - |k\rangle \otimes |j\rangle \otimes |i\rangle \right), \\ \Psi_{ijk}^b &= \frac{1}{6} \left(2|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle - |k\rangle \otimes |i\rangle \otimes |j\rangle - |j\rangle \otimes |k\rangle \otimes |i\rangle \right).\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

А.5. Характеры симметризованных представлений

Если характер векторного представления χ_1 , то характер тензорного представления ранга p равен χ_1^p . Для решения ряда задач надо найти характер симметризованного представления. Чтобы найти, как действует тензорное представление ранга $p = 2$ на симметричный базис, обратимся к формулам (А.10), (А.11). Найдем, как действует тензор на симметризованный базис, и разложим результат по векторам базиса

$$[D(g) \otimes D(g)] |\Psi_{ik}^s\rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |j\rangle \otimes |l\rangle [D_{ji}(g)D_{lk}(g) + D_{li}(g)D_{jk}(g)]. \quad (\text{A.13})$$

Чтобы вычислить характер, надо приравнять индексы $i = j, k = l$ или формально умножить выражение в квадратных скобках правой части (А.13) на $\delta_{ij}\delta_{kl}$ и просуммировать по повторяющимся индексам. Получится

$$\chi_s(g) = \frac{1}{2} (\chi^2(g) + \chi(g^2)). \quad (\text{A.14})$$

Задача 286. Вывести формулу для характера антисимметричного тензора второго ранга.

Ответ.

$$\chi_a(g) = \frac{1}{2} (\chi^2(g) - \chi(g^2)). \quad (\text{A.15})$$

Задача 287. Вывести формулы для характеров симметричных частей тензора третьего ранга.

Ответ.

$$\begin{aligned}\chi_s(g) &= \frac{1}{6} [\chi^3(g) + 3\chi(g)\chi(g^2) + 2\chi(g^3)], \\ \chi_a(g) &= \frac{1}{6} [\chi^3(g) - 3\chi(g)\chi(g^2) + 2\chi(g^3)], \\ \chi_b(g) &= \frac{2}{3} [\chi^3(g) - \chi(g^3)].\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

Если просуммировать все три строки, получится $\chi_s + \chi_a + \chi_b = \chi^3$, т. е. характер тензорного представления ($p = 3$).

А.6. Независимые компоненты инвариантных тензоров

Решим несколько задач о симметризованных тензорах в трехмерном пространстве ($N = 3$).

Задача 288. Найти число независимых компонент тензора 2-го ранга, инвариантного относительно группы $G = SO(2)$. Сколько из них лежит в симметричной, а сколько в антисимметричной части?

Решение. Характер трехмерного векторного представления группы равен $\chi^{(1)}(\varphi) = e^{-i\varphi} + 1 + e^{i\varphi}$, а тензорного представления — его квадрату $\chi^{(1)^2}$. Остается найти, сколько раз в него входит единичное представление $\chi^{(1)^2} = 3 + \dots$, где многоточием обозначены слагаемые, которые зависят от угла. Значит, единичное представление входит 3 раза, а у инвариантного тензора 3 компоненты. Теперь по формуле (А.14) найдем

$$\begin{aligned} \chi_s &= \frac{1}{2} \{ \chi^{(1)^2}(\varphi) + \chi^{(1)}(2\varphi) \} = \frac{1}{2} [(e^{i\varphi} + 1 + e^{-i\varphi})^2 + e^{2i\varphi} + 1 + e^{-2i\varphi}] \\ &= \frac{1}{2} [2e^{-2i\varphi} + 2e^{-i\varphi} + 4 + 2e^{i\varphi} + 2e^{2i\varphi}] = 2 + \dots \end{aligned}$$

Единичное представление входит 2 раза, значит симметричный инвариантный тензор имеет только 2 независимые компоненты. Для антисимметричной части по формуле (А.15) получим то же самое со знаком «минус» в фигурной скобке, т. е. у антисимметричного тензора второго ранга всего 1 независимая компонента. Действительно, тензор второго ранга в группе вращений вокруг оси \vec{n} можно записать в виде

$$T_{ij} = A\delta_{ij} + Bn_in_j + Ce_{ijk}n_k.$$

Последнее слагаемое, как можно догадаться, лежит в антисимметричной части.

Задача 289. Сколько независимых компонент у тензора третьего ранга, инвариантного относительно группы $SO(2)$? То же для $SO(3)$.

Решение.

$$\begin{aligned} SO(2) : (\chi_1(\varphi))^3 &= 4 + \dots; \\ SO(3) : D^{(1)} \otimes D^{(1)} \otimes D^{(1)} &= D^{(1)} \otimes (D^{(0)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(2)}) = D^{(0)} + \dots \end{aligned}$$

Ответ. Независимы 4 компоненты в $SO(2)$ и 1 компонента в $SO(3)$.

Задача 290. Сколько независимых компонент у симметричного тензора третьего ранга, инвариантного относительно группы $SO(2)$? То же для $SO(3)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \chi^a(\varphi) &= \frac{1}{6} [(e^{-i\varphi} + 1 + e^{i\varphi})^3 + 3(e^{-i\varphi} + 1 + e^{i\varphi})(e^{-2i\varphi} + 1 + e^{2i\varphi}) + 2(e^{-3i\varphi} + 1 + e^{3i\varphi})] = \\ &= (7 + 3 + 2)/6 + \dots = 2 + \dots \end{aligned}$$

Ответ. В группе $SO(2)$ 2 компоненты:

$$T_{ijk} = A(\delta_{ij}n_k + \delta_{ki}n_j + \delta_{jk}n_i) + Bn_in_jn_k.$$

В группе $SO(3)$ 0 компонент. Тот же результат можно получить с помощью однородных полиномов.

Задача 291. Сколько независимых компонент у антисимметричного тензора третьего ранга, инвариантного относительно группы $SO(2)$? То же для $SO(3)$.

Решение. По формуле (А.16) получаем

$$\begin{aligned}\chi^s(\varphi) &= \frac{1}{6} [(e^{-i\varphi} + 1 + e^{i\varphi})^3 - 3(e^{-i\varphi} + 1 + e^{i\varphi})(e^{-2i\varphi} + 1 + e^{2i\varphi}) + 2(e^{-3i\varphi} + 1 + e^{3i\varphi})] = \\ &= (7 - 3 + 2)/6 + \dots = 1 + \dots\end{aligned}$$

Ответ. В группах $SO(2)$, $SO(3)$ 1 компонента, $T_{ijk} = Ce_{ijk}$.

Задача 292. Сколько независимых компонент у тензора 3-го ранга в группе D_3 ? То же для симметричного тензора.

Решение. Характер тензорного представления

27	0	-1
----	---	----

 разлагаем по таблице

1	1	1
1	1	-1
2	-1	0

Первый коэффициент $g_1 = 4$, значит всего 4 компоненты. Характер симметричной части найдем по формулам (А.16). Содержимое каждой клетки находим по формуле $\chi(\theta) = 1 + 2 \cos \theta$, где $\theta = 0, \pi/3, \pi, 2\pi/3, \dots$:

$$\frac{1}{6} \left[\begin{array}{|c|c|c|} \hline 27 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} + 3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & -1 \\ \hline \end{array} \right] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 1 & -2 \\ \hline \end{array}.$$

Ответ. 1 компонента. Здесь элементы в ячейках бокса перемножаются как списки:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 b_1 & a_2 b_2 & a_3 b_3 \\ \hline \end{array}.$$

А.7. Неприводимые характеры групп подстановок

π_2	$\{1^2\}$	$\{2\}$
g	1	1
$[2]$	1	1
$[1^2]$	1	-1

π_3	$\{1^3\}$	$\{12\}$	$\{3\}$
g	1	3	2
$[3]$	1	1	1
$[12]$	2	0	-1
$[1^3]$	1	-1	1

π_4	$\{1^4\}$	$\{1^22\}$	$\{13\}$	$\{2^2\}$	$\{4\}$
g	1	6	8	3	6
$[4]$	1	1	1	1	1
$[13]$	3	1	0	-1	-1
$[2^2]$	2	0	-1	2	0
$[1^22]$	3	-1	0	-1	1
$[1^4]$	1	-1	1	1	-1

π_5	$\{1^5\}$	$\{1^32\}$	$\{1^23\}$	$\{14\}$	$\{12^2\}$	$\{23\}$	$\{5\}$
g	1	10	20	30	15	20	24
$[5]$	1	1	1	1	1	1	1
$[14]$	4	2	1	0	0	-1	-1
$[23]$	5	1	-1	-1	1	1	0
$[1^23]$	6	0	0	0	-2	0	1
$[12^2]$	5	-1	-1	1	1	-1	0
$[1^32]$	4	-2	1	0	0	1	-1
$[1^5]$	1	-1	1	-1	1	-1	1

Учебное издание

Подвиглов Евгений Вадимович, Шапиро Давид Абрамович,
Шапиро Елена Геннадьевна, Институт автоматизации и электротехники СО РАН

**РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ФИЗИКИ**

Учебное пособие

Редактор Шмугурова К.В.

Подписано в печать 25.12.2012 г.	Формат 60 × 84 1/8
Печать офсетная	Уч. изд. л. 15,75. Усл. печ. л. 14,6
Заказ №	Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский центр
Новосибирского государственного университета.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.