

**НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ КАТАЛИЗА ИМ. Г.К.БОРЕСКОВА СО РАН**

**С.Н. Трухан, С.С. Якушкин, О.Н. Мартьянов**

# **Ферромагнитный резонанс дисперсных магнетиков**

Дополнение к курсу лекций "Магнитные свойства вещества"

Учебно-методическое пособие

Новосибирск  
2013

**УДК 537.6**  
**ББК 22.334**

*Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг. (соглашение № 8190)*

**С.Н. Трухан, С.С. Якушкин, О.Н. Мартьянов.** Ферромагнитный резонанс дисперсных магнетиков. Дополнение к курсу лекций "Магнитные свойства вещества", Новосибирск: Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН, 2013. 28 с.

Учебно-методическое пособие представляет собой подробное изложение материала дополнительной лекции "Ферромагнитный резонанс дисперсных магнетиков" читаемой студентам 4-го курса кафедры "Физические методы исследования твердого тела" физического факультета НГУ в рамках курса "Магнитные свойства вещества". Описаны основы физики взаимодействия ферромагнитной частицы с магнитным полем. Подробно изложено решение уравнений Ландау-Лифшица описывающих движение магнитного момента и выведены формулы для расчета интенсивности поглощения переменного магнитного поля ферромагнитным образцом эллипсоидной формы. Изложены основы суперпарамагнитного резонанса. Пособие будет полезно студентам, специализирующимся по направлению физических методов исследования, физики и химии твердого тела, материаловедения, а также широкому кругу специалистов.

## Оглавление

<b>Ферромагнитный резонанс</b> .....	<b>1</b>
Движение магнитного момента .....	2
Учет диссипации .....	5
Поглощаемая мощность.....	7
Влияние формы.....	9
Обобщенный метод решения уравнений движения намагниченности ..	14
<b>Суперпарамагнитный резонанс</b> .....	<b>20</b>
<b>Приложение</b> .....	<b>27</b>
Уравнение движения магнитного момента в магнитном поле. ....	27

## Ферромагнитный резонанс

Резонансное поглощение электромагнитного излучения ферромагнетиками в области сверхвысоких частот ( $\sim 1$  ГГц) аналогично электронному парамагнитному резонансу или ядерному магнитному резонансу. Ферромагнитный резонанс (ФМР) впервые фактически наблюдал В.К. Аркадьев в 1911 г [1]. Качественное квантовое объяснение ФМР было дано в 1923 Я.Г. Дорфманом [2]. В 1935 году появилась теоретическая работа Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [3], которая внесла ясность в вопрос о поведении ферромагнитного тела в СВЧ полях. В начале сороковых годов прошлого столетия физики вернулись к экспериментальному изучению ферромагнитного резонансного поглощения, которое в наиболее отчётливой форме было зарегистрировано в никеле и железо-кремниевом сплаве Е.К. Завойским [4] в СССР и независимо Гриффитсом [5] в Англии.

ФМР позволяет получать важную информацию о свойствах магнитных материалов. Основы ФМР изложены в [6], более детальное рассмотрение дано в книгах [7,8,9].

В опытах по ферромагнитному резонансу образец помещают в резонатор или волновод, где на него действует слабое переменное магнитное поле фиксированной частоты  $\nu_0$ . В направлении, перпендикулярном высокочастотному полю  $\mathbf{h}(t)$  прикладывают сильное постоянное однородное подмагничивающее поле  $\mathbf{H}_0$ , которое обычно доводит образец до состояния, близкого к насыщению. С классической точки зрения однородный в магнитном отношении образец объема  $V$  можно представлять себе как одну гигантскую молекулу с полным магнитным моментом  $\mathbf{M}V$ . Изменение во времени намагниченности  $\mathbf{M}$  в первом приближении подчиняется уравнению

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}], \quad (1)$$

поэтому выведенный из равновесия полный магнитный момент образца будет прецессировать вокруг направления постоянного магнитного поля. Энергия внешнего переменного электромагнитного поля  $\mathbf{h}(t)$  будет сильно поглощаться, когда его частота окажется равной частоте прецессии  $\nu_0 = \gamma H_0 / 2\pi = (g\mu_B / \hbar) H_0$ ,  $\omega_0 = \gamma H_0$ , где  $\gamma = ge/2m_e c = g\mu_B / \hbar$  – магнитомеханическое отношение,  $\mu_B = e\hbar/2m_e c$  – магнетон Бора,  $g$  –  $g$ -фактор. Это явление столь же хорошо можно описывать при

помощи представления о квантовании макроскопического вектора полного спина ферромагнетика в постоянном магнитном поле, считая, что расстояния между энергетическими уровнями такой системы отвечают обычным зеемановским частотам. Здесь, как и в ЭПР, действуют те же правила отбора для магнитного квантового числа  $\Delta m_s = \pm 1$ , которые разрешают переходы только между соседними уровнями, разница энергий между которыми равна  $h\nu_0 = \hbar\omega_0 = g\mu_B\Delta m_s H_0 = g\mu_B H_0$ .

В случае ферромагнитных веществ мы имеем дело в основном с проявлением спинового магнетизма. Поэтому  $g$ -фактор должен быть порядка 2. Однако фактически  $g$ -фактор в ферромагнетиках, определяемый из резонансных опытов несколько отличается от 2. Эти отклонения обусловлены небольшими добавками орбитального магнетизма. Обычно в кристаллах электрическое поле решётки почти полностью замораживает орбитальные магнитные моменты, которые лишь частично подмагничиваются спиновым моментом через спин-орбитальное взаимодействие.

Табл. 1. Значения  $g$ -факторов металлических ферромагнетиков.

Fe	2.08
Co	2.17
Ni	2.18
Gd	1.95

$h\nu_0 = g\mu_B H_{eff}$ , где  $H_{eff}$  – эффективное внутреннее поле в ферромагнетике

При экспериментальном изучении ферромагнитного резонанса по чисто техническим причинам частоту высокочастотного излучения удобнее поддерживать постоянной, а напряженность внешнего поля изменять в некоторых пределах около  $H_0$ , изменяя тем самым эффективное поле  $H_{eff}$ .

Типичные ферромагнетики обладают большой спонтанной намагниченностью ( $\sim 10^3$  Гс), поэтому магнитное резонансное поглощение в них особенно велико. Оно пропорционально магнитной восприимчивости и поэтому примерно на три порядка больше, чем в парамагнитных веществах.

Важной особенностью ФМР резонанса является также и то, что в ферромагнетиках существуют сильные внутренние поля магнитной анизотропии, обусловленные обменным взаимодействием между электронами, создающими спонтанный магнитный момент. Из-за этого эффективное поле  $H_{eff}$  будет зависеть от симметрии кристалла, от формы образца, от намагниченности  $M$ , от ее направления и направления внешнего магнитного поля  $H_0$  по отношению к кристаллографическим осям и к поверхностям, ограничивающим образец. Последний эффект обусловлен собственным магнитным полем образца ферромагнетика, возникающим из-за размагничивающих полей, обусловленных поверхностными "магнитными зарядами". Эти поля, зависящие от формы образца, оказываются сравнимым по величине с внешним полем. В случае парамагнетиков при наблюдении ЭПР собственное поле образца ничтожно мало и им часто пренебрегают.

### Движение магнитного момента

Рассмотрим ферромагнетик на который помимо однородного внешнего постоянного поля  $H_0$ , направленного вдоль оси  $z$  и доводящего образец до состояния, близкого к состоянию полного насыщения, действует в плоскости  $x, y$

слабое однородное поле  $\mathbf{h}(t)$ , гармонически изменяющееся во времени  $t$  с частотой  $\omega$ . Сначала не будем учитывать диссипацию, магнитную анизотропию и влияния полей размагничивания. Если размеры образца малы по сравнению с глубиной проникновения в ч. поля (скин-эффект) и длиной его волны в образце, то поле  $\mathbf{h}(t)$  внутри образца в каждый момент времени будет однородно по величине и направлению, а его фаза будет практически постоянна. В этом случае вынужденная полем  $\mathbf{h}(t)$  прецессия намагниченности образца будет также однородной.

Поскольку поле, действующее на спин-систему, состоит из постоянной и переменной частей  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t)$ , то намагниченность системы можно представить в виде  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(t)$ ,  $\mathbf{m}(t) \ll \mathbf{M}_0$ , где вектор статической намагниченности  $\mathbf{M}_0$  параллелен подмагничивающему полю  $\mathbf{H}_0$ , а вектор высокочастотной намагниченности  $\mathbf{m}(t)$  является малой, гармонически изменяющейся величиной. Тогда из (1), пренебрегая членом второго порядка малости содержащим  $[\mathbf{m}(t) \times \mathbf{h}(t)]$  и учитывая параллельность  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  ( $[\mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0] = 0$ ) получим:

$$\frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} = -\gamma[\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}(t)] - \gamma[\mathbf{m}(t) \times \mathbf{H}_0], \quad (2)$$

Пусть переменное поле меняется по гармоническому закону  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}e^{i\omega t}$ . Тогда в силу линейности уравнения (2)  $\mathbf{m}(t)$  также меняется по тому же закону  $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}e^{i\omega t}$ . Для комплексных амплитуд векторов  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{m}$  на основании уравнения (2) получим уравнение

$$i\omega\mathbf{m} + \gamma[\mathbf{m} \times \mathbf{H}_0] = -\gamma[\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}] \quad (3)$$

Спроектируем правую и левую стороны уравнения (3) на оси координат. Напомним, что

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Будем также считать, что ось  $z$  совпадает по направлению с  $\mathbf{H}_0$ , тогда

$$\begin{cases} i\omega m_x + \gamma H_0 m_y = \gamma M_0 h_y \\ i\omega m_y - \gamma H_0 m_x = -\gamma M_0 h_x \\ i\omega m_z = 0 \end{cases}$$

Откуда следует, что

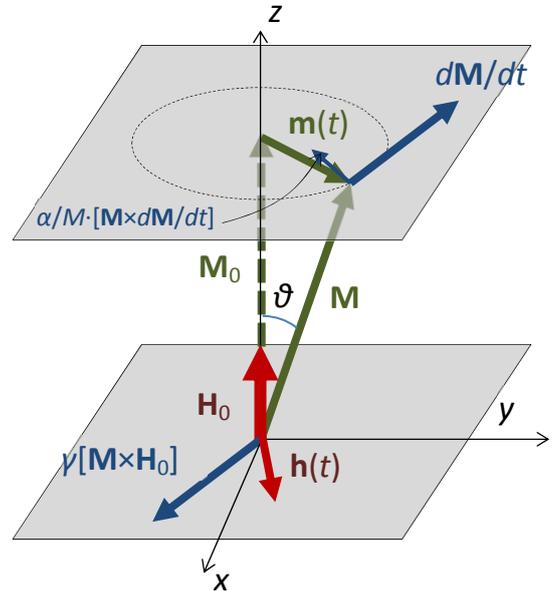


Рис. 1. Собственная прецессия намагниченности ферромагнетика.

$$\begin{cases} m_x = \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + i \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y \\ m_y = -i \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y \\ m_z = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

где  $\omega_0 \equiv \gamma H_0$ .

Выражения (4) можно записать в виде  $\mathbf{m} = \hat{\chi} \mathbf{h}$ ,

где  $\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – тензор магнитной восприимчивости, а

$$\chi = \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \chi_a = \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, при малых амплитудах в. ч. поля вектор высокочастотной намагниченности  $\mathbf{m}$  вращается в плоскости  $xy$ , перпендикулярной к постоянному полю  $\mathbf{H}_0$  (рис. 1). Тензорный характер соотношений (4) указывает на то, что осциллирующее поле, приложенное вдоль оси  $x$ , создает компоненты намагниченности как в направлении оси  $x$ , так и в направлении перпендикулярной ей оси  $y$ .

Из равенств (4) видно также, что зависимости  $\chi(\omega)$ ,  $\chi_a(\omega)$ ,  $m_x(\omega)$  и  $m_y(\omega)$  имеют резонансный характер с частотой резонанса  $\omega_0$ , т.е. резонанс происходит при совпадении частот переменного поля и прецессии намагниченности (рис. 2).

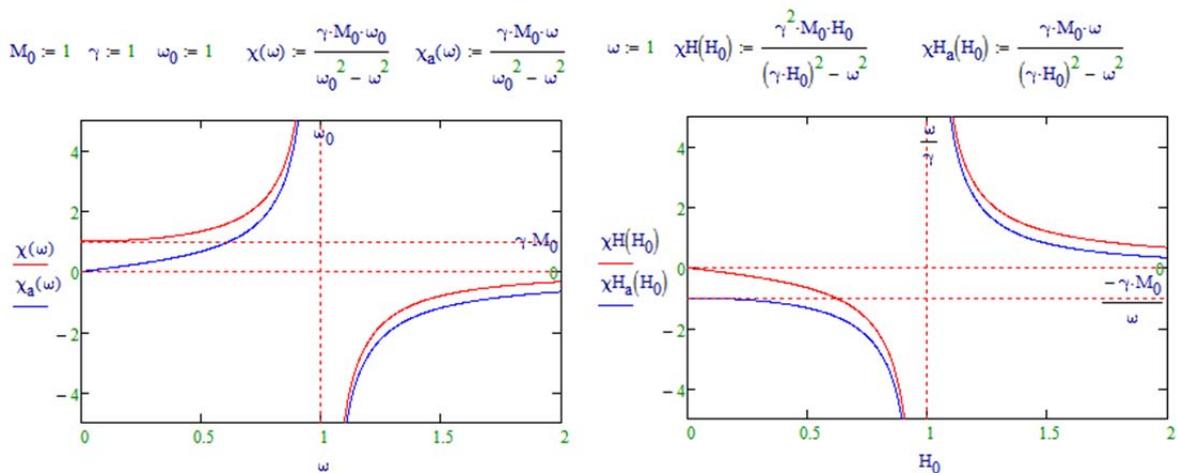


Рис. 2. Зависимости компонент тензора восприимчивости от частоты и постоянного магнитного поля.

Уравнения (4) качественно передают особенности поведения намагниченности лишь для неограниченной среды в области частот, далеких от резонансной частоты  $\omega_0$ . Вблизи  $\omega_0$  они становятся непригодными, так как в них не учтены потери энергии в среде. Учет последних, как будет показано ниже, приводит к тому, что компоненты тензора динамической восприимчивости становятся комплексными и сохраняют при резонансе конечное значение.

### Учет диссипации

Выше шла речь о колебаниях намагниченности в идеализированном ферромагнетике, в котором отсутствует диссипация энергии. Однако в действительности колебания магнитной системы, сопровождаются диссипацией энергии, т. е. с передачей ее другим системам, в конечном счете – кристаллической решетке. Наличие диссипации приводит к тому, что свободные колебания намагниченности затухают, а вынужденные – имеют конечную амплитуду при резонансе и конечную ширину резонансной кривой.

Учесть процессы диссипации можно, введя в исходное уравнение движения намагниченности сравнительно малый член, который должен приводить к затуханию прецессии намагниченности.

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] + \mathbf{R}$$

Наиболее простым является допущение о том, что на намагниченность действует дополнительное эффективное поле, пропорциональное по величине и обратное по знаку скорости изменения  $\mathbf{M}$  («трение», пропорциональное скорости). Тогда, введя безразмерный параметр  $\alpha$ , получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] + \frac{\alpha}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right], \quad (5)$$

известное как уравнение Гильберта.

Если в правой части (5) заменить, используя для этого уравнение без диссипативного члена (1),  $d\mathbf{M}/dt$  на  $-\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}]$  и вместо  $\alpha$  ввести параметр диссипации  $\omega_d = \alpha\gamma M$ , то получится уравнение движения в форме Ландау – Лифшица [3]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] - \frac{\omega_d}{M^2} [\mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]] \quad (6)$$

Часто вместо параметра диссипации  $\omega_d$  вводят параметр затухания  $\lambda = \omega_d/\gamma$ .

Уравнения (5) и (6) эквивалентны не только приближенно, но и точно – при некоторой перенормировке коэффициента  $\gamma$  при главном члене. Действительно, как легко убедиться, (6) переходит в (5) при замене  $\gamma \rightarrow \gamma/(1+\alpha^2)$  и  $\omega_d \rightarrow \alpha\gamma M/(1+\alpha^2)$ .

После этой замены уравнение (6) будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] - \frac{\alpha\gamma}{M} [\mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]] - \alpha^2 \frac{d\mathbf{M}}{dt} \quad (7)$$

Покажем, что

$$-\frac{\alpha\gamma}{M} [\mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]] - \alpha^2 \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{\alpha}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right]. \quad (8)$$

Тем самым будет доказана полное соответствие (7) и (5), а, следовательно, и эквивалентность (5) и (6).

Перепишем (8) в виде

$$-\alpha \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{1}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right] + \frac{\gamma}{M} [\mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]] = \frac{1}{M} \left[ \mathbf{M} \times \left[ \frac{d\mathbf{M}}{dt} + \gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] \right] \right]$$

Согласно (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \left[ \mathbf{M} \times \left[ \frac{d\mathbf{M}}{dt} + \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}] \right] \right] &= \frac{1}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{\alpha}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right] \right] = \frac{\alpha}{M^2} \left[ \mathbf{M} \times \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right] \right] = \\ &= \frac{\alpha}{M^2} \left( \mathbf{M} \left( \mathbf{M} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{M}}{dt} (\mathbf{M}\mathbf{M}) \right) = \frac{\alpha}{M^2} \left( \mathbf{M} \cdot 0 - \frac{d\mathbf{M}}{dt} M^2 \right) = -\alpha \frac{d\mathbf{M}}{dt} \end{aligned}$$

Здесь мы использовали ортогональность векторов  $\mathbf{M}$  и  $d\mathbf{M}/dt$ , а также известное из векторной алгебры соотношение  $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b})$ .

Отметим, что диссипативные члены в (5) и (6) перпендикулярны  $\mathbf{M}$  и, следовательно, длина вектора  $\mathbf{M}$  сохраняется.

Аналогично тому, как мы получили уравнение (3) в первом приближении из (5) получим

$$i\omega \mathbf{m} + \gamma [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_0] + \frac{i\omega\alpha}{M_0} [\mathbf{m} \times \mathbf{M}_0] = -\gamma [\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}] \quad (9)$$

Здесь мы учли, что

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right] &= \frac{\alpha}{M_0} \left[ (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m}e^{i\omega t}) \times \frac{d(\mathbf{M}_0 + \mathbf{m}e^{i\omega t})}{dt} \right] = \\ &= \frac{i\omega\alpha}{M_0} \left[ (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m}e^{i\omega t}) \times \mathbf{m}e^{i\omega t} \right] \cong -\frac{i\omega\alpha}{M_0} [\mathbf{m} \times \mathbf{M}_0] e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Обозначим через  $\mathbf{z}_0$  единичный вектор вдоль  $\mathbf{M}_0$ . Поскольку  $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0$ , то отношение  $\mathbf{M}_0/M_0 = \mathbf{H}_0/H_0 = \mathbf{z}_0$ . Тогда учтя тождество  $\omega_0 \equiv \gamma H_0$  формулу (9) можно записать как

$$i\omega \mathbf{m} + (\omega_0 + i\omega\alpha) [\mathbf{m} \times \mathbf{z}_0] = -\gamma M_0 [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{h}] \quad (10)$$

Используя вектор  $\mathbf{z}_0$  уравнение (3) в свою очередь можно записать в виде

$$i\omega \mathbf{m} + \omega_0 [\mathbf{m} \times \mathbf{z}_0] = -\gamma M_0 [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{h}] \quad (11)$$

Отсюда видно, что уравнение (10) получается из (11) простой заменой параметра  $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + i\alpha\omega$ . Следовательно, используя эту замену можно сразу получить решения уравнения (10) из решений уравнения (3):

$$\mathbf{m} = \hat{\chi} \mathbf{h} \quad \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \hat{\chi} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad \hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \frac{\gamma M_0 (\omega_0 + i\alpha\omega)}{\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_0} \quad \chi_a = \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_0}$$

Восприимчивости получились комплексные, их можно представить в виде

$$\chi = \chi' - i\chi''$$

$$\chi' = D^{-1} \gamma M_0 \omega_0 (\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2) \quad \chi'' = D^{-1} \alpha \gamma M_0 \omega (\omega_0^2 + (1 + \alpha^2)\omega^2)$$

$$\chi_a = \chi'_a - i\chi''_a \quad (12)$$

$$\chi'_a = D^{-1} \gamma M_0 \omega (\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2) \quad \chi''_a = D^{-1} 2\alpha \gamma M_0 \omega^2 \omega_0$$

$$D = (\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2)^2 + (2\alpha\omega\omega_0)^2$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi' - i\chi'' & i(\chi'_a - i\chi''_a) & 0 \\ -i(\chi'_a - i\chi''_a) & \chi' - i\chi'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \chi' - i\chi'' & i\chi'_a + \chi''_a & 0 \\ -i\chi'_a - \chi''_a & \chi' - i\chi'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi' - i\chi'' & \chi''_a + i\chi'_a & 0 \\ -\chi''_a - i\chi'_a & \chi' - i\chi'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\nu := 9.4 \cdot 10^9 \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot \nu \quad M_0 := 160 \text{ Э} \quad \gamma := 0.01761 \cdot 10^9 \text{ Гц/Э} \quad \alpha := \frac{3 \cdot 10^9}{\omega} = 0.051$$

$$D(H_0) := \left[ (\gamma \cdot H_0)^2 - (1 + \alpha^2) \cdot \omega^2 \right]^2 + (2 \cdot \alpha \cdot \omega \cdot \gamma \cdot H_0)^2 \quad \frac{\omega}{\gamma} = 3.354 \times 10^3$$

$$\chi^1(H_0) := \frac{\gamma^2 \cdot M_0 \cdot H_0 \cdot \left[ (\gamma \cdot H_0)^2 - (1 + \alpha^2) \cdot \omega^2 \right]}{D(H_0)} \quad \chi^2(H_0) := \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot M_0 \cdot \omega \cdot \left[ (\gamma \cdot H_0)^2 + (1 + \alpha^2) \cdot \omega^2 \right]}{D(H_0)}$$

$$\chi^1_a(H_0) := \frac{\gamma \cdot M_0 \cdot \omega \cdot \left[ (\gamma \cdot H_0)^2 - (1 + \alpha^2) \cdot \omega^2 \right]}{D(H_0)} \quad \chi^2_a(H_0) := \frac{2 \cdot \alpha \cdot \gamma^2 \cdot M_0 \cdot H_0 \cdot \omega^2}{D(H_0)}$$

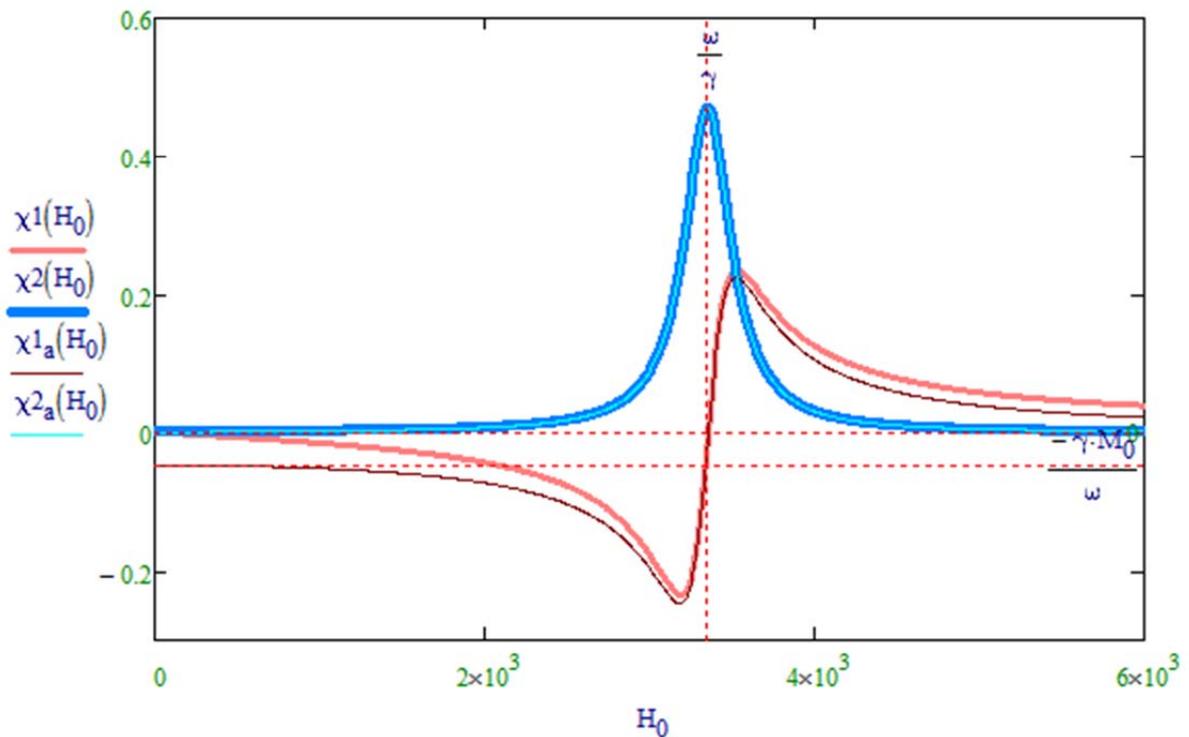


Рис. 3. Зависимости вещественных и мнимых компонент тензора восприимчивости от величины постоянного магнитного поля при наличии затухания.

### Поглощаемая мощность

Теперь рассмотрим вопрос о величине поглощаемой мощности переменного магнитного поля. Из термодинамики известно, что работа, совершаемая источниками внешнего магнитного поля при бесконечно малом изменении поля для изотермического процесса, есть  $-MdB$ .  $= -\mu_{\text{возд}} dH = -MdH$ . Отсюда работа  $dA_\omega(t)$  совершаемая источником переменного поля, изменяющегося по гармоническому закону с частотой  $\omega$  есть

$$dA_\omega(t) = -m d\mathbf{h}/dt$$

или при комплексном рассмотрении

$$= \text{Re}[-\hat{\chi} \mathbf{h} d\mathbf{h}^*/dt] = \text{Re}[-\hat{\chi} \mathbf{h}(t)(-i\omega) \mathbf{h}^*(t)] = \text{Re}[i\omega \mathbf{h}(t) \hat{\chi} \mathbf{h}(t)].$$

После усреднения по времени, учитывая, что

$$\text{Re} \left( \int_0^\infty e^{i\omega t} (e^{i\omega t})^* dt \right) = \int_0^\infty \cos^2(\omega t) dt = 1/2,$$

получим

$$P = \text{Re} \left( \frac{i\omega}{2} \mathbf{h}^* \hat{\chi} \mathbf{h} \right) = -\text{Im} \left( \frac{\omega}{2} \mathbf{h}^* \hat{\chi} \mathbf{h} \right)$$

При большом значении магнитной восприимчивости, характерном для ферромагнетиков  $\chi \cong \mu/4\pi$  это выражение совпадает со строго полученным выражением для магнитной составляющей средней мощности, выделяющейся в среде, находящейся в электромагнитном поле [9], с.257, формула (5.3.17).

$$P = -\text{Im} \left( \frac{\omega}{8\pi} \mathbf{h}^* \hat{\mu} \mathbf{h} \right)$$

Отсюда несложно показать, что диссипация электромагнитной энергии происходит только в среде с мнимыми частями симметричных компонент и вещественными частями антисимметричных компонент тензора  $\hat{\chi}$ :  $\chi''$  и  $\chi_a''$  (см. (12) и (13)):

Для плоско-поляризованных волн

$$\text{вдоль оси } x: \text{Re}[(h,0,0)e^{i\omega t}] = (h\cos(\omega t), 0, 0):$$

$$\text{Im} \left[ (h \ 0 \ 0) \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 + i\chi_2 & (\chi_{1a} + i\chi_{2a}) & 0 \\ -(\chi_{1a} + i\chi_{2a}) & \chi_1 + i\chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left| \begin{array}{l} \text{assume, } h = \text{real, } \chi_1 = \text{real, } \chi_2 = \text{real} \\ \text{assume, } \chi_{1a} = \text{real, } \chi_{2a} = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow h^2 \cdot \chi_2$$

$$\text{вдоль оси } y: \text{Re}[(0,ih,0)e^{i\omega t}] = (0, h\sin(\omega t), 0):$$

$$\text{Im} \left[ (0 \ i \cdot h \ 0) \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 + i\chi_2 & (\chi_{1a} + i\chi_{2a}) & 0 \\ -(\chi_{1a} + i\chi_{2a}) & \chi_1 + i\chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -i \cdot h \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left| \begin{array}{l} \text{assume, } h = \text{real, } \chi_1 = \text{real, } \chi_2 = \text{real} \\ \text{assume, } \chi_{1a} = \text{real, } \chi_{2a} = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow h^2 \cdot \chi_2$$

Для электромагнитных волн с круговой поляризацией

$$\text{Im} \left[ \begin{pmatrix} h \\ \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 + i\chi_2 & (\chi_{1a} + i\chi_{2a}) & 0 \\ -(\chi_{1a} + i\chi_{2a}) & \chi_1 + i\chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{\sqrt{2}} \\ -i \cdot \frac{h}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left| \begin{array}{l} \text{assume, } h = \text{real, } \chi_1 = \text{real, } \chi_2 = \text{real} \\ \text{assume, } \chi_{1a} = \text{real, } \chi_{2a} = \text{real} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow h^2 \cdot (\chi_2 - \chi_{1a})$$

Здесь  $\chi_1 = \chi'$ ,  $\chi_2 = \chi''$ ,  $\chi_{1a} = \chi_a''$ ,  $\chi_{2a} = \chi_a'$ .

На качественном уровне это означает, что поглощение ферромагнетиком внешнего переменного магнитного поля  $\mathbf{h}(t)$  максимально, когда переменная составляющая вектора его намагниченности  $\mathbf{m}(t)$  отстает от  $\mathbf{h}(t)$  по фазе на  $\pi/2$ . Если диссипация отсутствует ( $\alpha = 0$ ), то при  $\omega \neq \omega_0$ :  $\mathbf{m}(t) \parallel \mathbf{h}(t)$ ,  $\chi'' = 0$ ,  $P = 0$ ; при  $\omega = \omega_0$  колебания перестают быть малыми и решение, полученное выше при линеаризации уравнения движения момента, перестает быть справедливым.

В случае малой диссипации, как следует из выражений

$$[2 \cdot \alpha \cdot (\omega_0 + \delta\omega) \cdot \omega_0]^2 \text{ series, } \delta\omega = 0, 1 \rightarrow 4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega_0^4$$

$$\left[ \omega_0^2 - (1 + \alpha^2) \cdot (\omega_0 + \Delta\omega)^2 \right]^2 \left| \begin{array}{l} \text{series, } \alpha = 0, 1 \\ \text{series, } \Delta\omega = 0, 1 \end{array} \right. \rightarrow 4 \cdot \Delta\omega^2 \cdot \omega_0^2$$

полуширина резонансной кривой  $\Delta\omega = \alpha\omega_0$  или  $\Delta H = \alpha H_0$ .

### Влияние формы

Тензор магнитной восприимчивости, который мы вычисляли выше, связывал намагниченность  $\mathbf{m}$  с внутренним (локальным) магнитным полем  $\mathbf{h}$ . Это поле рассматривалось как заданное. Однако заданным является не внутреннее, а внешнее поле, т.е. поле на достаточном удалении от образца. Внутреннее же поле зависит от намагниченности, и характер этой зависимости определяется формой образца. Таким образом, для корректного описания ФМР необходимо определить одновременно намагниченность и внутреннее поле при заданном внешнем поле. Для решения такой задачи в общем случае необходимо использовать уже не только уравнение движения намагниченности, но и уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла), а также граничные условия на поверхности образца.

При постоянном внешнем магнитном поле для определения внутреннего поля нет необходимости использовать полные уравнения Максвелла, достаточно воспользоваться методами магнитостатики. Это приближение будет справедливым и в случае переменного поля, если размеры образца много меньше длины электромагнитной волны в веществе и электропроводность вещества мала.

Рассмотрим ферромагнитное тело в виде прямоугольного бруска. Поместим его во внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{H}_e$ , направленное вдоль ребер бруска. Тогда брусок намагнитится в этом направлении до величины  $\mathbf{M}$  (ради простоты будем считать, что намагниченность однородна по всему объему бруска). При этом на торцовых поверхностях возникнут так называемые «магнитные полюсы». Плотность магнитного заряда  $\sigma_m$  на этих полюсах будет равна  $\mathbf{M}_s = \pm \mathbf{M}$ . Эти поверхностные «заряды», наряду с внешним полем  $\mathbf{H}_e$ , будут создавать свое магнитное поле  $\mathbf{H}_M$ , которое внутри бруска будет направлено против внешнего поля  $\mathbf{H}_e$  и против намагниченности  $\mathbf{M}$ , т.е. оно будет играть роль размагничивающего поля (рис. 4). Суммарное истинное поле внутри бруска будет равно

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_e + \mathbf{H}_M.$$

В общем случае размагничивающее поле  $\mathbf{H}_M$  равно

$$\mathbf{H}_M = -\hat{N}\mathbf{M},$$

где  $\hat{N}$  – тензор размагничивающих факторов (тензор размагничивания),

Для образцов эллипсоидной формы, помещенных в однородное внешнее поле, размагничивающее поле является однородным и  $\hat{N}$  – постоянен во всем объеме эллипсоида. В системе координат главных осей эллипсоида тензор  $\hat{N}$  – диагонален и его главные компоненты рассчитываются по следующим формулам:

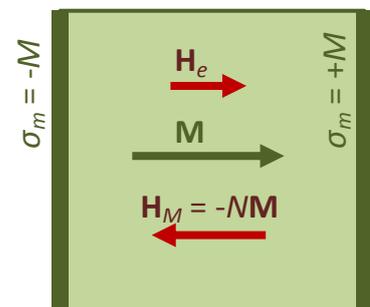


Рис. 4. Определение размагничивающего поля  $\mathbf{H}_M$ .

$$a := 3 \quad b := 2 \quad c := 1$$

$$N_a(a, b, c) := 2\pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2 + t) \cdot \sqrt{(a^2 + t) \cdot (b^2 + t) \cdot (c^2 + t)}} dt \quad N_a(a, b, c) = 1.964$$

$$N_b(a, b, c) := 2\pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(b^2 + t) \cdot \sqrt{(a^2 + t) \cdot (b^2 + t) \cdot (c^2 + t)}} dt \quad N_b(a, b, c) = 3.357$$

$$N_c(a, b, c) := 2\pi \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(c^2 + t) \cdot \sqrt{(a^2 + t) \cdot (b^2 + t) \cdot (c^2 + t)}} dt \quad N_c(a, b, c) = 7.245$$

$$N_a(a, b, c) + N_b(a, b, c) + N_c(a, b, c) = 14\pi$$

Отметим, что сумма диагональных элементов тензора  $\hat{N}$  в любой системе координат равна  $N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = 4\pi$ . Размагничивающие факторы для эллипсоида ( $a, b, c$  – полуоси эллипсоида)

В случае вытянутого ( $a > b = c$ ) и сплюсненного ( $a = b > c$ ) эллипсоидов можно получить алгебраические выражения для этих интегралов ( $m = a/c$ ):

Размагничивающие факторы для вытянутого (prolate) эллипсоида:  $a > b = c$

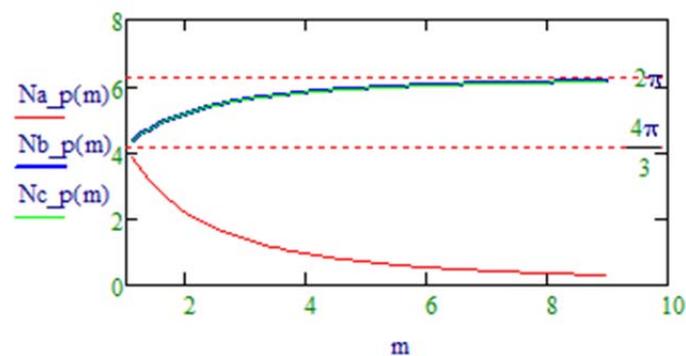
$$N_{a\_p}(m) := \frac{1}{m^2 - 1} \cdot \left( \frac{m}{2 \cdot \sqrt{m^2 - 1}} \cdot \ln \left( \frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right) - 1 \right) \cdot 4 \cdot \pi$$

$$N_{b\_p}(m) := \frac{m}{2(m^2 - 1)} \cdot \left( m - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{m^2 - 1}} \cdot \ln \left( \frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right) \right) \cdot 4 \cdot \pi$$

$$N_{c\_p}(m) := N_{b\_p}(m)$$

$$N_{a\_p}(m) + N_{b\_p}(m) + N_{c\_p}(m) = 1 \cdot 4\pi$$

$$m := 1, 1.1 \dots 9$$



Размагничивающие факторы для сплюсненного (oblate) эллипсоида:  $a = b > c$

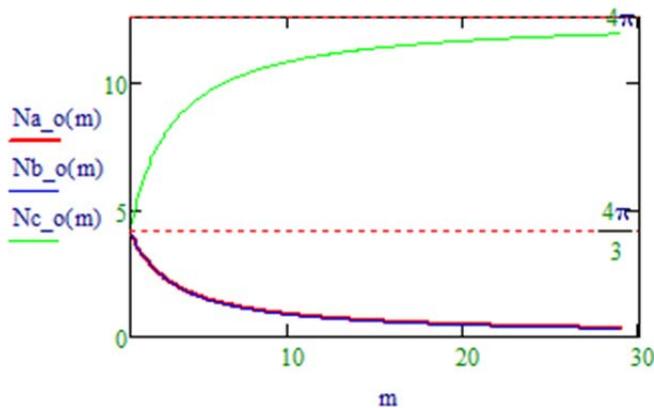
$$N_{a_o}(m) := \frac{1}{2 \cdot (m^2 - 1)} \cdot \left( \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \operatorname{asin} \left( \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m} \right) - 1 \right) \cdot 4 \cdot \pi$$

$$N_{b_o}(m) := N_{a_o}(m)$$

$$N_{c_o}(m) := \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}} \cdot \operatorname{asin} \left( \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m} \right) \right) \cdot 4 \cdot \pi$$

$$N_{a_o}(m) + N_{b_o}(m) + N_{c_o}(m) = 1 \cdot 4\pi$$

$$m := 1, 1.1 \dots 29$$



Из этих зависимостей видно, что, для шара ( $m = 1$ )  $N_a = N_b = N_c = 4\pi/3$ . Для бесконечного цилиндра вдоль его оси  $N_a = 0$ , а в поперечных направлениях  $N_b = N_c = 2\pi$ . Для пластины в направлениях параллельных ее плоскости  $N_a = N_b = 4\pi/3$ , а в нормальном  $N_c = 4\pi$ . Используя эти соотношения, а также определение вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ , легко определить суммарные индукцию и напряженность магнитного поля в предельных случаях

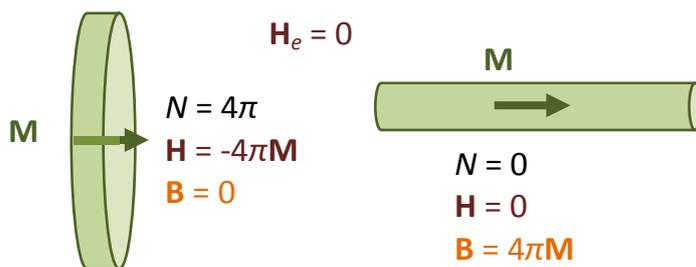


Рис. 5. Индукция и напряженность магнитного поля в различных намагниченных ферромагнитных образцах при отсутствующем внешнем поле.

плоских и вытянутых образцов. Заметим, что при рассмотрении намагниченного ферромагнетика (рис. 5), формулой  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  пользоваться нельзя, т.к. она применима только когда  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ , что для намагниченных ферромагнетиков не выполняется.

Следует также отметить, что довольно часто

встречается заблуждение, что поле  $\mathbf{H}$  определяется токами проводимости. Токами проводимости определяется лишь циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  по заданному контуру. Только в некоторых случаях поле  $\mathbf{H}$  определяется лишь токами проводимости.

В условиях проведения эксперимента по ФМР с эллипсоидным образцом внутреннее постоянное поле и амплитуда переменного поля в образце будут равны

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{e0} - \hat{N}\mathbf{M}_0 \text{ и } \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_e - \hat{N}\mathbf{m}.$$

Поскольку внешнее поле  $\mathbf{H}_e$ , имеет постоянную и переменную составляющие

$$\mathbf{H}_e(t) = \mathbf{H}_{e0} + \mathbf{h}_e e^{i\omega t},$$

то эти составляющие будут иметь также внутреннее поле намагниченности

$$\mathbf{H}_i(t) = \mathbf{H}_{i0} + \mathbf{h}_i e^{i\omega t}, \quad \mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m} e^{i\omega t}.$$

Уравнение движения  $\mathbf{m}$  можно получить из (5) произведя замену  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_i + \mathbf{h}_i = \mathbf{H}_{e0} + \hat{N}\mathbf{M}_0 + \mathbf{h}_e - \hat{N}\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{H}_{e0} + \hat{N}\mathbf{M}_0 + \mathbf{h}_e e^{i\omega t} - \hat{N}\mathbf{m} e^{i\omega t}$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] + \frac{\alpha}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{M}_0 + \mathbf{m} e^{i\omega t})}{dt} = & -\gamma \left[ (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m} e^{i\omega t}) \times (\mathbf{H}_{e0} - \hat{N}\mathbf{M}_0 + (\mathbf{h}_e - \hat{N}\mathbf{m}) e^{i\omega t}) \right] + \\ & + \frac{\alpha}{M} \left[ (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m} e^{i\omega t}) \times \frac{d(\mathbf{M}_0 + \mathbf{m} e^{i\omega t})}{dt} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\omega \mathbf{m} e^{i\omega t} = & \frac{\alpha}{M} \left[ \mathbf{M}_0 \times i\omega \mathbf{m} e^{i\omega t} \right] \\ & - \gamma \left[ (\mathbf{M}_0) \times (\mathbf{H}_{e0} - \hat{N}\mathbf{M}_0) \right] \\ & - \gamma \left[ (\mathbf{M}_0) \times ((\mathbf{h}_e - \hat{N}\mathbf{m}) e^{i\omega t}) \right] \\ & - \gamma \left[ (\mathbf{m} e^{i\omega t}) \times (\mathbf{H}_{e0} - \hat{N}\mathbf{M}_0) \right] \\ & - \gamma \left[ (\mathbf{m} e^{i\omega t}) \times ((\mathbf{h}_e - \hat{N}\mathbf{m}) e^{i\omega t}) \right] \end{aligned}$$

Считаем, что переменные составляющие являются малыми и воспользуемся методом последовательных приближений. В нулевом

в нулевом приближении получим  $\mathbf{M}_0 \times (\mathbf{H}_{e0} - \hat{N}\mathbf{M}_0) = 0$ , т.е. равновесная намагниченность параллельна внутреннему статическому полю, зависящему, в свою очередь, от намагниченности. Это уравнение может быть использовано для определения равновесной ориентации  $\mathbf{M}_0$ .

В первом приближении получаем линеаризованное уравнение движения  $\mathbf{m}$ .

$$i\omega \mathbf{m} + \gamma \left[ \mathbf{m} \times (\mathbf{H}_{e0} - \hat{N}\mathbf{M}_0) \right] + \gamma \left[ \hat{N}\mathbf{m} \times \mathbf{M}_0 \right] + \frac{i\omega\alpha}{M_0} \left[ \mathbf{m} \times \mathbf{M}_0 \right] = -\gamma \left[ \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}_e \right] \quad (14)$$

В случае свободных и не затухающих колебаний намагниченности, т.е. при  $\mathbf{h}_e = 0$  и  $\alpha = 0$  получим

$$i\omega \mathbf{m} + \gamma \left[ \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{i0} \right] + \gamma \left[ \hat{N}\mathbf{m} \times \mathbf{M}_0 \right] = 0$$

Спроектируем это уравнение на оси декартовой системы координат с осью  $z$ , параллельной векторам  $\mathbf{M}_0$  и  $\mathbf{H}_{i0}$ . Пусть в этой системе координат симметричный тензор  $\hat{N}$  имеет вид

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{cases} (i\omega + \gamma N_{12}M_0)m_x + (\omega_0 + \gamma N_{22}M_0)m_y = 0 \\ -(\omega_0 + \gamma N_{11}M_0)m_x + (i\omega - \gamma N_{12}M_0)m_y = 0, \\ i\omega m_z = 0 \end{cases} \quad (15)$$

где  $\omega_0 \equiv \gamma H_{e0z} = \gamma(H_{e0z} - N_{33}M_0)$ .

Равенство нулю определителя системы (15) дает выражение для собственной частоты однородной прецессии намагниченности малого эллипсоида

$$\left(\frac{\omega_{res}}{\gamma}\right)^2 = (H_{e0z} + (N_{11} - N_{33})M_0)(H_{e0z} + (N_{22} - N_{33})M_0) - N_{12}^2 M_0^2 \quad (16)$$

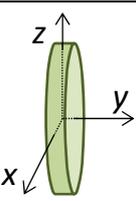
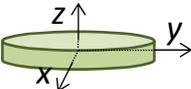
Подчеркнем, что вычисление  $\omega_{res}$  по этой формуле требует предварительного решения статической задачи, т. е. определения ориентации вектора  $\mathbf{M}_0$  относительно осей эллипсоида. Зная ее, можно получить значения компонент  $\hat{N}$  в системе координат, в которой ось  $z$  совпадает с  $\mathbf{M}_0$ , и вычислить проекцию  $\mathbf{H}_{e0}$  на эту ось.

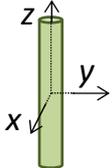
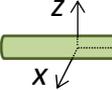
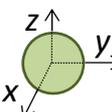
Когда внешнее поле  $\mathbf{H}_0$  направлено по одной из осей эллипсоида, вектор  $\mathbf{M}_0$  будет ему параллелен. Тогда  $N_{12} = 0$ ,  $N_{11} = N_x$ ,  $N_{22} = N_y$ ,  $N_{33} = N_z$  и выражение (16) переходит в этом случае в известную формулу Киттеля

$$\left(\frac{\omega_{res}}{\gamma}\right)^2 = (H_{e0} + (N_x - N_z)M_0)(H_{e0} + (N_y - N_z)M_0)$$

В табл. 2 для предельных случаев вытянутого и сплюснутого эллипсоида и для шара приведены соответствующие размагничивающие факторы, а также резонансные частоты и поля в зависимости от ориентации образцов во внешнем магнитном поле. Если образец – сфера, то размагничивающее поле не влияет на резонансную частоту. Это объясняется тем, что в случае сферы размагничивающее поле при любой ориентации намагниченности в том числе и в процессе ее прецессии направлено всегда против нее и поэтому влияния на движение намагниченности не оказывает.

Табл. 2. Размагничивающие факторы, резонансные частоты и поля при различной ориентации образцов во внешнем магнитном поле.

Образец	Размагничивающие факторы			$\omega_{res}/\gamma$	$H_{res}$
	$N_x$	$N_y$	$N_z$		
	0	$4\pi$	0	$\sqrt{H_{e0}(H_{e0} + 4\pi M_0)}$	$\sqrt{(2\pi M_0)^2 + \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2} - 2\pi M_0$
	0	0	$4\pi$	$H_{e0} - 4\pi M_0$	$\omega_{res}/\gamma + 4\pi M_0$

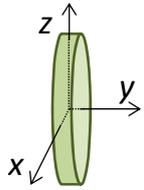
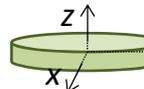
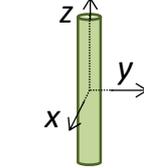
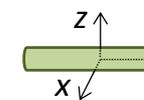
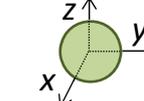
	$2\pi$	$2\pi$	$0$	$H_{e0} + 2\pi M_0$	$\omega/\gamma - 2\pi M_0$
	$2\pi$	$0$	$2\pi$	$\sqrt{H_{e0}(H_{e0} - 2\pi M_0)}$	$2\pi M_0 + \sqrt{(\pi M_0)^2 + \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2}$
	$4\pi/3$	$4\pi/3$	$4\pi/3$	$H_{e0}$	$\omega/\gamma$

В табл. 3 проведены резонансные поля образцов из железа кобальта и никеля при их различной ориентации во внешнем постоянном магнитном поле и при частоте переменного поля 10 ГГц. Намагниченности насыщения согласно справочным данным равны  $M_{0Fe} = 1752$  Э,  $M_{0Co} = 1446$  Э,  $M_{0Ni} = 510$  Э. В случае сильно вытянутого эллипсоида расположенного вдоль  $H_{e0}$  резонанс теоретически возможен в отрицательных полях, то есть в поле направленном противоположно вектору намагниченности  $\mathbf{M}$ , однако практически этого добиться невозможно, поскольку такое положение  $\mathbf{M}$  неустойчиво.

### Обобщенный метод решения уравнений движения намагниченности

Другой более удобный для последующего и допускающий широкие обобщения метод решения уравнений движения намагниченности с учетом анизотропных (зависящих от углов вектора  $\mathbf{M}$ ) взаимодействий был предложен Смитом [10] и Сулом [11] и распространен на случай наличия диссипации Скромким и Курбатовым [12]. Подробное его описание также дано в [9]. Величина и направление внутреннего эффективного поля в достаточно хорошем приближении могут быть определены на основе вариационного принципа, из которого следует, что

Табл. 3. Резонансные поля образцов из железа кобальта и никеля при частоте переменного поля 10 ГГц.

Образец	$H_{res}, \text{Э} (H_{e0} \parallel z)$		
	Fe	Co	Ni
	564	676	1591
	25590	21740	9978
	-	-	363
	12070	10320	5514
	3568	3568	3568

$$H_{eff} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}} \right), \quad (17)$$

где  $U$  – энергия различных взаимодействий. В случае однородно намагниченного образца три последних члена этого соотношения обращаются в ноль.

Уравнение движения магнитного момента

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}] + \frac{\alpha}{M} \left[ \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right]$$

будет иметь особенно простой вид, если перейти от декартовой системы координат к сферической и в формуле (17) учитывать только первый член в правой части, не рассматривая взаимодействий, энергия которых зависит от пространственных производных намагниченности.

Вместо декартовых составляющих намагниченности  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  введем переменные  $M$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  (см. рис. 6).

$$M_x = M \sin \vartheta \cos \varphi, \quad M_y = M \sin \vartheta \sin \varphi, \quad M_z = M \cos \vartheta,$$

$$\vartheta = \arccos(M_z/M), \quad \varphi = \arctg(M_y/M_x)$$

Вычислим декартовы составляющие эффективного поля (индексы *eff* в них опускаем), используя, кроме приведенных выше соотношений, условие  $M = \text{const}$ .

$$H_x = -\frac{\partial U}{\partial M_x} = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial M_x} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial M_x} =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} \frac{\partial (\arccos(M_z/M))}{\partial M_x} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial (\arctg(M_y/M_x))}{\partial M_x} =$$

$$= -0 + \frac{M_y}{M_x^2 (M_y^2/M_x^2 + 1)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\text{tg} \varphi}{M_x (\text{tg}^2 \varphi + 1)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{M_x} \frac{\partial U}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\sin \varphi}{M \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$H_y = -\frac{\partial U}{\partial M_y} = -\frac{1}{M_x (M_y^2/M_x^2 + 1)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{-1}{M_x (\text{tg}^2 \varphi + 1)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -\cos \varphi \frac{\cos \varphi}{M_x} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$= -\frac{\cos \varphi}{M \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

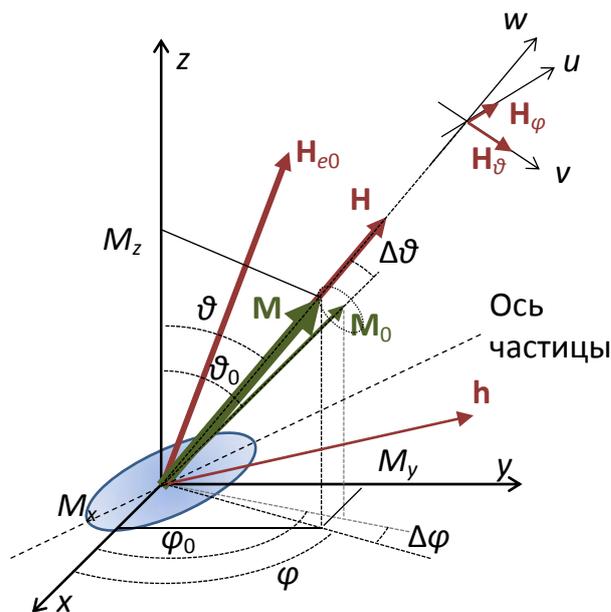


Рис. 6. Определение систем координат и углов, используемых при теоретическом рассмотрении ФМР.

$$H_z = -\frac{\partial U}{\partial M_z} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial (\arccos(M_z/M))}{\partial M_z} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} 0 = \frac{1}{M \sqrt{1 - \frac{M_z^2}{M^2}}} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{M \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Подставим полученные выражения в проекции уравнения (6).

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\varphi(t))}{M \cdot \sin(\theta(t))} \cdot U_\varphi \\ -\frac{\cos(\varphi(t))}{M \cdot \sin(\theta(t))} \cdot U_\varphi \\ \frac{1}{M \cdot \sin(\theta(t))} \cdot U_\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \cdot \sin(\theta(t)) \cdot \cos(\varphi(t)) \\ M \cdot \sin(\theta(t)) \cdot \sin(\varphi(t)) \\ M \cdot \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M \cdot \frac{d}{dt} \theta(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \cdot \cos(\theta(t)) - M \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) \cdot \sin(\varphi(t)) \cdot \sin(\theta(t)) \\ M \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t) \cdot \cos(\varphi(t)) \cdot \sin(\theta(t)) + M \cdot \frac{d}{dt} \theta(t) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \sin(\varphi(t)) \\ -M \cdot \frac{d}{dt} \theta(t) \cdot \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

$$\left[ -\gamma \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} - \frac{\omega_d}{M^2} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \right] \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{U_\varphi \cdot \omega_d \cdot \sin(\varphi(t))}{M \cdot \sin(\theta(t))} - \gamma \cdot U_\varphi \cdot \cos(\varphi(t)) \cdot \cot(\theta(t)) - \frac{\omega_d \cdot U_\theta \cdot \cos(\varphi(t)) \cdot \cos(\theta(t))}{M} - \gamma \cdot U_\theta \cdot \sin(\varphi(t)) \\ \gamma \cdot U_\theta \cdot \cos(\varphi(t)) - \gamma \cdot U_\varphi \cdot \cot(\theta(t)) \cdot \sin(\varphi(t)) - \frac{\omega_d \cdot U_\theta \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \sin(\varphi(t))}{M} - \frac{U_\varphi \cdot \omega_d \cdot \cos(\varphi(t))}{M \cdot \sin(\theta(t))} \\ \gamma \cdot U_\varphi + \frac{\omega_d \cdot U_\theta \cdot \sin(\theta(t))}{M} \end{pmatrix}$$

Видно, что три полученных уравнения удовлетворяются тождественно, если справедливы следующие два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma H_\varphi + \frac{\omega_d}{M} H_\theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\sin \theta} H_\theta + \frac{\omega_d}{M \sin \theta} H_\varphi \end{cases}, \quad (18)$$

где

$$H_\theta = -\frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad H_\varphi = -\frac{1}{M \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

Легко убедиться, что  $H_\vartheta$  и  $H_\varphi$  – не просто обозначения, а действительно представляют собой проекции эффективного поля на оси локальной системы координат, орты которой касательны к координатным линиям  $\vartheta$  и  $\varphi$  (третья составляющая  $H_r$ , параллельная  $M$ , в уравнение (6), а, следовательно, и в уравнения (18) не входит).

$$\underline{\underline{L}}(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad L(\varphi, \theta) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sin(\varphi)}{M \cdot \sin(\theta)} \cdot U_\varphi \\ -\frac{\cos(\varphi)}{M \cdot \sin(\theta)} \cdot U_\varphi \\ \frac{1}{M \cdot \sin(\theta)} \cdot U_\theta \end{pmatrix} \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{U_\theta}{M} \\ U_\varphi \\ \frac{U_\theta \cdot \cot(\theta)}{M} \end{pmatrix}$$

Записанные уравнения справедливы для произвольных движений вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ . Рассмотрим случай малых отклонений  $\mathbf{M}$  от равновесной намагниченности  $\mathbf{M}_0$ , ориентация которой характеризуется углами  $\vartheta_0$  и  $\varphi_0$  (рис. 6). Линеаризуем уравнения (18), сохранив в них члены только первого порядка малости. Предположим сначала, что переменное поле отсутствует, т. е. рассмотрим малые свободные колебания намагниченности. Разложим  $\partial U / \partial \vartheta$  и  $\partial U / \partial \varphi$  в ряды по малым величинам  $\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_0$  и  $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$  и ограничимся первыми членами этих рядов.

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\varphi=\varphi_0} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \theta} \Big|_{\varphi=\varphi_0} \cdot \Delta \theta + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} \cdot \Delta \varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\theta=\theta_0} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \cdot \Delta \theta + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \varphi} \Big|_{\theta=\theta_0} \cdot \Delta \varphi$$

Учитывая, что в положении равновесия  $(\partial U / \partial \vartheta)_{\vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0} = (\partial U / \partial \varphi)_{\vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0} = 0$ , имеем

$$H_\theta = -\frac{1}{M_0} (U_{\theta\theta} \Delta \theta + U_{\theta\varphi} \Delta \varphi), \quad H_\varphi = -\frac{1}{M_0 \sin \theta_0} (U_{\varphi\theta} \Delta \theta + U_{\varphi\varphi} \Delta \varphi),$$

где обозначено  $U_{\vartheta\varphi} = U_{\varphi\vartheta} = (\partial^2 U / \partial \vartheta \partial \varphi)_{\vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0}$ ,  $U_{\vartheta\vartheta} = (\partial^2 U / \partial \vartheta \partial \vartheta)_{\vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0}$ ,  $U_{\varphi\varphi} = (\partial^2 U / \partial \varphi \partial \varphi)_{\vartheta=\vartheta_0, \varphi=\varphi_0}$ .

Итак

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Delta\theta)}{\partial t} = -\frac{\gamma}{M_0 \sin \theta_0} (U_{\varphi\theta} \Delta\theta + U_{\varphi\varphi} \Delta\varphi) - \frac{\omega_d}{M_0^2} (U_{\theta\theta} \Delta\theta + U_{\theta\varphi} \Delta\varphi) \\ \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta_0} (U_{\theta\theta} \Delta\theta + U_{\theta\varphi} \Delta\varphi) - \frac{\omega_d}{M_0^2 \sin^2 \theta_0} (U_{\varphi\theta} \Delta\theta + U_{\varphi\varphi} \Delta\varphi) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Delta\theta)}{\partial t} + \left( \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\omega_d U_{\theta\theta}}{M_0^2} \right) \Delta\theta + \left( \frac{\gamma U_{\varphi\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\omega_d U_{\theta\varphi}}{M_0^2} \right) \Delta\varphi = 0 \\ \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial t} - \left( \frac{\gamma U_{\theta\theta}}{M_0 \sin \theta_0} - \frac{\omega_d U_{\theta\varphi}}{M_0^2 \sin^2 \theta_0} \right) \Delta\theta - \left( \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} - \frac{\omega_d U_{\varphi\varphi}}{M_0^2 \sin^2 \theta_0} \right) \Delta\varphi = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Предположим, что собственные колебания являются гармоническими:

$$\Delta \vartheta = \Theta e^{i\omega t}, \quad \Delta \varphi = \Phi e^{i\omega t},$$

где  $\omega$  – комплексная собственная частота колебаний, которую и нужно определить. Для комплексных амплитуд  $\Theta$  и  $\Phi$  из (19) получается система алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} \left( i\omega + \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\omega_d U_{\theta\theta}}{M_0^2} \right) \Theta + \left( \frac{\gamma U_{\varphi\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\omega_d U_{\theta\varphi}}{M_0^2} \right) \Phi = 0 \\ - \left( \frac{\gamma U_{\theta\theta}}{M_0 \sin \theta_0} - \frac{\omega_d U_{\theta\varphi}}{M_0^2 \sin^2 \theta_0} \right) \Theta + \left( i\omega - \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\omega_d U_{\varphi\varphi}}{M_0^2 \sin^2 \theta_0} \right) \Phi = 0 \end{cases}$$

Определитель ее  $det =$

$$\begin{vmatrix} i\omega + \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin(\theta_0)} + \frac{\omega_d U_{\theta\theta}}{M_0^2} & \frac{\gamma U_{\varphi\varphi}}{M_0 \sin(\theta_0)} + \frac{\omega_d U_{\theta\varphi}}{M_0^2} \\ \frac{\gamma U_{\theta\theta}}{M_0 \sin(\theta_0)} - \frac{\omega_d U_{\theta\varphi}}{M_0^2 \sin^2(\theta_0)} & i\omega - \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin(\theta_0)} + \frac{\omega_d U_{\varphi\varphi}}{M_0^2 \sin^2(\theta_0)} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{collect, } \omega} \frac{-\omega^2 + \frac{\omega_d U_{\theta\theta} M_0^2 \sin^2(\theta_0)^2 + \omega_d U_{\varphi\varphi} M_0^2}{M_0^4 \sin(\theta_0)^2} \omega - \frac{\gamma^2 M_0^2 U_{\theta\varphi}^2 - \gamma^2 U_{\varphi\varphi} U_{\theta\theta} M_0^2 + \omega_d^2 U_{\theta\varphi}^2 - U_{\varphi\varphi} U_{\theta\theta} \omega_d^2}{M_0^4 \sin(\theta_0)^2}}{(M_0 \sin(\theta_0))^2}$$

Частота собственных колебаний намагниченности может быть получена из равенства  $det = 0$ :

$$\omega_{res}^2 - \frac{i\omega_d}{M_0^2} \left( U_{\theta\theta} + \frac{U_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta_0} \right) \omega_{res} - \frac{(\gamma^2 M_0^2 + \omega_d^2) (U_{\theta\theta} U_{\varphi\varphi} - U_{\theta\varphi}^2)}{M_0^4 \sin^2 \theta_0} = 0$$

Без учета диссипации ( $\omega_d = 0$ ) отсюда следует

$$\omega_{res} = \frac{\gamma \sqrt{U_{\theta\theta} U_{\varphi\varphi} - U_{\theta\varphi}^2}}{M_0 \sin \theta_0} \quad (20)$$

Величина  $U$  в формуле (20) может включать в себя все виды плотности энергии ферромагнетика. Если же мы учтем в  $U$  только зеэмановскую энергию и энергию размагничивающих полей, то найдем собственную частоту малого эллипсоида, полученную другим методом (см. (16)). Здесь необходимо подчеркнуть, что расчет по формулам (16) и (20) проводится в разных системах координат.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания намагниченности под воздействием заданного переменного поля  $\mathbf{h}$ . Уравнения (18) и в этом случае будут справедливы, но входящая в них плотность энергии должна включать теперь дополнительно зеэмановскую энергию в переменном поле  $U_h = -\mathbf{Mh}$ . Обозначим суммарную плотность энергии через  $U_1$ , а под  $U$  будем понимать ту же величину, что и раньше:  $U_1 = U + U_h$ . Будем снова считать колебания малыми и разложим  $\partial U_1 / \partial \vartheta$  и  $\partial U_1 / \partial \varphi$  в ряды вблизи положения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} \cdot \Delta \theta + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} \cdot \Delta \varphi + \frac{\partial U_h}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \theta} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} \cdot \Delta \theta + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \varphi} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} \cdot \Delta \varphi + \frac{\partial U_h}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{\theta=\theta_0 \\ \varphi=\varphi_0}} \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 + U_{\theta\theta} \Delta \theta + U_{\theta\varphi} \Delta \varphi - M_0 h_\theta(t) \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 + U_{\theta\varphi} \Delta \theta + U_{\varphi\varphi} \Delta \varphi - M_0 \sin \theta_0 h_\varphi(t) \end{cases},$$

где  $h_\vartheta$  и  $h_\varphi$  – проекции переменного поля на оси локальной системы координат

Тогда

$$H_\theta = -\frac{1}{M_0} (U_{\theta\theta} \Delta \theta + U_{\theta\varphi} \Delta \varphi - M_0 h_\theta(t)), \quad H_\varphi = -\frac{1}{M_0 \sin \theta_0} (U_{\varphi\theta} \Delta \theta + U_{\varphi\varphi} \Delta \varphi - M_0 \sin \theta_0 h_\varphi(t))$$

и, также как мы ранее получили уравнения (19), аналогично имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Delta \theta)}{\partial t} = -\frac{\gamma}{M_0 \sin \theta_0} (U_{\varphi\theta} \Delta \theta + U_{\varphi\varphi} \Delta \varphi - M_0 \sin \theta_0 h_\varphi(t)) \\ \quad - \frac{\alpha \gamma}{M_0} (U_{\theta\theta} \Delta \theta + U_{\theta\varphi} \Delta \varphi - M_0 h_\theta(t)) \\ \frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_0 \sin \theta_0} (U_{\theta\theta} \Delta \theta + U_{\theta\varphi} \Delta \varphi - M_0 h_\theta(t)) \\ \quad - \frac{\alpha \gamma}{M_0 \sin^2 \theta_0} (U_{\varphi\theta} \Delta \theta + U_{\varphi\varphi} \Delta \varphi - M_0 \sin \theta_0 h_\varphi(t)) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Delta\theta)}{\partial t} + \left( \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\alpha\gamma U_{\theta\theta}}{M_0} \right) \Delta\theta + \left( \frac{\gamma U_{\varphi\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\alpha\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0} \right) \Delta\varphi = (\gamma h_\varphi + \alpha\gamma h_\theta) e^{i\omega t} \\ \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial t} - \left( \frac{\gamma U_{\theta\theta}}{M_0 \sin \theta_0} - \frac{\alpha\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin^2 \theta_0} \right) \Delta\theta - \left( \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} - \frac{\alpha\gamma U_{\varphi\varphi}}{M_0 \sin^2 \theta_0} \right) \Delta\varphi = \left( -\frac{\gamma h_\theta}{\sin \theta_0} + \frac{\alpha\gamma}{\sin \theta_0} h_\varphi \right) e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\omega_d}{\gamma M_0}$$

Ищем частное решение данного неоднородного уравнения в виде  $\Delta\vartheta = Ge^{i\omega t}$ ,  $\Delta\varphi = Fe^{i\omega t}$ , т.к.  $(\omega \in \text{Re}) \neq (\omega_{\text{res}} \in \text{Im})$ .

$$\begin{cases} i\omega G + \left( \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\alpha\gamma U_{\theta\theta}}{M_0} \right) G + \left( \frac{\gamma U_{\varphi\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} + \frac{\alpha\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0} \right) F = \gamma h_\varphi + \alpha\gamma h_\theta \\ i\omega F - \left( \frac{\gamma U_{\theta\theta}}{M_0 \sin \theta_0} - \frac{\alpha\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin^2 \theta_0} \right) G - \left( \frac{\gamma U_{\theta\varphi}}{M_0 \sin \theta_0} - \frac{\alpha\gamma U_{\varphi\varphi}}{M_0 \sin^2 \theta_0} \right) F = -\frac{\gamma}{\sin \theta_0} h_\theta + \frac{\alpha\gamma}{\sin \theta_0} h_\varphi \end{cases}$$

Находим  $G = a_{11}h_\vartheta + a_{12}h_\varphi$  и  $F = a_{21}h_\vartheta + a_{22}h_\varphi$ , где

$$\hat{a} = \frac{1}{\omega_{\text{res}}^2 - \omega^2 + i\omega\Delta\omega} \frac{1}{M_0} \left( \gamma^2 (1 + \alpha^2) \begin{pmatrix} \frac{U_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta_0} & -\frac{U_{\theta\varphi}}{\sin \theta_0} \\ -\frac{U_{\theta\varphi}}{\sin^2 \theta_0} & \frac{U_{\theta\theta}}{\sin \theta_0} \end{pmatrix} + i\omega\gamma M_0 \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\frac{1}{\sin \theta_0} & \frac{\alpha}{\sin \theta_0} \end{pmatrix} \right).$$

Итак, частное решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\varphi \\ \Delta r \end{pmatrix} = \hat{a} \begin{pmatrix} h_\theta \\ h_\varphi \\ h_r \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

По определению тензора магнитной восприимчивости  $\mathbf{m} = \hat{\chi}\mathbf{h}$ . Поскольку

$$\begin{pmatrix} m_v \\ m_u \\ m_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_\theta \\ m_\varphi \sin \theta_0 \\ m_z \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \sin \theta_0 \Delta\varphi \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

$$\hat{\chi} \begin{pmatrix} h_v \\ h_u \\ h_z \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} \chi_{vv} & \chi_{vu} & 0 \\ \chi_{uv} & \chi_{uu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\theta \\ h_\varphi \\ h_z \end{pmatrix} e^{i\omega t},$$

то

$$\begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\varphi \\ \Delta z \end{pmatrix} = \frac{1}{M_0} \begin{pmatrix} \chi_{vv} & \chi_{vu} & 0 \\ \chi_{uv} & \chi_{uu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_\theta \\ h_\varphi \\ h_z \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

и тензор магнитной восприимчивости имеет вид

$$\begin{pmatrix} \chi_{vv} & \chi_{vu} & 0 \\ \chi_{uv} & \chi_{uu} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{ww} \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ \sin \theta_0 a_{21} & \sin \theta_0 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\chi} = \frac{1}{\omega_{res}^2 - \omega^2 + i\omega\Delta\omega} \left( \gamma^2 (1 + \alpha^2) \begin{pmatrix} \frac{U_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta_0} & -\frac{U_{\theta\varphi}}{\sin \theta_0} & 0 \\ -\frac{U_{\theta\varphi}}{\sin \theta_0} & U_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i\omega\gamma M_0 \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Для того чтобы рассчитать регистрируемую в эксперименте поглощаемую мощность  $P = -\text{Im} \left( \frac{\omega}{2} \mathbf{h}^* \hat{\chi} \mathbf{h} \right)$ , необходимо записать координаты линейно поляризованного СВЧ излучения  $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z) e^{i\omega t} = h(\sin \vartheta_h \cos \varphi_h, \sin \vartheta_h \sin \varphi_h, \cos \vartheta_h) e^{i\omega t}$ , в системе координат  $(v, u, w)$ :

$$\begin{pmatrix} h_v \\ h_u \\ h_w \end{pmatrix} = L(\theta_h, \varphi_h) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_h \cos \varphi_h & \cos \theta_h \sin \varphi_h & -\sin \theta_h \\ -\sin \varphi_h & \cos \varphi_h & 0 \\ \sin \theta_h \cos \varphi_h & \sin \theta_h \sin \varphi_h & \cos \theta_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}.$$

В итоге после тригонометрических преобразований получим

$$P = -\text{Im} \left( \frac{\frac{\omega}{2} \gamma^2 (1 + \alpha^2)}{\omega_{res}^2 - \omega^2 + i\omega\Delta\omega} \cdot \left( l^2 \left( U_{\theta\theta} + \frac{i\omega\alpha M}{\gamma(1 + \alpha^2)} \right) + m^2 \left( \frac{U_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta_0} + \frac{i\omega\alpha M}{\gamma(1 + \alpha^2)} \right) + 2lm \frac{U_{\theta\varphi}}{\sin \theta_0} \right) \right)$$

$$l = \sin \theta_h \sin(\varphi_0 - \varphi_h)$$

$$m = \cos \theta_0 \sin \theta_h \cos(\varphi_0 - \varphi_h) - \cos \theta_h \sin \theta_0$$

Данное выражение за исключением множителя  $\omega/2$  совпадает тем, что приводится без вывода в статье [13]. Отметим, что в этой статье ось  $u$  направлена в противоположную сторону и тензор восприимчивости записан в координатах  $(u, v, w)$  ( $\leftrightarrow (\varphi, \vartheta, z)$ ), а не  $(v, u, w)$  ( $\leftrightarrow (\vartheta, \varphi, z)$ ), как в данном пособии.

Исходя из этих соотношений, можно рассчитать ФМР спектр идеализированной эллипсоидной частицы при произвольных направлениях постоянного и переменного магнитного поля. Проведя усреднение по форме частиц и их ориентации можно получить модельный ФМР спектр дисперсного магнетика.

### Суперпарамагнитный резонанс

Одной из особенностей, проявляющихся при уменьшении размеров частиц, является суперпарамагнетизм. Это явление возникает в системах, состоящих из однодоменных наночастиц. Наличие магнитного упорядочивания не означает, что частица обязательно имеет остаточную намагниченность, равную

намагниченности насыщения при заданной температуре. Дело в том, что направление магнитного момента частицы определяется как внешним магнитным полем, так и внутренними полями анизотропии. Энергию такой системы описывает сложная многомерная поверхность, которая имеет множество локальных минимумов. Под действием тепловых флуктуаций магнитный момент частицы как целое может изменять направление, переходить из одного метастабильного состояния в другое. Это приводит к изменению фундаментальных свойств частиц, определяющих их области применения.

Ярким примером служит изменение гистерезисных свойств малой магнитной частицы, которые можно рассматривать как эволюцию намагниченности, находящейся в метастабильном состоянии, в зависимости от внешнего магнитного поля. Например, принципиальным ограничением на размер индивидуальных элементов для систем магнитной памяти является достаточно большой энергетический барьер, который позволил бы системе находиться в определенном метастабильном состоянии в течение большого периода времени.

Для малых (нанометровых) частиц основной вклад в энергию магнитной анизотропии  $F_a$  вносят кристаллографическая анизотропия и анизотропия формы (размагничивающий фактор). При уменьшении размера ферромагнитной частицы анизотропная часть магнитной энергии в определенный момент сравнивается с тепловой энергией  $k_B T$ . Это приводит к тому, что магнитный момент частицы начинает случайно изменять свое направление в пространстве. Такое поведение называется суперпарамагнитным, поскольку в его процессе устанавливается термодинамическое равновесие, аналогично ситуации наблюдаемой в парамагнетике, с той лишь разницей, что полный магнитный момент частицы, много больше магнитного момента атома.

Аналогично с вводимым в теории спектроскопии параметром «времени релаксации», можно определить характерное время релаксации  $\tau$ , для суперпарамагнитной частицы, как время, в течение которого остаточная намагниченность частицы из-за тепловых флуктуаций ее магнитного момента уменьшается в  $e$  раз. Зависимость времени релаксации от отношения величины энергии анизотропии и энергии тепловых флуктуаций  $k_B T$  можно записать следующим образом [14]:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{E_a^{cluster}}{kT}\right),$$

где  $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-13}$  сек.

Если время  $\tau$  меньше характерного времени регистрации применяемого метода исследования, то наблюдается суперпарамагнитное поведение частиц.

При этом температуру, равную  $T = \frac{\ln(\tau_0) E_a^{cluster}}{\ln(\tau) k}$  называют температурой

блокировки. Такое описание явления суперпарамагнетизма называется барьерным подходом, и впервые было предложено Неелем в 1949 г [15].

Например, если частица заданного объема при исследовании методом ФМР на определенной частоте и при заданной температуре обнаруживает суперпарамагнитные свойства, то при другой частоте или температуре она может вести себя как однодоменная частица с постоянным магнитным моментом, который практически не испытывает термических флуктуаций. При использовании радиоспектрометра X-диапазона ( $\nu_{\text{с.в.ч.}} \approx 10$  ГГц) при комнатной температуре суперпарамагнитное поведение наблюдается, как правило, для частиц размером  $\sim 1\div 50$  нм в зависимости от магнитных характеристик и величины магнитной анизотропии частицы. Несмотря на очевидную упрощенность модели и отсутствие описания переходного процесса, данный подход является достаточно удобным способом для оценки параметров распределения частиц дисперсного магнетика по размерам путем сравнения температур блокировки — параметра легко определяемого из зависимости спектра поглощения ФМР от температуры.

Таким образом, ферромагнитный резонанс является одним из немногих методов исследования, позволяющих получать информацию о структуре и магнитных свойствах наночастиц на всех стадиях процесса приготовления, в том числе и в режиме *in-situ*, и о границах их устойчивости при дальнейшей термической обработке.

Теоретическая модель суперпарамагнитных наночастиц одного размера и формы в диамагнитной матрице впервые предложена де Биаси в работе [16]. Авторы воспользовались приближенным условием резонанса, которое можно записать в виде:

$$h\nu/g\beta = H + \alpha H_A + H_S$$

где  $H$  — внешнее магнитное поле,  $H_A$  — внутреннее поле кристаллической анизотропии формы и  $H_S$  — размагничивающее поле. Параметр  $\alpha$  соответствует углу между направлением внешнего поля и осью кристаллографической анизотропии.

Для флуктуирующего момента суперпарамагнитной частицы необходимо проводить усреднение по всем направлениям магнитного момента. Средняя энергия кристаллографической анизотропии равна

$$F_A = \alpha \langle K \rangle = \alpha H_A \langle M \rangle,$$

где  $K$  — константа кристаллографической анизотропии,  $\alpha$  — коэффициент, зависящий только от углов между приложенным полем и кристаллографическими осями. Тогда среднее поле кристаллографической анизотропии суперпарамагнитной частицы:

$$H_A = \frac{\langle K \rangle}{\langle M \rangle} = \frac{K \langle P_n(\cos \theta) \rangle}{I_S \langle \cos \theta \rangle} = H_A^0 \frac{\langle P_n(\cos \theta) \rangle}{\langle \cos \theta \rangle},$$

где  $H_A^0$  — поле кристаллографической анизотропии массивного материала,  $P_n$  — полином Лежандра, степень  $n$  которого зависит от типа кристаллической решетки (2 — для аксиальной симметрии, 4 — для кубической), угол  $\vartheta$  — угол между кристаллографической осью и направлением внешнего магнитного поля.

Полная энергия частицы, в предположении слабой кристаллографической анизотропии  $K \ll I_S/M$  может быть оценена как  $E = I_S V H \cos \vartheta$ .

Так как магнитный момент типичной суперпарамагнитной частицы (более 1000 атомов) существенно превышает магнетон Бора, усреднение по

статистически равновесному распределению направлений вектора намагниченности, можно проводить простым интегрированием, пренебрегая дискретностью разрешенных уровней, что даст выражение:

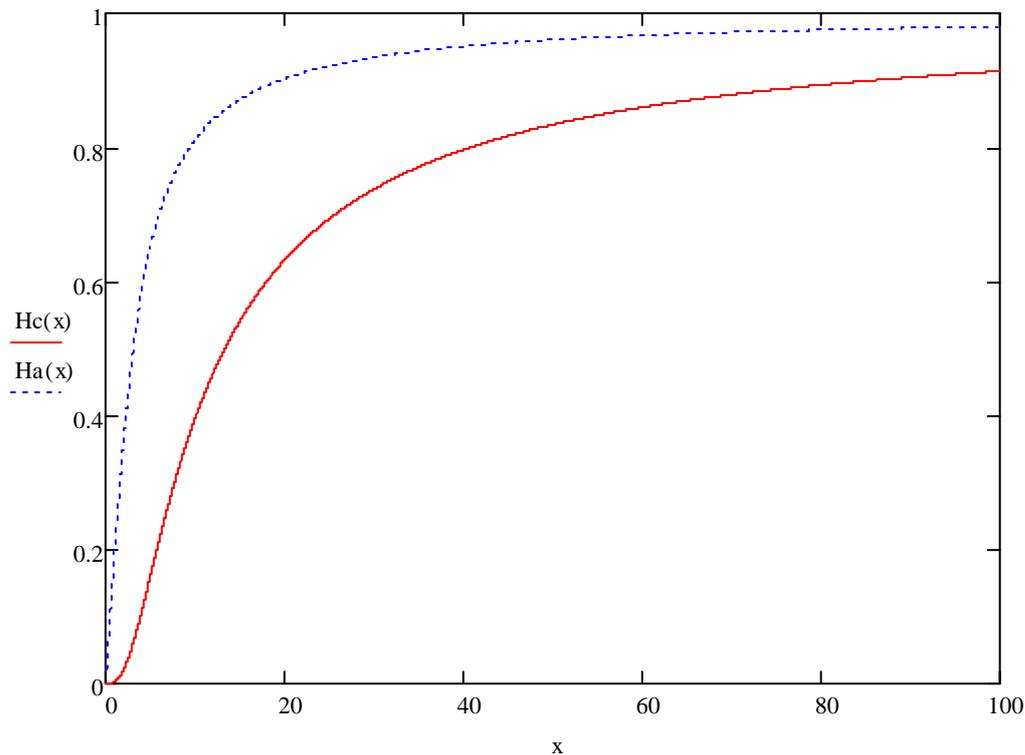
$$H_A = H_A^0 \frac{1-3x^{-1} \coth x + 3x^{-2}}{\coth x - x^{-1}}$$

для аксиальной симметрии и:

$$H_C = H_A^0 \frac{1-10x^{-1} \coth x + 45x^{-2} - 105x \coth x^{-3} + 105x^{-4}}{\coth x - x^{-1}}$$

для кубической, где  $x = I_s V H / kT$  — безразмерный параметр, отражающий отношение полной магнитной энергии частицы к энергии тепловых флуктуаций.

На рисунке приведены зависимости для этих двух функций в зависимости от  $x$ :



Расчет размагничивающего поля ведется аналогичным образом исходя из соотношения:

$$H_S = -\Delta N \langle M \rangle$$

Получаем:

$$H_S = H_S^0 (\coth x - x^{-1})$$

где  $H_S^0 = \Delta N \cdot M$ .

В дальнейшем данная модель была развита и применена для анализа и расчета спектров суперпарамагнитных наночастиц в боратном стекле [17]. Авторам удалось достичь достаточно высокого совпадения теоретических расчетов с экспериментом. Следует отметить, что аналитическое решение возможно только для случая слабой кристаллографической анизотропии, и в этом случае, динамика магнитного момента отдельной частицы хорошо известна и может быть рассчитана с применением уравнения Ландау-Лившица, Блоха-Блюмберга, Гильберта или Каллена [18]. Решение этих уравнений для случая парамагнитных ионов в твердом теле даст линию поглощения Лоренца, однако

для случая ферромагнитных частиц, реальная форма линии, в особенности в низких магнитных полях, будет сильно отличаться от лоренцевской.

В работе [18] для моделирования спектра суперпарамагнитных частиц используется метод основанный на уравнении Ландау-Лившица. Форма линии суперпарамагнитного резонанса в общем случае может быть представлена в виде интеграла:

$$I(H) = \int_{\vartheta} \int_{\varphi} \int_D F(H, H_0(\vartheta, \varphi, D), \Delta_H) \times f_V(D) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dD,$$

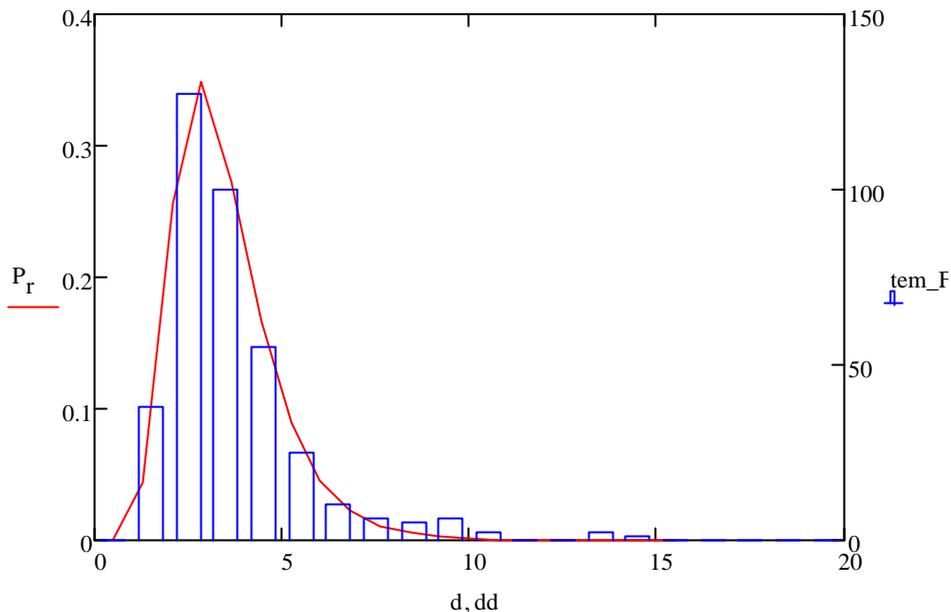
где  $F(H, H_0(\vartheta, \varphi, D), \Delta_H)$  – форма линии индивидуальной частицы,  $f_V(D)$  – функция распределения по размерам,  $H_0$  – резонансное поле, зависящее от направления внешнего магнитного поля и размера частицы,  $\Delta_H$  – ширина линии индивидуальной частицы.

Классическим приближением для распределения наночастиц, полученных в ходе проковки, по размерам является логнормальное распределение:

$$f_V(D) = \frac{\exp(-\sigma^2/2)}{\sqrt{2\pi}D_{max}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{D}{D_{max}}\right),$$

где  $\sigma$  – станд. отклон. для  $\ln D$  а  $D_{max}$  – соответствует максимуму функции  $f_V(D)$ .

На рисунке приведен вид функции  $f_V(D)$  с параметрами  $\sigma = 0.38$ ,  $D_{max} = 2.8$  нм. Для сравнения в виде гистограммы изображено распределение наночастиц в реальном образце  $\epsilon\text{-Fe}_2\text{O}_3/\text{SiO}_2$  по данным просвечивающей электронной микроскопии.

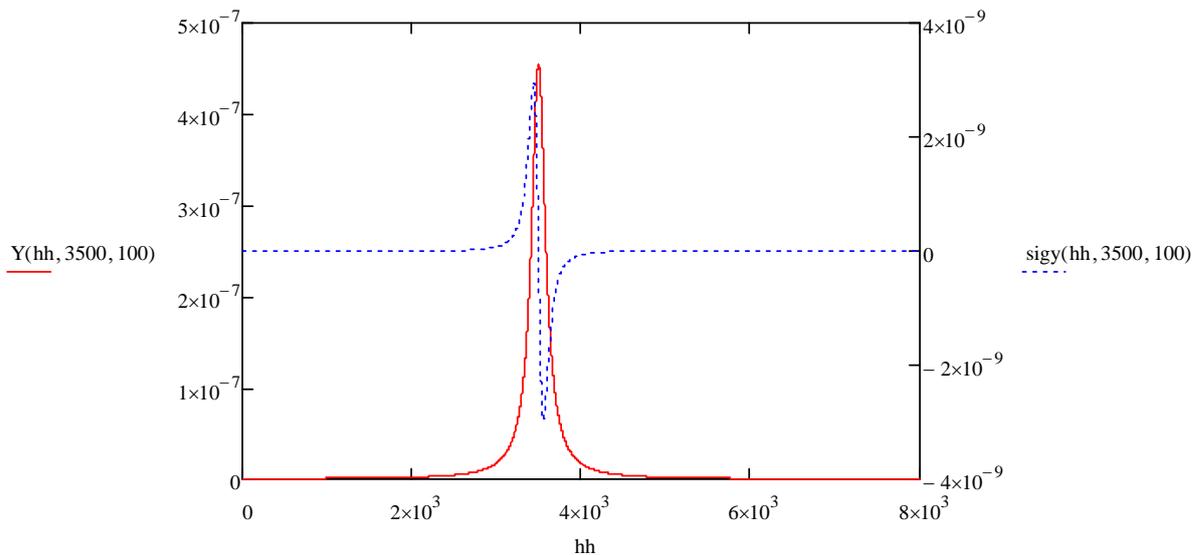


В качестве индивидуальной формы линии была выбрана предложенная авторами форма, которая удовлетворяет уравнению Ландау-Лившица:

$$LL(H, H_0, \Delta_H) = \frac{H_0^2 \Delta_H [(H_0^2 + \Delta_H^2) H^2 + H_0^4]}{\pi [H_0^2 (H - H_0)^2 + \Delta_H^2 H^2] [H_0^2 (H + H_0)^2 + \Delta_H^2 H^2]}$$

и для которой результат аппроксимации получается наилучшим.

На рисунке приведен вид линии поглощения для случая  $H_0 = 3500$  Э,  $\Delta_H = 100$  Э.



Учет тепловых флуктуаций проводился в приближении частиц круглой формы с кубической симметрией. Таким образом, величина размагничивающего поля равна нулю, и необходимо учитывать изменение среднего внутреннего поля кристаллографической анизотропии:

$$H_A = \frac{2K_1}{M} (L^{-1}(x) - 10x^{-1} + 35x^{-2}L^{-1}(x) - 105x^{-3}) \times \\ \times [5(\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) - 1],$$

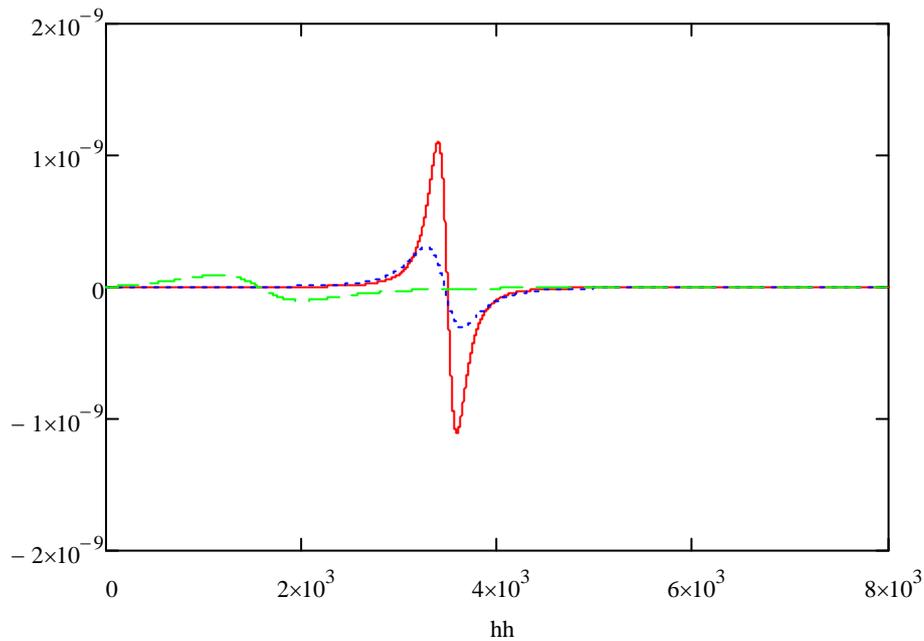
где  $L(x) = \coth x - 1/x$  – функция Ланжевена,  $x$  – безразмерный параметр равный  $MVH_{eff}/kT$ .

Кроме того, от температуры зависит ширина индивидуальной линии суперпарамагнитной частицы. Эта зависимость возникает из-за усреднения магнитного момента суперпарамагнитной частицы по всем положениям за время регистрации в результате тепловых флуктуаций, и носит тот же характер, что и усреднение магнитного момента ансамбля частиц. Эту зависимость можно описать как:

$$\Delta_H = \Delta_0 L(MVH_{eff}/kT),$$

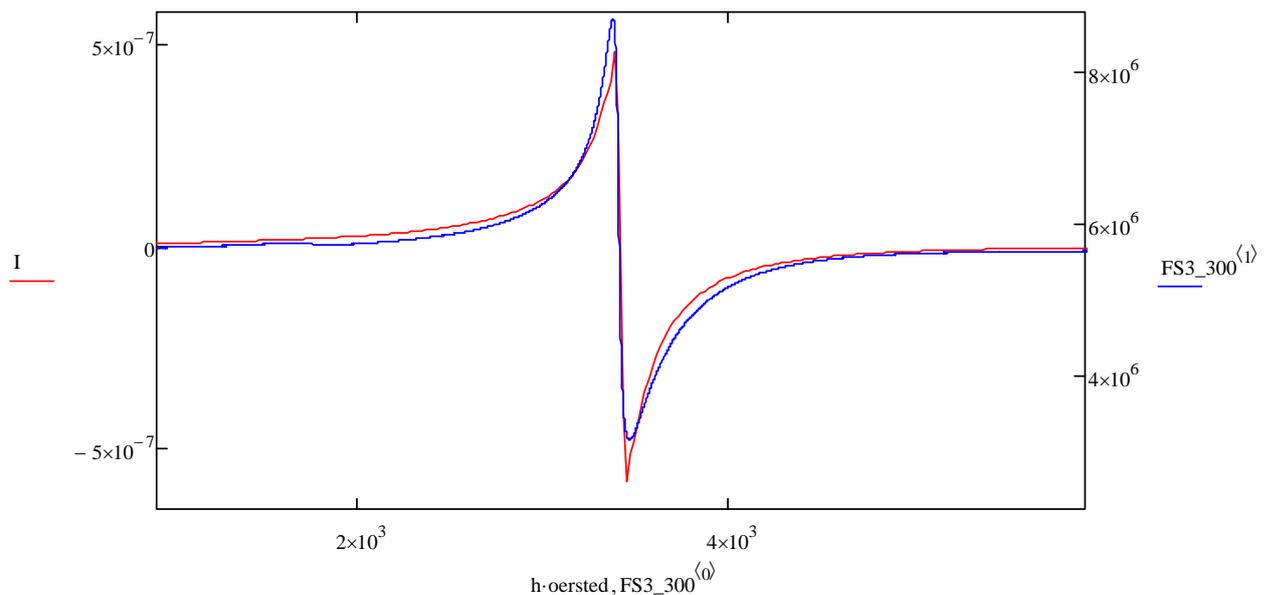
где  $\Delta_0$  – некоторая характерная ширина линии, например ширина линии для наиболее крупной наночастицы в образце.

На рисунке приведены модельные спектры поглощения для суперпарамагнитной наночастицы при различных значениях параметра  $x = (0.5, 1, 10)$ .



Как видно из рисунка, при переходе частицы в суперпарамагнитное состояние, в спектре ФМР резко возрастает пиковая интенсивность сигнала, а при увеличении параметра  $x$  (уменьшение температуры или увеличение размера частицы), ширина линии возрастает и пиковая интенсивность падает. При этом дальнейшее увеличение параметра  $x$  приводит к изменению положения линии поглощения, так как при «замораживании» начинает сказываться влияние внутренних полей кристаллографической анизотропии в частице.

Окончательный вид полученного модельного спектра для системы наночастиц различных размеров приведен на рисунке. Для сравнения приведен сигнал образца системы наночастиц  $\epsilon\text{-Fe}_2\text{O}_3/\text{SiO}_2$  параметры распределения по размерам и магнитные свойства которого использовались в качестве параметров для моделирования:



## Приложение

### Уравнение движения магнитного момента в магнитном поле.

В магнитном поле  $\mathbf{H}$  на намагниченность действует вращающий момент  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{H}.$$

Введем гиромагнитное отношение  $\gamma > 0$ , такое что

$$\mathbf{M} = -\gamma \mathbf{J},$$

где  $\mathbf{J}$  — момент количества движения, приведенный, как и  $\mathbf{M}$ , к единице объема. Из механики известно, что скорость изменения момента количества движения равна вращающему моменту

$$d\mathbf{J}/dt = \mathbf{T}.$$

Следовательно, то

$$d\mathbf{M}/dt = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}].$$

Если скалярно умножить левую и правую части этого уравнения на вектор  $\mathbf{M}$ , то получим  $d\mathbf{M}^2/dt = 0$ , откуда следует, что длина вектора  $\mathbf{M}$  остается постоянной. Изменение направления намагниченности происходит таким образом, что скорость изменения  $\mathbf{M}$  перпендикулярна и  $\mathbf{M}$ , и  $\mathbf{H}$ . Отсюда следует, что вектор  $\mathbf{M}$  прецессирует вокруг поля  $\mathbf{H}$

## Литература

- [1]. Аркадьев В.К., ЖРФХО **45** (1913) 103 (Журнал Русского физико-химического общества).
- [2]. Дорфман Я.Г., Zs. f. Phys. **17** 98 (1923) (Zeitschrift für Physik).
- [3]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Phys. Zs. Sowjet. **8** (1935) 153 (Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion).
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Ландау Л.Д. Собрание трудов в 2-х томах. Под ред. Е. М. Лифшица. М.: Наука, 1969. Т. 1. С. 128
- [4]. Zavoisky E., Journ. Phys. USSR **10** (1946) 197; Завойский Е.К., ЖЭТФ **17** (1946) 883.
- [5]. Griffiths J., Nature **158** (1946) 670.
- [6]. Китель, Ч. Введение в физику твёрдого тела, - М.: Наука, 1978.
- [7]. Кринчик, Г.С. Физика магнитных явлений, - М.: Изд. МГУ, 1976.
- [8]. Ферромагнитный резонанс. Явление резонансного поглощения высокочастотного магнитного поля в ферромагнитных веществах / Под ред. С.В. Вонсовского, М.: ФизМатЛит, 1961.
- [9]. Гуревич, А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках, М.: Наука, 1973.
- [10]. Smit J., Wijn H.P.J., Adv. in. Electr., VI, Acad. Press, N.Y, 1954; Smit J., Belfers H.G., Philips Res. Rep. **10**, № 2, 113 (1955).
- [11]. Suhl H., Phys. Rev. **97**, № 2, 555 (1955).
- [12]. Скроцкий Г.В., Курбатов Т.В., Феноменологическая теория ферромагнитного резонанса // Ферромагнитный резонанс. Явление резонансного поглощения высокочастотного магнитного поля в ферромагнитных веществах / Под ред. С.В. Вонсовского, М.: ФизМатЛит, 1961.

- [13]. Netzelmann U., J. Appl. Phys. **68** (1990) 1800
- [14]. Magnetism in nanoscale materials in chemistry (Ed.: K. J. Klabunde),/ C.M. Sorensen // Wiley-Interscience Publication New York — 2001
- [15]. Neel L., Theorie du trainage magnetique des ferromagnetiques en grains fins avec applications aux terres cuites/ L. Neel // Ann. Geophys. — 1949. — №5. — C. 99-136.
- [16]. de Biasi R.S., Devezas T.C., J. Appl. Phys. **49** (1978) 2466
- [17]. Berger R., Kliava J., J. Magn. Magn. Mater. **205** (1999) 328
- [18]. Berger R., Bissey J.-C., Kliava J., J. Phys.: Condens. Matter. **12** (2000) 9347

**С.Н. Трухан, С.С. Якушкин, О.Н. Мартьянов**

Ферромагнитный резонанс дисперсных магнетиков.  
(Дополнение к курсу лекций "Магнитные свойства вещества")  
Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 14.10.2013. Заказ № . Формат 60x84/16. Усл. печ. л. . Тираж экз.  
Отпечатано на полиграфическом участке издательства Института катализа СО РАН 630090,  
Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 5