

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра высшей математики

Н. С. Аркашов

Случайные процессы

Курс лекций

Новосибирск
2012

Курс лекций задуман прежде всего как краткий курс по теории случайных процессов, а его материал с тем расчетом, чтобы на сравнительно простых и важных для приложений моделях можно было бы рассказывать об основных результатах и методах этой теории, кроме того, в курсе затрагивается модель фрактального броуновского движения, имеющая в настоящее время применение в теории перколяции. Программа курса составлена на кафедре высшей математики физического факультета НГУ в соответствии с требованиями к содержанию и уровню подготовки дипломированного бакалавра по циклу «математических и естественнонаучных дисциплин», а также задачами, стоящими перед Новосибирским государственным университетом по реализации Программы развития НГУ.

Курс лекций подготовлен в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на
2009–2018 г. г.

© Новосибирский государственный
университет, 2012

Содержание

1	Случайные величины. Основные понятия и методы	4
1.1	Случайные величины с дискретным распределением	4
1.2	Числовые характеристики случайных величин с дискретным распределением	4
1.3	Случайные величины с абсолютно непрерывным распределением.	6
1.4	Числовые характеристики случайных величин с абсолютно непрерывным распределением	6
1.5	Условные математические ожидания	7
2	Некоторые типичные распределения вероятностей	8
2.1	Различные распределения независимых частиц в фазовом пространстве . . .	10
3	Пуассоновское распределение частиц	14
3.1	Время ожидания случайного события	17
3.2	Пуассоновский процесс	19
3.3	Парадокс, связанный с временем ожидания случайного события	20
4	Процесс броуновского движения	20
4.1	Случайное блуждание броуновской частицы	20
4.2	Закон арксинуса	23
5	Цепи Маркова	24
5.1	Вероятности перехода	24
5.2	Возвратные и невозвратные состояния	26
5.3	Классификация состояний	28
5.4	Сходимость к стационарному распределению	29
6	Цепи Маркова (непрерывное время)	31
6.1	Дифференциальные уравнения для переходных вероятностей	31
6.2	Однолинейная система обслуживания с отказами	34
6.3	Ветвящиеся процессы	35
6.4	Эффекты вырождения и взрыва	39
7	Некоторые процессы массового обслуживания и случайные блуждания (процессы восстановления)	39
7.1	Последовательности сумм независимых случайных величин. Распределение максимума	43
8	Случайные процессы в линейных системах	48
8.1	Стохастические интегралы	48
8.2	Нормальные (гауссовские) случайные процессы	51
8.3	Фрактальное броуновское движение	52
8.4	Сходимость к стационарному процессу	53
9	Стационарные случайные процессы	54
9.1	Спектральное представление и преобразование Фурье	54
10	Некоторые задачи и вопросы	59
	Список литературы	61

1 Случайные величины. Основные понятия и методы

1.1 Случайные величины с дискретным распределением

Говорят, что случайная величина X имеет дискретное распределение, если она с вероятностью 1 принимает конечное или счетное множество значений, т. е. существует конечное или счетное множество

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такое, что $p_i = \mathbf{P}(X = x_i) > 0$ и $\sum_i p_i = 1$.

Таблицей распределения, или рядом распределения, случайной величины X с дискретным распределением называется таблица, в которой приведены значения, принимаемые случайной величиной X , и соответствующие им вероятности.

X	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots
$\mathbf{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots

Если случайная величина X имеет дискретное распределение, то вероятность ее попадания в множество $A \subset \mathbb{R}$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{i: x_i \in A} p_i.$$

В частности, функция распределения случайной величины X с дискретным распределением

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = \sum_{i: x_i < x} p_i.$$

Если значения случайной величины упорядочены по возрастанию: $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$, то функция распределения имеет ступенчатый вид, т. е., функция постоянна на каждом из промежутков $(x_{i-1}, x_i]$ и имеет в каждой из точек x_i разрыв первого рода (скачок), равный вероятности $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

В частности, если множество значений случайной величины X конечно, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1; \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3; \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, & x > x_n. \end{cases}$$

1.2 Числовые характеристики случайных величин с дискретным распределением

Математическим ожиданием (средним значением) случайной величины X с дискретным распределением, принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ соответственно, называется число

$$\mathbf{E}X = \sum_i x_i p_i.$$

Если случайная величина $Y = \varphi(X)$ есть функция от случайной величины X , то ее математическое ожидание находится по формуле

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\varphi(X) = \sum_i \varphi(x_i) p_i.$$

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}X^k = \sum_i x_i^k p_i.$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^k = \sum_i (x_i - \mathbf{E}X)^k p_i.$$

Число $\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^k$ называется абсолютным центральным моментом порядка k случайной величины X .

Дисперсией случайной величины X называется ее центральный момент второго порядка:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \sum_i (x_i - \mathbf{E}X)^2 p_i.$$

Дисперсия характеризует среднее отклонение (точнее — квадрат отклонения) случайной величины от ее математического ожидания. Чаще для ее вычисления используется формула

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{E}X)^2.$$

Случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ события $(X < x)$ и $(Y < y)$ независимы.

Основные свойства математического ожидания:

1. Если случайная величина постоянна: $X = C$ с вероятностью 1, то $\mathbf{E}X = \mathbf{E}C = C$.
2. Для любых случайных величин X и Y

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$
3. Для любой случайной величины X и любого числа $C \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}(CX) = C \mathbf{E}X.$$
4. Если $X \geq 0$ с вероятностью 1, то $\mathbf{E}X \geq 0$. При этом $\mathbf{E}X = 0$ равносильно $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.
5. Если случайные величины X и Y независимы, то $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}X \mathbf{E}Y$.

Основные свойства дисперсии:

1. $\mathbf{D}X \geq 0$, и может быть равна 0 только в том случае, когда случайная величина постоянна с вероятностью 1, т. е. $\mathbf{P}(X = C) = 1, C \in \mathbb{R}$.
2. Для любой случайной величины X и любого числа $C \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{D}(CX) = C^2 \mathbf{D}X.$$
3. Для любой случайной величины X и любого числа $C \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{D}(X + C) = \mathbf{D}X.$$
4. Если случайные величины X и Y независимы, то
$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y.$$

1.3 Случайные величины с абсолютно непрерывным распределением.

Говорят, что случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение, если ее функция распределения представляется в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

где $f(x) = f_X(x)$ — неотрицательная, интегрируемая на всей числовой оси функция, которая называется плотностью распределения случайной величины X .

Плотность и функция распределения случайной величины с абсолютно непрерывным распределением обладают следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$;
3. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx,$$

если интеграл в правой части определен.

4. Функция распределения $F(x)$ непрерывна во всех точках $x \in \mathbb{R}$ и дифференцируема во всех точках непрерывности плотности $f(x)$, причем во всех таких точках

$$F'(x) = f(x).$$

5. $\mathbf{P}(X = a) = 0$ для любого $a \in \mathbb{R}$.
6. Для любых $a < b$

$$\mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

1.4 Числовые характеристики случайных величин с абсолютно непрерывным распределением

Математическим ожиданием случайной величины X с абсолютно непрерывным распределением с плотностью $f(x)$ называется число

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx.$$

Если случайная величина $Y = \varphi(X)$ есть функция от случайной величины X , то ее математическое ожидание находится по формуле

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\varphi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x) dx.$$

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}x)^k f(x) dx.$$

Число $\mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^k$ называется абсолютным центральным моментом порядка k случайной величины X .

Дисперсией случайной величины X называется ее центральный момент второго порядка:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}x)^2 f(x) dx.$$

Чаще для ее вычисления используется формула

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (\mathbf{E}X)^2.$$

Основные свойства математического ожидания и дисперсии — точно такие же, как свойства этих характеристик в дискретном случае.

1.5 Условные математические ожидания

Пусть ξ и η — случайные величины. Рассмотрим условное распределение вероятностей величины ξ относительно события $\{\eta = y\}$ и соответствующее математическое ожидание, обозначив его $\mathbf{E}(\xi|y)$:

$$\mathbf{E}(\xi|y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x P_{\xi}(x|y) \quad (1)$$

для дискретных величин ξ и η и

$$\mathbf{E}(\xi|y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x|y) dx \quad (2)$$

— для величин, имеющих совместную плотность вероятности (здесь η может быть многомерной случайной величиной). Условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\xi|y)$ обладает следующими свойствами.

Если ξ не зависит от величины η , то

$$\mathbf{E}(\xi|y) = \mathbf{E}\xi; \quad (3)$$

если ξ_1 , не зависит от пары величин (ξ_2, η) , то

$$\mathbf{E}(\xi_1 \xi_2 | y) = \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}(\xi_2 | y); \quad (4)$$

Равенство (3) очевидно. Равенство (4) получается следующим образом, поскольку при условии $\{\eta = y\}$ величины ξ_1 и ξ_2 остаются независимыми — их условное распределение таково, что

$$\begin{aligned} P_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2|y) &= \frac{P_{\xi_1, \xi_2, \eta}(x_1, x_2, y)}{P_\eta(y)} = \\ &= \frac{P_{\xi_1}(x_1)P_{\xi_2, \eta}(x_2, y)}{P_\eta(y)} = P_{\xi_1}(x_1)P_{\xi_2}(x_2|y) \end{aligned}$$

для дискретных величин и

$$\begin{aligned} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2|y) &= \frac{f_{\xi_1, \xi_2, \eta}(x_1, x_2, y)}{f_\eta(y)} = \\ &= \frac{f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2, \eta}(x_2, y)}{f_\eta(y)} = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2|y) \end{aligned}$$

для непрерывно распределенных величин с совместной плотностью $f_{\xi_1, \xi_2, \eta}(x_1, x_2, y)$.

Рассмотрим условное среднее $\mathbf{E}(\xi|y)$ как функцию переменного y и $\mathbf{E}(\xi|\eta)$ как случайную величину, являющуюся указанной функцией от η .

Отметим следующее равенство:

$$\mathbf{E}(\varphi(\eta)\xi|\eta) = \varphi(\eta) \mathbf{E}(\xi|\eta); \quad (5)$$

где $\varphi(\eta)$ означает случайную величину, являющуюся функцией от η .

В самом деле, при каждом фиксированном y значение $\varphi(y)$ есть некоторая постоянная, так что

$$\mathbf{E}(\varphi(y)\xi|y) = \varphi(y) \mathbf{E}(\xi|y);$$

Имеет место следующая формула *полного математического ожидания*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\eta)) = \mathbf{E}\xi. \quad (6)$$

Для случайной величины ξ , являющейся индикатором события A :

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{при наступлении события } A, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

очевидно, $\mathbf{E}\xi = \mathbf{P}(A)$. Условное математическое ожидание такой величины ξ при фиксированном значении η есть условная вероятность события A :

$$\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{P}(A|\eta);$$

соотношение же (6) в этом случае дает следующую формулу полной вероятности:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\mathbf{P}(A|\eta)).$$

2 Некоторые типичные распределения вероятностей

При подсчете вероятностей большую пользу приносят комбинаторные формулы. Приведем наиболее важные из них. Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух правил — правила умножения (правила произведения) и правила сложения (правила суммы).

Правило сложения. Пусть даны два непересекающихся множества: множество A , содержащее n элементов, и множество B , содержащее m элементов. Тогда число способов,

которыми можно выбрать один элемент либо из множества A , либо из множества B , равно $m + n$.

Правило умножения. Если элемент из множества A можно выбрать n способами и, после произведенного выбора, можно выбрать элемент из множества B m способами, то выбор пары (a, b) ($a \in A, b \in B$) в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Правила сложения и умножения распространяются на случай трех и более множеств.

Пусть некоторое множество A содержит n элементов, т. е., $A = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Размещением из n элементов по k элементов ($0 \leq k \leq n$) называется любое упорядоченное подмножество множества A , содержащее k элементов. То есть размещение — это набор из k элементов $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, причем два размещения считаются различными, если либо в одном из них есть элементы, не входящие в другое, либо при одинаковом составе различен порядок следования элементов. Число размещений A_n^k из n по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = (n-1)! \cdot n$. Напомним, считается, что $0! = 1$.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n «местам»: $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$. Две перестановки различаются порядком расположения элементов. Число разных перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Сочетанием из n элементов по k элементов ($0 \leq k \leq n$) называется подмножество $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ элементов из A (сочетания различаются только составом элементов, но не их порядком).

Число сочетаний из n по k элементов вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Свойства C_n^k : 1) $C_n^0 = C_n^n = 1$; 2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; 3) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Схема выбора с возвращением.

Пусть множество A содержит n элементов. Будем составлять упорядоченные подмножества $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ из элементов A следующим образом: случайным (произвольным) образом выбирается первый элемент x_1 , фиксируется и возвращается обратно. Затем произвольно выбирается второй элемент, фиксируется на втором месте и возвращается обратно. Также выбирается третий элемент, фиксируется на третьем месте и возвращается обратно. Процесс продолжается k раз. Полученный набор $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ называется размещением с повторениями. Число таких размещений равно n^k .

Размещения с повторениями различаются либо составом элементов, либо порядком размещения элементов.

Сочетания с повторениями из n по k состоят из множеств $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, которые могут различаться только по составу, порядок расположения не важен. Число \bar{C}_n^k сочетаний с повторениями вычисляется по формуле

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Пусть множество A состоит из n элементов, причем в множестве A есть k различных типов элементов S_1, S_2, \dots, S_k , где множество S_1 содержит n_1 элементов одного первого

типа, S_2 — n_2 элементов 2-го типа, ..., S_k содержит n_k элементов k -го типа, и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Число перестановок с повторениями $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ обозначается $C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ и вычисляется по формуле

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Две перестановки с повторениями не различаются, если меняются местами два элемента из одного подмножества S_j .

Во всех приведенных выше равенствах встречается выражение $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ($0! = 1$), для которого имеется следующая формула Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

при $n \rightarrow \infty$.

2.1 Различные распределения независимых частиц в фазовом пространстве

Рассмотрим следующую простую модель. Представьте себе процесс выпечки сдобного теста. В тесто высыпается изюм, затем все тщательно многократно перемешивается, в результате чего отдельные изюминки — «частицы» — как-то случайно распределяются внутри занимаемого тестом «фазового пространства».

В рамках этой модели и ее различных модификаций будут описаны некоторые важные распределения вероятностей. Пусть наше «фазовое пространство» (тесто) разбивается на n одинаковых ячеек, достаточно крупных по сравнению с общим объемом имеющихся частиц (изюминок). Как при этом распределяются частицы?

Кажется весьма правдоподобным, что после многократного перемешивания теста все возможные распределения изюминок по отдельным ячейкам являются равновероятными. Будем предполагать, что это действительно так. Если общее число изюминок равно r , то каждое распределение можно описать комбинацией (i_1, \dots, i_r) , где i_1 — номер ячейки, в которую попадает первая изюминка, i_2 — номер ячейки, в которую попадает вторая изюминка, и т. д. Каждый из индексов i_1, \dots, i_r может иметь n различных значений, так что общее число различных комбинаций (i_1, \dots, i_r) есть $N = n^r$ и, следовательно, каждое распределение частиц (i_1, \dots, i_r) имеет вероятность $1/n^r$. Вероятность же того, что в первую ячейку попадет r_1 изюминок, во вторую — r_2 изюминок, в n -ю ячейку попадет r_n изюминок ($r = \sum_{i=1}^n r_i$), есть

$$C_r^{r_1, r_2, \dots, r_n} n^{-r} = \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} n^{-r},$$

поскольку $\frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!}$ равно числу всех возможных сочетаний в n групп из r_1, \dots, r_n элементов.

Заметим теперь, что для наблюдателя изюминки являются неразличимыми частицами, и с этой точки зрения все распределения (i_1, i_2, \dots, i_r) , при которых в первую ячейку попадает r_1 частиц, во вторую — r_2 частиц, ..., в n -ю ячейку попадает r_n частиц, неразличимы. С самого начала можно было бы говорить лишь о распределениях, каждое из которых описывается числом частиц r_i , попавших в соответствующую i -ю ячейку. Если считать, что равновероятны все такие распределения (r_1, \dots, r_n) , то каждый исход (r_1, \dots, r_n) будет уже иметь не указанную выше вероятность $\frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} n^{-r}$, а какую-то другую. Именно, число различных распределений совпадает с числом способов, какими можно расставить $n-1$ палочек (разделяющих n ячеек) и r изюминок. Это число, очевидно, равно числу сочетаний $\bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^{n-1} = \frac{(n-1)! r!}{(n+r-1)!}$ из $n+r-1$ элементов по $n-1$, и, следовательно, каждый

отдельный исход (r_1, \dots, r_n) будет иметь вероятность

$$\frac{(n-1)!r!}{(n+r-1)!}$$

Какое же из данных выше двух решений является верным? Если считать, что описанный ранее «механизм случайности» (многократное перемешивание) действует таким образом, что каждая отдельная изюминка с одинаковой вероятностью попадает в любую из n ячеек, причем независимо от поведения других изюминок, то вероятность распределения (r_1, \dots, r_n) будет

$$P(r_1, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!} n^{-r}.$$

Особенно наглядно это видно в случае, когда $n = r = 2$. Каждая из двух изюминок (независимо одна от другой) с вероятностью $1/2$ попадает в любую из двух ячеек, и

$$P(2, 0) = P(0, 2) = 1/4, \quad (1, 1) = 1/2,$$

так что возможные распределения $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ отнюдь не равновероятны.

В случае распределения изюминок в тесте описанная выше модель равновероятных распределений (i_1, \dots, i_r) явно не удовлетворительна, если объем отдельной ячейки меньше, чем объем всех частиц-изюминок (например, в одну ячейку все частицы не помещаются!). Рассмотрим новую модель, в которой выбранные ячейки столь малы (сравнимы с размерами самих изюминок), что в отдельную ячейку может попасть не более одной частицы.

При указанном ограничении каждое распределение частиц можно описать комбинацией (i_1, \dots, i_r) , указан заняты ячейки i_1, \dots, i_r (конечно, считается, что $r \leq n$), и общее число различных распределений равно числу сочетаний C_n^r из n элементов по r . Если считать, что все возможные распределения равновероятны (а именно так обстоит дело в нашей модели с изюминками), то вероятность каждого отдельного распределения i_1, \dots, i_r есть

$$\frac{(n-r)!r!}{n!}.$$

Вопрос о распределении независимых частиц в фазовом пространстве (изюминок в тесте) может быть поставлен следующим образом. Выбирается некоторая область фазового пространства v какова вероятность того, что в эту область попадает то или иное число частиц?

Мысленно разобьем все фазовое пространство на столь малые ячейки, чтобы в каждую из них могло попасть не более одной частицы. Как и раньше, будем считать, что все возможные распределения частиц (i_1, i_2, \dots, i_r) , где i_k — номер ячейки, занятой k -й частицей, являются равновероятными. Если условно рассматривать занятые и свободные ячейки как белые и черные шары, то можно представить себе фазовое пространство как некую урну, содержащую r белых и $n-r$ черных шаров, которые тщательно многократно перемешаны (r — число всех частиц в фазовом пространстве, n — число всех ячеек, $n \geq r$).

Пусть m — число ячеек в выделенной области фазового пространства v , а ξ — зависящее от случая число частиц, попадающих в эту область (число занятых среди указанных m ячеек).

Вероятность $P_\xi(k)$ того, что это число ξ равно k , $0 \leq k \leq m$, такая же, как и для числа ξ белых шаров, которые оказываются среди наугад вынутых m шаров при случайном выборе их (без возвращения) из урны с r белыми и $n-r$ черными шарами. Выражение «наугад вынутых» точнее означает, что с одинаковой вероятностью выбираются любые m шаров (если занумеровать все имеющиеся n шаров, то с одинаковой вероятностью выбираются любые шары j_1, \dots, j_m). Число N различных исходов (каждый из которых представляет собой выбор тех или иных шаров j_1, \dots, j_m) равно числу сочетаний $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Нас интересует событие A , заключающееся в том, что среди m вынутых шаров ровно k окажутся белыми.

Чтобы найти вероятность этого события, необходимо подсчитать число $N(A)$ тех исходов, при которых событие A наступает ($\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N}$). Это можно сделать следующим образом. Мысленно выделим две совокупности шаров: r белых и $n - r$ черных. Ровно k вынутых шаров оказываются белыми тогда, когда из первой совокупности выбирается k шаров, а из второй — $m - k$ шаров. Обозначим a_1, \dots, a_r — белые, b_1, \dots, b_{n-r} — черные шары; каждая выборка $a = (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ белых и $b = (b_{j_1}, \dots, b_{j_{m-k}})$ черных шаров может рассматриваться как пара (a, b) , и число $N(A)$ совпадает с числом различных пар, которые можно образовать из различных элементов a и b . Общее число элементов a — различных выборок по k из имеющихся r белых шаров — равно числу сочетаний $C_r^k = \frac{r!}{k!(r-k)!}$ и, аналогично, общее число элементов b есть C_{n-r}^{m-k} , следовательно, число $N(A)$ различных пар (a, b) равно произведению $C_r^k C_{n-r}^{m-k}$. В итоге для искомой вероятности $\mathbf{P}(A)$ получаем следующее выражение:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_r^k C_{n-r}^{m-k}}{C_n^m}.$$

Мы фактически нашли распределение вероятностей случайной величины ξ , равной числу белых шаров в наугад выбранной партии объема m (числу частиц в выделенной области фазового пространства):

$$P_\xi(k) = \frac{C_r^k C_{n-r}^{m-k}}{C_n^m}, \quad k = 0, \dots, m \quad (7)$$

(параметры n , r и m фиксированы). Это так называемое гипергеометрическое распределение вероятностей.

Чтобы подчеркнуть важность этого распределения, рассмотрим один пример.

Пример (выборочный контроль продукции). Представьте себе, что имеется большая партия каких-то изделий, которая может быть принята или забракована. Ясно, что проверка каждого отдельного изделия не всегда возможна (например, может случиться, что проверка делает изделие негодным для дальнейшего употребления). В этих случаях можно применить выборочный контроль продукции. Скажем, контролер из всей партии случайно выбирает m изделий, проверяет их, и если число бракованных среди них превышает некоторое критическое число m^* , то вся партия бракуется. Что происходит при таком контроле, какие партии и с какой вероятностью бракуются? Если вся партия насчитывает n изделий (причем из них ровно r бракованных), то вероятность того, что среди выбранных наугад m изделий ровно k окажутся бракованными, очевидно, задается формулой (7), в которой ξ означает случайное число бракованных изделий в выбранной для проверки партии.

В исходной задаче о распределении частиц в фазовом пространстве заданными параметрами являются число имеющихся частиц r и объем $|v|$ рассматриваемой области v фазового пространства (общего объема $|V|$). Более удобно даже считать заданными не числа r и $|V|$, а среднее число λ частиц в единице объема ($\lambda = r/|V|$), что дает возможность, как мы увидим далее, найти распределение частиц и в бесконечном фазовом пространстве (точнее, при $|V| \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$).

Ниже будет показано, что если рассматриваемая область фазового пространства достаточно велика по сравнению с размером отдельной частицы, то число частиц ξ в такой области объема $|v|$ приблизительно имеет пуассоновское распределение:

$$\mathbf{P}(\xi = k) \approx \frac{(\lambda|v|)^k}{k!} e^{-\lambda|v|},$$

Точнее, при $n, m, r \rightarrow \infty$ и постоянном

$$a = \lambda|v| = r \frac{|v|}{|V|} = r \frac{m}{n}$$

(a есть среднее число частиц в области v) для определенных формулой (7) вероятностей $P_\xi(k)$ имеется следующее предельное выражение:

$$\lim P_\xi(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Обратимся снова к урне с r белыми и $n - r$ черными шарами. В использованной нами «урновой схеме» m шаров выбираются без возвращения. Рассмотрим аналогичную схему, но с тем изменением, что при последовательном извлечении шаров каждый раз вынутый шар возвращается обратно в урну (выбор с возвращением). Какова вероятность того, что среди m вынутых шаров будет ровно k белых?

Условимся, что каждый шар в урне имеет свой номер. Тогда отдельная выборка объема m может быть описана последовательностью (i_1, \dots, i_m) , где i_p , означает номер шара, вынутого на p -м шаге, и при выборе с возвращением для i_p , имеется n возможных значений ($i_p = 1, 2, \dots, n$). Всего различных выборок (i_1, \dots, i_m) будет n^m , и все они равновероятны.

Рассмотрим выборки, в которых ровно k белых шаров. Найдем число выборок (i_1, \dots, i_m) с белыми шарами на фиксированных местах m_1, \dots, m_k (т. е. тех выборок в которых шары i_{m_1}, \dots, i_{m_k} являются белыми, а остальные $m - k$ шаров — черными). Для каждого из белых шаров i_{m_1}, \dots, i_{m_k} имеется r возможных значений (всего в урне r белых шаров), а для каждого из черных шаров $n - r$ возможных значений. Следовательно, различных выборок (i_1, \dots, i_m) с k белыми шарами на фиксированных местах m_1, \dots, m_k будет $r^k (n - r)^{m-k}$. Но различные m_1, \dots, m_k среди возможных значений $1, \dots, m$ могут быть выбраны C_m^k способами, так что общее число выборок (i_1, \dots, i_m) с k белыми шарами равно $C_m^k r^k (n - r)^{m-k}$. Следовательно, вероятность того, что среди m вынутых шаров будет ровно k белых, есть

$$C_m^k \frac{r^k (n - r)^{m-k}}{n^m} = C_m^k p^k (1 - p)^{m-k},$$

где $p = r/n$ совпадает с вероятностью вынуть белый шар на каждом отдельном шаге. Итак, случайная величина ξ , равная числу белых шаров в выборке (с возвращением) объема m , имеет распределение вероятностей

$$P_\xi(k) = C_m^k p^k (1 - p)^{m-k}, \quad k = 0, \dots, m, \quad (9)$$

где p — вероятность вынуть белый шар на каждом отдельном шаге. Это — так называемое биномиальное распределение или, как еще говорят, распределение Бернулли.

Ясно, что при большом числе шаров n и малом объеме выборки m выбор без возвращения и выбор с возвращением практически должны давать один и тот же результат — вероятность того, что будет вынута k белых шаров, примерно одна и та же в обоих случаях. Это подтверждается и предельным соотношением

$$\frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \left[\frac{n_1(n_1-1)\dots(n_1-k+1)}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \right] \times$$

$$\left[\frac{n_2(n_2-1)\dots(n_2-m+k+1)}{(n-k)(n-k-1)\dots(n-m+1)} \right] \rightarrow \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k}$$

при $n \rightarrow \infty$, где $n_1 = r$, $n_2 = n - r$ и доля $p = n_1/n$ белых шаров в урне остается постоянной (напомним, что p есть вероятность того, что наугад выбранный из урны шар будет белым).

Каким будет распределение белых шаров в выборке объема m , когда доля $p = r/n$ белых шаров в урне уменьшается ($p \rightarrow 0$), но зато увеличивается объем выборки m , $m \rightarrow \infty$, с тем расчетом, чтобы среднее число шаров $a = mp$ оставалось постоянным? Имеем

$$P_\xi(0) = (1 - p)^m = \left(1 - \frac{a}{m}\right)^m \rightarrow e^{-a}, \quad (10)$$

при каждом фиксированном $k = 1, 2, \dots$

$$\frac{P_\xi(k)}{P_\xi(k-1)} = \frac{a - (k-1)p}{k(1-p)} \rightarrow \frac{a}{k},$$

и потому

$$\begin{aligned} P_\xi(1) &\rightarrow \frac{a}{1!} e^{-a} \\ P_\xi(2) &\rightarrow \frac{a^2}{2!} e^{-a} \\ &\dots\dots\dots \\ P_\xi(k) &\rightarrow \frac{a^k}{k!} e^{-a} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, в пределе случайная величина ξ имеет распределение вероятностей

$$P_\xi(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Это — так называемое пуассоновское распределение.

3 Пуассоновское распределение частиц

Обратимся снова к задаче о распределении частиц. Представим себе, что в некоторую область V евклидова пространства независимо одна от другой бросаются наугад r частиц, точнее, если обозначить X_k положение k -ой частицы в пространстве ($k = 1, \dots, r$), то векторные случайные величины X_1, \dots, X_r являются независимыми и каждая из них имеет равномерное распределение вероятностей с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|V|} & \text{при } x \in V; \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$$

где $|V|$ обозначает объем области. Среднее число частиц на единицу объема обозначим λ : $\lambda = \frac{r}{|V|}$.

Обозначим $X(v)$ число частиц, попадающих в соответствующую область $v \subseteq V$. Покажем, что при неограниченно расширяющемся «фазовом пространстве» V и одновременно увеличивающемся числе частиц r (так что среднее число частиц на единицу объема остается постоянно равным λ) предельное распределение случайной величины $X(v)$ будет пуассоновским:

$$\mathbf{P}(X(v) = k) = \frac{(\lambda|v|)^k}{k!} \exp(-\lambda|v|), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

где $|v|$ означает объем области v и, кроме того, для непересекающихся областей v_1, \dots, v_n

$$\mathbf{P}(X(v_1) = k_1, \dots, X(v_n) = k_n) = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda |v_i|)^{k_i}}{\prod_{i=1}^n k_i!} \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n |v_i|). \quad (13)$$

Перейдем к выводу формулы (13). При фиксированных V и r каждая из имеющихся r частиц попадает в одну из областей $v_i \subseteq V$ с соответствующими вероятностями $p_i = |v_i|/|V|$, $i = 1, \dots, n$; здесь v_0 есть дополнение $\bigcup_{i=1}^n v_i$ до всей области V . Разобьем наши r частиц на $n + 1$ групп по k_1, \dots, k_n, k_0 частиц в соответствующей группе $\sum_{i=1}^n k_i = k$, $k_0 = r - k$; число различных вариантов при таком разбиении равно

$$\frac{r!}{k_1! \dots k_n! k_0!}$$

Событие $\{X(v_1) = k_1, \dots, X(v_n) = k_n\}$ наступает тогда и только тогда, когда некоторая группа k_1 частиц попадает в область, некоторая группа k_2 частиц попадает в область v_2 и т. д. (оставшиеся частиц попадают в область v_0). Отдельно взятая частица независимо от поведения других частиц попадает в соответствующую область v_i с указанной выше вероятностью p_i , $i = 0, 1, \dots, n$, и, следовательно, вероятность того, что определенная группа k_1 частиц попадает в v_1 , другая группа k_2 частиц попадает в v_2 и т. д., будет равна произведению $\prod_{i=0}^n p_i^{k_i}$. Различные варианты разбиения на указанные группы дают $\frac{r!}{k_1! \dots k_n! k_0!}$ несовместных исходов,

каждый из которых имеет указанную выше вероятность $\prod_{i=0}^n p_i^{k_i}$ и, следовательно, совпадающее с объединением этих исходов событие $\{X(v_1) = k_1, \dots, X(v_n) = k_n\}$ имеет вероятность

$$\frac{r!}{k_1! \dots k_n! k_0!} \prod_{i=0}^n p_i^{k_i}. \quad (14)$$

Воспользуемся формулой Стирлинга, согласно которой

$$r! \sim \sqrt{2\pi r} r^r e^{-r}, \quad (r - k)! \sim \sqrt{2\pi(r - k)} (r - k)^{r-k} e^{-(r-k)}.$$

При фиксированных k_1, \dots, k_n и $r \rightarrow \infty$ имеем

$$\left(\frac{r}{r - k}\right)^{r-k} \rightarrow e^k,$$

$$p_i^{k_i} r^{k_i} = (\lambda |v_i|)^{k_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$|v_0| = |V| - \sum_{i=1}^n |v_i|$$

и

$$p_0^{r_0} = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda |v_i|}{r}\right)^{r-k} \rightarrow e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n |v_i|)}.$$

В итоге при $r \rightarrow \infty$ и постоянном $\lambda = r/|V|$ получаем

$$\frac{r!}{k_1! \dots k_n! k_0!} \prod_{i=0}^n p_i^{k_i} \rightarrow \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda |v_i|)^{k_i}}{\prod_{i=1}^n k_i!} \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n |v_i|),$$

т. е. в пределе получаем формулу (13).

Пуассоновское распределение определяется одним-единственным параметром λ , — средним числом частиц на единицу объема. Это распределение обладает следующими свойствами:

- а) случайные величины $X(v_1), \dots, X(v_n)$ для непересекающихся областей v_1, \dots, v_n являются взаимно независимыми;
- б) вероятность попадания в область v того или иного числа частиц не зависит от расположения области v в фазовом пространстве, а зависит лишь от ее объема $|v|$;
- в) вероятность попадания одной частицы в область малого объема $|v|$ с точностью до малых высшего порядка пропорциональна $|v|$:

$$\mathbf{P}(X(v) = 1) = \lambda|v| + o(|v|),$$

а вероятность попадания в область объема $|v|$ более одной частицы есть бесконечно малая высшего порядка при $|v| \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}(X(v) > 1) = o(|v|).$$

Сформулируем в качестве упражнения следующую теорему.

Теорема 1. *Всякое распределение частиц, удовлетворяющее условиям а), б) и в), является пуассоновским.*

Пример (процесс радиоактивного распада). Как известно, радий (Ra) с течением времени превращается в радон (Rn). Распадающееся ядро атома Ra излучает так называемую α -частицу (ядро атома гелия He). Распад отдельного атома Ra происходит независимо от состояния других атомов вещества, α -излучение представляет собой поток большого числа независимых частиц. Естественно ожидать, что распределение α -частиц во времени приблизительно является пуассоновским; в соответствии с этим будем считать, что

$$\mathbf{P}(X(\Delta) = k) = \frac{(\lambda|\Delta|)^k}{k!} \exp(-\lambda|\Delta|), \quad k = 0, 1, \dots$$

$|\Delta|$ -длина рассматриваемого временного промежутка Δ , $X(\Delta)$ — число α -частиц, излучаемых за промежуток времени Δ , а λ — среднее число α -частиц, излучаемых в единицу времени. Этот результат хорошо подтверждается экспериментальными данными. Конечно, пуассоновское распределение возникает не только при рассмотрении однородного потока независимых частиц. Скажем, речь может идти об однородном потоке требований, поступающих на некоторую систему обслуживания (например, к бензозаправочной станции подъезжают автомашины, поступают запросы в справочное бюро, на телефонной станции регистрируется поток отказов абонентам и т. п.). Вообще, речь может идти о каком-то однородном потоке независимых событий, регистрируемых во времени: моменты наступления этих событий можно интерпретировать как «частицы», случайно распределенные на действительной прямой (оси времени). Такой поток называется пуассоновским, если для числа событий ($X(\Delta)$) в промежутке времени Δ выполняются описанные выше условия а), б) и в):

- а) случайные величины $X(\Delta_1), \dots, X(\Delta_n)$ для неперекрывающихся временных интервалов $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, являются независимыми;
- б) вероятность того или иного числа событий в интервале Δ не зависит от начала отсчета времени (не зависит от расположения Δ на временной оси);
- в) вероятность наступления события в малом промежутке времени Δ пропорциональна длине этого промежутка, а вероятность наступления более чем одного события имеет более высокий порядок малости в сравнении с $|\Delta|$ (как мы знаем, распределение вероятностей $X(\Delta)$ является пуассоновским).

3.1 Время ожидания случайного события

Рассмотрим последовательные бросания монеты до первого выпадения «герба», считая, что монета бросается один раз в единицу времени. Ясно, что время ожидания «герба» является случайным, причем ввиду независимости отдельных испытаний (бросаний монеты) в любой момент $t > 0$ положение наблюдателя ничуть не лучше (в смысле времени ожидания гербах), чем в начальный момент $t = 0$: вероятность ждать после момента t еще время s такая же, как и прождать то же время s , начиная с начального момента; точнее, если τ — время ожидания, то при условии $\tau > t$ должно быть

$$\mathbf{P}(\tau > t + s | \tau > t) = \mathbf{P}(\tau > s). \quad (15)$$

Действительно, для любого $t = 0, 1, \dots$ событие $\tau > t$ означает, что при t независимых испытаниях ни разу не выпадет «герб»,

$$\mathbf{P}(\tau > t) = (1 - p)^t, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где $p = 1/2$ есть вероятность выпадения «герба» в каждом отдельном испытании, и поэтому

$$\mathbf{P}(\tau > t + s | \tau > t) = \frac{\mathbf{P}(\tau > t + s)}{\mathbf{P}(\tau > t)} = (1 - p)^s = \mathbf{P}(\tau > s).$$

Доказанное для момента τ соотношение (15) характерно не только для опыта с бросанием монеты. В терминах распределения вероятностей «времени ожидания» τ общая ситуация может быть описана следующим образом:

$$\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (16)$$

где λ — некоторый параметр ($\lambda \geq 0$); для дискретного $t = 0, 1, \dots$, нужно положить $p = 1 - e^{-\lambda}$.

При дискретном t распределение вероятностей (16) называется геометрическим:

$$p_\tau(k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

При непрерывном t , $0 \leq t < \infty$, распределение (16) имеет плотность вероятности

$$p_\tau(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

такое распределение называется показательным. Параметр λ имеет простой вероятностный смысл, а именно, $1/\lambda$ есть среднее время ожидания:

$$1/\lambda = \int_0^\infty t p_\tau(t) dt.$$

Выведем формулу (16) из соотношения (15), предполагая, что $\tau = 0$ лишь с вероятностью, равной нулю, и что в случае непрерывного времени величина τ имеет при $t \geq 0$ непрерывную плотность вероятности. Определим функцию $f(t)$ равенством $f(t) = \mathbf{P}(\tau > t)$. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(\tau > t + s) = \mathbf{P}(\tau > t)\mathbf{P}(\tau > s),$$

и, следовательно, функция $f(t)$ такова, что при любых $s, t \geq 0$

$$f(t + s) = f(t)f(s),$$

или

$$\ln f(t+s) = \ln f(t) + \ln f(s),$$

причем $f(0) = 1$. для дискретного $t = 0, 1, \dots$ отсюда получаем, что $\ln f(t)$, $\ln f(0) = 0$, есть линейная функция:

$$\ln f(t) = t \ln f(1)$$

и $f(t) = (1-p)^t = e^{-\lambda t}$, где $p = 1 - f(1) = \mathbf{P}(\tau = 1)$. Для непрерывного времени t (при условии, что существует плотность $p_\tau(t) = -f'(t)$, $t \geq 0$) дифференцирование по s дает нам

$$\frac{f'(t+s)}{f(t+s)} = \frac{f'(s)}{f(s)},$$

откуда при $s = 0$ получаем

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\lambda,$$

где $-\lambda = f'(0) \leq 0$. Поскольку $f(0) = 1$, следовательно, $f(t) = e^{-\lambda t}$, что и требовалось доказать.

Пример (модель радиоактивного распада). Ранее мы уже упоминали о том, что распределение излучаемых радием α -частиц является пуассоновским, Предположим, что превращение радия Ra в радон Rn (при котором излучаются α -частицы) происходит таким образом, что за промежуток времени (t_0, t_1) отдельно взятый атом Ra превращается в атом Rn с определенной вероятностью $p = p(t)$, зависящей от длины $t = t_1 - t_0$ рассматриваемого промежутка. Если до момента t_1 не произошло перехода Ra \rightarrow Rn, то в новый исходный момент t_1 мы имеем дело все с тем же атомом Ra, и переход Ra \rightarrow Rn за последующее время $s = t_2 - t_1$, согласно нашему предположению, должен осуществиться с соответствующей вероятностью (s) . Очевидно, время τ ожидания распада Ra \rightarrow Rn данного атома Ra (начиная с момента t_0) удовлетворяет соотношению (15), поскольку условная вероятность $\mathbf{P}(\tau > t + s | \tau > t)$ есть вероятность того, что сохранившийся к моменту t_1 атом Ra не распадается и в последующий промежуток времени (t_1, t_2) , а, по предположению, эта вероятность (так же, как и вероятность $\mathbf{P}(\tau > s)$) равна $1 - p(s)$, $s = t_2 - t_1$. Следовательно, время ожидания τ имеет показательное распределение вероятностей, т. е.

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Выясним физический смысл соответствующей постоянной λ . Мы уже знаем, что $1/\lambda$ есть среднее время ожидания распада Ra \rightarrow Rn для отдельного атома, естественно считать, что постоянная λ одна и та же для всех атомов Ra. Обозначим через n_0 количество радия (скажем, число атомов Ra) в начальный момент t_0 . Каждый отдельный атом Ra за последующее время t распадается (Ra \rightarrow Rn) с вероятностью

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

и если обозначить $\xi(t)$ число распадающихся за это время атомов Ra (совпадающее с числом излучаемых α -частиц), то среднее значение $\mathbf{E}\xi(t)$ будет

$$\mathbf{E}\xi(t) = n_0 p(t) = n_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Следовательно, через время t оставшееся количество радия составляет в среднем

$$n(t) = \mathbf{E}(n_0 - \xi(t)) = n_0 e^{-\lambda t}.$$

Экспоненциальная зависимость от t может быть охарактеризована не только показателем λ , но и так называемой постоянной полураспада T , определяемой как время, за которое распадается ровно половина исходного вещества; для нахождения T имеем уравнение

$$n(T) = n_0/2,$$

которое дает значение $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ (экспериментально найдено, что для радия $T = 1590$ лет).

3.2 Пуассоновский процесс

В определении пуассоновского потока речь идет о случайных величинах $X(\Delta)$, которые интерпретируются как число некоторых случайных событий, происходящих во временном промежутке Δ . Имея в виду эту интерпретацию, естественно ввести случайные моменты τ_1, τ_2, \dots наступления соответствующих событий и, отталкиваясь от случайных величин τ_1, τ_2, \dots , определить $X(\Delta)$ как число моментов τ_k в промежутке $\Delta = (s, t]$. Какими должны быть τ_1, τ_2, \dots для пуассоновского потока? Ответ на этот вопрос рассматривается ниже; при этом мы будем использовать новое обозначение для числа событий в промежутке $\Delta = (s, t]$, положив

$$\Delta X = X(t) - X(s),$$

где $X(t)$ есть число моментов $\tau_k : 0 \leq \tau_k \leq t$ как функция времени t , регистрирующая случайные моменты τ_1, τ_2, \dots , функция $X(t)$, $t \geq 0$ называется пуассоновским процессом.

Пусть $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ — (случайные) моменты, в которые происходят следующие одно за другим события рассматриваемого пуассоновского потока. Приведем некоторые предварительные соображения, показывающие, каким должно быть распределение вероятностей случайных величин τ_1, τ_2, \dots

Соотношение $\tau_2 - \tau_1 > t$ при условии $\tau_1 \leq t_1, \tau_2 > t_1$ означает, что в интервале $(t_1, t_1 + t]$ не произошло ни одного события, и вероятность этого равна $e^{-\lambda t}$ независимо от событий до t_1 , в частности, от момента τ_1 , причем при $\tau_1 = t_1$ (для любых t_1) рассматриваемое соотношение $\tau_2 - \tau_1 > t$ означает, что $\tau_2 - \tau_1 > t$. Отсюда можно сделать вывод, что условное распределение вероятностей $\tau_2 - \tau_1$ относительно τ_1 должно быть показательным с параметром λ независимо от τ_1 :

$$\mathbf{P}(\tau_2 - \tau_1 > t | \tau_1) = e^{-\lambda t}.$$

Аналогичное заключение можно сделать и в отношении всех величин $\tau_n - \tau_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ ($\tau_0 = 0$), а именно, указанные величины $\xi_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, представляющие собой промежутки между последовательными событиями в пуассоновском потоке, должны быть независимы между собой и распределены по показательному закону с параметром λ .

Рассмотрим суммы $\tau_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n = 1, 2, \dots$, независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, \dots с одинаковым показательным распределением с показателем λ . Мы имеем

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t | \tau_1 > s) = e^{-\lambda(t-s)}, \quad t > s.$$

Продолжая рассуждения, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_2 > t | \tau_1 > s) &= \mathbf{P}(\tau_1 > t | \tau_1 > s) + \mathbf{P}(\tau_1 \leq t, \xi_2 > t - \tau_1 | \tau_1 > s) = \\ &= e^{-\lambda(t-s)} + \int_t^s e^{-\lambda(t-u)} \lambda e^{-\lambda u} du \frac{1}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda(t-s)} \left(1 + \frac{\lambda(t-s)}{1!} \right). \end{aligned}$$

Последовательно применяя аналогичный прием, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_k > t | \tau_1 > s) &= \mathbf{P}(\tau_{k-1} > t | \tau_1 > s) + \mathbf{P}(\tau_{k-1} \leq t, \xi_k > t - \tau_{k-1} | \tau_1 > s) = \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{i=1}^k \frac{(\lambda(t-s))^{i-1}}{(i-1)!}. \end{aligned}$$

Отметим, что при $s = 0$ эта формула дает (безусловное) распределение вероятностей величин $\tau_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$ видно, что соответствующая плотность вероятности есть

$$p(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

3.3 Парадокс, связанный с временем ожидания случайного события

Остановимся на одном факте, который с первого взгляда может показаться парадоксальным. Именно, как и раньше, рассмотрим пуассоновский поток событий; независимо от того, когда и сколько событий произошло (или произойдет) вне какого-либо промежутка времени (s, t) , в самом этом промежутке k событий происходят с соответствующей вероятностью

$$\frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Предположим, что события регистрируются на временной оси $-\infty < t < +\infty$ и наблюдатель, пришедший в некоторый определенный момент t_0 , интересуется промежутками между предшествующим событием (момент его наступления обозначим τ_{-1}) и последующим событием, момент наступления которого, как и раньше, обозначим τ_1 .

Нами было установлено, что промежутки (скажем, $\tau_2 - \tau_1$, $\tau_3 - \tau_2$ и т. д.) между последовательными событиями, так же как и величина $\tau_1 - t_0$, имеют показательное распределение параметром λ . Можно было бы думать, что такое же распределение имеет и разность $(\tau_1 - \tau_{-1})$, хотя сразу же возникает недоумение в виду неравенства $(\tau_1 - \tau_{-1}) > (\tau_1 - t_0)$, из которого следует, что указанные величины не могут иметь одинаковое распределение вероятностей. К решению вопроса о распределении величины $(\tau_1 - \tau_{-1})$ можно подойти, принимая во внимание то обстоятельство, что направленность течения времени никак не влияет на вероятностные закономерности пуассоновского потока событий — они будут такими же и для потока событий, обращенного назад (формально получающегося заменой переменной t на $-t$). Следовательно, для любого фиксированного момента t_0 такого, что $\tau_{-1} < t_0 < \tau_1$, не только величина $(\tau_1 - t_0)$ — время ожидания очередного события — будет иметь показательное распределение вероятностей, но тем же свойством должна обладать и величина $(t_0 - \tau_{-1})$ — время ожидания очередного события в обращенном потоке. Кроме того, как уже отмечалось, величина $(\tau_1 - t_0)$ не зависит от того, когда именно до момента t_0 произошло предшествующее событие, и, таким образом, при условии $\tau_{-1} < t_0 < \tau_1$ величины $(\tau_1 - t_0)$ и $(t_0 - \tau_{-1})$ являются независимыми. Следовательно, распределение разности $(\tau_1 - \tau_{-1})$ — промежутка между соседними событиями (при условии, что $\tau_{-1} < t_0 < \tau_1$, для некоторого фиксированного момента t_0 ,) такое же, как и суммы $(\tau_1 - t_0) + (t_0 - \tau_{-1})$ двух независимых величин, имеющих одинаковое показательное распределение.

4 Процесс броуновского движения

4.1 Случайное блуждание броуновской частицы

Представьте себе частицу, взвешенную в однородной жидкости. Она испытывает хаотические столкновения с молекулами жидкости, в результате чего находится в непрерывном беспорядочном движении, называемом броуновским.

Дискретным аналогом такого процесса может служить следующая модель случайного блуждания. Положение частицы рассматривается лишь в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$, кратные Δt . Изменение положения происходит таким образом, что, находясь в точке x , частица независимо от предшествующего поведения переходит с равными вероятностями в одну из соседних точек $x + \Delta x$ или $x - \Delta x$, причем смещение Δx одно и то же для всех точек x (речь идет лишь об одной координате движущейся частицы, иначе, об одномерном случайном блуждании). В пределе, когда определенным образом $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, получается непрерывное случайное блуждание, характерное для физического

процесса броуновского движения. Обозначим $\xi(t)$ положение броуновской частицы в момент времени t . Пусть в начальный момент времени $t = 0$ частица находится в точке $x = 0$. При дискретном блуждании за время t она совершает $n = t/\Delta t$ шагов.

Обозначим ξ_{kn} смещение частицы на k -м шаге ($\xi_{kn} = \pm\Delta x$ с равными вероятностями); $\xi(t) = \sum_{k=1}^n \xi_{kn}$ есть сумма независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_{kn} , $k = 1, \dots, n$. Если считать, что $\xi(0) = 0$, то

$$\xi(s+t) = (\xi(s) - \xi(0)) + (\xi(t+s) - \xi(s)), \quad s, t \geq 0.$$

Очевидно, в описанной модели случайного блуждания величины $\xi(s) - \xi(0)$ и $\xi(t+s) - \xi(s)$ являются независимыми, причем распределение вероятностей приращения $\xi(t+s) - \xi(s)$ точно такое же, как и приращение $\xi(t) - \xi(0)$. Поэтому для дисперсии $\mathbf{D}\xi(t+s)$ имеет место равенство

$$\mathbf{D}\xi(t+s) = \mathbf{D}\xi(t) + \mathbf{D}\xi(s).$$

Видно, что дисперсия $\mathbf{D}\xi(t)$ (как функция от t) с ростом t меняется линейно и, таким образом,

$$\mathbf{D}\xi(t) = \sigma^2 t, \quad 0 \leq t < \infty,$$

где σ^2 — некоторая постоянная, называемая коэффициентом диффузии. С другой стороны, легко подсчитать, что дисперсия смещения за время t (иначе за n шагов, $n = t/\Delta t$) есть $\mathbf{D}\xi(t) = (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t}$. Будем считать постоянным отношение

$$\sigma^2 = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

Согласно центральной предельной теореме, получаем, что в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x = \sigma\Delta t \rightarrow 0$

$$\mathbf{P} \left(x' \leq \frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{t}} \leq x'' \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx.$$

Аналогичная формула справедлива и для приращений на любом интервале:

$$\mathbf{P} \left(x' \leq \frac{\xi(t+s) - \xi(s)}{\sigma\sqrt{t}} \leq x'' \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx.$$

В соответствии с этим, говоря в дальнейшем о (непрерывном) процессе броуновского движения, мы будем иметь в виду семейство случайных величин $\xi(t)$, $t \geq 0$, таких, что $\xi(0) = 0$ и приращения $\xi(t) - \xi(s)$, $t \geq s \geq 0$, имеют нормальные распределения вероятностей с нулевым средним и соответствующей дисперсией $\sigma^2(t-s)$, причем для любых непересекающихся интервалов (s_k, t_k) приращения $\Delta_k \xi = \xi(t_k) - \xi(s_k)$, $k = 1, \dots, n$, являются независимыми величинами.

Вообще, случайным процессом $\xi(t)$, $t \in T$ будем называть функцию от действительного параметра t (времени), пробегающего то или иное множество T , значениями которой являются соответствующие случайные величины $\xi(t)$. Наблюдая случайную величину ξ , мы имеем дело с тем или иным значением $\xi = x$. В том же смысле можно сказать, что, наблюдая случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$, мы имеем дело с той или иной траекторией $\xi(t) = x(t)$, $t \in T$, некоторой функцией переменного $t \in T$. Как отмечалось ранее, говоря о случайных величинах $\xi(t)$, $t \in T$ предполагают существование вероятностей любых событий A , порождаемых событиями вида

$$\{x'_1 \leq \xi(t_1) \leq x''_1, \dots, x'_n \leq \xi(t_n) \leq x''_n\},$$

каждое из которых означает, что траектория $\xi(t)$, $t \in T$, в соответствующие моменты времени $t_1, \dots, t_n \in T$ заключена в указанных пределах. Говоря о случайном процессе

$\xi(t)$, $t \in T$, иногда предполагают, что существуют вероятности не только событий A указанного типа, но и более сложных событий, связанных с поведением траектории $\xi(t)$, $t \in T$.

Рассматривая в дальнейшем случайный процесс броуновского движения, мы будем предполагать, что его траектория $\xi(t)$, $t \geq 0$, является непрерывной и определены случайные величины вида $\xi = \max_{0 \leq s \leq t} \xi(s)$. При этом предположении оказывается, что случайной величиной будет и момент τ достижения траекторией $\xi(s)$, $0 \leq s \leq t$, указанного максимума, а также момент τ_a достижения траекторией $\xi(t)$, $t \geq 0$, того или иного (фиксированного) значения a . Мы найдем распределения вероятностей этих величин (все они являются весьма характерными).

В дискретной модели при любом фиксированном значении $\xi(s) = a$ движение броуновской частицы после момента s (в который она находится в точке a) не зависит от ее поведения до этого момента. Предполагая, что это свойство имеет место и для непрерывного процесса броуновского движения, найдем распределение вероятностей случайной величины τ_a — момента первого достижения броуновской частицы точки $x = a$ (как и раньше, считая, что в начальный момент $t = 0$ частица находится в точке $x = 0$). Ясно, что при движении в положительном направлении броуновская частица подчиняется тем же закономерностям, что и при движении в отрицательном направлении (в дискретной модели на каждом шаге частица движется вправо или влево с одинаковой вероятностью). Поэтому величины τ_a и τ_{-a} (моменты достижения точек a и $-a$) при выходе из начальной точки $x = 0$ имеют одинаковое распределение вероятностей. Будем считать, что $a > 0$, и найдем вероятность $\mathbf{P}(\tau_a \leq t)$. В момент t частица может оказаться правее точки a лишь при условии, что в некоторый момент $\tau_a \leq t$ она находилась в этой точке (поскольку при непрерывном движении броуновская частица не может перескочить через a). Формально это значит, что событие $\xi(t) \geq a$ содержится в событии $\tau_a \leq t$, и, следовательно,

$$\mathbf{P}(\xi(t) \geq a | \tau_a \leq t) = \frac{\mathbf{P}(\xi(t) \geq a)}{\mathbf{P}(\tau_a \leq t)}.$$

Очевидно, условная вероятность $\mathbf{P}(\xi(t) \geq a | \tau_a \leq t)$ при условии, что в момент τ_a , $\tau_a \leq t$, частица находится в a , совпадает с вероятностью того, что после выхода из точки a она к моменту t окажется правее a . Но из приведенных выше соображений симметрии вытекает, что вероятность оказаться к моменту t правее исходной точки a такая же, как и вероятность оказаться к этому моменту левее a , и равна $1/2$. Таким образом, $\mathbf{P}(\xi(t) \geq a | \tau_a \leq t) = 1/2$, и, считая для простоты коэффициент диффузии σ^2 равным 1, из полученного выше равенства получаем

$$F_{\tau_a}(t) = 2\mathbf{P}(\xi(t) \geq a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{at^{-1/2}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx, \quad t > 0.$$

Дифференцируя функцию распределения по t , найдем соответствующую плотность вероятности:

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} e^{-a^2/2t}, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (17)$$

Интересно отметить, что для любой точки a величина τ_a конечна с вероятностью 1:

$$\mathbf{P}(\tau_a < \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_a \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1,$$

т. е. броуновская частица рано или поздно попадает в любую точку a (в некоторый случайный момент времени $\tau_a < \infty$).

Зная распределение величины τ_x — момента достижения точки x , — сразу можно найти и распределение вероятностей величины максимального смещения броуновской частицы за фиксированное время t . Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\max_{0 \leq s \leq t} \xi(s) \geq x) &= \mathbf{P}(\tau_x \leq t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{xt^{-1/2}}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2t} du. \end{aligned}$$

и величина $\xi = \max_{0 \leq s \leq t} \xi(s)$ имеет плотность вероятности

$$p_{\xi}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (18)$$

($p_{\xi}(x) = 0$ при $x < 0$, поскольку $\xi \geq \xi(0) = 0$). Это — так называемый удвоенный нормальный закон распределения вероятностей (как легко видеть, $\mathbf{P}(\xi \geq x) = 2\mathbf{P}(\xi(t) \geq x)$).

Очевидно, аналогичное распределение вероятностей имеет величина $\min_{0 \leq s \leq t} \xi(s)$, а именно, ее плотность вероятности

$$p_{\xi}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, \quad x \leq 0$$

($p(x) = 0$ при $x > 0$). Интересно отметить, что

$$\mathbf{P}(\max_{0 \leq s \leq t} \xi(s) > 0) = \mathbf{P}(\min_{0 \leq s \leq t} \xi(s) < 0) = 1,$$

и, значит, выходя из точки $x = 0$, броуновская частица за любое сколь угодно малое время t побывает как правее исходной точки $x = 0$, так и левее этой точки.

4.2 Закон арксинуса

Предполагаемая непрерывной, траектория броуновской частицы $\xi(u)$, $0 \leq u \leq t$, достигает своего абсолютного максимума в некоторой точке τ , $0 \leq \tau \leq t$ (будем иметь в виду первую точку максимума, если их несколько). Найдем распределение случайной величины τ . Предположим, что имеется плотность совместного распределения вероятностей случайных величин τ и $\xi = \xi(\tau)$. Покажем, что тогда эта плотность имеет вид

$$p_{\tau, \xi}(s, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \frac{x}{s} e^{-x^2/2s}, \quad (19)$$

где $0 < s < t < \infty$, $0 \leq x < \infty$.

Для этого рассмотрим сначала совместное распределение вероятностей случайных величин τ_a и ξ , где τ_a как и раньше, означает момент первого достижения броуновской частицей точки a . После попадания в точку a дальнейшее поведение броуновской частицы подчиняется таким же закономерностям, как если бы эта точка была исходной с самого начала. Поэтому величина $\xi = \max_{0 \leq u \leq t} \xi(u)$, совпадающая при условии $\tau_a = s$, $0 < s \leq t$, с величиной $\max_{s \leq u \leq t} \xi(u)$, при указанном условии имеет такое же распределение вероятностей, как и величина $a + \max_{0 \leq u \leq t-s} \xi(u)$, и, согласно установленной выше формуле (18), имеет условную плотность распределения

$$p_{\xi}(x|s) = \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}} e^{(x-a)^2/2(t-s)}, \quad x \geq a.$$

Отсюда вытекает, что плотность $p_{\tau_a, \xi}(s, x)$ совместного распределения вероятностей величин τ_a, ξ при $0 < s < t, x \geq a$ имеет вид

$$p_{\tau, \xi}(s, x) = p_{\tau_a}(s)p_{\xi}(x|s) = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \frac{a}{s} e^{-a^2/2s} e^{(x-a)^2/2(t-s)}$$

С другой стороны, при условии $\xi = a$ точка максимума τ совпадает с моментом τ_a , и, следовательно, при указанном условии величины τ, τ_a имеют одинаковое распределение вероятностей. Отсюда вытекает, что плотность вероятности величин τ, ξ в точке $\tau = s, \xi = a$ совпадает с плотностью вероятности величин τ_a, ξ в той же точке (s, a) , поскольку

$$p_{\tau, \xi}(s, a) = p_{\tau}(s|a)p_{\xi}(a) = p_{\tau_a}(s|a)p_{\xi}(a) = p_{\tau_a, \xi}(s, a),$$

где $p_{\tau}(s|x)$ и $p_{\tau_a}(s|x)$ означают условные плотности распределений вероятностей величин τ и τ_a при условии $\xi = x$. Из найденной выше формулы для плотности $p_{\tau_a, \xi}(s, x)$ при $x = a$ получаем

$$p_{\tau, \xi}(s, a) = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \frac{a}{s} e^{-a^2/2s},$$

$$0 < s < t < \infty, 0 \leq a < \infty.$$

что и дает нам указанную ранее формулу (19). Плотностью же отдельно взятой величины τ — точки максимума броуновской траектории $\xi(s)$ на отрезке времени $0 \leq s \leq t$ — будет

$$p_{\tau}(s) = \int_0^{\infty} p_{\tau, \xi}(s, x) dx = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \int_0^{\infty} \frac{x}{s} e^{-x^2/2s} dx = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}},$$

где $0 \leq s < t$.

Далее мы имеем

$$\mathbf{P}(\tau < s) = \int_0^s \frac{du}{\pi \sqrt{u(t-u)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Этот закон распределения вероятностей носит название закона арксинуса. Такое же распределение вероятностей имеет, конечно, и точка минимума траектории $\xi(s)$, $0 \leq s \leq t$. Наиболее вероятным является такое поведение броуновской частицы, при котором экстремальная точка ее траектории располагается вблизи концов рассматриваемого отрезка $[0, t]$.

5 Цепи Маркова

5.1 Вероятности перехода

Прежде чем дать описание общей схемы, обратимся к простому примеру. Представьте себе, что речь идет о последовательных бросаниях монеты при игре «в орлянку», скажем, монета бросается в условные моменты времени $t = 0, 1, \dots$, на каждом шаге игрок может выиграть ± 1 с одинаковой вероятностью $1/2$, так что в момент t его суммарный выигрыш есть случайная величина $\xi(t)$ с возможными значениями $j = 0, \pm 1, \dots$ При условии, что $\xi(t) = k$, на следующем шаге выигрыш будет уже равен $\xi(t+1) = k \pm 1$, принимая указанные значения $j = k \pm 1$ с одинаковой вероятностью $1/2$. Условно можно сказать, что здесь с соответствующей вероятностью происходит переход из состояния $\xi(t) = k$ в состояние $j = k \pm 1$. Обобщая этот пример, можно представить себе физическую систему со счетным числом возможных фазовых состояний, которая с течением дискретного времени

$t = 0, 1, \dots$ случайно переходит из состояния в состояние. Пусть $\xi(t)$ есть ее положение в момент t в результате цепочки случайных переходов

$$\xi(0) \rightarrow \xi(1) \rightarrow \dots \rightarrow \xi(t) \rightarrow \dots$$

Формально обозначим всевозможные состояния целыми числами $i = 0, \pm 1, \dots$. Предположим, что при известном состоянии $\xi(t) = k$ на следующем шаге система переходит в состояние $\xi(t+1) = j$ с условной вероятностью

$$p_{kj} = \mathbf{P}(\xi(t+1) = j | \xi(t) = k) \quad (20)$$

независимо от ее поведения в прошлом, точнее, независимо от цепочки переходов до момента t :

$$\mathbf{P}(\xi(t+1) = j | \xi(0) = i, \dots, \xi(t) = k) = \mathbf{P}(\xi(t+1) = j | \xi(t) = k) \quad (21)$$

при всех t, k и j .

Описанную здесь вероятностную схему называют однородной цепью Маркова со счетным числом состояний — ее однородность состоит в том, что определенные нами переходные вероятности p_{kj} , $\sum_j p_{kj} = 1$, $k = 0, \pm 1, \dots$, не зависят от времени.

Рассмотрим марковскую цепь с переходными вероятностями (20), считая, что

$$\mathbf{P}(\xi(0) = i) = p_i(0), \quad i = 0, \pm 1, \dots,$$

здесь указано так называемое начальное распределение вероятностей, $\sum_i p_i(0) = 1$. Очевидно,

$$\mathbf{P}(\xi(0) = i, \xi(1) = j) = \mathbf{P}(\xi(1) = j | \xi(0) = i) \mathbf{P}(\xi(0) = i) = p_i(0) p_{ij},$$

и, аналогично, согласно марковскому свойству (21) для всей цепочки переходов от 0 до $t \geq 1$ вероятность

$$\mathbf{P}(\xi(0) = i, \dots, \xi(t) = k, \xi(t+1) = j) = p_i(0) \dots p_{kj} \quad (22)$$

есть произведение $p_i(0)$ и соответствующих переходных вероятностей. Введем матрицу переходных вероятностей $P = \{p_{ij}\}$ с компонентами p_{ij} , $i, j = 0, \pm 1, \dots$, и пусть $P(n) = p_{ij}(n)$ есть ее n -я степень, $p_{ij} = \sum_k p_{ik}(n-1) p_{kj}$, $n = 1, 2, \dots$ ($P(0) = E$ есть единичная матрица с элементами $p_{ii}(0) = 1$ и $p_{ij}(0) = 0$, $j \neq i$). Введенные $p_{ij}(n)$ есть вероятности перехода за n шагов из состояния i в состояние j , а именно,

$$p_{ij}(n) = \mathbf{P}(\xi(n) = j | \xi(0) = i)$$

отправляясь от $n = 1$, можно получить последовательно при $n \geq 2$, используя формулу полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi(n) = j | \xi(0) = i) &= \sum_k \mathbf{P}(\xi(n) = j | \xi(0) = i, \xi(n-1) = k) \mathbf{P}(\xi(n-1) = k | \xi(0) = i) = \\ &= \sum_k \mathbf{P}(\xi(n-1) = k | \xi(0) = i) p_{kj}. \end{aligned}$$

Задача. Показать, что для вероятностей $p_j(n) = \mathbf{P}(\xi(n) = j)$, $j = 0, \pm 1, \dots$, справедлива формула

$$p_j(n) = \sum_i p_i(0) p_{ij}(n).$$

Далее, в соответствии с определением, мы имеем

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

и, следовательно,

$$p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

при всех i, j и s, t .

Задача. Показать, что справедливо следующее соотношение

$$p_j(s+t) = \sum_i p_i(s)p_{ij}(t).$$

Задача. Пусть

$$s_1 < \dots < s_m < s < t_1 < \dots < t_n$$

есть последовательность моментов времени. Показать, что при данном состоянии $\xi(s) = i$ в текущий момент s поведение системы в будущем не зависит от ее поведения в прошлом в том смысле, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi(t_1) = j_1, \dots, \xi(t_n) = j_n | \xi(s_1) = i_1, \dots, \xi(s_m) = i_m, \xi(s) = i) = \\ = \mathbf{P}(\xi(t_1) = j_1, \dots, \xi(t_n) = j_n | \xi(s) = i) \end{aligned} \quad (23)$$

это так называемое марковское свойство.

5.2 Возвратные и невозвратные состояния

Рассмотрим цепь Маркова с переходными вероятностями $p_{ij}(n)$, $n = 0, 1, \dots$

Пусть в начальный момент система находится в некотором состоянии i . Обозначим через v_n вероятность того, что система впервые вернется в исходное состояние i ровно через n шагов. Значение

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

есть вероятность того, что система на каком-либо шаге $n = 1, 2, \dots$ попадает в исходное состояние i , иначе v есть вероятность возвращения в i . Состояние i называется возвратным, если вероятность возвращения в него равна 1, и невозвратным, если эта вероятность меньше 1.

Теорема 2. Состояние i является возвратным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

Доказательство. Имеет место следующее равенство:

$$u_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

где положено $u_n = p_{ii}(n)$ и дополнительно введены $u_0 = 1$ и $v_0 = 0$. Оно является следствием общей формулы полной вероятности. Именно, если ввести события B_k , — «система через k шагов впервые возвращается в исходное состояние i », $k = 1, \dots, n$, и событие B_{n+1} «система ни разу не побывает в состоянии i в течение первых n шагов», то B_1, \dots, B_{n+1}

будет полной системой событий, и вероятность события A — «система через n шагов будет находиться в исходном состоянии i » по формуле полной вероятности есть

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k),$$

где $\mathbf{P}(B_k) = v_k$, $\mathbf{P}(A|B_k) = u_{n-k}$, $k = 1, \dots, n$; $\mathbf{P}(A|B_{n+1}) = 0$.

Обратимся к так называемым производящим функциям

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k, \quad V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k, \quad |z| \leq 1.$$

Очевидно, это аналитические при $|z| < 1$ функции. Соотношение (24), справедливое при всех $n = 1, 2, \dots$, можно записать в виде

$$U(z) - u_0 = U(z)V(z), \quad u_0 = 1,$$

откуда

$$U(z) = \frac{1}{1 - V(z)}. \tag{25}$$

Возвратность состояния i означает, что

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \lim_{z \rightarrow 1} V(z).$$

Как видно из равенства (25), это предельное соотношение равносильно тому, что

$$\lim_{z \rightarrow 1} U(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - V(z)} = \infty.$$

Но

$$\lim_{z \rightarrow 1} U(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

ы, таким образом, возвратность состояния i равносильна тому, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ расходится. Для завершения доказательства остается лишь напомнить, что $u_n = p_{ii}(n)$. \square

Теорема 3. *Если исходное состояние i является возвратным, то система с вероятностью 1 за бесконечное число шагов бесконечно много раз возвратится в i . Если это состояние является невозвратным, то за бесконечное число шагов система с вероятностью 1 лишь конечное число раз побывает в состоянии i , другими словами, после некоторого конечного числа шагов она никогда больше не возвращается в i .*

Доказательство. Обозначим ν_1 число шагов до первого возвращения в состояние i ; ν_2 — число шагов до второго возвращения и т. д. Если за бесконечное число шагов происходит меньше k возвращений, то полагаем $\nu_k = \infty$. Событие $\{\nu_k < \infty\}$ означает, что произошло по меньшей мере k возвращений. Вероятность возвращения есть $\mathbf{P}(\nu_1 < \infty) = v$. При условии осуществления события $\{\nu_1 < \infty\}$ система через некоторое конечное число шагов возвращается в исходное состояние i , после чего ее дальнейшее поведение подчиняется тем же закономерностям, как если бы она только начинала свое движение. Таким образом, вероятность события $\{\nu_2 < \infty\}$ при условии, что $\{\nu_1 < \infty\}$, будет также равна v :

$$\mathbf{P}(\nu_2 < \infty | \nu_1 < \infty) = v.$$

Очевидно, если $\nu_1 = \infty$, то $\nu_2 = \infty$. Поэтому

$$\mathbf{P}(\nu_2 < \infty) = \mathbf{P}(\nu_2 < \infty | \nu_1 < \infty) \mathbf{P}(\nu_1 < \infty) = v^2.$$

Совершенно аналогично, при любом k

$$\mathbf{P}(\nu_k < \infty | \nu_{k-1} < \infty) = v, \quad \mathbf{P}(\nu_k < \infty) = v^k.$$

Невозвратность состояния i означает, что $v < 1$. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_k < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k < \infty,$$

и, согласно лемме Бореля - Кантелли, с вероятностью 1 может произойти лишь конечное число событий вида $\{\nu_k < \infty\}$, т. е. с вероятностью 1 за бесконечное число шагов система лишь конечное число раз побывает в состоянии i .

Возвратность состояния i означает, что $v = 1$. В этом случае при любом k

$$\mathbf{P}(\nu_k < \infty) = 1.$$

Обозначим χ число возвращений за бесконечное число шагов. Очевидно, событие $\chi \geq k$ тождественно с событием $\{\nu_k < \infty\}$, и $\{\chi = \infty\} = \bigcap_k \{\nu_k < \infty\}$. В силу непрерывности вероятности,

$$\mathbf{P}(\chi = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\nu_k < \infty) = 1.$$

Теорема доказана. □

Пример (случайное блуждание). Рассмотрим блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором она с вероятностью p смещается на 1 в положительном направлении, а с вероятностью $q = (1 - p)$ — в отрицательном направлении. Мы имеем

$$p_{ii}(2n) = \frac{2n!}{n!n!} (pq)^n,$$

и при симметричном случайном блуждании, когда $p = q = 1/2$, $p_{ii}(2n) \sim 1/\sqrt{\pi n}$ и ряд $\sum_n p_{ii}(2n)$ расходится, все состояния являются возвратными. При $p \neq q$, когда $4pq < 1$ и $\sum_n p_{ii}(2n) < \infty$, все состояния являются невозвратными.

5.3 Классификация состояний

Говорят, что состояние j достижимо из i , если за некоторое число шагов система с положительной вероятностью переходит из i в j , т. е. $p_{ij}(M) > 0$ при некотором M . Если j достижимо из i и, в свою очередь, i достижимо из j , то эти состояния i, j называются сообщающимися.

Пусть i — возвратное состояние и j достижимо из i . Тогда i , в свою очередь, достижимо из j , так как в противном случае, выходя из i , система за M шагов с положительной вероятностью $p_{ij}(M) > \alpha$ попадает в состояние j , после чего уже не может вернуться в i ; таким образом, вероятность возвращения в i будет не больше чем $1 - \alpha$, а это противоречит возвратности состояния i . Итак, если j достижимо из возвратного состояния i , то, в свою очередь, i достижимо из j , т. е. $p_{ji}(N) > 0$ при некотором N , т. е. состояния i, j являются сообщающимися.

Для любых сообщающихся состояний i, j (таких, что $p_{ij}() = \alpha > 0$, $p_{ji}(N) = \beta > 0$ при некоторых M и N) из соотношения $P(M + K + N) = P(M)P(K)P(N) =$

$P(N)P(K)P(M)$ (где $P(n) = \{p_{kl}(n)\}$ означает матрицу переходных вероятностей) выводим, что

$$\begin{aligned} p_{ii}(M + K + N) &\geq p_{ij}(M)p_{jj}(K)p_{ji}(N) = \alpha\beta p_{jj}(K), \\ p_{jj}(N + K + M) &\geq p_{ji}(N)p_{ii}(K)p_{ij}(M) = \alpha\beta p_{ii}(K). \end{aligned}$$

Эти неравенства показывают, что для сообщающихся состояний i, j ряды

$$\sum_k p_{ii}(k), \quad \sum_k p_{jj}(k)$$

сходятся или расходятся одновременно. Принимая во внимание теорему 2, отсюда заключаем, что состояния, достижимые из некоторого возвратного состояния, также являются возвратными.

Пусть i — возвратное состояние. Как было показано, все состояния j , достижимые из i , являются возвратными и сообщаются с состоянием i . Все указанные состояния j образуют так называемый замкнутый класс состояний (обозначим его E) такой, что если система на каком-то шаге попадает в одно из состояний $j \in E$, то после этого она остается во множестве состояний E навсегда (любое состояние, достижимое из какого-либо состояния $j \in E$ также входит в E); при этом для любого $j \in E$ сам класс E может быть определен как множество всех состояний, достижимых из j .

Рассмотрим два каких-либо замкнутых класса возвратных состояний, обозначив их E_1 и E_2 . Предположим, что некоторое состояние j входит одновременно в E_1 , и в E_2 . Тогда эти классы E_1 и E_2 совпадают, поскольку каждый из них совпадает с множеством всех состояний, достижимых из j . Следовательно, замкнутые классы E_1 и E_2 либо совпадают, либо не пересекаются.

Выделим множество E_0 всех невозвратных состояний и разобьем оставшиеся возвратные состояния на непересекающиеся замкнутые классы E_1, E_2, \dots (каждый из которых представляет собой определенную совокупность сообщающихся друг с другом возвратных состояний). Как показывает пример случайного блуждания, вообще говоря, система с течением времени может уйти в бесконечность по какой-то цепочке невозвратных состояний (если таких состояний бесконечное число). Эта возможность исключается, если имеется лишь конечное число невозвратных состояний. В этом случае система в любом из невозвратных состояний с вероятностью 1 побывает лишь конечное число раз и рано или поздно попадет в какое-то возвратное состояние i ; в дальнейшем она будет «циркулировать» в замкнутом классе возвратных состояний E , содержащем i (в частности, именно так обстоит дело в цепи с конечным числом состояний).

5.4 Сходимость к стационарному распределению

Распределение вероятностей p_i^* , $i = 0, \pm 1, \dots$, называется стационарным для марковской цепи с переходными вероятностями p_{ij} , если выполнено условие

$$p_j^* = \sum_i p_i^* p_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Из общих рекуррентных соотношений видно, что условие (26) означает следующее: при распределении $p_i(n_0) = p_i^*$, $i = 0, \pm 1, \dots$, вероятности $p_j(n)$ того, что на n -м шаге система будет находиться в состоянии $j = 0, \pm 1, \dots$, остаются неизменным и для всех $n \geq n_0$:

$$p_j(n) = p_j^*, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

Предположим, что при некотором n_0 имеется положительный коэффициент эргодичности $k(n_0)$, определяемый формулой

$$k(n_0) = 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)|.$$

Отметим, что $k(n_0) > 0$, если существует хотя бы одно состояние j , достижимое из любого состояния i (за одно и то же число шагов n_0).

Теорема 4. Если $k(n_0) > 0$ для некоторого n_0 , то существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = p_j^*, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

Для любого начального распределения $p_i(0)$, $i = 0, \pm 1, \dots$ предельные вероятности p_j^* , $j = 0, \pm 1, \dots$, одни и те же, причем имеет место следующая оценка скорости сходимости в предельном соотношении:

$$\sup_{p_i(0)} |p_j(n) - p_j^*| \leq C e^{-Dn}, \quad (27)$$

где $C = \frac{1}{1-k(n_0)}$, $D = \frac{1}{n_0} \ln \frac{1}{1-k(n_0)}$.

Пример (случайное блуждание). Рассмотрим случайное блуждание, при котором частица с вероятностью p_i переходит из точки i в соседнюю точку $j = i + 1$, а с вероятностью $q_i = 1 - p_i$ — в точку $j = 0$. Будем считать, что $0 < p_i < 1$. Очевидно, все состояния являются сообщающимися и одновременно являются возвратными или невозвратными.

Предположим, что частица находится в начальном состоянии $i = 0$. Вероятность того, что она за последующие n шагов ни разу не вернется в исходное положение $i = 0$, равна произведению $p_0 p_1 \dots p_{n-1}$ (вероятности того, что частица последовательно пробегает цепочку состояний $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n$). Легко видеть, что вероятность за бесконечное число шагов ни разу не вернуться в исходное состояние $i = 0$ равна бесконечному произведению

$$\prod_{k=0}^{\infty} p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_0 \dots p_n.$$

Если это бесконечное произведение сходится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_0 \dots p_n = 0$, то состояние $i = 0$ является возвратным. В противном случае вероятность возвращения есть

$$v = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} p_0 \dots p_n$$

и состояние $i = 0$ является невозвратным.

Предположим, что $p_i < 1 - \delta$, т. е. вероятность перехода из любого состояния i в состояние 0 есть $q_i \geq \delta$. Тогда, очевидно, для коэффициента эргодичности $k(1)$ имеем следующую оценку:

$$k(1) \geq \inf_i q_i \geq \delta,$$

что дает нам возможность применить теорему 4. Для стационарного распределения p_j^* , $j = 0, 1, \dots$ выполняется система уравнений (26), которая в нашем случае преобразуется к виду:

$$p_j^* = p_{j-1}^* p_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

откуда, поскольку

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^* = p_0^* \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_0 \dots p_{n-1} \right) = p_0^* \mu,$$

(где $\mu = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_0 \dots p_{n-1}$) получаем

$$p_0^* = \frac{1}{\mu}, \quad p_1^* = \frac{p_0}{\mu}, \dots, \quad p_n^* = \frac{p_0 \dots p_{n-1}}{\mu}, \dots$$

6 Цепи Маркова (непрерывное время)

6.1 Дифференциальные уравнения для переходных вероятностей

Рассмотрим однородный марковский процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, с конечным или счетным числом состояний $i = 0, \pm 1, \dots$, отличающийся от рассмотренных в предыдущем параграфе цепей Маркова лишь тем, что параметр t (время) меняется непрерывно и переход из одного состояния в другое возможен в любой момент времени t . Так же, как и раньше, условно будем говорить о системе, фазовое состояние которой в момент t есть $\xi(t)$.

Обозначим $p_{ij}(t)$ вероятность перехода из состояния i в состояние j за время t :

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P}(\xi(t+s) = j | \xi(s) = i), \quad i, j = 0, \pm 1, \dots$$

Пусть $p_i(0)$, $i = 0, \pm 1, \dots$, — начальное распределение вероятностей. Мы имеем

$$\begin{aligned} p_j(t) &= \sum_i p_i(0) p_{ij}(t), \\ p_{ij}(t+s) &= \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s), \quad i, j = 0, \pm 1, \dots, \end{aligned} \tag{28}$$

при всех $t, s \geq 0$, где

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть в некоторый момент t_0 система находится в состоянии i и случайная величина τ есть время ожидания до ее выхода из этого состояния. При условии, что $\tau > s$, через время t (в момент $t_1 = t_0 + t$) система находится в том же состоянии i , и в предположении, что последующее поведение нашего однородного марковского процесса такое же, как и после исходного момента t_0 , распределение вероятностей времени последующего пребывания в состоянии i должно быть таким же, как и у величины τ . Это дает нам следующее соотношение:

$$\mathbf{P}(\tau > t + s | \tau > s) = \mathbf{P}(\tau > t);$$

как мы знаем, из него вытекает, что распределение вероятностей величины τ (времени ожидания до выхода из состояния i) является показательным:

$$\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-\lambda_i t}, \quad t > 0, \tag{29}$$

где λ_i — некоторая неотрицательная постоянная; постоянная λ_i называется плотностью выхода из соответствующего состояния i . При $\lambda_i = 0$ процесс $\xi(t)$ навсегда остается в состоянии i ; при $0 < \lambda_i < \infty$ вероятность того, что состояние i изменится за малый промежуток Δt , есть

$$\lambda_i \Delta t + o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Можно представить себе следующий процесс: в начальный момент $t = 0$ система с вероятностью $p_i(0)$ находится в состоянии i , где пребывает случайное время $\tau_1 - \tau_0$ ($\tau_0 = 0$) с λ_i -показательным распределением вероятностей, после чего переходит в момент τ_1 в новое состояние $j = j_1$ с соответствующей вероятностью π_{ij} — условной вероятностью попасть при выходе из i именно в j ; в состоянии $j = j_1$ система проводит случайное время $\tau_2 - \tau_1$ с λ_{j_1} -показательным распределением (это время пребывания в $j = j_1$ зависит лишь от j), а затем в момент τ_2 выходит из j_1 , переходя в то или иное новое состояние j_2 с соответствующей вероятностью $\pi_{j_1 j_2}$, где она проводит случайное время $\tau_3 - \tau_2$ с λ_{j_2} -показательным распределением вероятностей, и т. д. (при условии, что $\sum_{k=1}^{\infty} (\tau_k - \tau_{k-1}) =$

∞ , этот процесс определен на всей временной оси $t \geq 0$.) Очевидно, непосредственный переход из исходного состояния i в то или иное состояние $j \neq i$ за промежуток времени Δt осуществляется с вероятностью $(1 - e^{-\lambda_i \Delta t})\pi_{ij}$, и если вероятность более одного перехода за малое время Δt есть $o(\Delta t)$, то за время Δt система переходит в j с вероятностью $\lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$, где $\lambda_{ij} = \lambda_i\pi_{ij}$, $j \neq i$.

В соответствии со сказанным выше, будем предполагать, что переходные вероятности однородного марковского процесса $\xi(t), t \geq 0$, удовлетворяют следующим условиям: при $\Delta t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1 - p_{ii}(\Delta t) &= \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{ij}(\Delta t) &= \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \quad j \neq i \end{aligned} \quad (30)$$

где λ_i — плотность выхода из состояния i , а постоянные λ_{ij} , называются плотностями перехода из i в соответствующее состояние j ,

$$\lambda_i = \sum_j \lambda_{ij}. \quad (31)$$

Положим

$$\lambda_{ii} = -\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Согласно общей формуле,

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_k p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) \quad (= \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)).$$

Используя асимптотические соотношения (30), выводим

$$\begin{aligned} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k \neq i} p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) + p_{ij}(t) \frac{p_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \\ &= \sum_k \left(\lambda_{ik} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right) p_{kj}(t) \quad \left(= \sum_k p_{ik}(t) \left(\lambda_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right) \right). \end{aligned}$$

В случае конечного числа состояний, переходя здесь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k \lambda_{ik} p_{kj}(t), \quad (32)$$

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) \lambda_{kj}. \quad (33)$$

Уравнения (33) образуют так называемую прямую систему и уравнения (32) — обратную систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

В случае бесконечного числа состояний для вывода этих уравнений нам нужно обосновать предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$ (отметим, что мы рассматриваем приращения $\Delta t > 0$). Предположим, что переходные вероятности являются дифференцируемыми. Тогда

$$p'_{ij}(t) - \lambda_{ii} p_{ij}(t) \geq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{p_{ik}(\Delta t)}{\Delta t} p_{kj}(t) = \sum_{k=1, k \neq i}^N \lambda_{ik} p_{kj}(t)$$

при любом N , и потому

$$p'_{ij}(t) - \lambda_{ii} p_{ij}(t) \geq \sum_{k \neq i} \lambda_{ik} p_{kj}(t).$$

С другой стороны, для любого N

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) - \lambda_{ii}p_{ij}(t) &\leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{k=1, k \neq i}^N p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) + \sum_{k \geq N, k \neq i} p_{ik}(\Delta t) \right) \leq \\ &\leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{k=1, k \neq i}^N p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t) + \frac{1}{\Delta t} \left(1 - p_{ii}(\Delta t) - \sum_{k=1, k \neq i}^N p_{ik}(\Delta t) \right) \right) = \\ &= \sum_{k=1, k \neq i}^N \lambda_{ik}p_{kj}(t) + \left(\lambda_i - \sum_{k=1, k \neq i}^N \lambda_{ik} \right), \end{aligned}$$

и при условии (31) получаем, что

$$p'_{ij}(t) - \lambda_{ii}p_{ij}(t) \leq \sum_{k \neq i} \lambda_{ik}p_{kj}(t).$$

таким образом, должно быть выполнено условие (32).

В предположении дифференцируемости переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ мы получили следующий результат.

Теорема 5. При условиях (30), (31) имеет место (обратная) система дифференциальных уравнений (32).

Отметим также следующее предложение.

Теорема 6. Пусть плотности перехода λ_{ij} , ограничены (для каждого j) и в асимптотических выражениях (30) мы имеем $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ равномерно по всем $i = 0, \pm 1, \dots$. Тогда справедлива (прямая) система дифференциальных уравнений (33).

В условиях теоремы 6 для вероятностей $p_j(t) = \sum_i p_i(0)p_{ij}(t)$ справедлива следующая система уравнений:

$$p'_j(t) = \sum_k p_k(t)\lambda_{kj}, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (34)$$

Докажем справедливость равенств (34), из которых соответствующие равенства (33) получаются при $p_i(0) = 1$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{p_j(t + \Delta t) - p_j(t)}{\Delta t} &= \sum_k p_k(t) \left(\lambda_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right) = \\ &= \sum_k p_k(t)\lambda_{kj} + \sum_k p_k(t)o(\Delta t)/\Delta t, \end{aligned}$$

где, в силу ограниченности λ_{kj} , $k = 0, \pm 1, \dots$, ряд $\sum_k p_k(t)\lambda_{kj}$, абсолютно сходится, и, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем равенство (34).

Пример (пуассоновский процесс). Вернемся к процессу радиоактивного распада и рассмотрим поток α -частиц, обозначив $\xi(t)$ их число к моменту времени t , начиная с исходного момента $t = 0$. Очевидно, при условии $\xi(s) = i$ событие $\xi(s+t) = j$ будет означать, что за время t произойдет распад $j - i = k$ атомов Ra и вероятность этого $p_{ij}(t) = p_{0,k}(t)$ зависит лишь от разности $j - i = k$, времени t и имеющегося в момент s количества Ra (которое на протяжении реального времени наблюдения мы считаем постоянным). Таким образом, можно считать $\xi(t)$, $t \geq 0$, однородным марковским процессом с возможными

состояниями $i = 0, 1, \dots$ и переходными вероятностями $p_{ij}(t) = p_{0,j-i}(t)$, $j \geq i$ (переход из i в j при $j < i$, очевидно, невозможен). Мы знаем, что появление за малое время h более одной α -частицы имеет вероятность $p_{0,k}(h) = o(h)$ при $k \geq 2$. Отсюда для соответствующих параметров в (30) мы получаем

$$\lambda_i = \lambda, \quad \lambda_{i,i+1} = \lambda, \quad \lambda_{ij} = 0 \text{ при } j \neq i, i+1.$$

Положим

$$p_j(t) = p_{0j}(t).$$

Для переходных вероятностей $p_j(t)$ имеет место система дифференциальных уравнений (33):

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t), \\ p_k'(t) &= \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если сделать замену $f_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, то получим, что

$$\begin{aligned} f_0'(t) &= 0, \\ f_k'(t) &= \lambda f_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $f_0(0) = 1$, $f_k(0) = 0$ при $k = 1, 2, \dots$. Определенная нами система дифференциальных уравнений с указанными начальными условиями имеет, очевидно, следующее решение:

$$f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Возвращаясь к исходным функциям $p_k(t) = e^{-\lambda t} f_k(t)$, получаем известное распределение Пуассона:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots$$

6.2 Однолинейная система обслуживания с отказами

Предположим, что на некоторую систему обслуживания поступает пуассоновский поток требований с параметром λ_0 (различные требования поступают независимо одно от другого и вероятность поступления отдельного требования в малом промежутке времени Δt есть $\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$). Пусть на обслуживание каждого отдельного требования затрачивается случайное время τ , распределенное по показательному закону с параметром λ_1 , т. е.

$$\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-\lambda_1 t}.$$

Рассмотрим два состояния системы обслуживания: 0 — система свободна, 1 — система занята. Будем считать, что если система занята, то поступающие в это время требования получают отказ и уходят из сферы обслуживания.

Предположим, что система в некоторый момент времени t_0 находится в состоянии 0. В силу независимости поступления требований, ее дальнейшее поведение не зависит от предшествующих обстоятельств, и, в частности, за время Δt она с вероятностью $\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$ переходит в состояние 1. Предположим, что в момент t_1 система находится в состоянии 1. Если обозначить τ_1 случайный момент перехода из 1 в 0 (момент окончания обслуживания), то, согласно свойству показательного закона распределения, для времени обслуживания имеет место следующее равенство:

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t | \tau_1 > t_1) = e^{-\lambda_1(t-t_1)}.$$

Видно, что переход в состояние 0 и дальнейшее поведение системы не зависят от ее поведения до момента t_1 . В частности, в последующем за t_1 промежутке времени Δt система с вероятностью $\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ переходит в состояние 0. Таким образом, эволюция системы описывается марковским процессом с двумя состояниями 0, 1 и соответствующими плотностями перехода λ_0, λ_1 .

Рассмотрим переходные вероятности $p_{ij}(t)$. В нашем случае $p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$, $p_{10}(t) = 1 - p_{11}(t)$ и дифференциальные уравнения (33) имеют вид

$$\begin{aligned} p'_{00}(t) + (\lambda_0 + \lambda_1)p_{00}(t) &= \lambda_1, \\ p'_{11}(t) + (\lambda_0 + \lambda_1)p_{11}(t) &= \lambda_0. \end{aligned}$$

Решая их, получаем, что

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}\right) e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}, \\ p_{11}(t) &= \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}\right) e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)t} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}. \end{aligned}$$

6.3 Ветвящиеся процессы

Предположим, что имеет некоторая совокупность частиц, которые с течением времени превращаются в частицы такого же типа, причем этот процесс «размножения» обладает следующим свойством: каждая из исходных частиц за промежутки времени t независимо от других частиц и от обстоятельств, предшествовавших исходному моменту, с одинаковой для всех частиц вероятностью $p_n(t)$ переходит в группу из n частиц.

Обозначим $\xi(t)$ число частиц, имеющихся к моменту времени t . Очевидно, эволюция величины $\xi(t)$ представляет собой однородный марковский процесс; будем называть его *ветвящимся процессом*, заметим, что описанная модель может быть использована при описании многих реальных процессов: фотохимические реакции, ядерные процессы и др.

Пусть в некоторый исходный момент времени s , скажем $s = 0$, имеется ровно k частиц. Обозначим $\xi_i(t)$ число частиц, порожденных i -й частицей, $i = 1, \dots, k$, через время t . Тогда общее число частиц через время t будет

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \dots + \xi_k(t). \quad (35)$$

Здесь случайные величины $\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)$ независимы между собой и имеют одно и то же распределение вероятностей:

$$\mathbf{P}(\xi_i(t) = n) = p_n(t), \quad n = 0, 1, \dots$$

Предположим, что отдельная частица за малый промежуток времени Δt с вероятностью

$$p_n(\Delta t) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t), \quad n \neq 1,$$

превращается в n новых частиц, а с вероятностью

$$p_1(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

остаётся неизменной. Пусть, далее, $\lambda_1 = -\lambda$, $\sum_k \lambda_k = 0$ и переходные вероятности $p_n(t) = p_{1n}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова (см. (32))

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \sum_k \lambda_k p_{kn}(t), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $p_{kn}(t)$ есть переходные вероятности марковского (ветвящегося) процесса $\xi(t)$: $p_{kn}(t)$ есть вероятность того, что k частиц за время t переходят в n частиц.

Введем производящие функции

$$\begin{aligned} F(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, \\ F_k(t, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t) z^n. \end{aligned} \quad (36)$$

При каждом z , $|z| < 1$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{d}{dt} p_n(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n = \sum_k \lambda_k \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t) z^n,$$

что дает следующее дифференциальное уравнение для производящей функции $F(t, z)$:

$$\frac{d}{dt} F(t, z) = \sum_k \lambda_k F_k(t, z). \quad (37)$$

Определенные формулами (36) функции $F(t, z)$ и $F_k(t, z)$ таковы, что при фиксированном z представляют собой математические ожидания

$$F(t, z) = \mathbf{E}_z z^{\xi_i(t)}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$F_k(t, z) = \mathbf{E}_z z^{\xi(t)},$$

где $\xi_i(t)$ — число частиц, порождаемых i -й частицей за время t , и $\xi(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i(t)$. Поскольку все величины $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, k$, независимы, то

$$\mathbf{E}_z z^{\xi_1(t) + \dots + \xi_k(t)} = \mathbf{E}_z z^{\xi_1(t)} \dots \mathbf{E}_z z^{\xi_k(t)},$$

что дает следующее соотношение для рассматриваемых производящих функций:

$$F_k(t, z) = (F(t, z))^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Поскольку $F_0(t, z) = 1$, дифференциальное уравнение для производящей функции $F(t, z)$ можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} F(t, z) = \sum_k \lambda_k F^k(t, z). \quad (39)$$

Будем считать, что заданными параметрами ветвящегося процесса $\xi(t)$ являются плотности перехода λ_k , $k = 0, 1, \dots$. Введем функцию

Будем считать, что заданными параметрами ветвящегося процесса $\xi(t)$ являются плотности перехода λ_k , $k = 0, 1, \dots$. Введем функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x^k. \quad (40)$$

Она является аналитической при $0 < x < 1$, и формула (40) дает ее разложение в степенной ряд. Согласно равенству (39), производящая функция $F(t, z)$ является решением дифференциального уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (41)$$

Поскольку $F(0, z) = z$, производящая функция $F(t, z)$ при каждом z , $0 \leq z \leq 1$, совпадает с решением $x = x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющим начальному условию $x(0) = z$.

Вместо уравнения (41) удобно рассмотреть эквивалентное ему дифференциальное уравнение для обратной к $x = x(t)$ функции $t = t(x)$:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}.$$

Решение этого уравнения, функция $t = t(x)$, имеет вид

$$t = \int_z^x \frac{du}{f(u)}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (42)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (41), в котором функция $f(x)$ определяется формулой (40). Из этой формулы видно, что

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\lambda_k x^{k-2} \text{ при } 0 \leq x < 1,$$

так что функция $f(x)$ является выпуклой, а ее производная $f'(x)$ монотонно возрастает на интервале $0 \leq x \leq 1$. Значение $x = 1$ является корнем уравнения $f(x) = 0$, так как $\sum_k \lambda_k = 0$. В силу выпуклости $f(x)$ может быть еще лишь один корень $x = \alpha$ этого уравнения.

Предположим, что имеется корень $x = \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, который определяет особую интегральную кривую $x(t) = \alpha$ рассматриваемых дифференциальных уравнений. Возьмем интегральную кривую (42), проходящую через точку $t = 0$, $x = z$, $0 \leq z < \alpha$:

$$t = \int_z^x \frac{du}{f(u)}.$$

Поскольку производная $f'(\alpha)$ конечна и при $x \sim \alpha$ функция $f(x)$ имеет вид $f(x) \sim f'(\alpha)(x - \alpha)$, то вдоль интегральной кривой значение $t = \int_z^x \frac{du}{f(u)}$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow \alpha$, причем сама кривая нигде не пересекает другую интегральную кривую $x(t) \equiv \alpha$. На интервале $0 \leq x \leq \alpha$ функция $f(x)$ является положительной, и, следовательно, интегральная кривая $x = x(t)$ монотонно возрастает при $t \rightarrow \infty$, оставаясь ограниченной значением $x = \alpha$. Как ограниченная монотонная функция $x(t)$ имеет некоторый предел $\beta = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, $z \leq \beta \leq \alpha$.

Но при $x \rightarrow \beta$ функция $f(x)$ имеет своим пределом $f(\beta)$:

$$f(\beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t).$$

Ясно, что значение $f(\beta)$ должно быть равно нулю, так как в противном случае функция

$$x(t) = z + \int_0^t f(x(s)) ds$$

будет неограниченно возрастать при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, β является корнем уравнения $f(x) = 0$ и совпадает с α , т. е. $\beta = \alpha$. Таким образом, все интегральные кривые $x = x(t)$, при $t = 0$ проходящие через точки $x = z$, $0 \leq z < \alpha$, монотонно возрастают при $t \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \alpha. \quad (43)$$

Вполне аналогично поведение интегральных кривых, проходящих при $t = 0$ через точки $x = z$, $\alpha < z < 1$ ($0 \leq \alpha < 1$). Разница будет лишь в том, что $x(t)$ монотонно убывает, поскольку производная $x'(t) = f(x(t))$ отрицательна ($f(x) \leq 0$ при $\alpha < x < 1$).

Случай $z = 1$ нуждается в особом рассмотрении. Ему всегда отвечает интегральная кривая вида $x(t) \equiv 1$.

Если для некоторого x_0 , $\alpha < x_0 < 1$,

$$\int_{x_0}^1 \frac{dx}{f(x)} = -\infty \quad (44)$$

(это выполняется, когда $0 < f'(1) < \infty$), то интегральная кривая вида

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}, \quad 0 \leq x < 1,$$

проходящая через точку (t_0, x_0) , при $x \rightarrow 1$ неограниченно убывает:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)} \rightarrow -\infty.$$

Это говорит о том, что, каково бы ни было $t_0 > 0$, при некотором $x = z$, $0 \leq z < 1$, имеет место равенство

$$t(z) = t_0 + \int_{x_0}^z \frac{du}{f(u)} = 0.$$

Все интегральные кривые пересекают ось $t = 0$ в некоторой точке $(0, z)$, где $0 \leq z < 1$, и, следовательно, $x(t) \equiv 1$ является единственной интегральной кривой, проходящей через точку $(0, 1)$.

Если

$$\int_{x_0}^1 \frac{dx}{f(x)} > -\infty \quad (45)$$

то при достаточно большом $t_0 > 0$ интегральная кривая $t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$ переходит в интегральную кривую $x(t) \equiv 1$, касаясь ее в некоторой точке $(\tau, 1)$, где

$$\tau = t_0 + \int_{x_0}^1 \frac{dx}{f(x)}.$$

В этом случае через точку $(0, 1)$ проходит целое семейство интегральных кривых $x_\tau(t)$, каждая из которых отвечает своему значению $\tau \geq 0$. Среди них есть интегральная кривая $x_0(t)$, отвечающая значению $\tau = 0$ и обладающая тем свойством, что кривая $x_0(t)$ лежит ниже всех остальных интегральных кривых $x_\tau(t)$:

$$x_0(t) \leq x_\tau(t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Это объясняется тем, что внутри области $0 \leq x < 1$, $0 < t < \infty$ решение рассматриваемого дифференциального уравнения единственно и интегральные кривые в этой области не пересекаются друг с другом. Легко видеть также, что интегральная кривая $x_0(t)$ является предельной для других интегральных кривых $x(t, z)$, лежащих ниже ее и проходящих через соответствующие точки $(0, z)$, где $0 \leq z < 1$:

$$x_0(t) = \lim_{z \rightarrow 1} x(t, z). \quad (46)$$

6.4 Эффе́кты выро́ждения и взрыва

Говоря ниже о ветвящемся процессе $\xi(t)$, $t \geq 0$, будем лишь считать, что производящая функция $F(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k$ (где $p_k(t) = \mathbf{P}(\xi(t) = k)$ при условии, что $\xi(0) = 1$) как функция от t совпадает с решением $x(t, z)$ дифференциального уравнения (41) с начальным условием $x(0, z) = z$. Приведенный выше анализ этого дифференциального уравнения позволяет сделать следующие выводы относительно самого ветвящегося процесса $\xi(t)$.

Вообще говоря, имеется положительная вероятность того, что через некоторое время t не останется ни одной частицы, конечно, этого не может случиться, если $\lambda_0 = 0$, т. е. если частицы не могут исчезать, а могут лишь размножаться. Если в исходный момент $t = 0$ имеется одна частица, то эта вероятность есть $p_0(t) = F(t, 0)$. Если вначале имеется k частиц, то эта вероятность есть $p_{k0}(t) = F^k(t, 0) = p_0^k(t)$.

Как функция от t вероятность $p_0(t)$ является решением дифференциального уравнения (41), отвечающим параметру $z = 0$:

$$p_0'(t) = f(p(t)), \quad p_0(0) = 0.$$

Выше было показано, что это решение при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к некоторому значению $p_0 = \alpha$, являющемуся наименьшим корнем уравнения $f(x) = 0$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \alpha. \quad (47)$$

Таким образом, $p_0 = \alpha$ есть вероятность вырождения ветвящегося процесса $\xi(t)$ (вероятность того, что к некоторому моменту времени не остается ни одной частицы).

Если функция $f(x)$ является положительной на интервале $0 \leq x < 1$, то вероятность вырождения ветвящегося процесса $\xi(t)$ равна 1.

Рассмотрим так называемое явление взрыва, когда образуется бесконечно много частиц. Вероятность того, что взрыв произойдет до момента t (если вначале была одна частица), есть

$$p_{\infty}(t) = 1 - \mathbf{P}(\xi(t) < \infty) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1 - \lim_{z \rightarrow 1} F(t, z).$$

В случае, когда $x(t) \equiv 1$ является единственной интегральной кривой дифференциального уравнения (41), проходящей через точку $(0, 1)$, предел $\lim_{z \rightarrow 1} F(t, z)$, очевидно, равен 1. Следовательно, при условии (44) $p_{\infty}(t) = 0$ для любого t , так что возможность взрыва исключена. При условии же (45) интегральные кривые $x(t, z)$ при $z \rightarrow 1$ монотонно сходятся к описанной выше функции $x_0(t)$ (см. соотношение (46)), так что вероятность взрыва есть

$$p_{\infty}(t) = 1 - x_0(t) > 0. \quad (48)$$

7 Некоторые процессы массового обслуживания и случайные блуждания (процессы восстановления)

Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность положительных независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение вероятностей, и

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Будем условно считать, что имеется некоторый прибор со сроком службы ξ_1 ; после выхода его из строя (через случайное время ξ_1) он заменяется новым прибором, который, в свою

очередь, выходит из строя через случайное время ξ_2 , после чего заменяется следующим новым прибором и т. д. При такой интерпретации величины S_n , $n = 1, 2, \dots$, естественно назвать моментами восстановления.

В рассматриваемом процессе восстановления S_n , $n = 1, 2, \dots$, нас будут интересовать, главным образом, величины $\nu(t)$ — число восстановлений в промежутке времени $[0, t]$ и $\eta(t)$ — оставшийся срок службы работающего в момент t очередного прибора.

Будем предполагать, что восстановления происходят в дискретные моменты времени $t = kh$, кратные некоторому $h > 0$ (скажем, $h = 1$). В связи с этим нужно уточнить, в какой момент заменяется испорченный прибор. Рассматривая лишь целочисленные значения $t \geq 0$, будем считать, что если прибор испортился в промежутке $(t, t + 1]$, то он заменяется новым прибором в момент времени $t + 1$ (срок службы отдельного прибора может быть равен $1, 2, \dots$).

Итак, пусть рассматриваемые величины ξ_k , $k = 1, 2, \dots$, принимают целочисленные значения $x = 1, 2, \dots$ с соответствующими вероятностями $P(x)$, $\sum_{x=1}^{\infty} P(x) = 1$.

Обозначим $\xi(t)$ время работы очередного прибора к моменту t :

$$\xi(t) = t - S_{\nu(t)}. \quad (49)$$

К следующему моменту времени $t + 1$ прибор либо выходит из строя и заменяется новым прибором — в этом случае $\xi(t + 1) = 0$, либо продолжает работать — в этом случае $\xi(t + 1) = \xi(t) + 1$. При условии, что прибор проработал время x , он выходит из строя через единицу времени и заменяется новым прибором с условной вероятностью

$$q(x) = \mathbf{P}(\xi_1 = x + 1 | \xi_1 > x) = \frac{P(x + 1)}{\sum_{y=x+1}^{\infty} P(y)}, \quad x = 0, 1, \dots \quad (50)$$

Случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой цепь Маркова рассмотренного ранее типа, когда из состояния x возможен переход либо в следующее состояние $x + 1$, что происходит с вероятностью

$$p(x) = 1 - q(x) = \frac{G(x + 1)}{G(x)}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad (51)$$

либо в начальное состояние 0 , что происходит с вероятностью $q(x)$, определенной формулой (50); в выражении (51) функция $G(x) = \sum_{y=x+1}^{\infty} P(y)$ означает вероятность того, что срок службы прибора будет больше x . Очевидно, попадание в состояние 0 при некотором t ($\xi(t) = 0$) означает восстановление в момент t ; время возвращения в состояние 0 есть не что иное, как время службы отдельного прибора; число попаданий в состояние 0 на интервале $(s, t]$ равно числу восстановлений за промежуток времени от s до t .

Как было установлено для нашей марковской цепи $\xi(t)$ с состояниями $x = 0, 1, \dots$, при условии, что среднее время μ возвращения в состояние 0 конечно, имеется стационарное распределение вероятностей:

$$p^*(0) = \frac{1}{\mu}; \quad p^*(x) = \frac{p(0)p(1)\dots p(x-1)}{\mu}, \quad x = 1, 2, \dots,$$

которое для переходных вероятностей $p(x) = \frac{G(x+1)}{G(x)}$, $x = 0, 1, \dots$, имеет вид

$$p^*(x) = \frac{G(x)}{\mu}, \quad x = 0, 1, \dots; \quad (52)$$

при этом среднее время возвращения $\mu = \sum_{x=0}^{\infty} G(x)$ совпадает со средним временем службы отдельного прибора:

$$\sum_{x=1}^{\infty} xP(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x(G(x-1) - G(x)) = \sum_{x=0}^{\infty} G(x) = \mu. \quad (53)$$

Напомним, что $G(x)$ есть вероятность того, что срок службы прибора больше x ; предположим, что $G(x)$ убывает при $x \rightarrow \infty$ достаточно быстро, а именно,

$$G(x+1) \leq \alpha G(x), \quad (54)$$

где $\alpha < 1$. В этом случае все переходные вероятности $q(x) = 1 - \frac{G(x+1)}{G(x)}$ не меньше $1 - \alpha > 0$, и, следовательно, коэффициент эргодичности такой марковской цепи будет положительным:

$$k(1) \geq 1 - \alpha.$$

При этом условии вероятности $p_t(x) = \mathbf{P}(\xi(t) = x)$ при $t \rightarrow \infty$ сходятся к стационарным вероятностям $p^*(x)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(x) = \frac{G(x)}{\mu}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad (55)$$

и, более того, имеет следующая оценка скорости сходимости (см. теорему 4):

$$\left| p_t(x) - \frac{G(x)}{\mu} \right| \leq \frac{1}{\alpha} e^{-t \ln \frac{1}{\alpha}} = \alpha^{t-1}. \quad (56)$$

Рассмотрим среднее число восстановлений за время от t до $t+s$ (иначе, среднее число попаданий в состояние 0 за это время), которое есть

$$n(t+s) - n(t) = \mathbf{E}(\nu(t+s) - \nu(t)) = \sum_{u=t+1}^{t+s} p_u(0)$$

(мы обозначили ранее $\nu(t)$ число восстановлений на промежутке времени от 0 до t . Ясно, что для любого ограниченного интервала

$$n(t+s) - n(t) \rightarrow \frac{s}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (57)$$

поскольку $p_u(0) \rightarrow \frac{1}{\mu}$ и, более того, как следует из неравенства (56),

$$\left| (n(t+s) - n(t)) - \frac{1}{\mu} s \right| \leq s \alpha^{t-1}. \quad (58)$$

Соотношение (57) показывает, что при длительном процессе восстановления среднее число восстановлений за время s приблизительно равно величине $\frac{s}{\mu}$, где μ — среднее время службы отдельного прибора.

Мы условились считать, что если прибор работает в момент времени t (кратный h), то он заменяется не раньше чем через время h , $h = 1$. Примем за время, которое прибор еще будет работать после момента t , величину

$$\eta(t) = S_{\nu(t)+1} - h - t, \quad (59)$$

где $S_{\nu(t)+1}$ — следующий за t момент восстановления (момент замены рассматриваемого прибора).

Интуитивно ясно, что при длительном процессе восстановления ($t \rightarrow \infty$) распределение вероятностей величины $\eta(t)$ должно быть приблизительно таким же, как и величины $\xi(t) = t - S_{\nu(t)}$.

Основанием к этому служит «обратимость» во времени процесса восстановления — моменты восстановления можно считать в обратном порядке (число восстановлений $n =$

$\nu(t)$ неограниченно растет, а величины $S_1 = \xi_1$, $S_2 = \xi_1 + \xi_2, \dots, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $S'_n = \xi_n$, $S'_2 = \xi_n + \xi_{n-1}, \dots, S'_n = \xi_n + \dots + \xi_1$ имеют одинаковое совместное распределение).

Отметим, что в случае, когда время ожидания поломки прибора имеет показательное распределение вероятностей

$$G(x) = e^{-\lambda x}, \quad x = 0, 1, \dots,$$

уже с самого начала

$$\mathbf{P}(\eta(t) = x) = \frac{G(x)}{\mu}, \quad x = 0, 1, \dots \quad \left(\mu = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \right).$$

Не ограничиваясь сделанным выше замечанием, дадим строгое обоснование того факта, что величина $\eta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет предельное распределение вероятностей

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\eta(t) = x) = \frac{G(x)}{\mu}, \quad x = 0, 1, \dots \quad (60)$$

Положив $S_0 = 0$, имеем

$$\mathbf{P}(\eta(t) = x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \leq t, S_{n+1} = t + 1 + x),$$

где по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n \leq t, S_{n+1} = t + 1 + x) &= \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{P}(S_{n+1} = t + 1 + x | S_n = s) \mathbf{P}(S_n = s) = \\ &= \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{P}(\xi_{n+1} = t + 1 + x - s) \mathbf{P}(S_n = s) = \sum_{0 \leq s \leq t} P(t + 1 + x - s) \mathbf{P}(S_n = s). \end{aligned}$$

Видно, что

$$\mathbf{P}(\eta(t) = x) = \sum_{0 \leq s \leq t} P(t - s + x + 1) p_s(0) = \sum_{0 \leq u \leq t} P(u + 1 + x) p_{t-u}(0), \quad (61)$$

поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = s) = \mathbf{P}(\xi(s) = 0) = p_s(0)$$

есть вероятность того, что момент s является моментом восстановления. Принимая во внимание, что при $t \rightarrow \infty$

$$\sum_{0 \leq u \leq t} P(u + 1 + x) \rightarrow G(x), \quad p_{t-u}(0) \rightarrow \frac{1}{\mu},$$

из равенства (61) получаем формулу (60).

Обратимся теперь к числу восстановлений $\nu(t + s) - \nu(t)$ на временном промежутке $(t, t + S]$. Очевидно,

$$\mathbf{P}(\nu(t + s) - \nu(t) = 0) = \mathbf{P}(\eta(t) \geq s), \quad (62)$$

и для $n = 1, 2, \dots$ условная вероятность того, что за временной промежуток $(t, t + s]$ будет n восстановлений при условии, что первое восстановление происходит в момент $t + u + h$, есть

$$\mathbf{P}(\nu(t + s) - \nu(t) = n | \eta(t) = u) = \begin{cases} \mathbf{P}(\nu(t + s) - \nu(t + u + 1) = n - 1) & \text{при } u < s; \\ 0 & \text{при } u \geq s. \end{cases}$$

Используя формулу полной вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(\nu(t+s) - \nu(t) = n) = \sum_{0 \leq u < s} \mathbf{P}(\nu(t+s) - \nu(t+u+1) = n-1) \mathbf{P}(\eta(t) = u),$$

что вместе с формулой (62) дает нам рекуррентные соотношения для распределения вероятностей числа восстановлений на любом промежутке $(t, t+s]$. В частности, для предельных вероятностей

$$P_n(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\nu(t+s) - \nu(t) = n) \quad (63)$$

можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} P_0(s) &= \frac{1}{\mu} \sum_{u \geq s} G(u), \\ P_n(s) &= \frac{1}{\mu} \sum_{0 \leq u < s} P_{n-1}(s-u-1) G(u), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (64)$$

Отметим, что распределения вероятностей величин

$$\xi(t) = t - S_{\nu(t)}, \quad \eta(t) = S_{\nu(t)+1} - t - h, \quad \nu(t+s) - \nu(t) \quad (65)$$

будут совпадать с предельными стационарными распределениями (описанными формулами (55), (60), (64)), если первый прибор к начальному моменту $t = 0$ уже проработал некоторое случайное время $\xi(0)$, где случайная величина $\xi(0)$ имеет стационарное распределение $\mathbf{P}(\xi(0) = x) = \frac{G(x)}{\mu}$, $x = 0, 1, \dots$

7.1 Последовательности сумм независимых случайных величин. Распределение максимума

В этом пункте мы рассмотрим некоторые общие свойства последовательности сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (66)$$

независимых случайных величин ξ_k с одинаковым распределением вероятностей. Для наглядности можно представить себе, что некоторая частица случайно блуждает по действительной прямой, за каждый шаг смещаясь на соответствующую величину ξ_n и тогда $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$ ($S_0 = 0$), будет траекторией этого случайного блуждания. Будем предполагать, что величины ξ_1, ξ_2, \dots имеют отличное от нуля математическое ожидание a , считая, что

$$a = \mathbf{E}\xi_1 < 0.$$

Ниже мы получим некоторые результаты о распределении вероятностей максимума

$$\zeta = \max(S_0, S_1, \dots), \quad (67)$$

Положим

$$Z_0 = 0, \quad Z_1 = \xi_2, \quad Z_2 = \xi_2 + \xi_3, \dots$$

и

$$\eta = \max(Z_0, Z_1, \dots).$$

Ясно, что случайная величина η имеет такое же распределение вероятностей, как и случайная величина ζ . Очевидно, при любом $z \geq 0$ событие $\{\zeta \leq z\}$ происходит тогда и только тогда, когда $\xi_1 \leq z$ и $\eta \leq z - \xi_1$. Поскольку величина η не зависит от ξ_1 , при каждом фиксированном $\xi_1 = x$ ($x \leq z$) имеем

$$\mathbf{P}(\eta \leq z - \xi_1 | \xi_1) = F_\zeta(z - \xi_1),$$

где $F_\zeta = \mathbf{P}(\zeta \leq z)$ — функция распределения величины ζ и, таким образом,

$$\mathbf{P}(\zeta \leq z | \xi_1) = \begin{cases} F_\zeta(z - \xi_1) & \text{при } \xi_1 \leq z; \\ 0 & \text{при } \xi_1 > z. \end{cases}$$

Учитывая, что для неотрицательной величины ζ функция распределения равна нулю при $z < 0$, полученное выше соотношение можно записать в виде

$$\mathbf{P}(\zeta \leq z | \xi_1) = F_\zeta(z - \xi_1)$$

Используя формулу полной вероятности, в итоге получаем следующее уравнение для функции $F_\zeta(z)$:

$$F_\zeta(z) = \mathbf{E}F_\zeta(z - \xi_1), \quad z \geq 0. \quad (68)$$

Покажем, что с положительной вероятностью $q > 0$ осуществляется событие $\{\zeta = 0\}$:

$$F_\zeta(0) = q > 0 \quad (69)$$

(т. е. частица при выходе из точки $x = 0$ с вероятностью $q \neq 0$ никогда не попадает на положительную полуось $x > 0$).

Действительно, предположим противное. Обозначим z_0 нижнюю грань тех z , при которых $F_\zeta(z) > 0$; согласно нашему предположению, либо $z_0 > 0$, либо $z_0 = 0$ и $F_\zeta(0) = 0$. Если $z_0 > 0$, то для любого z , $0 \leq z < z_0$, из уравнения (68) получаем

$$F_\zeta(z) = \mathbf{E}F_\zeta(z - \xi_1) = 0;$$

следовательно, $F_\zeta(z - \xi_1) = 0$ и $z - \xi_1 \leq z_0$, $\xi_1 \geq z - z_0$ с вероятностью 1 при всех z , $0 \leq z < z_0$, откуда получаем, что $\xi_1 \geq 0$, а это противоречит условию $a = \mathbf{E}\xi_1 < 0$. К такому же противоречию приводят аналогичные рассуждения в предположении, что $z_0 = 0$ и $F_\zeta(0) = 0$.

Итак, с вероятностью $p = 1 - q$ величина ζ принимает строго положительное значение. Это говорит о том, что в рассматриваемом случайном блуждании с вероятностью p частица рано или поздно попадает на положительную часть действительной прямой; обозначим ξ_1^* ее положение при первом попадании в интервал $(0, \infty)$. Величина ξ_1^* определена лишь с вероятностью p :

$$\mathbf{P}(\xi_1^* \in (0, \infty)) = p;$$

доопределим величину ξ_1^* , положив $\xi_1^* = 0$ при $\zeta = 0$.

Согласно определению, $\xi_1^* > 0$ есть значение первой строго положительной величины в последовательности сумм $S_n - S_0$, $n = 1, 2, \dots$ ($S_0 = 0$), порядковый номер которой обозначим ν_1 : $\xi_1^* = S_{\nu_1} - S_0$. При условии $\{\xi_1^* > 0\}$ рассмотрим новую последовательность сумм

$$S_n - S_{\nu_1} = \sum_{k=\nu_1+1}^n \xi_k, \quad n = \nu_1 + 1, \dots$$

В этой последовательности с вероятностью $p = 1 - q$ встретится (впервые на некотором шаге ν_2) строго положительная величина $\xi_2^* = S_{\nu_2} - S_{\nu_1}$; положив $\xi_2^* = 0$ в случае, если

$S_n - S_{\nu_1} \leq 0$, $n = \nu_1 + 1, \dots$, мы получим случайную величину ξ_2^* , которая не зависит от ξ_1^* (при условии $\xi_1^* > 0$) имеет одинаковое с ξ_1^* распределение вероятностей. При условии $\{\xi_1^* > 0, \xi_2^* > 0\}$ аналогичным образом определяем $\xi_3^* = S_{\nu_3} - S_{\nu_2}$ и т. д., при условии $\{\xi_1^* > 0, \dots, \xi_m^* > 0\}$ определяем $\xi_{m+1}^* = S_{\nu_{m+1}} - S_{\nu_m}$ как первую строго положительную величину в соответствующей последовательности сумм

$$S_n - S_{\nu_m} = \sum_{k=\nu_{m+1}}^n \xi_k, \quad n = \nu_m + 1, \dots$$

если такая величина имеется, и $\xi_{m+1}^* = 0$ в противном случае; ясно, что ξ_{m+1}^* не зависит от ξ_1^*, \dots, ξ_m^* и имеет одинаковое с ξ_1^* распределение вероятностей (уточним, что имеется в виду условное распределение величины ξ_{m+1}^* при условии $\xi_1^* > 0, \dots, \xi_m^* > 0$).

Положим

$$S_0^* = 0, \quad S_n^* = \sum_{k=1}^n \xi_k^*, \quad n = 1, 2, \dots \quad (70)$$

Очевидно,

$$\zeta = \max(S_0, S_1, \dots) = \max(S_0^*, S_1^*, \dots).$$

Согласно определению величин ξ_k^* , если $\xi_m^* = 0$ при некотором $m \geq 1$, то $\xi_n^* = 0$ при всех $n \geq m$. Обозначим ν число всех строго положительных величин среди ξ_1^*, ξ_2^*, \dots . Очевидно,

$$\mathbf{P}(\nu \geq n + 1 | \nu \geq n) = \mathbf{P}(\nu \geq 1) = \mathbf{P}(\xi_1^* > 0) = \mathbf{P}(\zeta > 0) = p,$$

откуда получаем, что

$$\mathbf{P}(\nu \geq n + 1) = \mathbf{P}(\nu \geq n)p = \dots = p^{n+1}$$

и

$$\mathbf{P}(\nu = n) = qp^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (71)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta \in (0, x]) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu = n, S_n^* \in (0, x]) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n^* \in (0, x] | \nu = n) qp^n. \end{aligned} \quad (72)$$

Напомним теперь, что при условии $\nu \geq n$ величины $S_n^* = \sum_{k=1}^n \xi_k^*$ и ξ_k^* , $k > n$, являются независимыми, и, следовательно, при указанном условии S_n^* не зависит от величины $\nu - n$, равной числу всех строго положительных величин среди ξ_k , $k > n$. Поэтому при любом значении $\nu - n \geq 0$ условное распределение величины S_n^* одно и то же — оно совпадает с условным распределением относительно $\nu \geq n$, и, в частности,

$$\mathbf{P}(S_n^* \in (0, x] | \nu = n) = \mathbf{P}(S_n^* \in (0, x] | \nu \geq n). \quad (73)$$

Положим

$$F(x) = \begin{cases} \mathbf{P}(\xi_1^* \in (0, x] | \xi_1^* > 0) & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

и определим функцию F^{n*} как n -кратную свертку исходной функции $F(x)$, точнее,

$$\begin{aligned} F^{1*}(x) &= F(x), \\ F^{n*}(x) &= \mathbf{E}(F^{(n-1)*}(x - \xi_1^*) | \xi_1^* > 0) = \mathbf{E}(F(x - S_{n-1}^*) | \nu \geq n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (74)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_1^* \in (0, x] | \nu \geq 1) &= \mathbf{P}(\xi_1^* \in (0, x] | \xi_1^* > 0) = F^{1*}(x), \\ \mathbf{P}(S_n^* \in (0, x] | \nu \geq n) &= \mathbf{P}(\xi_n^* \in (0, x - S_{n-1}^*] | \nu \geq n) = \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{P}(\xi_n^* \in (0, x - S_{n-1}^*] | \nu, S_{n-1}^*) | \nu \geq n) = \\ &= \mathbf{E}(F(x - S_{n-1}^*) | \nu \geq n) = F^{n*}(x), \quad n > 1.\end{aligned}$$

В итоге мы получаем из формул (72) – (74), что

$$\mathbf{P}(\zeta \in (0, x]) = q \sum_{n=1}^{\infty} p^n F^{n*}(x), \quad (75)$$

откуда

$$F_{\zeta}(x) = q + \mathbf{P}(\zeta \in (0, x]) = q \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n F^{n*}(x) \right). \quad (76)$$

Выведем одно полезное соотношение, которое в случае показательного распределения исходных величин ξ_1, ξ_2, \dots позволит получить явные выражения для распределения вероятностей величины.

Именно, в исходном случайном блуждании (66) величина ξ_1^* означает положение частицы при первом попадании на интервал $(0, \infty)$: $\xi_1^* = S_{\tau_1}$, где τ_1 – число шагов до первого попадания на интервал $(0, \infty)$. Очевидно, для всякого $x \geq 0$

$$\mathbf{P}(\tau_1 = n, \xi_1^* > x) = \mathbf{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0, S_n > x),$$

и при фиксированных $S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1}$ событие $\{\tau_1 = n, \xi_1^* > x\}$ означает, что $\xi_n = S_n - S_{n-1} > x - S_{n-1}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\tau_1 = n, \xi_1^* > x | S_1, \dots, S_{n-1}) = G_{\xi_1}(x - S_{n-1}) I(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0),$$

где $G_{\xi_1}(x) = 1 - F_{\xi_1}(x)$, $F_{\xi_1}(x)$ – функция распределения величины ξ_1 , $I(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0)$ – индикатор события $\{S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0\}$. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(\tau_1 = n, \xi_1^* > x) = \mathbf{E}(G_{\xi_1}(x - S_{n-1}) I(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (x \geq 0). \quad (77)$$

Пример (показательное распределение). Пусть каждая из величин ξ_1, ξ_2, \dots на интервале $(0, \infty)$ распределена по показательному закону:

$$G_{\xi_1}(x) = \mathbf{P}(\xi_1 > x) = Ae^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad (78)$$

где $A = \mathbf{P}(\xi_1 > 0)$. В этом случае соотношение (77), в котором S_{n-1} фигурирует лишь при условии $S_{n-1} \leq 0$, дает нам следующие равенства:

$$\mathbf{P}(\tau_1 = n, \xi_1^* > x) = \mathbf{E}(e^{-\lambda x + \lambda S_{n-1}} I(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0)) = B_n e^{-\lambda x},$$

где

$$B_n = \mathbf{E}(e^{\lambda S_{n-1}} I(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-1} \leq 0))$$

суммируя эти равенства по всем $n = 1, 2, \dots$, получим, что

$$\mathbf{P}(\xi_1^* > x) = p e^{-\lambda x}, \quad (79)$$

где постоянная $p = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ есть

$$p = \mathbf{P}(\xi_1^* > 0) = 1 - q.$$

Рассмотрим подробнее случай непрерывно распределенных величин ξ_1, ξ_2, \dots (для дискретных величин результаты будут совершенно аналогичны). Согласно формуле (79), при плотности вероятности

$$p_{\xi_1}(x) = A\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

величина ξ_1^* при условии $\xi_1^* > 0$ будет распределена по показательному закону с плотностью

$$p^*(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0. \quad (80)$$

Как мы знаем, сумма независимых величин с одним и тем же показательным распределением (80) имеет плотность вероятности

$$p^{n*}(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Плотность $p^{n*}(x)$ есть производная от $F^{n*}(x)$ и, как легко видеть,

$$m(x) = p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p\lambda x)^n}{n!} = p\lambda e^{-\lambda(1-p)x}, \quad x > 0$$

есть производная функции $M(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(x)$, $M(0) = 1$; следовательно,

$$M(x) = 1 + \int_0^x m(y) dy = \frac{1}{q} (1 - p e^{-\lambda q x}), \quad q = 1 - p.$$

В итоге из (76) получаем, что функция распределения максимума $\zeta = \max(0, S_1, S_2, \dots)$ имеет вид

$$F_{\zeta}(x) = 1 - (1 - q)e^{-\lambda q x}, \quad x \geq 0, \quad (81)$$

где вероятность $q = F_{\zeta}(0)$ может быть определена из уравнения (68):

$$q = \int_{-\infty}^0 (1 - (1 - q)e^{\lambda q x}) p_{\xi_1}(x) dx. \quad (82)$$

В случае, когда при $x \leq 0$ плотность вероятности имеет тот же показательный тип, что и при $x > 0$, а именно,

$$p_{\xi_1}(x) = B\mu e^{\mu x}, \quad x < 0, \quad (83)$$

из уравнения (82) легко выводим, что $q = B \frac{\lambda + \mu}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda}$; учитывая равенство $B = \mathbf{P}(\xi_1 \leq 0) = 1 - A$, имеем

$$q = B - A \frac{\mu}{\lambda}. \quad (84)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $\mathbf{E}\xi_1 = -\frac{B}{\mu} + \frac{A}{\lambda}$; и непосредственно видно, что при $\mathbf{E}\xi_1 < 0$ указанное значение $q = -\mu \mathbf{E}\xi_1$ строго положительно.

8 Случайные процессы в линейных системах

Мы называем систему линейной, если под воздействием внешних возмущений $y(s)$, $t_0 \leq s \leq t$, ее состояние в момент времени t (при состоянии покоя в момент t_0) есть

$$x(t) = \int_{t_0}^t w(t, s)y(s)ds, \quad (85)$$

где $w(t, s)$, $t_0 \leq s \leq t$, — некоторая функция, предполагаемая кусочно-непрерывной; она обычно называется весовой функцией и, как функция от t , описывает поведение системы в момент времени s , выведенной из состояния покоя единичным импульсом $\delta(t - s)$ (здесь $\delta(t)$ означает общеизвестную дельта-функцию).

Например, линейной является система, описываемая линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + \dots + a_n x(t) = y(t) \quad (86)$$

с непрерывными коэффициентами $a_k = a_k(t)$, $k = 1, \dots, n$. В этом случае весовая функция $w(t, s)$, $t \geq s$, при каждом фиксированном s есть решение однородного уравнения

$$\frac{d^n}{dt^n}w(t, s) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}w(t, s) + \dots + a_n w(t, s) = 0$$

с начальными условиями $\frac{d^k}{dt^k}w(s, s) = 0$, $k = 0, \dots, n - 2$; $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}w(s, s) = 1$. Непосредственно можно проверить, что $x(t) = \int_{t_0}^t w(t, s)y(s)ds$ есть решение дифференциального уравнения (86), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Рассмотрим поведение линейной системы с весовой функцией $w(t, s)$ под воздействием хаотических, быстро меняющихся возмущений.

Будем считать, что на систему воздействуют случайные импульсы вида $\Delta\eta(t_k)\delta(t - t_k)$, возникающие в указанные моменты времени t_k , где $\Delta\eta(t_k)$, $k = 1, 2, \dots$, — случайные величины ($\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ есть промежуток времени до появления очередного импульса). В результате такого воздействия на выходе системы будет случайный процесс $\xi(t)$, $t \geq t_0$, вида

$$\xi(t) = \sum_{t_0 < t_k \leq t} w(t, t_k)\Delta\eta(t_k).$$

Нас будут интересовать случайные процессы этого типа, получающиеся в пределе при

$$\Delta t_k \rightarrow 0, \quad \Delta\eta(t_k) \rightarrow 0;$$

их можно будет описать стохастическим интегралом

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t w(t, s)d\eta(s), \quad (87)$$

к определению которого мы и переходим.

8.1 Стохастические интегралы

Предположим, что имеется семейство случайных величин $\Delta\eta$, зависящих от соответствующих конечных интервалов $\Delta = (s, t]$ на конечном или бесконечном отрезке $(a, b]$ действительной прямой таким образом, что для любых смежных интервалов $\Delta_1 = (s, t]$, $\Delta_2 = (t, u]$ выполняется равенство

$$\Delta\eta = \Delta_1\eta + \Delta_2\eta, \quad \Delta = [s, u), \quad (88)$$

выражающее собой свойство аддитивности. Предположим, что случайные величины $\Delta_1\eta$ и $\Delta_2\eta$, отвечающие любым непересекающимся интервалам $\Delta_1 = (s_1, t_1]$ и $\Delta_2 = (s_2, t_2]$, являются некоррелированными:

$$\mathbf{E}(\Delta_1\eta - \mathbf{E}\Delta_1\eta)(\Delta_2\eta - \mathbf{E}\Delta_2\eta) = 0, \quad (89)$$

причем для любого $\Delta = (s, t]$

$$\mathbf{E}\Delta\eta = \alpha(t - s), \quad \mathbf{D}\Delta\eta = \beta^2(t - s), \quad (90)$$

где α, β — некоторые постоянные.

Семейство случайных величин описанного типа будем называть *белым шумом* и символически обозначать как $d\eta(t)$, $a < t \leq b$; говоря о стандартном белом шуме, будем иметь в виду, что соответствующие параметры есть $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Наряду с действительными величинами мы будем рассматривать также и комплексные величины. Дисперсию такой величины η определим формулой

$$\mathbf{D}\eta = \mathbf{E}|\eta - \mathbf{E}\eta|^2$$

и будем называть η_1, η_2 некоррелированными, если

$$\mathbf{E}(\eta_1 - \mathbf{E}\eta_1)\overline{(\eta_2 - \mathbf{E}\eta_2)} = 0, \quad (91)$$

где черта означает переход к комплексному сопряженному значению. В соответствии с этим, видоизменив условие (89), введем комплексный белый шум $d\eta(t)$, $a < t \leq b$, который и будет фигурировать в нашем определении стохастического интеграла.

Для финитной кусочно-постоянной функции $\varphi(t)$, $a < t \leq b$, обращающейся в 0 вне конечного интервала (a_0, b_0) , на котором она принимает лишь конечное число значений:

$$\varphi(t) = y_k, \quad t_k < t \leq t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b),$$

стохастический интеграл определим формулой

$$\int_a^b \varphi(t)d\eta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta_k\eta, \quad (92)$$

где $\Delta_k = (t_k, t_{k+1}]$.

Очевидно, для любых кусочно постоянных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и постоянных c_1, c_2

$$\int_a^b (c_1\varphi(t) + c_2\psi(t))d\eta(t) = c_1 \int_a^b \varphi(t)d\eta(t) + c_2 \int_a^b \psi(t)d\eta(t).$$

Легко проверить, что для стандартного белого шума (с параметрами $\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$\mathbf{E} \int_a^b \varphi(t)d\eta(t) = 0 \quad (93)$$

и, как следует из условий (89), (91),

$$\mathbf{E} \left(\int_a^b \varphi(t)d\eta(t) \right) \overline{\left(\int_a^b \psi(t)d\eta(t) \right)} = \int_a^b \varphi(t)\overline{\psi(t)}dt. \quad (94)$$

В частности,

$$\mathbf{E} \left| \int_a^b \varphi(t) d\eta(t) \right|^2 = \left\| \int_a^b \varphi(t) d\eta(t) \right\|^2 = \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt, \quad (95)$$

а для среднеквадратичного расстояния между величинами

$$\xi_1 = \int_a^b \varphi(t) d\eta(t), \quad \xi_2 = \int_a^b \psi(t) d\eta(t)$$

получаем следующее выражение:

$$\|\xi_1 - \xi_2\|^2 = \int_a^b |\varphi(t) - \psi(t)|^2 dt. \quad (96)$$

Далее, будем исходить из того, что всякая интегрируемая в квадрате функция $\varphi(t)$:

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty, \quad (97)$$

есть предел в среднеквадратичном смысле некоторой последовательности финитных кусочно-постоянных функций $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, т. е.

$$\int_a^b |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (98)$$

При этом также $\int_a^b |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt \rightarrow 0$, когда $n, m \rightarrow \infty$, и следовательно, существует величина ξ , предельная для фундаментальной последовательности ξ_n :

$$\|\xi - \xi_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Эту предельную величину и назовем стохастическим интегралом от соответствующей функции $\varphi(t)$, положив

$$\int_a^b \varphi(t) d\eta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(t) d\eta(t). \quad (99)$$

Ясно, что так определенный стохастический интеграл не зависит от выбора последовательности кусочно-постоянных функций $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, в смысле соотношения (98) сходящейся к функции $\varphi(t)$; действительно, для любой другой последовательности кусочно-постоянных функций $\psi_m(t)$, $m = 1, 2, \dots$,

$$\int_a^b |\psi_m(t) - \varphi(t)|^2 dt \rightarrow 0,$$

мы имеем

$$\int_a^b |\psi_m(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty,$$

и потому

$$\left\| \int_a^b \psi_m(t) d\eta(t) - \int_a^b \varphi_n(t) d\eta(t) \right\|^2 = \int_a^b |\psi_m(t) - \varphi_n(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

Для стохастического интеграла (99) от произвольных функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию (97), выполняются соотношения (93) — (96), сохраняющиеся при использованном нами в (99) предельном переходе.

Пример (нормальный белый шум). Пусть $\eta(t)$, $a < t \leq b$, — процесс броуновского движения на отрезке $[a, b]$. Положим

$$\Delta\eta = \eta(t) - \eta(s), \quad \Delta = (s, t].$$

Легко видеть, что так определенное семейство величин является белым шумом с параметрами $\alpha = 0$, $\beta = \sigma$, где σ^2 — соответствующий коэффициент диффузии. Как мы знаем, линейные комбинации величин с нормальным распределением вероятностей также имеют нормальное распределение. Следовательно, для любой действительной кусочно-постоянной функции $\varphi(t)$ соответствующий стохастический интеграл $\xi = \int_a^b \varphi(t) d\eta(t)$ будет иметь нормальное распределение вероятностей с нулевым средним и дисперсией $D\xi = \int_a^b \varphi^2(t) dt$. Такое же распределение вероятностей будет иметь случайная величина $\xi = \int_a^b \varphi(t) d\eta(t)$ и для любой (действительной) функции $\varphi(t)$, поскольку по определению стохастического интеграла, $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ (в среднеквадратичном смысле), где $\xi_n = \int_a^b \varphi_n(t) d\eta(t)$ — некоторые нормально распределенные случайные величины.

Пусть $d\eta(t)$, $a < t \leq b$, — произвольный белый шум с параметрами (α, β) . Очевидно, семейство величин

$$\Delta\eta^0 = \frac{1}{\beta}(\Delta\eta - \alpha(t - s)), \quad \Delta = (s, t],$$

порождается стандартным белым шумом. Для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей, кроме (98), условию

$$\int_a^b |\varphi(t)| dt < \infty, \tag{100}$$

положим

$$\int_a^b \varphi(t) d\eta(t) = \alpha \int_a^b \varphi(t) dt + \beta \int_a^b \varphi(t) d\eta^0(t). \tag{101}$$

Для определенного таким образом стохастического интеграла основные формулы изменяются следующим образом:

$$\mathbf{E} \int_a^b \varphi(t) d\eta(t) = \alpha \int_a^b \varphi(t) dt, \tag{102}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_a^b \varphi(t) d\eta(t) \right) \overline{\left(\int_a^b \psi(t) d\eta(t) \right)} = \\ = |\alpha|^2 \int_a^b \varphi(t) dt \int_a^b \psi(t) dt + |\beta|^2 \int_a^b \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt. \end{aligned} \tag{103}$$

8.2 Нормальные (гауссовские) случайные процессы

Обратимся к случайному процессу (87):

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t w(t, s) d\eta(s), \quad t \geq t_0.$$

Оказывается, если $d\eta(t)$, $t > t_0$, — нормальный белый шум, то (в случае действительной функции $w(t, s)$) величины $\xi(t)$, $t \geq t_0$, имеют нормальное (гауссовское) распределение вероятностей (мы имеем в виду не только распределения отдельно взятых величин, нормальность которых уже отмечалась ранее, но и совместные распределения вероятностей

любого конечного числа величин $\xi(t)$, $t \geq t_0$). Как мы знаем, такое распределение величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ определяется соответствующими средними значениями

$$a(t_k) = \mathbf{E}\xi(t_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

и корреляционной матрицей с компонентами

$$R(t_k, t_j) = \mathbf{E}(\xi(t_k) - a(t_k))(\xi(t_j) - a(t_j)), \quad k, j = 1, \dots, n.$$

Для любого случайного процесса $\xi(t)$, $t \in T$, с конечным вторым моментом $\mathbf{E}|\xi(t)|^2$ на множестве T , функция

$$R(t, s) = \mathbf{E}(\xi(t) - \mathbf{E}\xi(t))\overline{(\xi(s) - \mathbf{E}\xi(s))}, \quad t, s \in T, \quad (104)$$

называется корреляционной функцией этого процесса.

Согласно общим формулам (102), (103), случайный процесс вида (87) имеет среднее значение

$$a(t) = \mathbf{E}\xi(t) = \alpha \int_{t_0}^t w(t, s) ds, \quad t \geq t_0, \quad (105)$$

и корреляционную функцию

$$R(t, s) = |\beta|^2 \int_{t_0}^t w(t, u) \overline{w(s, u)} du, \quad t, s \geq t_0 \quad (106)$$

где α, β — параметры белого шума в интегральном представлении (87).

8.3 Фрактальное броуновское движение

Определим случайный процесс на полуоси $[0, \infty)$:

$$B_H(t) = \sigma L_H^{-1/2} \left(\int_0^\infty ((t+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2}) d\tilde{W}(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW(s) \right), \quad (107)$$

где σ — ненулевая постоянная, $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$, $\tilde{W}(s)$ и $W(s)$ — две независимые версии стандартного винеровского процесса, $0 < H < 1$ — так называемая постоянная Хёрста.

Случайный процесс $B_H(t)$ представляет собой так называемое фрактальное броуновское движение (см. [5]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией (проверить!)

$$R(t, s) = \frac{\sigma^2}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \quad (108)$$

Легко видеть, что случай $H = 1/2$ соответствует винеровскому процессу. Отметим известное свойство H -однородности фрактального броуновского движения (см. [5]): для любого $\lambda > 0$ конечномерные распределения случайных процессов $\{B_H(\lambda t)\}$ и $\{\lambda^H B_H(t)\}$ совпадают. Кроме того, случайный процесс B_H имеет стационарные приращения. Именно указанные свойства процесса B_H и позволяют причислять его к классу объектов, называемых *фракталами*, у которых любой «вырезанный» фрагмент (скажем, часть траектории) в известном смысле *подобен* целому объекту.

Отметим случай, когда $H = 1$, в этом случае случайный процесс $B_H(t)$ можно представить в виде:

$$B_H(t) = \sigma t \eta,$$

где η — стандартная нормальная случайная величина, σ — положительная константа.

Обратим внимание также на то, что $\mathbf{D}B_H(t) = \sigma^2 t^{2H}$. В случае $H > 1/2$ фрактальное броуновское движение используется для моделирования так называемых супер диффузионных процессов; в случае $H < 1/2$ — субдиффузионных.

8.4 Сходимость к стационарному процессу

Рассмотрим линейную систему с весовой функцией

$$w(t, s) = w(t - s), \quad t \geq s, \quad (109)$$

зависящей от разности $t - s$, где $w(t)$, $t \geq 0$, также называемая весовой функцией, удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty |w(t)| dt < \infty, \quad \int_0^\infty |w(t)|^2 dt < \infty. \quad (110)$$

При воздействии на такую систему белого шума $d\eta(t)$, $t > 0$, мы имеем дело со случайным процессом вида (87):

$$\xi(t) = \int_0^t w(t - s) d\eta(s), \quad t \geq 0. \quad (111)$$

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t w(t - s) d\eta(s), \quad -\infty < t < \infty, \quad (112)$$

того же типа, отличающийся лишь тем, что соответствующий начальный момент t_0 есть $-\infty$. Используя формулы (102), (103), получаем

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - \xi^*(t)\|^2 &= |\alpha|^2 \left| \int_{-\infty}^0 w(t - s) ds \right|^2 + |\beta|^2 \int_{-\infty}^0 |w(t - s)|^2 ds = \\ &= |\alpha|^2 \left| \int_t^\infty w(s) ds \right|^2 + |\beta|^2 \int_t^\infty |w(s)|^2 ds; \end{aligned}$$

видно, что

$$\|\xi(t) - \xi^*(t)\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Положив $w(t) = 0$ при $t < 0$, случайный процесс $\xi^*(t)$ можно представить в виде

$$\xi^*(t) = \int_{-\infty}^\infty w(t - s) d\eta(s). \quad (113)$$

Среднее значение этого процесса является постоянным:

$$a(t) = \mathbf{E}\xi^*(t) = \alpha \int_{-\infty}^\infty w(s) ds, \quad (114)$$

а корреляционная функция

$$\begin{aligned} R(t, s) &= \mathbf{E}(\xi^*(t) - a(t))\overline{(\xi^*(s) - a(s))} = \\ &= |\beta|^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(t - s + u)\overline{w(u)}du = R(t - s), \quad -\infty < t, s < \infty \end{aligned} \quad (115)$$

зависит лишь от разности $t - s$. Такой процесс $\xi^*(t)$ называется стационарным (в широком смысле).

Мы получили следующий результат для однородной устойчивой системы, т. е. удовлетворяющей условиям (109), (110).

Теорема 7. *Случайный процесс $\xi(t)$, представимый стохастическим интегралом (111), при $t \rightarrow \infty$ сходится в среднеквадратичном к стационарному процессу $\xi^*(t)$, определенной формулой (113):*

$$\|\xi(t) - \xi^*(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

9 Стационарные случайные процессы

9.1 Спектральное представление и преобразование Фурье

Случайный процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$, называется стационарным в узком смысле, если распределение вероятностей любых величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ такое же, как и величин $\xi(t_1 + t), \dots, \xi(t_n + t)$, сдвинутых во времени t , $-\infty < t < \infty$. Процесс $\xi(t)$, $\mathbf{E}|\xi(t)|^2 < \infty$, называется стационарным (точнее, стационарным в широком смысле), если его среднее значение $\mathbf{E}\xi(t)$ не зависит от t (мы примем $\mathbf{E}\xi(t) = 0$), а корреляционная функция $R(t, s) = \mathbf{E}\xi(t)\overline{\xi(s)}$ зависит лишь от разности $t - s$:

$$\mathbf{E}\xi(t)\overline{\xi(s)} = R(t - s); \quad (116)$$

функция $R(t)$, $-\infty < t < \infty$, также называется корреляционной функцией стационарного процесса $\xi(t)$.

Пример (стационарный процесс с дискретным спектром). Рассмотрим случайный процесс вида

$$\xi(t) = \sum_{k=-n}^n e^{i\lambda_k t} \Phi_k, \quad -\infty < t < \infty, \quad (117)$$

где $\lambda_{-n}, \dots, \lambda_n$ — некоторые действительные числа, а Φ_{-n}, \dots, Φ_n — некоррелированные случайные величины с нулевыми средними значениями:

$$\mathbf{E}\Phi_k \Phi_j = 0 \text{ при } k \neq j.$$

Очевидно,

$$\mathbf{E}\xi(t) = \sum_{k=-n}^n e^{i\lambda_k t} \mathbf{E}\Phi_k = 0$$

и

$$\mathbf{E}\xi(t)\overline{\xi(s)} = \sum_{k=-n}^n \sum_{j=-n}^n e^{i(\lambda_k t - \lambda_j s)} \mathbf{E}\Phi_k \overline{\Phi_j} = \sum_{k=-n}^n e^{i\lambda_k(t-s)} F_k, \quad (118)$$

где $F_k = \mathbf{E}|\Phi_k|^2$, $k = -n, \dots, n$, и, таким образом, случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным.

Этот процесс дает пример случайных колебаний, имеющих своими составляющими гармонические колебания $\xi_k(t) = e^{i\lambda_k t} \Phi_k$ с частотами $\omega_k = |\lambda_k|$, $k = -n, \dots, n$, фаза и амплитуда которых являются случайными величинами. Если условиться называть среднеквадратичное значение $\mathbf{E}|\xi(t)|^2$ средней энергией стационарного процесса $\xi(t)$, то из равенства (118) при $s = t$ имеем

$$\mathbf{E}|\xi(t)|^2 = \sum_{k=-n}^n F_k,$$

где $F_k = \mathbf{E}|\Phi_k|^2 = \mathbf{E}|\xi_k(t)|^2$, видно, что энергия стационарного процесса $\xi(t)$ складывается из энергий отдельных составляющих $\xi_k(t) = e^{i\lambda_k t} \Phi_k$, $k = -n, \dots, n$. Значения λ_k , $k = -n, \dots, n$, обычно называют частотами (даже при отрицательных λ_k); в совокупности они образуют частотный спектр стационарного процесса $\xi(t)$.

Пример (стационарный процесс с непрерывным спектром). Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, допускающий спектральное представление:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda), \quad -\infty < t < \infty. \quad (119)$$

Здесь

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_0(\mu) d\tilde{\eta}(\mu), \quad -\infty < \mu < \infty, \quad (120)$$

где $d\tilde{\eta}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — некоторый стандартный белый шум, а $\varphi_0(\lambda)$ — некоторая интегрируемая в квадрате функция, $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$, и, по определению,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) d\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \varphi_0(\lambda) d\tilde{\eta}(\lambda) \quad (121)$$

для всякой функции $\varphi(\lambda)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty, \quad (122)$$

$$f(\lambda) = |\varphi_0(\lambda)|^2.$$

Мы имеем

$$\mathbf{E}\xi(t) = 0$$

и

$$\mathbf{E}\xi(t)\overline{\xi(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f(\lambda) d\lambda.$$

Видно, что $\xi(t)$ — стационарный процесс с корреляционной функцией

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda, \quad (123)$$

которая совпадает с преобразованием Фурье функции $f(\lambda)$; $f(\lambda)$ называется спектральной плотностью стационарного процесса $\xi(t)$. В свою очередь, спектральная плотность $f(\lambda)$ однозначно определяется своим преобразованием Фурье $R(t)$ и, в частности, когда корреляционная функция $R(t)$, $-\infty < t < \infty$ интегрируема,

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R(t) dt. \quad (124)$$

Формула (119) дает разложение стационарного процесса $\xi(t)$ на элементарные гармонические колебания, точнее,

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda) \sim \sum_{k=-n}^n e^{i\lambda_k t} \Phi_k,$$

где $\Phi_k = \Phi(\lambda_{k+1}) - \Phi(\lambda_k)$, $k = -n, \dots, n$, и знак эквивалентности \sim означает, что при все более мелком разбиении полосы частот $-\Lambda_n \leq \lambda \leq \Lambda_n$ на интервалы $\Delta_k = (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, $k = -n, \dots, n$,

$$\xi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n e^{i\lambda_k t} \Phi_k \quad (125)$$

(при $\max_k |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \rightarrow 0$, $\Lambda_n \rightarrow \infty$).

Отметим, что стационарный случайный процесс

$$\xi_{\Delta}(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda) \quad (126)$$

при малом интервале $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ приблизительно представляет собой гармоническое колебание частоты λ , $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, а его средняя энергия есть

$$\mathbf{E}|\xi_{\Delta}(t)|^2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\lambda. \quad (127)$$

Суммарная же энергия стационарного процесса $\xi(t)$ есть

$$\mathbf{E}|\xi(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

и, таким образом, как показывает формула (127), спектральная плотность $f(\lambda)$ характеризует распределение энергии рассматриваемого процесса

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$$

по составляющим вида

$$\xi_{\Delta}(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$$

в зависимости от частотного интервала (λ_1, λ_2) .

Рассмотрим стационарный случайный процесс вида

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-s) d\eta(s), \quad (128)$$

который устанавливается с течением времени на выходе устойчивой линейной системы с весовой функцией $w(t)$ при воздействии на нее стандартного белого шума $d\eta(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Определим семейство величин $\Delta\tilde{\eta}$, зависящих от соответствующих интервалов $\Delta = (\lambda, \mu]$ действительной прямой, положив

$$\Delta\tilde{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} - e^{-i\lambda t}}{-it} d\eta(t). \quad (129)$$

Функция

$$e_{\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\mu t} - e^{-i\lambda t}}{-it}, \quad -\infty < t < \infty,$$

есть преобразование Фурье индикатора $I_{\Delta}(u)$ интервала $\Delta = (\lambda, \mu]$,

$$I_{\Delta}(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \in \Delta, \\ 0 & \text{при } u \notin \Delta, \end{cases}$$

а именно:

$$e_{\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} I_{\Delta}(u) du. \quad (130)$$

Согласно формулам (98), (99),

$$\mathbf{E}|\tilde{\eta}|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e_{\Delta}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |I_{\Delta}(u)|^2 du = \frac{1}{2\pi}(\mu - \lambda) \quad (131)$$

и для любых непересекающихся интервалов Δ_1, Δ_2

$$\mathbf{E}\Delta_1\tilde{\eta}\overline{\Delta_2\tilde{\eta}} = \int_{-\infty}^{\infty} e_{\Delta_1}(t)\overline{e_{\Delta_2}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\Delta_1}(u)\overline{I_{\Delta_2}(u)} du = 0. \quad (132)$$

Таким образом, можно сказать, что определенное формулой (129) семейство величин $\Delta\tilde{\eta}$ порождается белым шумом $\Delta\tilde{\eta}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, с параметрами $(0, 1/\sqrt{2\pi})$; условимся говорить также, что $\Delta\tilde{\eta}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, есть преобразование Фурье белого шума $d\eta(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Пусть $\varphi(\lambda)$ — интегрируемая в квадрате функция с преобразованием Фурье

$$c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(\lambda) d\lambda, \quad -\infty < t < \infty, \quad (133)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^2 dt < \infty.$$

Имеет место следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) d\tilde{\eta}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) d\eta(t). \quad (134)$$

Действительно, для кусочно-постоянных функций $\varphi(\lambda) = \sum_{\lambda} c_k I_{\Delta_k}(\lambda)$ это равенство есть простое следствие формул (129), (130). Произвольная же функция $\varphi(\lambda)$ есть предел в среднем квадратичном некоторой последовательности кусочно-постоянных функций $\varphi_n(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(\lambda) - \varphi(\lambda)| d\lambda \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

при этом для соответствующих преобразований Фурье $c_n(t)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c_n(t) - c(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(\lambda) - \varphi(\lambda)| d\lambda \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так что равные между собой величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\lambda) d\tilde{\eta}(\lambda) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} c_n(t) d\eta(t)$$

сходятся в среднеквадратичном смысле при $n \rightarrow \infty$ к величинам

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) d\tilde{\eta}(\lambda) \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} c(t) d\eta(t).$$

Обратимся теперь непосредственно к стационарному процессу $\xi(t)$ на выходе линейной системы с весовой функцией $w(t)$ — см. (128). Назовем спектральной характеристикой функцию $\varphi_0(\lambda)$, связанную с $w(t)$ преобразованием Фурье:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi_0(\lambda) d\lambda. \quad (135)$$

Взяв $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda t} \varphi_0(\lambda)$ и $c(s) = w(t-s)$, из общей формулы (134) получаем, что

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-s) d\eta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi_0(\lambda) d\tilde{\eta}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda).$$

Мы получили следующий результат

Теорема 8. *Стационарный процесс $\xi(t)$ вида (128) допускает спектральное представление (119); при этом его спектральная плотность есть $f(\lambda) = |\varphi_0(\lambda)|^2$, где $\varphi_0(\lambda)$ есть соответствующая спектральная характеристика.*

Пример (возмущенное движение маятника). Рассмотрим в заключение один пример, на котором можно легко проследить некоторые особенности поведения линейных систем под воздействием случайных колебаний. Именно, рассмотрим движение маятника (при наличии трения) с большим периодом собственных колебаний, которое описывается уравнением

$$x''(t) + 2hx'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

и в явном виде описывается функцией

$$x(t) = Ae^{-ht} \sin(\omega t + \theta), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2};$$

спектральная характеристика такой системы есть

$$\varphi(i\lambda) = \frac{1}{(i\lambda)^2 + 2h(i\lambda) + \omega_0^2}.$$

Предположим, что эта система находится на корабле, и пусть частота ω собственных колебаний маятника много меньше частоты Ω качки корабля: $\omega \ll \Omega$; в результате качки на маятник воздействуют случайные толчки, возникающие приблизительно через малые промежутки времени $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$. Если считать внешнее возмущение белым шумом, то установившееся движение маятника будет представлять собой стационарный процесс $\xi(t)$ со спектральной плотностью вида $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\varphi(i\lambda)|^2$.

Напомним, что спектральная плотность характеризует распределение энергии случайного процесса $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$ по составляющим его элементарным колебаниям в зависимости от частоты λ , а именно, средняя амплитуда случайных колебаний, заданных стохастическим интегралом $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$, равна $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\lambda$. В нашем случае спектральная плотность есть

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(\lambda^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\lambda^2};$$

она имеет максимум при $\lambda^2 = \omega^2 - h^2$ (резко выраженный для малого коэффициента трения h) и довольно быстро убывает при удалении от точки максимума. Это говорит о том,

что в случайном процессе $\xi(t)$ резко преобладают элементарные колебания с частотами, близкими к собственной частоте ω рассматриваемой системы.

Для сравнения отметим, что если считать внешнее воздействие (от качки корабля) гармоническим колебанием частоты Ω , то маятник при установившемся движении будет совершать вынужденные колебания с этой частотой Ω , что качественно отличается от полученного выше результата.

10 Некоторые задачи и вопросы

1. Найти стационарное распределение и коэффициент эргодичности для цепи Маркова со следующей матрицей вероятностей перехода за один шаг:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс (броуновское движение). Найти распределение следующих стохастических интегралов:

а) $\int_0^t s^2 dw(s)$, б) $\int_0^t e^s dw(s)$.

3. Найти спектральную плотность стационарного процесса, если его ковариационная функция равна $b(t) = ce^{-\alpha|t|}$.

4. Найти ковариационную функцию винеровского процесса (броуновского движения).

5. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с параметром λ . Предположим, что каждое событие регистрируется с вероятностью p независимо от остальных событий. Пусть $\eta(t)$ — процесс, скачки которого происходят лишь в моменты наступления зарегистрированных событий. Доказать, что $\eta(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $p\lambda$.

6. Пусть $\tau_k, k = 1, 2, \dots$ — последовательные моменты наступления событий пуассоновского потока (или моменты скачков пуассоновского процесса) с интенсивностью λ . Доказать, что для любого $T > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tau_k \leq T) = \lambda T.$$

7. Пусть процесс $\xi(t)$ имеет среднее значение $m(t) = t^2 - 1$ и ковариационную функцию $B(t, s) = 2e^{-\alpha(s-t)^2}$. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса $\frac{d\xi}{dt}$ (производная процесса понимается в среднеквадратичном смысле).

8. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ равен $\eta \cos(\gamma t - \theta)$, где η — случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией; θ — случайная величина с равномерным на отрезке $[0, 2\pi]$ распределением; γ — неслучайный параметр. Случайные величины η и θ — независимы. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$. При каких условиях $\xi(t)$ — стационарный процесс.

9. Бросают игральную кость. Положим ξ_n равной наибольшему из чисел, выпавших в первых n бросаниях. Показать что ξ_n — цепь Маркова, найти для нее матрицу переходных вероятностей за один шаг.

10. Получить формулу для максимального смещения броуновской частицы за фиксированное время t .

11. Получить закон арксинуса для броуновского движения.

12. Бросают монету, причем вероятность выпадения решки равна p . Положим ξ_n равной разности между числом выпадения решки и числом выпадения герба после n

бросаний монеты. Показать что ξ_n — цепь Маркова, найти для нее матрицу переходных вероятностей за один шаг.

13. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс с нулевым сносом (математическое ожидание нулевое). Доказать, что процесс

$$\eta(t) = \begin{cases} w(t) & \text{при } t \leq T; \\ 2w(T) - w(t) & \text{при } t > T, \end{cases}$$

тоже винеровский.

14. Необходимое и достаточное условие возвратности состояния цепи Маркова. Привести примеры.

15. Классификация состояний цепи Маркова. Привести примеры.

16. Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс ($w(1)$ имеет стандартное нормальное распределение). Показать, что совместное распределение $w(t)$ и $\int_0^t w(s)ds$ — двумерное гауссовское, вычислить ковариационную матрицу.

17. Пусть спектральная плотность стационарного процесса равна

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{при } |t| \leq u_1; \\ 0 & \text{при } |t| > u_1, \end{cases}$$

Найти ковариационную функцию процесса.

18. Определим случайный процесс:

$$B_H(t) = \int_0^t K_H(t, s) dW(s), \quad t \geq 0$$

при этом ядро интеграла имеет представление:

$$K_H(t, s) = c_H \left((t-s)^{H-1/2} + (1/2-H) \int_s^t (u-s)^{H-3/2} \left(1 - \left(\frac{s}{u} \right)^{1/2-H} \right) du \right),$$

где $c_H = \left(\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)} \right)^{1/2}$. Вычислить ковариационную функцию и убедиться в том, что $B_H(t)$ — фрактальное броуновское движение. Убедиться в том, что при $H > 1/2$ ядро стохастического интеграла имеет более простое представление:

$$K_H(t, s) = c_H(H-1/2)s^{1/2-H} \int_s^t (u-s)^{H-3/2} u^{H-1/2} du.$$

19. Привести пример плотностей перехода λ_k , $k = 0, 1, \dots$ в ветвящемся процессе при которых возникает явление взрыва.

Список литературы

1. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы / Розанов Ю. А. — М.: Наука, 1971.
2. *Коршунов Д. А.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей / Коршунов Д. А., Фосс С. Г. — СПб.: Лань, 2004.
3. *Свешников А. А.* Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Свешников А. А. — СПб.: Лань, 2008.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность / Ширяев А. Н. — М.: Наука, 1980.
5. *Mandelbrot B., Van Ness J.* Fractional Brownian motions, fractional noise and applications / Mandelbrot B. — SIAM Review. — 1968.— V. 10.— P. 422-437.