Таблицы и формулы по применению теории групп в физике

6 июня 2016 г.

1 Конечные группы

Таблица 1: Все конечные группы до порядка 12 (с точностью до изоморфизма).

Порядок	Группы
1	$\mathbf{C_1}$
2	$\mathbf{C_2}$
3	$\mathbf{C_3}$
4	$\mathbf{C_4}$, $\mathbf{D_2} \approx \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}$
5	$\mathbf{C_5}$
6	$\mathbf{C_6} \approx \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_3}$, $\mathbf{D_3}$
7	$\mathbf{C_7}$
8	$\mathbf{C_8}, \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_4}$, $\mathbf{D_4}$, $\mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}$, $\mathbf{Q}$
9	$\mathbf{C_9}$, $\mathbf{C_3} \times \mathbf{C_3}$
10	$\mathbf{C_{10}} \approx \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_5}$, $\mathbf{D_5}$
11	$\mathbf{C_{11}}$
12	$\mathbf{C_{12}} \approx \mathbf{C_3} \times \mathbf{C_4}$, $\mathbf{C_2} \times \mathbf{C_6} \approx \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_3}$, $\mathbf{D_6} \approx \mathbf{C_2} \times \mathbf{D_3}$, $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{W}$

Обозначения к таблице 1: $\mathbf{C_n}$ — циклическая группа порядка n, т.е. группа симметрии правильной n-угольной пирамиды, $\mathbf{D_n}$ — группа диэдра, т.е. группа симметрии правильной n-угольной призмы, состоящая из оси n-го порядка и перпендикулярной ей оси 2-го порядка, $\mathbf{A_n}$ группа четных подстановок из n объектов, $\mathbf{Q}$ — группа кватернионов,[1] порождаемая двумя элементами P, Q с соотношениями

$$P^4 = 1, \quad P^2 = Q^2, \quad QPQ = P,$$

[1] Группы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{W}$ не могут быть реализованы как группы симметрии геометрических тел.

$\mathbf{W}$ — группа, порождаемая двумя элементами P, Q с соотношениями[1]

$$P^4 = 1, \quad P^2 = Q^3, \quad QPQ = P.$$

Знак $\times$ означает здесь прямое произведение, т.е. $G = G_1 \times G_2$ — это совокупность упорядоченных пар $g = (p, q)$, $g \in G, p \in G_1, q \in G_2$, а операция умножения определена в каждой группе отдельно: $g_1 g_2 = (p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) \equiv (p_1 p_2, q_1 q_2)$.

1.1 Характеры точечных групп

Точечные группы состоят из преобразований, оставляющих неподвижную точку, и описывают симметрию молекул. Среди элементов точечной группы имеются оси C_n, а также зеркальные плоскости σ_v, проходящие через ось, и σ_h, перпендикулярные оси. Композиция поворота на угол $2\pi/n$ и отражения в горизонтальной плоскости называется зеркальным поворотом $S_n = \sigma_h C_n$. Зеркальные повороты могут быть только четного порядка. Плоскость симметрии указывается в обозначении группы, например, $\mathbf{C_{3v}}$ — группа, состоящая из оси третьего порядка и зеркальной плоскости, проходящей через через оси C_3 и C_2. Зеркальная плоскость, проходящая через ось n-го порядка между осями 2-го порядка обозначается индексом d.
Обозначения: В первой строке каждой подтаблицы таблицы 2 перечислены классы сопряженных элементов σ_i. Единичный элемент обозначен буквой E, C_n означает ось n-го порядка. Числа перед символами элементов симметрии указывают число элементов в соответствующих классах, $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Если в группе имеется несколько осей второго порядка, первая обозначается C_2, вторая C_2' и т.д.

Список конечных подгрупп собственных вращений трехмерного пространства:

$$\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{T}, \mathbf{O}, \mathbf{Y},$$

где $\mathbf{T}$ — группа вращений правильного тетраэдра, $\mathbf{O}$ — группа вращений октаэдра или куба, а $\mathbf{Y}$ — группа вращений икосаэдра или додекаэдра.

1.2 Ортогональность неприводимых характеров

Разложить данное представление $D(g)$ в прямую сумму неприводимых можно с помощью соотношения ортогональности неприводимых характеров $\chi^{(\alpha)}(g)$

$$\sum_{g \in G} \left[\chi^{(\alpha)}(g)\right]^* \chi^{(\beta)}(g) = \sum_{i=1}^{s} h_i \left[\chi^{(\alpha)}(\sigma_i)\right]^* \chi^{(\beta)}(\sigma_i) = |G| \delta_{\alpha\beta}.$$

Здесь суммирование по элементам группы g заменяется на суммирование по классам сопряженных элементов σ_i, h_i — число элементов в соответствующих классах

Таблица 2: Таблицы неприводимых характеров.

$\mathbf{C}_2$	E	C_2
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

$\mathbf{D}_2$	E	C_2	C_2'	C_2''
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	-1
$\chi^{(4)}$	1	-1	-1	1

$\mathbf{D}_3$	E	$2C_3$	$3C_2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	0

$\mathbf{D}_4$	E	C_4^2	$2C_4$	$2C_2$	$2C_2'$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

$\mathbf{T}$	E	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3^2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	ε	ε^2
$\chi^{(3)}$	1	1	ε^2	ε
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	0

$\mathbf{O}$	E	$8C_3$	$3C_4^2$	$6C_2$	$6C_4$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	2	0	0
$\chi^{(4)}$	3	0	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	3	0	-1	1	-1

$\mathbf{Y}$	E	$15C_2$	$20C_3$	$12C_5$	$12C_5^2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\chi^{(3)}$	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\chi^{(4)}$	4	0	1	-1	-1
$\chi^{(5)}$	5	1	-1	0	0

σ_i. Суммирование ведется по всем классам (столбцам таблицы характеров), индексы α, β нумеруют неэквивалентные неприводимые представления. Таким образом, строки таблицы характеров ортогональны, когда скалярное произведение определено с весами h_i. Столбцы таблицы ортогональны в обычном смысле (скалярное произведение определяется с единичным весом). Можно также ввести операцию усреднения по группе, тогда соотношение ортогональности запишется короче

$$\langle \dots \rangle_G \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \dots, \quad \left\langle \left[\chi^{(\alpha)}\right]^* \chi^{(\beta)} \right\rangle_G = \delta_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

В непрерывных группах операция усреднения по группе определяется через интегрирование.

Ортогональность характеров (1) позволяет найти коэффициенты k_α разложения

$$D(g) = \bigoplus_\alpha k_\alpha D^{(\alpha)}(g), \quad k_\alpha = \left\langle \left[\chi^{(\alpha)}\right]^* \chi \right\rangle_G. \tag{2}$$

Здесь $\bigoplus$ здесь обозначает прямую сумму неприводимых представлений, $\chi = \operatorname{Tr} D$ — характер исходного представления D.

2 Группы Ли

В таблице приведены как примеры многообразия нескольких групп Ли.

Группа	Многообразие	Уравнение	Обозн.
$\mathbf{O(2)}$	Окружность	$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$	S^1
$\mathbf{U(1)} \times \mathbf{U(1)}$	Тор	$$z = e^{i\phi_1 + i\phi_2}$$	T^2
$\mathbf{SU(2)}$	Сфера	$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$	S^3
$\mathbf{SO(3)} \approx \mathbf{SU(2)/C_2}$	Проективная сфера	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_0 \geq 0,$ диаметрально противоположные точки "экватора"$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ отождествлены	$\mathbb{R}P^3$

2.1 Алгебры Ли групп Ли

В таблице указаны некоторые матричные группы Ли.[2]

G	Группа Ли	Алгебра Ли
$\mathbf{GL}(\mathbf{N}, \mathbb{C})$	Невырожденные матрицы	Все матрицы
$\mathbf{SL}(\mathbf{N}, \mathbb{C})$	Унимодулярные матрицы	Бесследовые матрицы
$\mathbf{U}(\mathbf{N}, \mathbb{C})$	Унитарные матрицы	Антиэрмитовы матрицы
$\mathbf{SU}(\mathbf{N}, \mathbb{C})$	Унитарные унимодулярные матрицы	Антиэрмитовы бесследовые матрицы
$\mathbf{O}(\mathbf{N}, \mathbb{R})$	Ортогональные матрицы	Антисимметричные матрицы
$\mathbf{SO}(\mathbf{N}, \mathbb{R})$	Ортогональные унимодулярные матрицы	Антисимметричные матрицы

2.2 Свойства матриц Паули $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}.$$

[2] В кратком варианте пропускается обозначение числового поля, например, $SO(3) \equiv SO(3, \mathbb{R})$.

2.3 Алгебра угловых моментов $\mathbf{ASO(3)} \approx \mathbf{ASU(2)}$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k,$$
$$\mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2, \quad \mathcal{J}_+\mathcal{J}_- = \mathcal{J}^2 - \mathcal{J}_3^2 + \mathcal{J}_3, \quad \mathcal{J}_-\mathcal{J}_+ = \mathcal{J}^2 - \mathcal{J}_3^2 - \mathcal{J}_3.$$

Базис неприводимого представления образуют общие собственные векторы оператора $\mathcal{J}_3$ и оператора Казимира $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_3^2$ $([\mathcal{J}^2, \mathcal{J}_3] = [\mathcal{J}^2, \mathcal{J}_\pm] = 0)$

$$\mathcal{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1) |J, M\rangle \quad \mathcal{J}_3 |J, M\rangle = M |J, M\rangle .$$

Матричные элементы повышающего оператора $\mathcal{J}_+$ и понижающего оператора $\mathcal{J}_-$ равны, соответственно

$$\mathcal{J}_+ |J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M+1)}\, |J, M+1\rangle ,$$
$$\mathcal{J}_- |J, M\rangle = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\, |J, M-1\rangle .$$

Представление конечномерно, когда J целое или полуцелое. Размерность представления равна $2J+1$, целые J отвечают представлениям $\mathbf{ASO(3)}$.

2.4 Сферические гармоники

Целым значениям $J = l, M = m$ отвечают представления группы $\mathbf{SO(3)}$. Базис представлений группы вращений образуют сферические гармоники порядка l

$$\langle \theta, \varphi | l, m\rangle = Y_{l\,m}(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta) \quad Y_{l\,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*, \quad m \geq 0,$$

которые выражаются через присоединенные функции Лежандра

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m P_l(\cos\theta), \quad P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2-1)^l.$$

Нормировка дается формулой

$$C_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}.$$

Приведем сферические гармоники при $l \leq 3$

$$Y_{0\,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{1\,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1\,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta,$$
$$Y_{2\,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \quad Y_{2\,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta\cos\theta, \quad Y_{2\,2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{2i\varphi}\sin^2\theta,$$
$$Y_{3\,0} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta), \quad Y_{3\,1} = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}}e^{i\varphi}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta,$$
$$Y_{3\,2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}}e^{2i\varphi}\cos\theta\sin^2\theta, \quad Y_{3\,3} = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}}e^{3i\varphi}\sin^3\theta.$$

Соотношение полноты

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\mathbf{n})Y^*_{lm}(\mathbf{n}') = \delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}'),$$

где $\mathbf{n}=(\theta,\varphi), \mathbf{n}'=(\theta',\varphi')$ — единичные векторы.

Операторы углового момента на базисе из сферических гармоник реализуется как

$$\mathcal{J}_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \mathcal{J}_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad -\mathcal{J}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

2.5 Характер неприводимого представления SO(3) (или SU(2))

Характер представления размерности $2j+1$ зависит исключительно от угла поворота и не зависит от оси вращения. Параметризация выбрана так, чтобы поворот происходил на угол α вокруг оси z. Поэтому характер равен следу D-матрицы $\chi^j = \operatorname{Tr} D^j_{m'\,m}(0,0,\alpha)$

$$\chi^j = \sum_{m=-j}^{j} e^{im\alpha} = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Соотношение ортогональности (1) в непрерывной группе в качестве усреднения вместо суммирования содержит интегрирование

$$\left\langle \chi^i\chi^j\right\rangle_G = \int_0^{2\pi}\chi^i(\alpha)\chi^j(\alpha)(1-\cos\alpha)\,d\alpha = \delta_{ij}.$$

Из ортогональности характеров получается разложение Клебша — Гордана тензорного произведения неприводимых представлений

$$D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)}.$$

Пользуясь ассоциативностью, можно разложить в прямую сумму произведение любого конечного количества представлений.

3 Приложения

3.1 Колебания молекул

Таблица характеров исходного представления и колебательного представления для N-атомной молекулы.[3]

[3] Третий столбец таблицы не относится к молекулам типа ротатора.

$g \in G$	Исходное предст.	Колебательное предст.
E	$3N$	$3N-6$
C_n	$N_A(1+2\cos\theta)$	$(N_A-2)(1+2\cos\theta)$
S_n	$N_S(-1+2\cos\theta)$	$N_S(-1+2\cos\theta)$
σ	N_P	N_P

Обозначения: S_n — зеркально-поворотная ось порядка n, σ — зеркальная плоскость, $\theta = 2\pi/n$, N_A число атомов на оси вращения, N_S — число атомов на зеркально-поворотной оси, N_p — число атомов в зеркальной плоскости. Коэффициенты разложения на неприводимые представления находятся по формуле (2). Кратность вырождения классических колебаний молекулы равна размерности неприводимого представления.

3.2 Собственные векторы и собственные значения матрицы

Иногда удается найти собственные векторы и собственные значения матрицы V порядка r

$$Va_n = \lambda a_n,$$

перестановочной с матрицами представления $D(g)$ группы G, $\dim D(g) = r$:

$$[D(g), V] = 0.$$

Задачи такого типа возникают, например, в классической механике при расчете собственных колебаний симметричной системы грузиков с пружинами или молекулярных колебаний. Если в результате разложения (2) исходного представления на неприводимые оказалось, что все $k_\alpha = 0$ или 1, представление называется *просто приводимым.* Для таких представлений теорема Вигнера гарантирует возможность построить проектор на подпространство неприводимого представления $D^{(\alpha)}$:

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{n_\alpha}{|G|} \sum_{g\in G} \left[\chi^{(\alpha)}(g)\right]^* D(g),$$

где $\chi^{(\alpha)}$ характер неприводимого представления α, n_α — его размерность, а $D(g)$ — матрицы исходного r-мерного представления. Когда известен проектор, можно найти и собственные векторы, отвечающие данному собственному значению. Для этого надо подействовать на какие-нибудь векторы проектором $\mathcal{P}_\alpha$. Зная собственные векторы и оператор $\mathcal{V}$, можно также найти собственные значения. При этом не приходится решать секулярное уравнение степени r.

3.3 Правила отбора

Матричный элемент $O_{fi} = \langle f|\mathcal{O}|i\rangle$ обращается в нуль, если в разложении Клебша — Гордана исходного представления

$$D = D_f^* \otimes D_O \otimes D_i$$

на неприводимые не содержится единичное представление. Здесь $D_{i,f}$ — представления, по которым преобразуются начальное и конечное состояние, D — представление, по которому преобразуется оператор $\mathcal{O}$, * означает сопряженное представление.

3.4 Инвариантные тензоры

Тензор ранга n относительно группы $G < \mathbf{GL}(\mathbf{N}, \mathbb{R})$ преобразуется под действием элементов группы как тензорное произведение n экземпляров представления группы $D(g), \dim D = N$:

$$D_T(g) = \bigotimes_{i=1}^{n} D(g).$$

Если под действием преобразований группы тензор не меняется, его называют инвариантным тензором. Тензор T, инвариантный относительно группы G, имеет столько независимых компонент, сколько раз единичное представление входит в его разложение Клебша — Гордана. Чем выше симметрия, тем меньше независимых компонент у инвариантного тензора.

Ниже приведены разложения по инвариантным тензорам при $n \leq 3$ для групп $\mathbf{SO(3)}, \mathbf{O(2)}$:

$$\begin{aligned} P_i = 0, \quad Q_{ij} = A\delta_{ij}, \quad R_{ijk} = B\epsilon_{ijk}. \\ P_i = An_i, \quad Q_{ij} = A\delta_{ij} + Bn_in_j + C\epsilon_{ijk}n_k, \\ R_{ijk} = A_1\delta_{ij}n_k + A_2\delta_{ik}n_j + A_3\delta_{jk}n_i \\ +B_1\epsilon_{ijl}n_ln_k + B_2\epsilon_{ikl}n_jn_l + B_3\epsilon_{jkl}n_in_l + Cn_in_jn_k, \end{aligned}$$

где n_i единичный вектор вдоль оси вращения в группе $\mathbf{O(2)}$, буквы A, B, C обозначают произвольные независимые константы.

3.5 Симметричные тензоры

Действие подстановки $\sigma \in P_n$ на тензоре ранга n относительно вещественной группы $G < GL(N, \mathbb{R})$ определено как перестановка индексов

$$\sigma T_{i_1\, i_2\, \dots\, i_n} = T_{\sigma(i_1\, i_2\, \dots\, i_n)}.$$

Тензор общего вида не меняется каким-то определенным образом при перестановке индексов. С помощью специальных операторов Юнга можно сделать тензор симметричным или антисимметричными относительно перестановки индексов. Когда ранг тензора $n = 2$ имеются два оператора Юнга: симметризатор и антисимметризатор.

Симметризатор

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in P_n} \sigma$$

выделяет полностью симметричную часть тензора

$$\mathfrak{s} T_{i_1\, i_2 \ldots i_n} = S_{i_1\, i_2 \ldots i_n}, \quad \sigma_0 S = S,$$

где σ_0 — транспозиция произвольной пары индексов.

Антисимметризатор

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in P_n} P_\sigma \sigma,$$

где $P_\sigma = \pm 1$ — четность подстановки σ, выделяет полностью антисимметричную часть тензора

$$\mathfrak{a} T_{i_1\, i_2 \ldots i_n} = A_{i_1\, i_2 \ldots i_n}, \quad \sigma_0 A = -A.$$

При $n > 2$, помимо симметризатора и антисимметризатора, имеются еще и частичные симметризаторы. Полное число различных симметризаторов совпадает с количеством неприводимых представлений группы подстановок P_n. Так, при $n = 3$ имеется один дополнительный частичный симметризатор $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} T_{ijk} = \frac{1}{3}(2T_{ijk} - T_{jik} - T_{kji}) \equiv B_{ijk}.$$

Получившийся тензор обладает следующей симметрией по отношению к циклической перестановке индексов

$$B_{ijk} + B_{kij} + B_{jki} = 0.$$

Симметризованные тензоры образуют инвариантное подпространство относительно действия группы G, а следовательно разлагаются на меньшее количество неприводимых представлений.

Тензор ранга n в пространстве $\mathbb{C}^N$ преобразуется как тензорное произведение n экземпляров представления $D(g)$ группы G. Разложение Клебша — Гордана тензорного представления в прямую сумму неприводимых представлений

$$T(g) = \bigotimes_{i=1}^{n} D(g) = \bigoplus_j k_j D^{(j)}(g)$$

производится с помощью соотношения ортогональности характеров (1), (2), причем характер тензорного представления равен $\chi_T(g) = \chi^n(g)$, где $\chi(g)$ — характер представления $D(g)$.

Если тензор обладает некоторой симметрией по перестановкам индексов, то характер тензорного представления вычисляется по более сложной формуле, которая выводится с помощью симметризации базиса. Здесь приведены формулы для тензоров 2-го

$$\begin{aligned}
\chi_s(g) &= \frac{1}{2}\left[\chi^2(g) + \chi(g^2)\right], \\
\chi_a(g) &= \frac{1}{2}\left[\chi^2(g) - \chi(g^2)\right]
\end{aligned}$$

и 3-го ранга

$$\begin{aligned}
\chi_s(g) &= \frac{1}{6}\left[\chi^3(g) + 3\chi(g)\chi(g^2) + 2\chi(g^3)\right], \\
\chi_a(g) &= \frac{1}{6}\left[\chi^3(g) - 3\chi(g)\chi(g^2) + 2\chi(g^3)\right], \\
\chi_b(g) &= \frac{2}{3}\left[\chi^3(g) - \chi(g^3)\right].
\end{aligned}$$