МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики физического факультета

О.Д. Максимова

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Новосибирск
2012

Максимова О.Д. Числовые ряды. Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. – 90 с.

Учебное пособие представляет собой расширенное изложение материала по теме «Числовые ряды», соответствующего программе по основам математического анализа для первого курса физического факультета НГУ. Пособие состоит из трех частей: предварительные сведения, где приводятся определения и формулировки основных теорем по теме «Предел числовой последовательности»; основная часть пособия, где излагается достаточно полный теоретический материал по теме «Числовые ряды», иллюстрируемый большим количеством примеров, задач и тестов (165 примеров и задач, 14 тестов); историческая справка. Пособие представляет собой книгу для активного использования. Это книга-справочник, содержащая теоретический материал, это практическое руководство к решению задач, содержащее разбор как типовых, так и оригинальных задач, это книга, с помощью которой можно самостоятельно проконтролировать уровень понимания и усвоения изучаемого материала, это еще и книга, знакомящая с историческим процессом зарождения понятия числового ряда и развития теории числовых рядов.

Пособие предназначено для студентов первого курса физического факультета НГУ. Оно может быть полезно также студентам механико-математического факультета НГУ, преподавателям математического анализа.

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации
Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 г.г.

Предисловие

Пособие содержит расширенное изложение материала по теме «Числовые ряды», соответствующего программе по основам математического анализа для первого курса физического факультета Новосибирского государственного университета.

Пособие состоит из трех частей. В первой части «Предварительные сведения» формулируются определения и основные теоремы по теме «Предел числовой последовательности».

Во второй, основной части пособия излагается теоретический материал по теме «Числовые ряды», иллюстрируемый большим количеством примеров. Каждый параграф содержит набор задач. Для части задач приведены подробные решения или даны указания к решению. Последний параграф содержит задачи для самостоятельного решения. В конце пособия приведены ответы, в некоторых случаях даны указания к решению задач. В конце каждого параграфа основной части помещены тесты. В конце пособия к каждому тесту приведены ключи. Это позволяет читателю самостоятельно проконтролировать и оценить уровень понимания материала, обратить внимание на моменты, которые следует повторить для окончательного закрепления материала.

В третьей части «Исторические сведения» рассказывается об истории зарождения понятия числового ряда и развития теории числовых рядов, о выдающихся математиках прошлых столетий, об их вкладе в развитие математики и физики, приводятся первые исторические задачи, приводящие к числовым рядам.

Особенностью данного пособия является то, что оно содержит достаточно полный теоретический материал по теме числовых рядов, иллюстрируемый большим количеством примеров и задач, служит практическим руководством к решению задач, содержит тесты для самостоятельного контроля уровня понимания и усвоения материала.

Цель пособия – помочь студенту в изучении теоретической части, в приобретении практических навыков решения задач по теме «Числовые ряды», научить рассуждать, анализировать и систематизировать усвоенный материал. Книга также может быть полезна преподавателям математического анализа и всем, желающим изучить данную тему достаточно широко и подробно.

Для лучшего понимания материала в начале пособия приводятся основные обозначения, встречающиеся в тексте. В конце пособия приведен список используемой литературы, а также список книг, по которым можно подробнее познакомиться с историческим аспектом теории числовых рядов.

Обозначения

N	-	множество всех натуральных чисел
R	-	множество всех действительных чисел
$a \in A$	-	элемент a принадлежит множеству A
$A \Leftrightarrow B$	-	высказывания A и B равносильны
$\forall$	-	для любого; для всех; для каждого (квантор общности)
$\exists$	-	существует; найдется (квантор существования)
/	-	такой, что; такие, что
$\sim$	-	знак эквивалентности
!	-	факториал числа
!!	-	двойной факториал числа
$\sup X$	-	супремум множества X
$\inf X$	-	инфимум множества X
$\{x_n\}$	-	числовая последовательность
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	-	предел числовой последовательности $\{x_n\}$
$x_n \to a$	-	числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a
$x_n \to +\infty$ $(-\infty)$	-	числовая последовательность $\{x_n\}$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$	-	верхний предел числовой последовательности $\{x_n\}$
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$	-	нижний предел числовой последовательности $\{x_n\}$
$x_n \nearrow$	-	монотонно возрастающая числовая последовательность
$x_n \searrow$	-	монотонно убывающая числовая последовательность
$x_n \nearrow a$ $(+\infty)$	-	числовая последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастая, сходится к числу a (стремится к $+\infty$)
$x_n \searrow a$ $(-\infty)$	-	числовая последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывая, сходится к числу a (стремится к $-\infty$)
$\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$	-	сумма N чисел
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$	-	числовой ряд
$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$	-	остаток числового ряда

Введение

Большую роль в анализе и в физике играют не числовые, а функциональные ряды. Но числовые ряды – служат базой. Например, интерес к рядам $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ может показаться слабо мотивированным, если не знать, что в дальнейшем подразумевается переход к изучению степенных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Понятие числового ряда возникает уже в школьном курсе математики. Например, при представлении действительного числа в виде десятичной дроби. Если дробь бесконечная, то

$$a_0, a_1 a_2 ... a_n ... = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... \frac{a_n}{10^n} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} .$$

В школьном курсе математики рассматриваются так называемые бесконечные геометрические прогрессии - последовательности вида a, aq, aq^2, …, aq^{n-1}, … . Пусть $a \neq 0$. Для вычисления суммы

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$$

первых n членов геометрической прогрессии умножим это равенство на знаменатель прогрессии q:

$$S_n\, q = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n$$

и вычтем почленно второе равенство из первого:

$$S_n\,(1-q) = a - aq^n.$$

Если $q \neq 1$, то отсюда следует

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} .$$

Если же $q=1$, то все члены прогрессии равны и $S_n = an$.

Что же считать суммой S «всех» членов прогрессии? То есть что считать суммой ряда $aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots$? Напрашивается ответ: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. При $q \neq 1$ получаем:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n .$$

Если $|q| < 1$, то $S = \frac{a}{1-q}$. Если же $|q| \geq 1$, то конечного предела $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Итак, говорить о сумме геометрической прогрессии мы можем только в случае $|q|<1$. При этом можно оценить скорость сходимости ряда:

$$S - S_n = \frac{aq^n}{1-q}.$$

Ясно, что чем ближе знаменатель прогрессии q к единице, тем хуже описывает частичная сумма S_n сумму S.

А теперь рассмотрим прогрессию со знаменателем q=1: a, -a, a, -a, …. Соответственно, рассмотрим ряд $a - a + a - a + \ldots$. Мы показали, что этот ряд суммы не имеет. А теперь, расставим скобки и получим парадоксальные результаты:

$$(a - a) + (a - a) + \ldots = 0+0+\ldots=0,$$

$$a + (-a + a) + (-a + a) + \ldots = a + 0+0+\ldots=a.$$

Чтобы разобраться с вопросами, возникшими при рассмотрении этого школьного примера, следует внимательно прочитать настоящее пособие, решить предложенные задачи.

Предварительные сведения

1. Определение предела числовой последовательности.

Определение 1. Функция, определенная на множестве **N** всех натуральных чисел и принимающая значения из множества **R** действительных чисел, называется ***числовой последовательностью*** или ***последовательностью***: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Числа a_n называются ***членами последовательности***.

Определение 2. Число a называется ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ /\forall n \ge N(\varepsilon)\ \left| a_n - a \right| < \varepsilon.$$

Будем писать: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ и говорить, что последовательность $\{a_n\}$ ***сходится*** к числу a.

Заметим, что

$$\left| a_n - a \right| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

2. Свойства предела последовательности.

1. *Если предел существует, то он единственный.*

2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *то последовательность* $\{a_n'\}$, *у которой* $a_n \ne a_n'$ *лишь для конечного числа номеров, так же имеет предел равный* a.

3. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$, *где* $k \in \mathbf{N}$ *– фиксировано, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *то для любого числа* $k \in \mathbf{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

5. *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

6. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ne 0$, *то* $\exists N \ /\ \forall n \ge N \quad \frac{1}{2}|a| < |a_n| < \frac{3}{2}|a|$.

7. *Если* $\forall n \ge N_0 \quad a_n \le b_n$ *и* $a_n \to a$, $b_n \to b$, *то* $a \le b$.

8. *Теорема о зажатой последовательности.*

Если $\forall n \ge N_0 \quad a_n \le c_n \le b_n$ *и* $a_n \to a$, $b_n \to a$, *то* $c_n \to a$.

9. *Если* $a_n \to a$, *то* $|a_n| \to |a|$.

3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Определение 3. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если $\alpha_n \to 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ /\forall n \ge N(\varepsilon)\ \left| \alpha_n \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что из определения предела последовательности следует, что

$$a_n \to a \ \Leftrightarrow\ a_n - a \to 0.$$

Т.е. число a является пределом последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда $a_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n = a_n - a$ – бесконечно малая последовательность.

Определение 4. Последовательность $\{\beta_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ /\forall n \geq N(\varepsilon)\ |\beta_n| > \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$ или $\beta_n \to\infty$ и говорят, что последовательность ***стремится*** к ∞.

Определение 3.

$$\beta_n \to+\infty\ \left(\lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty\right) \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ /\forall n \geq N(\varepsilon)\ \ \beta_n > \varepsilon.$$

Определение 4.

$$\beta_n \to-\infty\ \left(\lim_{n\to\infty} \beta_n = -\infty\right) \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ /\forall n \geq N(\varepsilon)\ \ \beta_n < -\varepsilon.$$

В этих случаях говорят, что последовательность ***стремится*** к +∞ или соответственно **к -∞**.

Лемма 1. *Если* $\forall n\ a_n \neq 0$, *то*

$$a_n \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty .$$

Определение 5. Последовательность, имеющая конечный предел, называется ***сходящейся***.

Замечание. Любая бесконечно большая последовательность не ограничена. Обратное не верно.

4. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

1. *Сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

2. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.*

3. *Произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

4. *Если* $|\alpha_n| \geq m>0$ *и последовательность* $\{\beta_n\}$ *бесконечно большая, то произведение* $\{\alpha_n \beta_n\}$ *– бесконечно большая последовательность.*

5. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *бесконечно большая и* $\forall n \geq N_0$ $|x_n| \leq |y_n|$, *то последовательность* $\{y_n\}$ *бесконечно большая. Если последовательность* $\{x_n\}$ *бесконечно малая и* $\forall n \geq N_0$ $|y_n| \leq |x_n|$, *то последовательность* $\{y_n\}$ *бесконечно малая.*

5. Арифметические свойства пределов последовательностей.

Теорема 1. *Пусть последовательности* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ *сходятся*: $x_n \to a$, $y_n \to b$. *Тогда*

1) $x_n \pm y_n \to a \pm b$;

2) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$;

3) *если* $y_n \neq 0$, $b \neq 0$, *то* $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Следствие. *Если* $x_n \to a$, $y_n \to b$, $y_n \neq 0$, $b \neq 0$, $C = const$, *то*

$$-x_n \to -a,\ \ Cx_n \to Ca,\ \ \frac{C}{y_n} \to \frac{C}{b}.$$

6. Монотонные последовательности.

Определение 6. Последовательность $\{a_n\}$ называется ***возрастающей***, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$, и ***неубывающей***, если $a_1 \leq \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$. Такие последовательности объединяют под общим названием ***монотонно возрастающих*** последовательностей и обозначают: $a_n \nearrow$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***убывающей***, если $a_1 > >a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$, и ***невозрастающей***, если $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \geq a_{n+1} \geq \ldots$. Последовательности этих типов называют ***монотонно убывающими*** и обозначают: $a_n \searrow$.

Если монотонно возрастающая последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a (стремится к $+\infty$), то пишут: $a_n \nearrow a$ (соответственно $a_n \nearrow +\infty$). Если монотонно убывающая последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a (стремится к $-\infty$), то пишут: $a_n \searrow a$ (соответственно $a_n \searrow +\infty$).

Теорема 2. *Любая монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет конечный предел. Если последовательность* $\{a_n\}$ *монотонно возрастает и неограниченна сверху, то* $a_n \to +\infty$.

Аналогичные утверждения верны для монотонно убывающих последовательностей.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *монотонно возрастает, последовательность* $\{b_n\}$ *монотонно убывает и* $\forall n\ \ a_n < b_n$. *Если* $b_n - a_n \to 0$, *то обе последовательности имеют общий конечный предел.*

7. Число е как предел последовательности.

Последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху: $\forall n$

$x_n < 3$. По теореме о монотонных и ограниченных последовательностях (см. п. 1.6) получаем, что существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Этот предел принято обозначать буквой e.

Последовательность $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает и сходится к e.

Возрастающая последовательность $y_n = 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{n!}$ так же сходится к e.

Число e иррациональное и выражается бесконечной десятичной дробью $e = 2{,}718281828459045\ldots$.

8. Подпоследовательности. Частичные пределы.

Определение 7. Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\}$. Составим возрастающую последовательность натуральных чисел:

$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$.

Тогда последовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется ***подпоследовательностью*** последовательности $\{a_n\}$.

Теорема 3. *Если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет этот же предел.*

Определение 8. Предел подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ называется ***частичным пределом*** последовательности $\{a_n\}$.

Теорема 4 (теорема Больцано-Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема 5. *Любая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность.*

Лемма 3. *Число x является частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$ *тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon>0$ *интервал* $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ *содержит бесконечно много членов последовательности* $\{x_n\}$.

Замечание. Последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ (к $-\infty$) тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (соответственно снизу).

9. Верхние и нижние пределы.

Теорема 6. *Среди частичных пределов любой ограниченной последовательности имеются наибольший и наименьший.*

Определение 9. Наибольший и наименьший частичные пределы последовательности $\{x_n\}$ называются соответственно ее ***верхним и нижним пределами*** и обозначаются: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$ и $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$.

Лемма 4. *Число L является верхним пределом последовательности* $\{x_n\}$ *тогда и только тогда, когда для любого числа* $\varepsilon>0$ *выполнены два условия*:

1) *интервал* $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ *содержит бесконечно много членов последовательности* $\{x_n\}$;

2) *правее числа* $L+\varepsilon$ *имеется лишь конечное число членов этой последовательности.*

Аналогично, число l является нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ *тогда и только тогда, когда для любого числа* $\varepsilon>0$ *выполнены два условия*:

1) *интервал* $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ *содержит бесконечно много членов последовательности* $\{x_n\}$;

2) *левее числа* $l-\varepsilon$ *имеется лишь конечное число членов этой последовательности.*

Если у последовательности $\{x_n\}$ есть частичный предел равный $+\infty$ (соответственно к $-\infty$), то считают, что $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = +\infty$ ($\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = -\infty$).

Теорема 7. *Любая последовательность действительных чисел имеет верхний и нижний пределы.*

Теорема 8. *Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы равны.*

Замечание. Для последовательности $\{x_n\}$ обозначим

$$b_k = \sup_{n\geq k}\{x_n\} = \sup\{x_k, x_{k+1}, \ldots\} \text{ и } c_k = \inf_{n\geq k}\{x_n\} = \inf\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}, \text{ где } k\in\mathbf{N}.$$

Тогда $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_k\geq b_{k+1}\geq\ldots$, $c_1\leq c_2\leq\ldots\leq c_k\leq c_{k+1}\leq\ldots$, т.е. $\{b_k\}\searrow$ и $\{c_k\}\nearrow$. При этом

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \lim_{k\to\infty}\sup\{x_k, x_{k+1}, \ldots\},\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \lim_{k\to\infty}\inf\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}.$$

10. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение 10. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ /\forall n, m\ \geq N(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Иногда удобно определять фундаментальность в следующем виде:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ /\forall n\ge N(\varepsilon) \text{ и } \forall p\ge 1\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

Теорема 9. *Если последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, то она ограничена.*

Теорема 10. *Если фундаментальная последовательность $\{a_n\}$ имеет сходящуюся к числу а подпоследовательность, то сама последовательность $\{a_n\}$ так же сходится к а.*

Теорема 11 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

11. Важные пределы.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,\ a>1 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$$

12. Асимптотическое сравнение последовательностей.

Необходимость в асимптотическом сравнении, как правило, возникает для сравнения бесконечно малых или бесконечно больших последовательностей.

Определение 11. Если $a_n=\alpha_n b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$, то последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются ***эквивалентными*** при $n\to\infty$: $a_n\sim b_n$.

Если $a_n\neq 0$, то условие $a_n\sim b_n$ равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

Таблица эквивалентных при $n\to\infty$ последовательностей:

$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$	$tg\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$	$arctg\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$	$\arcsin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$
$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$	$e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}$	$1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}$	$(1+\frac{1}{n})^{\mu}-1\sim\frac{\mu}{n}$

Асимптотическая формула Стирлинга:

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n} \text{ при } n\to\infty.$$

Числовые ряды

1. Определение числового ряда. Сходимость.

Определение 1.1. Пусть $\{a_n\}$ – произвольная числовая последовательность. ***Числовым рядом*** (или просто ***рядом***) называется формальная бесконечная сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 1.2. Последовательность $\{S_n\}$, где

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,

называется последовательностью ***частичных сумм*** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ее n-ый член S_n называется n-ой ***частичной суммой*** этого ряда.

Определение 1.3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится***, если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$. Число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется ***суммой ряда***: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Определение 1.4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***расходящимся***, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм не имеет конечного предела.

Замечание 1.1. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, $c \neq 0$, сходятся или расходятся одновременно, т.е. умножение членов ряда на одну и ту же ненулевую константу на сходимость ряда не влияет.

Замечание 1.2. Сходимость ряда означает сходимость последовательности его частичных сумм. Сходящиеся последовательности ограничены. Следовательно, если ряд сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена. Соответственно, если последовательность частичных сумм ряда не ограничена, то ряд расходится.

Определение 1.5. Ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, $k \in \mathbf{N}$, называется ***k-ым остатком*** (или просто ***остатком***) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится и его сумма равна 1.

Имеем:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

Пример 1.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, где $a\neq 0$, сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$.

Действительно, при $q=1$ $S_n=na$ и ряд расходится. При $q\neq 1$

$$S_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1}=a(1+q+\ldots+q^{n-1})=\frac{a(1-q^n)}{1-q}==\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Так как при $|q|<1$ $q^n\to 0$, то $S_n\to\frac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$. При $|q|\geq 1$ последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела, т.е. ряд расходится.

Пример 1.3. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Покажем, что последовательность $S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ не ограничена. При $n=2^k$ имеем:

$$S_n=S_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)\geq$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+2^2\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=1+\frac{k}{2}>\frac{k}{2}.$$

Так как $\frac{k}{2}\to+\infty$, то $S_{2^k}\to+\infty$. Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ не ограничена. Расходимость гармонического ряда доказана.

Задачи.

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1.1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$.

Решение. Имеем:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\to\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 .$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$.

1.2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$.

1.3. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$.

Указание. Найти коэффициенты a, b, c в разложении

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2},$$

посчитать, чему равна частичная сумма S_n этого ряда, и вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

Доказать расходимость следующих рядов:

1.4. 1-1+1-1+….

1.5. $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{3}+\ldots$.

Решение. Имеем:

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{3\pi}{3}=0,\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{6\pi}{3}=0,\ldots .$$

Поэтому последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм имеет вид:

$$\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2},0,0,\ldots .$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, т.е. ряд расходится.

1.6. $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\ldots+\cos\frac{n\pi}{4}+\ldots$.

1.7. С высоты 10 м на горизонтальную плоскость падает мяч. Дано**,** что после удара он отскакивает на половину высоты, с которой он падал.

Сколько времени будут продолжаться отскоки мяча? Что будет потом? Примите g=10 м/сек^2. Нарисуйте график функции $h(t)$, где h – высота мяча в момент времени t.

Тест 1.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Сумма $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}$ является частичной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Если $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ =S<∞, то сумма ряда равна S.

3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм неограниченна.

4. Ряд $3-\frac{3}{10}+\frac{3}{100}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}3}{10^{n-1}}+\ldots$ сходится.

5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n}$ сходится.

6. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, то ряд сходится.

7. Если $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ =S<∞ и $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$ =S, то сумма ряда равна S.

8. Ряд $\frac{1}{100}+\frac{1}{105}+\frac{1}{110}+\frac{1}{115}+\ldots$ является остатком гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

9. **.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, где a≠0, расходится при $|q|$ >2.

10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*, если существует предел последовательности его частичных сумм.

11. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонна и ограничена, то ряд сходится.

12. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S < \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

2. Критерий Коши.

Теорема 2.1 (критерий Коши). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ / \ \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall \mathrm{p} \geq 1 \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon .$$

Доказательство. По определению сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ означает сходимость последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм. По критерию Коши для последовательностей имеем: последовательность$\{S_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ / \ \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \geq 1 \ \ |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует:

Теорема 2.2 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$.

Доказательство. По критерию Коши сходимость рядаравносильна тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ / \ \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \geq 1 \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon .$$

Возьмем $p=1$ и получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ / \ \forall n \geq N(\varepsilon) \ \ |a_{n+1}| < \varepsilon .$$

По определению это означает, что $a_{n+1} \to 0$. Следовательно, $a_n \to 0$ (предварительные сведения, п.2, свойство 3).

Пример 2.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ = 1-1+1-1+… расходится, так как $a_n = (-1)^{n+1} \not\to 0$.

Пример 2.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ расходится.

Докажем, что $\sin n$ не сходится к 0. Действительно, пусть $\sin n\to 0$. Имеем:

$$\sin n = \sin((n\text{-}1)+1) = \sin(n\text{-}1)\cdot\cos 1 + \sin 1\cdot\cos(n\text{-}1),\ \sin 1\neq 0,\ \cos 1\neq 0.$$

Переходя к пределу, получим:

$$0 = \lim_{n\to\infty}\sin n = \cos 1\cdot\lim_{n\to\infty}\sin(n-1) + \sin 1\cdot\lim_{n\to\infty}\cos(n-1) =$$

$$= 0 + \sin 1\cdot\lim_{n\to\infty}\cos(n-1).$$

Отсюда получаем, что $\lim_{n\to\infty}\cos(n-1) = 0$. Тогда при $n\to\infty$

$$1 = (\sin n)^2 + (\cos n)^2 \to 0+0 = 0,$$

что невозможно. Следовательно, $\sin n \not\to 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ расходится.

Замечание 2.1. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ одного условия, что $a_n\to 0$, не достаточно.

Пример 2.3. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, несмотря на то, что $a_n = \frac{1}{n}\to 0$.

Задачи.

Используя критерий Коши, доказать сходимость следующих рядов:

2.1. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$.

Решение. Докажем, что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда фундаментальна, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ /\ \forall n\geq N(\varepsilon)\ \text{и}\ \forall p\geq 1\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное положительное число ε. Имеем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\leq$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

В качестве $N(\varepsilon)$ возьмем любое натуральное число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon)\ (N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}) \ \ / \ \forall n \ge N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \ge 1 \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}\right| < \varepsilon .$$

Следовательно, по критерию Коши ряд сходится.

2.2. $1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}} + \ldots .$ **2.3.** $\frac{\sin x}{2} + \sin\frac{x}{2^2} + \ldots + \sin\frac{x}{2^n} + \ldots .$

2.4. $\frac{\cos x}{1\cdot 2} + \frac{\cos x^2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n(n+1)} + \ldots .$

Используя критерий Коши, доказать расходимость следующих рядов:

2.5. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$

Решение. Докажем, что $\{S_n\}$ частичных сумм ряда не фундаментальна, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ / \ \forall N \ \exists n \ge N \text{ и } \exists p \ge 1 \ / \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| \ge \varepsilon .$$

Имеем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \ge \frac{p}{n+p} .$$

Для p = n получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}\right| \ge \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} .$$

Итак,

$$\exists\varepsilon=\frac{1}{2}\ /\ \forall N\ \exists n\geq N\ \text{(любое) и }\exists\ p=n\ /\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\right|\geq\frac{1}{2}\ .$$

Расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ доказана по критерию Коши.

2.6. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$. **2.7.** $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$.

Тест 2.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Если $a_n\to 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$ сходится.

3. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ фундаментальна, то ряд сходится.

4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ /\ \forall n\geq N(\varepsilon)\text{ и }\forall p\geq 1\ \ |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится тогда и только тогда, когда

$$\exists\varepsilon>0\ \ /\ \forall N\ \exists n\geq N\text{ и }\exists p\geq 1\ /\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\geq\varepsilon\ .$$

6. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ фундаментальна и $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$, то ряд сходится и сумма ряда равна S.

7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ сходится.

8. Если $0<a_n<\frac{1}{n}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

9. Если $a_n > 1 - \dfrac{1}{n}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

10. Если $a_n < 1 - \dfrac{1}{n}$, то ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ сходится.

11. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $a_n \not\to 0$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

3. Свойства рядов.

3.1. *Если ряд сходится, то сходится любой его остаток. Если какой-то остаток ряда сходится, то и сам ряд сходится.*

Первое доказательство. По критерию Коши сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ равносильна тому, что

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; / \; \forall n \geq N(\varepsilon) \; и \; \forall p \geq 1 \; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon . \quad (1)$$

Сходимость m-го остатка $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ равносильна тому, что

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists N(\varepsilon) \geq m \;\; / \; \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p \geq 1 \; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Получаем, что если утверждение (1) верно, то утверждение (2) верно для любого значения $m \in \mathbf{N}$. Если для какого-то значения $m \in \mathbf{N}$ верно утверждение (2), то верно и утверждение (1).

Второе доказательство. Для частичной суммы

$$S_k^* = a_{m+1} + \ldots + a_{m+k}$$

m-го остатка $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ имеем:

$$S_{m+k} = S_m + S_k^*. \quad (*)$$

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится: $S_n \to S$. Переходя в (*) к пределу при $k \to +\infty$, получаем, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^* = S - S_m$. Таким образом, любой m-ый остаток ряда сходится и его сумма равна $S - S_m$.

Если сходится какой-то m-ый остаток ряда, т.е. последовательность $\{S_k^*\}$ его частичных сумм сходится: $S_k^* \to S^*$, то переходя в (*) к пределу при $k\to+\infty$, получаем, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} S_{m+k} = S_m + S^*$. Тогда по свойствам пределов последовательностей (предварительные сведения, п.2, свойство 3) существует $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S_m + S^*$. Т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна $S_m + S^*$.

Замечание 3.1. Из этого утверждения следует, что если ряд расходится, то расходится любой его остаток. Если какой-то остаток ряда расходится, то и сам ряд расходится.

3.2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то последовательность остатков* $A_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ *сходится к* 0 *при* $m\to\infty$.

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. По свойству 1 каждый m-ый остаток сходится, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$. Имеем:

$$A_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_m) = S - S_m .$$

Отсюда получаем: $A_m = S - S_m \to 0$ при $m\to\infty$.

3.3. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то для любого числа* $c\in\mathbf{R}$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ *сходится и его сумма равна* $c\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то для любого числа* $c\neq 0$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ *тоже расходится.*

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда для частичных сумм нового ряда имеем: $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k = c\cdot S_n \to c\cdot S$.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм не имеет конечного предела. Тогда последовательность $\{c\cdot S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ тоже не имеет конечного предела при $c\neq 0$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ раходится.

3.4. *Если ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся, то сходятся ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ *и их суммы равны* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *соответственно.*

Доказательство. Из условия получаем, что $\sum_{k=1}^{n} a_k \to S_a$ и $\sum_{k=1}^{n} b_k \to S_b$ при $n\to\infty$. Тогда $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \to S_a \pm S_b$.

3.5. *Если в сходящемся ряде* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *некоторые группы слагаемых заключить в скобки, то сходимость не нарушится и сумма ряда не изменится.*

Доказательство. Расстановка скобок в бесконечной сумме приводит к новому ряду:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots =$$

$$= b_1 + b_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k ,$$

где

$$\forall k\geq 1 \quad b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k} \text{ и } n_0 = 0.$$

Очевидно, что последовательность $\{B_k\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

является подпоследовательностью $\{A_{n_k}\}$ частичных сумм сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Следовательно, если $A_n \to S$, то любая подпоследовательность последовательности $\{A_n\}$ тоже сходится к S. Поэтому, $B_k = A_{n_k} \to S$ при $k\to\infty$. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится и его сумма равна сумме исходного ряда.

Замечание 3.2. Обратное утверждение не всегда справедливо. Действительно, ряд

$$(1-1) + (1-1) + \ldots = 0+0+\ldots$$

сходится. Однако ряд 1-1+1-1+… расходится.

Тест 3.1.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Если ряд сходится, то последовательность его остатков ограничена.
2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$ сходится, то сходятся и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.
3. Если ряд сходится, то последовательность его остатков монотонна.
4. Если последовательность остатков монотонна и ограниченна, то ряд сходится.
5. Если ряд

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$$

сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

6. Если ряд сходится, то последовательность его остатков сходится к 0.
7. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ расходится.

1	2	3	4	5	6	7

Тест 3.2.

Отвечая на следующие вопросы «да» или «нет», поставьте в таблице соответственно знаки + или -.

1. Существуют ли ряды, у которых один остаток сходится, а другой расходится?

2. Можно ли изменить сумму сходящегося ряда, заключая некоторые слагаемые в скобки?

3. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, если сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$?

4. Может ли последовательность остатков ряда иметь ненулевой предел?

5. Может ли существовать сходящийся остаток у расходящегося ряда?

6. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, то можно ли подобрать числа c_1 и c_2 так, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (c_1 a_k - c_2 b_k)$ расходился?

1	2	3	4	5	6

4. Положительные ряды.

Определение 4.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***положительным***, если $a_n \geq 0$, n=1, 2, … .

Заметим, что последовательность частичных сумм положительного ряда монотонно возрастает и, следовательно, ограничена снизу.

Теорема 4.1. *Положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. Необходимость. Согласно замечанию 1.2 утверждение справедливо для произвольного ряда.

Достаточность. Если монотонно возрастающая последовательность частичных сумм положительного ряда ограничена, то она сходится, т.е. и ряд сходится.

Пример 4.1. Пусть последовательность $\{a_k\}$ положительных чисел монотонно возрастает и стремится к $+\infty$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{k+1} - a_k\right)$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ сходится.

Действительно, для частичных сумм S_n и T_n этих положительных рядов имеем:

$$S_n = a_{n+1} - a_1 \to +\infty\ ,\ T_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1}\ .$$

По теореме 4.1 первый ряд расходится, а второй ряд сходится.

Теорема 4.2 (о перестановке членов ряда). *Если положительный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится и его сумма равна S, то ряд, полученный в результате произвольной перестановки его членов, тоже сходится и имеет сумму, равную S.*

Доказательство. Обозначим новый ряд через $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$ и рассмотрим его частичные суммы

$$S_m^* = a_1^* + a_2^* + \ldots + a_m^*\text{, где } a_1^* = a_{k_1}, a_2^* = a_{k_2}, \ldots, a_m^* = a_{k_m}\ .$$

Пусть $N = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, тогда

$$S_m^* = a_1^* + a_2^* + \ldots + a_m^* \le a_1 + a_2 + \ldots + a_N = S_N \le S.$$

Следовательно, последовательность частичных сумм нового ряда ограничена: $\forall m\ \ 0 \le S_m^* \le S$. По теореме 4.1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$ сходится и для его суммы S^* верно неравенство $S^* \le S$.

Поменяем ряды местами. Рассмотрим частичную сумму

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

исходного ряда. Так как

$$a_1 = a^*_{k_1}, a_2 = a^*_{k_2}, \ldots, a_m = a^*_{k_m}\ ,$$

то для $N = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ имеем:

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \le a_1^* + a_2^* + \ldots + a_N^* \le S^*.$$

Следовательно, $\forall m\ \ S_m \le S^*$ и тогда $S \le S^*$.

В итоге получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*$ сходится и $S^* = S$.

Задачи.

Исследовать сходимость следующих рядов:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

Указание. Воспользоваться теоремой 4.1.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{n+1}-3^{n}\right)$.

Указание. Воспользоваться теоремой 4.1.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. Рассмотрим частичную сумму данного положительного ряда:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^4 2k}{(k+1)(k+2)}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}.$$

По теореме 4.1 из ограниченности последовательность частичных сумм ряда следует его сходимость.

Тест 4.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Последовательность частичных сумм положительного ряда ограничена снизу.

2. Последовательность частичных сумм положительного ряда ограничена.

3. Последовательность частичных сумм положительного ряда монотонна.

4. Если последовательность частичных сумм положительного ряда ограничена, то ряд сходится.

5. Если положительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд

$$a_3+a_2+a_1+a_6+a_5+a_4+\ldots+a_{3k}+a_{3k-1}+a_{3k-2}+\ldots$$

сходится и его сумма так же равна S.

6. Можно переставить члены положительного сходящегося ряда так, чтобы полученный ряд стал расходящимся.

7. Существуют положительные ряды, у которых последовательность частичных сумм не монотонна.

8. Если положительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k}+a_{2k-1})=(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+...$$

сходится и его сумма так же равна S.

9. Последовательность остатков положительного ряда монотонно убывает.

10. Если последовательность частичных сумм положительного ряда неограниченна, то ряд расходится.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5. Признаки сходимости положительных рядов.

Теорема 5.1 (признак разрежения Коши или телескопический признак). *Если* $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots \ge 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится или расходится одновременно с рядом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots .$$

Доказательство. По теореме 4.1 сходимость положительного ряда равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм.

Рассмотрим частичные суммы обоих рядов:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$T_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k a_{2^k} .$$

При $n<2^k$ имеем:

$$S_n \le a_1 + a_2 + ... + a_{2^k} \le$$
$$\le a_1 + (a_2 + a_3) + ... + (a_{2^k} + ... + a_{2^{k+1}-1}) \le$$
$$\le a_1 + 2a_2 + ... + 2^k a_{2^k} = T_k ,$$

т.е. $S_n \le T_k$.

С другой стороны, при $n>2^k$

$$S_n \ge a_1 + a_2 + ... + a_{2^k} =$$
$$= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + ... + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} T_k ,$$

т.е. $2S_n \ge T_k$.

Итак, $S_n \le T_k$ при $n < 2^k$, $T_k \le 2S_n$ при $2^k < n$. Следовательно, последовательности $\{S_n\}$ и $\{T_n\}$ или обе ограничены, или обе неограниченны. Действительно, пусть последовательность $\{T_n\}$ ограничена:

$$\exists\, T \;/\; \forall k \;\; T_k \le T.$$

Зафиксируем произвольное число $n \in \mathbf{N}$ и выберем $k \;/\; n < 2^k$. Тогда $S_n \le T_k \le T$, т.е. последовательность $\{S_n\}$ ограничена.

Пусть последовательность $\{S_n\}$ ограничена:

$$\exists\, S \;/\; \forall n \;\; S_n \le S.$$

Зафиксируем произвольное число $k \in \mathbf{N}$ и выберем $n \;/\; 2^k < n$. Тогда $T_k \le 2S_n \le 2S$, т.е. последовательность $\{T_n\}$ ограничена.

Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $\{T_n\}$. Поэтому оба ряда сходятся или расходятся одновременно. Теорема доказана.

Пример 5.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$, где $q = 2^{1-\alpha} > 0$. В примере 1.2 показано, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$. Следовательно, по признаку разрежения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $2^{1-\alpha} < 1$, т.е. при $\alpha > 1$, и расходится при $2^{1-\alpha} \ge 1$, т.е. при $\alpha \le 1$.

Теорема 5.2 (признаки сравнения рядов). *Пусть для положительных рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *выполнено одно из условий*:

1) $\forall n \;\; a_n \le b_n$;
2) $\forall n \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k < \infty$.

Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; *из рас-*

ходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Если в условии* 3) $k \neq 0$ (*в частности, если* $a_n \sim b_n$), *то оба ряда сходятся или расходятся одновременно*.

Доказательство. 1) Для последовательностей $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ частичных сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеем:

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n .$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то монотонно возрастающая последовательность $\{B_n\}$ сходится к некоторому числу B, которое является суммой этого ряда. Тогда монотонно возрастающая последовательность $\{A_n\}$ ограничена:

$$0 \le A_n \le B_n \le B. \qquad (*)$$

По теореме 4.1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то последовательность $A_n \to +\infty$. Тогда по свойству бесконечно больших последовательностей (предварительные сведения, п.4, свойство 5) из (*) следует, что $B_n \to +\infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

2) Перемножим (n-1) первых неравенств из условия:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n}{b_1} .$$

Получим:

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} .$$

Тогда

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n = c b_n \quad \text{или} \quad \frac{1}{c} a_n \le b_n , \text{ где } c = \frac{a_1}{b_1} > 0.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c b_n$ (свойство 3.3). По признаку сравнения 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c}a_n$ и тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ тоже расходится.

3). Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k<\infty$. Тогда последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ограничена (предварительные сведения, п.2, свойство 5):

$$\exists M>0 \ /\forall n \quad \frac{a_n}{b_n} \le M \text{, т.е. } a_n \le Mb_n .$$

Поэтому если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}Mb_n$ и по признаку сравнения 1) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}Mb_n$ и тогда расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \ne 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k}$. По доказанному получаем, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. В итоге, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, т.е. оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 5.1. В формулировке признаков сравнения 1), 2) достаточно, чтобы неравенства выполнялись для всех $n\ge N_0$ (см. свойство 3.1).

Пример 5.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится.

Действительно, сравним этот ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2+1)}\cdot\frac{n^2}{1} = 1,$$

то $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ и по признаку сравнения 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится.

Пример 5.3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ расходится.

Действительно, сравним этот ряд с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так как $\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$, то по признаку сравнения 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ расходится.

Теорема 5.3 (признак Даламбера). *Рассмотрим ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *при условии, что* $a_n>0$ *для всех* n.

1). *Если для всех* $n\geq N_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1,$$

где q *– фиксированное число, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится.*

Если для всех $n\geq N_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

2). *Если существует*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

то при $q<1$ *ряд сходится, при* $q>1$ *ряд расходится.*

Доказательство. 1). Пусть

$$\forall n\geq N_0\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1.$$

Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, где $b_n=q^n$. Имеем:

$$\forall n\geq N_0\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q=\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

По признаку сравнения 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

Если

$$\forall\, n\geq N_0\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1,$$

то последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ монотонно возрастает и, следовательно, не сходится к 0. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости ряда.

2). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

По определению предела последовательности для $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$ имеем:

$$\exists N \,/\, \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = q + \frac{1-q}{2} = \frac{q+1}{2} < 1 .$$

Следовательно, по признаку Даламбера 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$. Тогда для $\varepsilon = \frac{q-1}{2} > 0$ имеем:

$$\exists N \,/\, \forall n \geq N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = q - \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2} > 1 .$$

По признаку Даламбера 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Замечание 5.2. Аналогично доказывается более общий признак: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, и расходится, если $\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Замечание 5.3. При q=1 вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ остается открытым.

Действительно, рассмотрим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{1}{n^2}$, и расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n}$. Имеем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 , \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1 \text{ и } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1 , \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n}{(n+1)} \to 1 .$$

Теорема 5.4 (признак Коши). *Рассмотрим положительный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1). *Если для всех* $n \geq N_0$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq q < 1,$$

где q – *фиксированное число, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Если для всех $n \geq N_0$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

2). *Если существует*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = q,$$

то при $q < 1$ *ряд сходится, при* $q > 1$ *ряд расходится.*

3). *Если* $\overline{\lim} (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1$, *то ряд сходится. Если* $\underline{\lim} (a_n)^{\frac{1}{n}} > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. 1). Пусть

$$\forall\, n \geq N_0 \;\; (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq q < 1.$$

Тогда $a_n \leq q^n$. Так как $q < 1$, то по признаку сравнения 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Если

$$\forall\, n \geq N_0 \;\; (a_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1,$$

то $\forall\, n \geq N_0 \;\; a_n \geq 1$. Это означает, что последовательность $\{a_n\}$ не сходится к 0. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости ряда.

2). Пусть $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = q < 1$. Тогда для $\varepsilon = \frac{1-q}{2} > 0$

$$\exists N \,/\, \forall n \ge N \quad \left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} < q+\varepsilon = q+\frac{1-q}{2}=\frac{q+1}{2}<1.$$

Следовательно, по признаку Коши 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} = q > 1$. Для $\varepsilon=\frac{q-1}{2}>0$ имеем:

$$\exists N \,/\, \forall n \ge N \quad \left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} > q-\varepsilon = q-\frac{q-1}{2}=\frac{q+1}{2}>1.$$

По признаку Коши 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

3). Пусть $\overline{\lim}\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} = q < 1$. По лемме 4 (см. предварительные сведения, п. 9) для $\varepsilon=\frac{1-q}{2}>0$ неравенство

$$\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} < q+\varepsilon = q+\frac{1-q}{2}=\frac{q+1}{2}<1$$

выполняется для бесконечно многих номеров *n*. Тогда как неравенство

$$\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} \ge q+\varepsilon = \frac{q+1}{2}$$

выполняется лишь для конечного числа номеров *n*.

Следовательно, найдется номер N_0 такой, что

$$\forall\, n \ge N_0 \quad \left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{q+1}{2} < 1.$$

Т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Коши 1).

Аналогично доказывается вторая часть утверждения 3).

Теорема доказана.

Замечание 5.4. При q=1 вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ остается открытым. В качестве примера можно опять рассмотреть сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\,.$$

Пример 5.4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$, сходится по признаку Даламбера.

Действительно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to q = 0 < 1.$$

Пример 5.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$, сходится по признаку Коши:

$$\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a}{n} \to q = 0 < 1.$$

Пример 5.6. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$$

с общим членом

$$a_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & k = 2n-1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & k = 2n \end{cases}.$$

Так как

$$(a_k)^{\frac{1}{k}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2n-1}}, & k = 2n-1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, & k = 2n \end{cases},$$

то

$$\overline{\lim}\left(a^k\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится по признаку Коши.

Признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (см. замечание 5.2), поскольку

$$\overline{\lim}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Big/ \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty,$$

$$\underline{\lim}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\Bigg/\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0\,.$$

Замечание 5.5. Во всех случаях, когда признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении ряда, ответ может быть получен и с помощью признака Коши. Это следует из цепочки неравенств:

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\underline{\lim}\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\overline{\lim}\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Как показывает пример 5.6 обратное утверждение не верно.

Приведем без доказательства формулировки еще трех признаков сходимости положительных рядов.

Теорема 5.4 (признак Раабе). *Рассмотрим ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *при условии, что* $a_n>0$ *для всех* n. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q,$$

то при $q>1$ *ряд сходится, при* $q<1$ *ряд расходится.*

Пример 5.7. Как отмечено в замечаниях 5.3 и 5.5 для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ признаки Даламбера и Коши не работают. Применим признак Рабе:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{(2n+1)}{n^2}=2>1\,.$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится по признаку Раабе.

Теорема 5.6 (признак Гаусса). *Рассмотрим ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *при условии, что* $a_n>0$ *для всех* n. *Если*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\nu_n}{n^{1+\varepsilon}}\,,\ \ \lambda,\,\mu\text{=const},$$

где $\varepsilon>0$, $|\gamma_n|<c$, *то при* $\lambda>1$ *ряд сходится, а при* $\lambda<1$ *расходится. Если же* $\lambda=1$, *то ряд сходится* при $\mu>1$ и *расходится при* $\mu\le1$.

Замечание 5.6. Случаи $\lambda>1$, $\lambda<1$ приводят к признаку Даламбера так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{\lambda}$.

При λ =1

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\mu+\frac{\nu_n}{n^{\varepsilon}}\right)=\mu$$

и случаи μ >1 и μ <1 приводят к признаку Раабе.

Пример 5.8. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, где

$$a_n=(2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})...(2-\sqrt[n]{a}),\ \ a>0\ ,$$

с помощью признака Гаусса.

Заметим, что

$$\sqrt[n+1]{a}=e^{\frac{\ln a}{n+1}}=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{\nu_n}{n^2}\text{ , где } \left|\nu_n\right|<c\ .$$

Поэтому

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2-\sqrt[n+1]{a}}=\frac{1}{1-\dfrac{\ln a}{n}-\dfrac{\nu_n}{n^2}}=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{\tilde{\nu}_n}{n^2}\text{ , где } \left|\tilde{\nu}_n\right|<c\ .$$

Следовательно, если ln a >1, т.е. a >e, то ряд сходится. Если же $a \le e$, то ряд расходится.

Пример 5.9. Как отмечено в замечаниях 5.3 и 5.5 для ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}+...$$

признаки Даламбера и Коши не работают. Признак Раабе тоже не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, так как

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{(n+2-n-1)}{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\ .$$

Применим признак Гаусса. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+2}{n+1}=\frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$$

и, пользуясь разложением:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2},$$

представим его в виде:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{2-1}{n}+\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}=$$

$$=1+\frac{1}{n}+\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{n}+\frac{\nu_n}{n^2}\text{, где } |\nu_n|<c.$$

Так как $\lambda=1$, $\mu=1$, то ряд расходится.

Теорема 5.9 (интегральный признак Коши). *Если $f(x)$ - неотрицательная непрерывная монотонно убывающая на интервале* $[1,+\infty)$ *функция, то* положительный *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Пример 5.10. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Действительно, несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Задачи.

Пользуясь признаками сравнения, исследовать сходимость положительных рядов:

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+3(-1)^{n+1}}{2^n}$.

5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.

Решение. Так как

$$\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1} < \frac{\pi}{2(n^2+1)} < \frac{\pi}{2n^2}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$ сходится.

5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$.

5.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2\pi}{n})$.

5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}})$.

Решение. Так как

$$\ln(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}) \sim \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ сходится, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}})$ сходится.

5.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n+2}$.

Пользуясь признаком Даламбера, исследовать сходимость положительных рядов:

5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)!}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^{10}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}}{(n+2)n^{10}} = 0 < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд сходится.

5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$.

5.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=,$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

то по признаку Даламбера ряд сходится.

5.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\ 2^n}{n^n}$.

5.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\ 3^n}{n^n}$.

5.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!\ 4^{n+1}}$.

5.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!\ 2^{n+1}}$.

Пользуясь признаком Коши, исследовать сходимость положительных рядов:

5.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln\ n)^n}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln\ n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ n}=0<1,$$

то по признаку Коши ряд сходится.

5.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Пользуясь признаком Раабе, исследовать сходимость положительных рядов:

5.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2-2n-1}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

то по признаку Раабе ряд расходится.

5.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n\ (2n)!!}$.

Пользуясь признаком Гаусса, исследовать сходимость положительных рядов:

5.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}$.

Указание. Доказать, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p}=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+\frac{\nu_n}{n^2},\ \text{где } |\nu_n|<c.$$

5.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

Указание. Доказать, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}\cdot\left(p-\frac{1}{2}\right)+\frac{\nu_n}{n^2},\ \text{где } |\nu_n|<c.$$

Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость положительных рядов:

5.21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ (\ln\ n)^2}$.

5.22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ \ln\ n}$.

5.23. $\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

Тест 5.1.

Ответы на следующие вопросы запишите в таблицу.

1. Какие из перечисленных рядов сходятся:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}};\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}};\quad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}\ ?$$

2. Какие из перечисленных рядов расходятся:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{2})(2-\sqrt[3]{2})...(2-\sqrt[n]{2})$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{3})(2-\sqrt[3]{3})...(2-\sqrt[n]{3})$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})...(2-\sqrt[n]{e})$?

3. При каких из перечисленных условий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится:

1) $\alpha < \frac{1}{3}$; 2) $\alpha > 0$; 3) $\alpha > 1$; 4) $\alpha < 1$; 5) $\alpha < 2$; 6) $\alpha \geq 1$?

4. В каких случаях нарушено необходимое условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

1) $\forall n\ (a_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$; 2) $\forall n\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{3}{4}$; 3) $\lim_{n\to\infty}\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = 2$;

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5}$; 5) $\forall n\ (a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{4}{5}$; 6) $\forall n\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$?

5. Какие из перечисленных рядов расходятся:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}(n+1)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$?

6. Какие из перечисленных рядов сходятся:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$?

1	2	3	4	5	6

Тест 5.2.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Если. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ =0, то положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

2. Если

$$\forall n \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

то положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

3. Если существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, то положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

4. Если

$$\forall n \ \ (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1,$$

то положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

5. Если. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = +\infty$, то положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

6. Если

$$\forall n \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

то положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

7. Если $\lim_{n\to\infty}\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, то положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

8. Если $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$, то положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

9. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится при $\alpha \le \frac{1}{2}$.

10. Если $a_n \to 0$ монотонно, то положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Тест 5.3.

Отвечая на следующие вопросы «да» или «нет», поставьте в таблице соответственно знаки + или -.

1. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, если $\alpha \geq \frac{3}{2}$?

2. Сходится ли положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$?

3. Сходится ли положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\lim_{n\to\infty}\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}=+\infty$?

4. Можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если $0\leq b_n \leq a_n$ для всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится?

5. Существует ли расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \geq \ldots \geq 0$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится?

6. Можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $0\leq a_n \leq b_n$ для всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится?

7. Расходится ли положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} > 1$ для всех n?

8. Сходится ли положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{2}$ при n >100 и $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ при n <100?

9. Можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $0\leq a_n \leq b_n$ только для всех четных n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится?

10. Можно ли утверждать, что положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ только для всех четных n?

11. Можно ли утверждадать, что положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{4}{5}$ только для всех четных n?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Определение 6.1. Ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{, где } a_n > 0,$$

называется ***знакочередующимся***.

Теорема 6.1 (признак Лейбница). *Если последовательность положительных чисел* $\{a_n\}$ *монотонно убывая сходится к* 0, *то знакочередующийся ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *сходится,*

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, где

$$\forall n \ \ a_n > 0, \ \ a_{n+1} \le a_n \ \text{ и } \ a_n \to 0.$$

Так как

$$\forall n \quad a_n - a_{n+1} \ge 0,$$

то для его частичной суммы S_{2m} с четным номером $2m$ имеем:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \le S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}).$$

Следовательно, последовательность $\{ S_{2m}\}$ монотонно возрастает.

Запишем частичную сумму S_{2m} в другом виде:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} .$$

Отсюда следует, что последовательность $\{ S_{2m}\}$ ограничена сверху:

$$\forall m \quad S_{2m} < a_1.$$

Таким образом, существует $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Для частичной суммы S_{2m+1} с нечетным номером $2m+1$ имеем:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(S_{2m} + a_{2m+1}\right) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Итак, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится.

Пример 6.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится по признаку Лейбница. Сумма этого ряда равна ln2.

Пример 6.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, несмотря на то, что $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0$. Таким образом, условие знакочередуемости и условие монотонного стремления к нулю в признаке Лейбница существенно.

Пример 6.3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$$

так же не является знакочередующимся. Не смотря на то, что последовательность $\{\,|a_n|\,\}$ монотонно убывая сходится к 0, ряд расходится. Действительно,

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1 \text{ при нечетном } n, \\ 0 \text{ при четном } n. \end{cases}$$

Остальные частичные суммы ряда принимают промежуточные значения. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда не имеет предела, ряд расходится.

Пример 6.4. Знакочередующийся ряд

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

расходится, так как если бы он сходился, то по свойству 3.5 сходился бы и ряд

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right).$$

Но гармонический ряд, как известно, расходится. Следовательно, условие монотонного стремления к нулю последовательность $\{a_n\}$ также существенно.

Пример 6.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+(-1)^n}$ сходится по признаку Лейбница.

Последовательность $a_n=\frac{1}{2n+(-1)^n}$ сходится к 0. Для проверки монотонности выпишем значения a_n при n=2k-1, 2k, 2k+1, $k \geq 1$:

$$a_{2k-1}=\frac{1}{4k-2-1}=\frac{1}{4k-3} > a_{2k}=\frac{1}{4k+1} = a_{2k+1}=\frac{1}{4k+2-1}=\frac{1}{4k+1}.$$

Следовательно, последовательность положительных чисел $\{ a_n\}$ монотонно убывая сходится к 0.

Пример 6.6. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...$ =ln2-1. Переставим члены этого ряда:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+... \quad . \qquad (*)$$

Получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, где $\{a_n\}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{4},...\}$.

Заметим, что последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ сходится к 0, но не монотонно. Т.е. признак Лейбница не работает. Тем не менее ряд (*) сходится. Действительно, пусть $\{S_n\}$- последовательность частичных сумм исходного ряда, $\{\tilde{S}_n\}$- последовательность частичных сумм нового ряда (*). Имеем:

$$\tilde{S}_{2m}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+...=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right)=S_{2m}\to \ln 2-1 \text{ при } m\to\infty.$$

Тогда

$$\tilde{S}_{2m+1}=\tilde{S}_{2m}+\frac{1}{2m+3}\to \ln 2-1 \text{ при } m\to\infty.$$

Следовательно, ряд (*) сходится и его сумма равна ln2-1, т.е. сумме исходного ряда.

Итак, условия признака Лейбница являются достаточными, но не необходимыми условиями сходимости ряда.

Определение 6.2. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, называется *рядом Лейбница*.

Следствие 6.1. *Частичные суммы ряда Лейбница* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *обладают следующими свойствами*:

1) $\forall m, k \quad S_{2m} \le S \le S_{2k-1} \le a_1$;

2) $S_{2m} \nearrow S$, $S_{2k-1} \searrow S$, *где* S – *сумма ряда*.

Доказательство. Доказано, что $S_{2m} \nearrow S$. Так как

$$\forall n \quad a_n - a_{n+1} \ge 0,$$

то для S_{2k-1} имеем:

$$S_{2k-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) \le a_1.$$

При этом

$$S_{2k-1} \ge S_{2k+1} = S_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k+1}) .$$

Т.е. $S_{2k-1} \searrow$ S и $S_{2k-1} \le a_1$.

Следствие 6.2. *Для любого остатка ряда Лейбница верна оценка*:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\right| \le a_{m+1} .$$

Доказательство. Запишем m-ый остаток ряда в виде:

$$S - S_m = \sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{m+k+1}a_{m+k} ,$$

где обозначили n-m=k. Положим $b_k = a_{m+k}$, тогда

$$S - S_m = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k .$$

Для полученного ряда Лейбница $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$ верны утверждения следствия 6.1. В частности верна оценка для его суммы:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k\right| \le b_1 = a_{m+1} .$$

Итак, $|S - S_m| = \left|\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\right| \le a_{m+1}$.

Задачи.

Исследовать сходимость следующих рядов:

6.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+1}}$.

Решение. Так как $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \searrow 0$, то по признаку Лейбница знакочередующийся ряд сходится.

6.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\frac{1}{2n})$. **6.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{\pi}{4}+\pi n)\sin\frac{1}{n}$.

Тест 6.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+10)(3n-100)}$ является рядом Лейбница.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+10)(n+100)}$ является рядом Лейбница.

3. Последовательность частичных сумм ряда Лейбница монотонно возрастает.

4. Для любого остатка ряда Лейбница верна оценка:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\right| \le a_1 .$$

5. Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ является знакочередующимся рядом.

6. Последовательность остатков ряда Лейбница монотонно убывает.

7. Для всех членов последовательности $\{S_m\}$ частичных сумм ряда Лейбница верна оценка: $0 \le S_m \le a_1$.

8. Суммой ряда Лейбница является положительное число.

9. Какая-то частичная сумма S_{2m} ряда Лейбница может быть равна нулю.

10. Какая-то частичная сумма S_{2m-1} ряда Лейбница может быть равна нулю.

11. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, если последовательность чисел $\{a_n\}$ монотонно возрастая сходится к 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

7. Признаки Абеля и Дирихле.

Теорема 7.1 (преобразование Абеля). *Пусть* $A_k = \sum_{m=n+1}^{k} a_m$. *Тогда при* $M>(n+1)$ *имеет место формула*:

$$\sum_{k=n+1}^{M} a_k b_k = A_M b_M + \sum_{k=n+1}^{M-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Доказательство. Преобразуем правую часть формулы, учитывая, что $A_k - A_{k-1} = a_k$, $A_{n+1} = a_{n+1}$:

$$A_M b_M + \sum_{k=n+1}^{M-1} A_k (b_k - b_{k+1}) = A_M b_M + \sum_{k=n+1}^{M-1} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{M-1} A_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{M} A_k b_k - \sum_{k=n+2}^{M} A_{k-1} b_k = A_{n+1} b_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{M} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$= a_{n+1} b_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{M} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{M} a_k b_k .$$

Теорема доказана.

Лемма 7.1. *Пусть последовательность* $\{b_k\}$ *монотонно возрастает или монотонно убывает, множество сумм* $A_k = \sum_{m=n+1}^{k} a_m$, $k=n+1$, $n+2$, …, M, *где* $M>(n+1)$, *ограничено*: $|A_k| \le L$. *Тогда*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{M} a_k b_k\right| \le L\,(|b_{n+1}| + 2|b_M|).$$

Доказательство. По теореме 7.1 имеем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{M} a_k b_k\right| \le |A_M|\,|b_M| + \sum_{k=n+1}^{M-1} |A_k|\,|b_k - b_{k+1}| \le L|b_M| + L\sum_{k=n+1}^{M-1} |b_k - b_{k+1}|. \quad (*)$$

Последовательность $\{b_k\}$ монотонна, следовательно, разности $b_k - b_{k+1}$ имеют один и тот же знак. Поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{M-1} |b_k - b_{k+1}| = \left|\sum_{k=n+1}^{M-1} (b_k - b_{k+1})\right| =$$

$$= |(b_{n+1} - b_{n+2}) + (b_{n+2} - b_{n+3}) + \ldots + (b_{M-2} - b_{M-1}) + (b_{M-1} - b_M)| = |b_{n+1} - b_M|.$$

Тогда из (*) получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{M} a_k b_k\right| \le L|b_M| + L\left|\sum_{k=n+1}^{M-1} (b_k - b_{k+1})\right| = L|b_M| + L|b_{n+1} - b_M| =$$

$= L(|b_M| + |b_{n+1} - b_M|) \le L\,(|b_M| + |b_{n+1}| + |b_M|) = L\,(|b_{n+1}| + 2|b_M|).$

Лемма доказана.

Замечание 7.1. Если в условиях леммы последовательность $\{b_k\}$ монотонно убывает и $b_k>0$, то получим:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{M} a_k b_k\right| \le L(|b_M| + |b_{n+1} - b_M|) = L\,(b_M + b_{n+1} - b_M) = L\,b_{n+1}.$$

Теорема 7.2 (признак Абеля). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна и ограничена, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Теорема 7.3 (признак Дирихле). *Если последовательность* $\{S_n\}$ *частичных сумм ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничена, последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна и* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство обеих теорем проведем, применяя критерий Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Доказательство признака Абеля. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то

$$\exists c>0 \;/\; \forall n \;\; |b_n| \le c.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по критерию Коши

$$\exists N \;/\; \forall n \ge N \text{ и } \forall k \ge n+1 \quad \left|\sum_{m=n+1}^{k} a_m\right| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

Последовательность $\{b_n\}$ монотонна, поэтому по лемме 7.1 имеем:

$$\forall n \ge N \text{ и } \forall p \ge 1 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3c}(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|) \le \frac{\varepsilon}{3c}\cdot 3c = \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство признака Дирихле. По условию последовательность

$\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, т.е.

$$\exists c>0 \ / \ \forall n \ \ |S_n| = \left|\sum_{m=1}^{n} a_m\right| \le c.$$

Тогда

$$\forall n \text{ и } \forall k \ge n+1 \quad \left|\sum_{m=n+1}^{k} a_m\right| = |S_k - S_n| \le |S_k| + |S_n| \le 2c.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как последовательность $\{b_n\}$ сходится к 0, то

$$\exists N \ / \ \forall n \ge N \ \ |b_n| < \frac{\varepsilon}{6c} \ .$$

Последовательность $\{ b_n\}$ монотонна, поэтому по лемме имеем:

$$\forall n \ge N \text{ и } \forall p \ge 1 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le 2c \ (\ |b_{n+1}| + 2|b_{n+p}| \ ) < 2c \cdot 3 \cdot \frac{\varepsilon}{6c} = \varepsilon \ .$$

По критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Замечание 7.2. Докажем признак Абеля, используя признак Дирихле.

Так как последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена, то она сходится: $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbf{R}$. Тогда последовательность $\{b_n - b\}$ монотонно сходится к нулю.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, поэтому последовательность его частичных сумм сходится, а значит ограничена.

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$ сходится по признаку Дирихле. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b$ тоже сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n (b_n - b) + a_n b] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \ .$$

Замечание 7.3. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, последовательность $\{b_n\}$ монотонна и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, последовательность $\{c_n\}$ монотонна и ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ сходится.

Действительно, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится по признаку Дирихле, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) c_n$ сходится по признаку Абеля.

Пример 7.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{3}+\pi n)\cos\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}}$ сходится.

Действительно, последовательность $\{S_n\}=\{-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2};0;\ldots\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{\pi}{3}+\pi n)$ ограничена, $b_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$ монотонно, последовательность $\{c_n\}=$ $\cos\frac{1}{n}$ монотонна и ограничена. Согласно замечанию 7.3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{3}+\pi n)\cos\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}}$ сходится.

Задачи.

7.1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$, где $a_n \to 0$ монотонно, сходится при всех значениях $\alpha \in \mathbf{R}$.

Решение. Пусть $\alpha \neq 2\pi m$. Покажем, что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ ограничена. Имеем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} (\cos(k-\frac{1}{2})\alpha - \cos(k+\frac{1}{2})\alpha) = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} (\cos\frac{\alpha}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})\alpha) .$$

Поэтому

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \le \frac{2}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ сходится по признаку Дирихле при всех значениях $\alpha \ne 2\pi m$.

Если $\alpha = 2\pi m$, то $\sin\ n\alpha = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ тоже сходится.

7.2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$, где $a_n \to 0$ монотонно, сходится при всех значениях $\alpha \ne 2\pi m$.

Пользуясь признаками Абеля и Дирихле, исследовать сходимость рядов:

7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\ \cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n}}$.

7.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\ln(\ln(n+2))} \cos\dfrac{1}{n+1}$.

7.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Тест 7.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена, $b = \sup\{b_n\}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ сходится.

3. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, последовательность $\{b_n\}$ монотонно схо-

дится к числу b, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ сходится.

4. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin 2n$ применим признак Дирихле.

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \cos \frac{\pi n}{3}$ сходится.

6. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 2\pi n$ сходится.

7. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos 2\pi n$ сходится.

8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \operatorname{arctg} n^2$ расходится.

9. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos 2n \ \cos \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ сходится.

10. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (\operatorname{arctg} \sqrt{n} - \frac{\pi}{2})$ расходится.

11. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin 5n \ (e^{\frac{1}{n}} - 1)$ сходится.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

8. Произвольные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Определение 8.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение 8.2. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся***, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Пример 8.1. Ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно.

Действительно, ряд сходится по признаку Лейбница. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 8.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ сходится абсолютно.

Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

Теорема 8.1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. По критерию Коши сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ равносильна тому, что

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ /\ \forall n\geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p\geq 1\ \ \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\varepsilon .$$

Тогда

$$\forall n\geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall p\geq 1\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k| < \varepsilon ,$$

т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится по критерию Коши.

Замечание 8.1 (о применении признаков Даламбера и Коши к исследованию абсолютной сходимости ряда). Если по признакам Даламбера или Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно.

Если по признакам Даламбера или Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ не сходится абсолютно. При этом из доказательств этих признаков следует, что в этом случае $|a_n|\not\to 0$, т.е. нарушено необходимое условие сходимости ряда. Тогда $a_n\not\to 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже расходится. ■

Теорема 8.2. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов абсолютная сходимость не нарушается и сумма ряда не изменяется.*

Доказательство. Обозначим для всех *n*

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \ge 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \ge 0 \\ -a_n, & a_n < 0 \end{cases}.$$

Т.е.

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Тогда $a_n = a_n^+ - a_n^-$, где $a_n^+ \ge 0$, $a_n^- \ge 0$.

По условию теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Так как

$$\forall n \quad 0 \le a_n^{\pm} \le |a_n|,$$

то положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ сходятся по признаку сравнения. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Переставим члены нашего ряда и получим новые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$. По теореме 4.2 о перестановке членов положительного ряда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 8.3. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно, то для произвольного действительного числа с ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ *также сходится абсолютно.*

Теорема 8.4. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно, то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *также сходятся абсолютно.*

Доказательство обеих теорем следует из критерия Коши сходимости ряда, т.к.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |ca_k| = |c| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| ,$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k \pm b_k| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k| .$$

Рассмотрим два ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Множество произведений $a_n b_k$, где n, $k \in \mathbf{N}$, счетно. Перенумеруем все элементы этого множества и получим последовательность $\left\{ a_{n_j} b_{k_j} \right\}_{j=1}^{\infty}$. Ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n_j} b_{k_j}$ называется ***произведением рядов*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 8.5 (теорема Коши). *Если оба ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *то ряд из произведений* $a_n b_k$, *взятых в любом порядке, тоже сходится абсолютно и имеет своей суммой произведение сумм* AB.

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^*$. Докажем абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{n_j} b_{k_j}$.

Имеем:

$$\forall m \quad \sum_{j=1}^{m} \left|a_{n_j}\right| \left|b_{k_j}\right| \le \sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \sum_{i=1}^{N} |b_i| \le A^* B^*,$$

где $N = max\{n_1, n_2, \ldots, n_m, k_1, k_2, \ldots, k_m\}$. Т.е. последовательность частичных сумм положительного ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{n_j}\right| \left|b_{k_j}\right|$ ограничена. Следовательно, по теореме 4.1 ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{n_j}\right| \left|b_{k_j}\right|$ сходится. Таким образом, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} b_{k_j}$ сходится абсолютно и по теореме 8.2 его сумма H не зависит от порядка суммирования его членов.

Переставим члены ряда так, чтобы при любом $k=n^2$ частичная сумма H_k произведения рядов имела вид:

$$H_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Для этого расположим произведения $a_n b_k$ в виде матрицы

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \\
\ldots & & &
\end{array}$$

и будем нумеровать по минорам:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 4 & 9 & \ldots \\
2 & 3 & 8 & \\
5 & 6 & 7 & \\
\ldots & & &
\end{array}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$H_{n^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j \to AB.$$

Так как $H_k \to H$, а подпоследовательность $H_{n^2} \to AB$, то по теореме 3 (см. предварительные сведения, п.8) получаем, что $H = AB$.

Теорема доказана.

Итак, свойства абсолютно сходящихся рядов во многом похожи на свойства конечных сумм: величина суммы абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка суммирования, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать и т.п.

Сформулируем без доказательства теорему:

Теорема 8.6 (теорема Римана). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого действительного числа B можно переставить члены ряда так, что полученный ряд будет иметь суммой число B. Существуют такие перестановки членов ряда, при которых ряд становится расходящимся.*

Замечание 8.2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то можно переставить члены ряда так, что последовательности частичных сумм полученных рядов будут стремиться к $-\infty$, к $+\infty$ или не иметь предела.

Пример 8.3. Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \; .$$

Его сумма равна ln2 (см. пример 6.1).

Составим новый ряд, переставив члены ряда:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots . \qquad (*)$$

Пусть $\{S_n\}$- последовательность частичных сумм исходного ряда, $\{\tilde{S}_n\}$- последовательность частичных сумм нового ряда (*). Имеем:

$$\tilde{S}_{3m} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}\, S_{2m} \to \frac{1}{2}\ln 2 \text{ при } m \to \infty.$$

Тогда

$$\tilde{S}_{3m-1} = \tilde{S}_{3m} + \frac{1}{4m} \to \frac{1}{2}\ln 2 \text{ при } m \to \infty,$$

$$\tilde{S}_{3m-2} = \tilde{S}_{3m-1} + \frac{1}{4m-2} \to \frac{1}{2}\ln 2 \text{ при } m \to \infty.$$

Следовательно, ряд (*) сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}\ln 2$.

Замечание 8.3. В примере 6.6 показано, что при перестановке членов условно сходящегося ряда сумма может и не измениться.

Задачи.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

8.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n}$.

Решение. Ряд сходится по признаку Дирихле, так как последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin 2n$ ограничена (см. задачу 7.1) и $\frac{1}{n}\to 0$ монотонно. При этом ряд не сходится абсолютно, так как положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n}{n}\right|$ расходится. Действительно, воспользуемся признаком сравнения. Имеем:

$$\left|\frac{\sin 2n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 2n}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ расходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ сходится по признаку Дирихле (см. задачу 7.2). По свойству 3.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{n}\right)$ расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n}{n}\right|$ расходится. Итак, исходный ряд сходится условно.

8.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{n^2}$.

8.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n}$.

8.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ \ln(n+1)}$.

8.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{n}{(n+1)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ сходится по признаку Лейбница, последовательность $\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$ монотонно стремится к 1, следовательно, монотонна и ограничена. Поэтому ряд сходится по признаку Абеля. При этом ряд не сходится абсолютно, так как положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

расходится. Действительно, n-ый член ряда эквивалентен члену расходящегося ряда:

$$\frac{n}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\sim\frac{n}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}}\sim\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$

Итак, исходный ряд сходится условно.

8.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n}$.

Тест 8.1.

Ответы на следующие вопросы запишите в таблицу.

1. Какие из следующих рядов сходятся:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\sqrt{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{n}}$?

2. Какие из следующих рядов сходятся абсолютно:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\sqrt{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{n}}$?

3. Какие из следующих рядов сходятся условно:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\sqrt{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{n}}$?

4. При каких условиях ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ обязательно сходится абсолютно?

1) последовательность чисел $\{a_n\}$ монотонно возрастая сходится к 0;

2)последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно убывая сходится к 0;

3) $\forall n\ \ |a_n| < \frac{1}{n}$;

4) $\forall n\ \ |a_n| \le \frac{1}{n^2}$.

5. При каких условиях ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ обязательно сходится?

1) последовательность чисел $\{a_n\}$ монотонно возрастая сходится к 0;

2) последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно убывая сходится к 0;

3) $\forall \text{n}\ \ |a_n| \le \frac{1}{n}$;

4) $\forall \text{n}\ \ |a_n| \le \frac{1}{n^2}$.

6. При каких условиях ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ может быть расходящимся?

1) $\forall n\ \ -\frac{1}{n} < a_n < \frac{1}{n}$;

2) последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно убывает и $\forall n\ \ 0 < a_n \le \frac{1}{n}$;

3) последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно убывает и $\forall n\ \ 0 < a_n \le \frac{1}{n^2}$;

4) последовательность отрицательных чисел $\{a_n\}$ монотонно возрастает и $\forall n\ \ -\frac{1}{n} < a_n < 0$;

5) $\forall n \quad |a_n| \le \dfrac{1}{n^3}$;

6) последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно убывает.

1	2	3	4	5	6

Тест 8.2.

Для верного с Вашей точки зрения утверждения поставьте в таблице знак +, для неверного - знак -.

1. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ сходится условно.

3. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то при любой перестановке его членов сходимость не нарушается и сумма ряда не изменяется.

4. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся условно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ также сходится условно.

5. Если

$$\forall n \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ge 1,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

6. Если ряд сходится, то он сходится условно.

7. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, последовательность $\{b_\text{n}\}$ монотонна и ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится условно.

8. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, последовательность $\{b_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно.

9. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

10. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также сходится абсолютно.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Тест 8.3.

Какие из пропущенных условий можно вставить, чтобы утверждение стало верным. Ответы занесите в таблицу.

1. Если ряд сходится _______, то он сходится.

1) абсолютно; 2) условно

2. Если ряд сходится абсолютно, то он _______.

1) сходится; 2) сходится условно.

3. Если ряд сходится условно, то он _______.

1) сходится абсолютно; 2) сходится.

4. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ _______, если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно убывая сходится к 0.

1) сходится; 2) сходится абсолютно; 3) сходится условно.

5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолюно, последовательность $\{b_n\}$_____, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

1) сходится к 0;
2) монотонна и ограничена;
3) монотонно сходится к 0;
4) монотонно убывает.

6. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, последовательность $\{b_n\}$ монотонно сходится к 0, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ___.

1) сходится; 2) сходится условно; 3) сходится абсолютно.

7. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, последовательность $\{b_n\}$ ____, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно.

1) сходится к 0;
2) монотонна и ограничена;
3) монотонно возрастает;
4) ограничена;
5) монотонно убывает.

1	2	3	4	5	6	7

Тест 8.4.

Отвечая на следующие вопросы «да» или «нет», поставьте в таблице соответственно знаки + или -.

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.
3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.
5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.
6. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.
7. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.
8. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

9. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится условно.

10. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится.

11. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится.

12. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходятся или расходятся одновременно.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

9. Задачи на повторение.

Найти суммы следующих рядов:

9.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

9.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$.

9.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

9.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n(n+1)}}$.

9.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Исследовать сходимость рядов. Найти суммы сходящихся рядов:

9.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

9.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$.

9.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$.

9.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$.

9.10. $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)+\ldots$.

9.11. $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots$.

9.12. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$.

9.13. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

Доказать расходимость следующих рядов:

9.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n}{2n^2+1}$.

9.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}}$.

9.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n}\,arctg\,\frac{n+1}{n^3+n}$.

9.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,02}$.

9.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.

9.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2+1}{n^2}$.

9.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2}$.

9.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^2+1}\,tg\,\frac{n+2}{n^2+3}$.

9.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{n}{n^3+1}$.

Исследовать сходимость положительных рядов:

9.23. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\pi-\operatorname{arctg}\,n}{(n+1)(n+2)}$.

9.24. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{n2^n+5}{n3^n+4}$.

Пользуясь признаками сравнения, исследовать сходимость положительных рядов:

9.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

9.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$.

9.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

9.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^5-1\right)$.

9.29. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2(4+3\sin\ n)}$.

9.30. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\pi-\operatorname{arctg}(n^2+1)}{(n+1)\sqrt{n+3}}$.

9.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

9.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}}-1\right)$.

9.33. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{3+(-1)^n}{n^2}$.

9.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$.

9.35. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+n}{n^2+3}$.

9.36. $\sum_{n=1}^{\infty}n\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

9.37. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

9.38. $\sum_{n=1}^{\infty}n\ \operatorname{tg}\frac{n+2}{n^2+3}$.

9.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$.

9.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{n}}$.

9.41. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n^2+3n}{n^2+1}\right)^3-1\right)$.

9.42. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sin\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+2}}-1\right)$.

9.43. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n^2}}}$.

Пользуясь признаками Даламбера, Коши, Раабе исследовать сходимость следующих положительных рядов:

9.44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$.

9.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$.

9.46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ (2n+1)!}{(2n)!}$.

9.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((2n)!!\right)^2}{(4n)!!}$.

9.48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$.

9.49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ a^n}{n^n}$, $a\neq e$, $a>0$.

9.50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{3^n n!}$.

9.51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$.

9.52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

9.53. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$.

9.54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{2^n+5^n}$.

9.55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{-n}+3^{-n}}$.

9.56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

9.57. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$.

9.58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$.

9.59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ldots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\cdot\ln(3+a)\cdot\ldots\ln(n+1+a)},\ a>0$.

9.60. Пользуясь признаками Раабе или Гаусса, исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)},\ \alpha,\beta,\gamma>0.$$

Доказать абсолютную сходимость рядов:

9.61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+\frac{\pi}{4})}{n\sqrt[3]{n+2}}$.

9.62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$.

9.63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{n}}$.

9.64. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^3 n\ \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^3+2}$.

9.65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^2 n}{2^n}$.

9.66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(2n)!}$.

9.67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!!}{(n+1)^n}$.

9.68. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

9.69. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2+n}}$.

9.70. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}})$.

9.71. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{\pi}{3}+\pi n)\arcsin\frac{1}{n+1}$.

9.72. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+(-1)^n)^2}$.

9.73. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+(-1)^n}$.

9.74. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2 2^n}{3^n+1}$.

9.75. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n+2}}\ \mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

9.76. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

9.77. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\pi n+\frac{\pi}{6})\ln(1+\frac{2}{n})$.

Исследовать сходимость рядов:

9.78. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{\pi}{4})}{\ln^2(n+1)}$.

9.79 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{\sqrt{n}}$.

Исследовать сходимость следующих рядов в зависимости от значения параметра:

9.80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$.

9.81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\ n}{n^{\alpha}}$.

9.82. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$, $0<x<\pi$.

9.83. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+(-1)^{n-1})^p}$.

9.84. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n}+(-1)^{n-1})^p}$.

9.85. Установив сходимость соответствующего ряда, показать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^n}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^n}=0$, $a>1$.

9.86. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon=10^{-6}$, если

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$?

Историческая справка

Геометрические прогрессии занимали видное место в Древней Индии. Одна из индийских легенд гласит, что когда царь Шерам (конец V века нашей эры) познакомился с шахматами, он вызвал к себе во дворец их создателя — мудреца Сету. Он спросил Сету, что он хочет получить за такую чудесную игру. Сета думал весь день, а на утро явился к Шераму и сказал, чтобы он велел выдать ему за первую клетку шахматной доски одно зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4, за четвертую — 8, за пятую — 16, за шестую — 32 и т.д. Шерам удивился кажущейся скромности мудреца и велел придворным сосчитать нужное количество зерен и немедленно выдать их Сете. Но царь так и не смог удовлетворить просьбу Сеты, потому что число зерен, получающееся в результате удвоения каждой из шестидесяти четырех клеток доски, было огромно.

Ученый ал-Бируни[1] вычислил сумму 64-ех членов геометрической прогрессии $1+2+2^2+\ldots+2^{63}$. Эта сумма равна 18 446 744 073 709 551 615. Эта прогрессия играла большую роль не только в математике, но и в индийском стихосложении, когда необходимо было вычислить число слогов нужного размера.

Правила нахождения любого члена и суммы геометрической прогрессии

$$a_{n+1} = aq^n, \; S_n = \frac{aq^n - a}{q-1}, \; q > 1,$$

были впервые приведены Магавирой, а затем Шридхарой и Бхаскарой II[2].

Задачи на геометрические прогрессии встречаются довольно рано и в других цивилизациях. В Древнем Египте родилась задача о 7 кошках в каждом из 7 домов; каждая кошка съела по 7 мышей, из которых каждая съела по 7 колосьев ячменя; каждый же колос мог дать по 7 мер зерна. В папирусе Райнда[3], откуда взята эта задача, приводится и сумма 5 членов этой прогрессии: $7+7^2+\ldots+7^5=19\,607$.

Архимед[4] в трактате «О квадратуре параболы» решал задачу о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots .$$

[1] ал-Беруни, Абу-р-Райхан Мухаммед ибн Ахмед (973 – ок. 1050) – индийский математик.
[2] Магавира (IX в.), Шридхара (IX-X в.) и Бхаскара II (XIII в.) – индийский математики.
[3] Папирус Райнда, расшифрованный в 1877 г., хранится в Британском музее.
[4] Архимед (287-212 до н.э.) – древнегреческий математик, физик и механик.

Так как $S = \dfrac{a}{1-q}$, то при a=1 и q=1/4 получаем, что S= 4/3. Интересно доказательство Архимеда: надо найти сумму бесконечно убывающей прогрессии a+b+c+d+…, если знаменатель прогрессии равен 1/4. Имеем:

$$(b+c+d+...)+\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{3}+\frac{d}{3}+...\right)=\left(b+\frac{b}{3}\right)+\left(c+\frac{c}{3}\right)+\left(d+\frac{d}{3}\right)+...=$$

$$=\frac{4}{3}b+\frac{4}{3}c+\frac{4}{3}d+...=\frac{1}{3}(4b+4c+4d+...)=\frac{1}{3}(a+b+c+d+...)=$$

$$=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}(b+c+d+...)\,.$$

Отсюда

$$b+c+d+...=\frac{1}{3}a \quad \text{и} \quad a+b+c+d+...=\frac{4}{3}a\,.$$

Следовательно, при a=1 искомая сумма равна 4/3.

Более двух тысяч лет назад древнегреческий философ Зенон Элейский (около 450 г. до н.э.) сформулировал парадокс «Ахиллес и черепаха»: быстроногий Ахиллес никогда не догонит неторопливую черепаху, если в начале движения черепаха находится впереди Ахиллеса. Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности. Ахиллес так никогда и не догонит черепаху, потому что прежде ему необходимо побывать в бесконечном числе точек.

Займемся вычислениями. Пусть по дороге со скоростью V ползет черепаха. В начальный момент времени она находится в точке A_1, а сзади нее на расстоянии 1000 шагов в точке A_0 – Ахиллес. Он хочет догнать черепаху и начинает движение в ее сторону со скоростью, в 10 раз большей, чем у черепахи. Когда Ахиллес добежит до точки A_1 черепаха доползет до точки A_2. Когда Ахиллес добежит до точки A_2, черепаха доползет до точки A_3 и т.д. Длина отрезка A_0A_1 равна 1000 шагов. Так как черепаха движется в 10 раз медленнее, чем Ахиллес, то длина второго отрезка A_1A_2 в 10 раз меньше длины первого отрезка A_0A_1, длина следующего – еще в 10 раз меньше и т.д., т.е.

$$A_{n-1}A_n=\frac{A_0A_1}{10^{n-1}}=\frac{1000}{10^{n-1}}\,.$$

Время T_n, за которое Ахиллес пробегает n-ый отрезок, равно

$$T_n = \frac{A_{n-1}A_n}{10V} = \frac{1000}{10^n V} = \frac{1000}{V} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n .$$

Сумма T всех чисел T_n, образующих геометрическую прогрессию, и дает время для прохождения всех точек A_n:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{V} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{\frac{1000}{V} \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1000}{V} . \qquad (*)$$

Таким образом, T – это и есть то время, через которое Ахиллес догонит черепаху.

Это очень простая задача на движение, сводящаяся к уравнению

$$VT+1000=10VT,$$

решение которого совпадает с (*).

Заметим, что парадокс «Ахиллес и черепаха» связан с вопросом о том, может ли быть конечной сумма бесконечного числа слагаемых. Но как мы уже видели, сходящиеся ряды существуют.

Южноиндийские математики в XV-XVI веках добились больших успехов в области суммирования бесконечных рядов. Были сформулированы правила разложения арктангенса, синуса, косинуса в бесконечные степенные ряды. В Европе к таким разложениям подошли лишь в XVII веке.

Первый подлинный переход к пределу встречается у А. Таке[5]. Он вывел сумму бесконечной геометрической прогрессии из суммы конечной прогрессии (1654). Ферма[6] суммировал бесконечный ряд и определял предел суммы для вычисления площади плоской фигуры (1657).

Ник. Меркатор[7] (1668) взял уравнение гиперболы и простым делением разложил дробь в бесконечный ряд

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots .$$

---

[5] Таке, Анри (1612-1660) – бельгийчкий маткматик. Был профессором в колледжах иезуитов. Написал несколько математических работ. В книге «Теория и практика арифметики» (1656) Таке, не пользуясь буквенными обозначениями величин, доказал ряд теорем, в частности, нашел сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, применив предельный переход (эту формулу тем же методом получил Э. Торричелли), определил число комбинаций из n элементов по m. Пытался доказать V постулат Евклида.

[6] Ферма, Пьер (1601-1665), знаменитый французский математик, много сделавший для создания метода бесконечно малых, один из творцов современной теории чисел и теории вероятностей, до Декарта развил основные идеи аналитической геометрии.

[7] Меркатор, Николаус (1620-1687) – математик, астроном, инженер. Член Лондонского королевского общества. Родился в Голштинии. Жил в Лондоне и Париже. Важнейшая из его работ – книга «Логарифмотехника» (1668), в которой получены указанные разложения в степенные ряды. Ряд для $\ln(1+x)$ был первым степенным рядом после геометрической прогрессии.

В результате путем, как мы говорим, почленного интегрирования, был получен степенной ряд

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots .$$

Меркатор получил также ряд

$$\int_0^x \ln(1+x)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\dots$$

для $x = 0.1$, но способ, которым он получил эту формулу, мог быть применен для любого $0 < x < 1$.

В этом же 1668 году лорд Броункер[8] на основании геометрических соображений получил формулу

$$\ln 2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-\dots .$$

Он даже доказал, почти не сознавая этого, сходимость данного ряда.

Принципиальное введение в математику бесконечных рядов принадлежит Ньютону[9]. Ньютон нашел разложения для синуса и косинуса (1666). Для получения рядов Ньютон использовал разные приемы: деление, как Меркатор, извлечение корней, теорема о биноме (в случае целых положительных показателей), приближенное представлений корней уравнений, коэффициенты которых суть рациональные функции одного переменного. Примененный для решения уравнений метод неопределенных коэффициентов Ньютон использовал для обращения рядов и таким путем получил серию бесконечных рядов для простых трансцендентных функций. Так, обращая логарифмический ряд, он получил ряд для e^x; с помощью теоремы о биноме и интегрирования нашел ряд для $\arcsin x$, обращение которого дало ему ряд для $\sin x$; в свою очередь отсюда, путем извлечения корня, он вывел ряд для $\cos x$ и т. д. Можно заметить, что Ньютон ясно чувствовал потребность в исследовании сходимости рядов, хотя ему и не удалось установить ее общие условия.

---

[8] Броункер, Уильям (1620-1684) – английский математик и государственный деятель. Окончил Оксфордский университет. Один из основателей и первый президент Лондонского королевского общества. Вместе с Н. Меркатором и И. Ньютоном положил начало представлению функций с помощью рядов. Первым обратил внимание на применение непрерывных (цепных) дробей.

[9] Ньютон, Исаак (1642-1727), величайший ученый, профессор Кембриджского университета, президент Лондонского королевского общества. Главнейшим его трудом являются «Математические начала естественной философии (1687), где изложены начала механики и законы движения, законы планетных движений. Огромное значение имеют его работы по созданию исчисления бесконечно малых. Ньютон исследовал свойства кривых, внес усовершенствования в теорию уравнений. Символика и само изложение трактата «Всеобщая арифметика» (1707) мало чем отличаются от современных.

Лейбниц[10], составив, наряду с треугольником Паскаля, гармонический треугольник из величин, обратных биномиальным коэффициентам, просуммировал с помощью его свойств некоторые бесконечные гармонические ряды. Лейбниц использовал способ деления Меркатора к разложению в ряд иррационального выражения, встречающегося при квадратуре круга. Ряды

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\frac{\pi}{4}, \quad 1-\frac{x^3}{3}+\frac{x_5}{5}-...=\text{arctg } x$$

носят имя Лейбница (1673), хотя не он первый их открыл. Предполагают, что это сделал шотландский математик Джеймс Грегори[11] (1671), часто употреблявший слово «сходимость». Лейбницу принадлежат также разложения в степенные ряды функций e^x, e^{-x}, 1 - cos x, sin x, cos x (1676). В это же время Лейбниц установил критерий сходимости знакочередующихся рядов, который точнее исследовал уже в начале 1700-ых годов. Для представления функций в виде бесконечных рядов, Лейбниц использовал также дифференциальные свойства функций. Лейбниц дал первый пример интегрирования дифференциальных уравнений посредством бесконечных рядов.

Учение о бесконечных рядах выросло главным образом из потребности найти для некоторых функций рациональные выражения, позволявшие производить интегрирование. При вычислении значений таких функций при конкретных значениях переменной естественно чувствовалась необходимость в исследовании сходимости полученных рядов. Однако вскоре это чувство было утрачено, и парадоксы, возникающие при стремлении сохранить применимость ряда для всех значений переменной, пытались устранить с помощью метафизических соображений. Среди немногих ученых, занявших более строгую математическую позицию, прежде всего

---

[10] Лейбниц, Готфрид Вильгельм (1646-1716), знаменитый философ и математики. Лейбница наряду с Ньютоном часто называют автором анализа бесконечно малых, так как они систематизировали идеи и результаты, полученные их предшественниками, и создали целостную теорию, обогатив анализ новыми важнейшими достижениями. Лейбницу принадлежат знаки интеграла и дифференциала. Лейбниц исследовал свойства кривых (например, цепной линии), разложения функций в ряды. От него берет начало идея определителей.

[11] Грегори Джеймс (1638-1675) – шотландский математик и астроном, член Лондонского королевского общества. Внес существенный вклад в разработку исчисления бесконечно малых. Для вычисления площадей пользовался рядами (вслед за Н. Меркатором и И. Ньютоном), примерно в одно время с Ньютоном и независимо от него открыл теорему о биноме, разложил в степенные ряды arctg x, sec x, ln tg x, ln sec x, $\ln\frac{1+1}{1-x}$. Рукописи Грегори свидетельствуют о том, что он уже в 1671-72 владел рядом Тейлора. Грегори вывел формулу приближенного интегрирования, которую впоследствии получил английский математик Г. Симпсон. Он впервые проделал преобразование прямоугольных координат в полярные.

следует назвать П. Вариньона[12]. Вариньон (1715) обратил внимание на то, что члены пригодного для вычисления ряда должны непрестанно убывать, и, кроме того, остаток ряда должен в конце концов становиться сколь угодно малым. Однако предостережения Вариньона учтены не были. Эйлер[13], господствовавший над математикой последующего периода, отвлек внимание математиков исключительно в сторону формальной разработки учения о рядах.

Важнейший метод, предложенный в XVIII столетии для разложения функций в ряд, был изобретен и обоснован Б. Тейлором[14] (1715). Тейлор же установил известный специальный вид своего ряда, ошибочно называемый теперь «рядом Маклорена[15]». Но Тейлор не дал ему никакого применения, не осознавая, видимо, значения своего открытия. Только Маклорен, который по-новому вывел этот ряд (1742), получил с его помощью известные уже тогда разложения для a^x, $\sin\frac{x}{a}$, $\cos\frac{x}{a}$.

Различные выводы ряда Тейлора были сделаны Эйлером (1755), Даламбером[16] (1754), Лагранжем[17] (1772, 1774, 1797). Однако условия при-

---

[12] Вариньон, Пьер (1654-1722), в свое время мало оцененный выдающийся французский математик, один из первых ознакомивший Францию с анализом бесконечно малых. Главнейшие его труды относятся к механике, где ряд теорем носит его имя.

[13] Эйлер, Леонард (1707-1783) - родился в Швейцарии, один из величайших математиков, необыкновенно продуктивный, решавший труднейшие проблемы с изумительной легкостью и виртуозностью. Ученая деятельность его тесно связана с Петербургской академией наук, издания которой украшались мемуарами Эйлера. Эйлер прожил в России более 30 лет. Теория чисел, учение об уравнениях, геометрия, тригонометрия, анализ бесконечно малых, механика, астрономия в равной мере обязаны гению Эйлера.

[14] Тейлор, Брук (1685-1731) – английский математик и философ, член Лондонского королевского общества (1712) и его ученый секретарь (1724). Его основные труды посвящены математическому анализу, механике и баллистике. Тейлор исследовал свойства функций. В 1712 г. нашел общую формулу разложения функций в степенной ряд, которая теперь носит его имя. Тейлор положил начало математическому изучению задачи о колебании струны, разрабатывал теорию конечных разностей.

[15] Маклорен, Колин (1698-1746) – английский математик, профессор университета в Эдинбурге, известен своими трудами по высшему анализу и особенно исследованиями свойств кривых, главным образом третьего порядка. Его имя обычно связывают с разложением функций в ряд по степеням аргумента, хотя эти ряды были известны и до него.

[16] Даламбер, Жан ле Рон (1717-1783) – французский математик, механик и философ. В 1739 и 1740 гг. представил в Парижскую Академию наук два трактата о движении твердых тел в жидкостях и об интегральном исчислении, за что был избран в число ее членов. За «Рассуждения об общей причине ветров» (1744 и 1747) был избран членом Берлинской академии наук. Основные математические исследования Даламбера относятся к теории дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка, выражающих поперечные колебания струны. Работы Даламбера, а также Эйлера, Д. Бернулли заложили основы математической физики. При решении дифференциальных уравнений Даламбер впервые применил функции комплексного переменного. Даламбер получил ценные результаты в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Исчисление бесконечно малых Даламбер пытался обосновать с помощью теории пределов. В теории рядов его имя

менимости и сходимости рядов были точнее исследованы лишь Коши[18] (1823).

Вопросам суммирования рядов были посвящены работы Дж. Стирлинга[19] (1730), Муавра[20] (1730). Эйлер, представляя общие члены бесконечных рядов через определенные интегралы, получил названные впоследствии по его имени интегралы - бэта-функцию и гамма-функцию. Эйлер установил также некоторые ряды, сумма которых выражается определенными интегралами. Эйлеру принадлежит формула (1740)

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}=\ln(n+1)+C\ ,$$

где C – «эйлерова постоянная», которую он нашел (1741) с точностью до 10 знаков: C=0,577 215 664 901 532 9. Эйлер много занимался суммированием рядов вида

$$\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\ldots\ ,\ \frac{1}{1^{2k}}-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\ldots\ .$$

В 1736 г. он доказал, что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{1}{6}\pi^2\ ,\ \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{1}{90}\pi^4\ .$$

Если для Ньютона представление алгебраических и трансцендентных функций с помощью бесконечных рядов являлось средством интегрирования, то Эйлер понимал, что такое представление дает понимание сущности и свойств функций. Поэтому Эйлер поставил целью разложить элементарным образом в ряды все известные тогда функции. Для показательных, логарифмических и тригонометрических функций он исходил из биномиального ряда.

В 1743 г. Эйлер впервые указал, что

носит признак сходимости. В алгебре Даламбер дал первое, правда, не вполне строгое, доказательство основной теоремы алгебры, которая сейчас называется леммой Даламбера.

[17] Лагранж, Жозеф Луи (1736-1813) – родился в Турине, в 19 лет стал профессором математики артиллерийской школы в Турине. В 1766 г. уехал в Берлин, в 1786 г. переехал в Париж. Профессор Нормальной школы (1795), профессор Политехнической школы (1797). Его имя связано с успехами анализа бесконечно малых, высшей алгебры, теории рядов, теории чисел, механики и астрономии. Его по справедливости можно наряду с Эйлером считать творцом вариационного исчисления и аналитической механики. Сочинения его изданы в четырнадцати томах.

[18] Коши, Огюстен Луи (1789-1857) – французский математик, профессор Политехнической школы. Он написал более 700 мемуаров по различным отделам анализа, геометрии, физики и астрономии. Ему обязана своим развитием теория функций комплексного переменного. Заслуженной известностью пользуются его трактаты «Курс анализа» и «О дифференциальном и интегральном счислении».

[19] Стирлинг, Джеймс (1699-1770) – английский математик

[20] Муавр, Авраам (1667-1754) – французский математик, с 1685 г. живший в Лондоне

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

обобщив тем самым результат Дан. Бернулли[21] (1728), выразившего

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

с помощью числового ряда

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots .$$

Эйлер воспользовался этим рядом для вычисления числа e с 23-мя десятичными знаками.

Особое значение Эйлер придавал установлению удобных разложений числа π в ряды. В частности, Эйлер применял метод Дж. Мэчина[22] (1706), который в равенстве

$$\frac{\pi}{4} = 4\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}$$

использовал ряд

$$\mathrm{arctg}\ x = 1-\frac{x^3}{3}+\frac{x_5}{5}-\dots .$$

Это позволило Мэчину вычислить для π сто десятичных знаков. В 1755 г. Эйлер привел еще один ряд, позволивший ему в течение часа найти 20 десятичных знаков для числа π.

Интересно отметить, что вычислением числа π занимались и японские математики. Например, Кова Секи[23] (конец XVII в.) преследуя эту цель, получил ряд для $(\arcsin x)^2$. В начале XVIII в. японцы получили ряды для $\arcsin x$ и связанных с ним функций. Подставляя в эти ряды частные значения аргумента, они получили бесконечные разложения числа π.

Итак, теория бесконечных рядов испытала в XVIII в. мощный подъем, которым обязана в немалой степени работам Эйлера. Однако деятельность Эйлера была направлена в сторону формального развития. Находя каким-то способом разложение в ряд функции, Эйлер считал его справедливым для всех значениях переменного, даже если получался расходящийся ряд. Поэтому Эйлер обращался с расходящимися рядами так же, как со сходя-

[21] Бернулли, Даниил (1700-1782) – математик Швейцарии, сын Иоганна Бернулли и племянник Якоба Бернулли, профессор Базельского университета, его работы посвящены главным образом астрономии, физике и гидродинамике. Он заложил основы кинетической теории газов. Вместе с Даламбером и Эйлером он изучал теорию колебаний струн, он был пионером в области уравнений с частными производными

[22] Мэчин, Дж. (ум. 1751) – английский математик

[23] Секи, Кова (1642?-1708) – японский математик

щимися. Но при этом Эйлер не отказывался вовсе от исследования сходимости рядов. Например, в работе 1740 г. им были сделаны попытки сформулировать критерий сходимости ряда в терминах частичных сумм.

Большая часть современников Эйлера придерживалась той же точки зрения на сходимости, что и он. Потребность в исследовании сходимости сказывалась лишь у отдельных математиков. Это относиться, например, к Маклорену и П. Вариньону. Кестнер[24] постоянно подчеркивал, что нужно строго различать сходящиеся и расходящиеся ряды. Для Даламбера вычисления с рядами, сходимость которых не установлена, были весьма сомнительны. Но строгое исследование сходимости можно найти лишь в работах Ламберта[25]. Его доказательство иррациональности числа π (1758, 1769) представляет пример исследования сходимости разложения в цепную дробь, удовлетворяющее наиболее современным требованиям строгости и выделялось в XVIII столетии как единственная в своем роде редкость.

В середине второго десятилетия XIX века Больцано[26] уже имел ясные представления о сходимости рядов.

Первое строгое исследование сходимости рядов произвел Гаусс[27] для гипергеометрического ряда (1812), к которому с различных точек зрения подходил уже Эйлер.

Коши (1821) рассмотрел вопрос о сходимости рядов общим образом. Он свел сходимость знакопеременных рядов к сходимости рядов, составленных из модулей их членов. Коши впервые установил настоящие признаки сходимости, доказал теорему о том, что сумма ряда, равного произведению двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению их сумм.

---

[24] Кестнер А.Г. (1719-1800) – немецкий математик, геттингенский профессор, автор монографий «Основания арифметики, геометрии и тригонометрии» (1758), «Основания анализа конечных величин» (1760), «Основания анализа бесконечного» (1761)

[25] Ламберт, Иоганн Генрих (1728-1777) –немецкий математик, философ, физик и астроном, швейцарец по происхождению, член Берлинской и Мюнхенской академий наук. Ламберту принадлежат важные исследования по геометрии, сферической тригонометрии, алгебре и механике. Работал над вопросами параллельных прямых, конических сечений, перспективы. Высказал идею построения неевклидовой геометрии. Дал первое доказательство иррациональности чисел e и π (1766), основанное на зависимости между показательной и тригонометрической функциями, открытой Эйлером. Стремился ввести строгие математические доказательства в анализ, во все области естествознания, которыми занимался. Является одним из родоначальников современной математической логики, автор идеи универсального языка знаков.

[26] Больцано, Бернард (1781-1848) – чешский математик, автор монографии «Парадоксы бесконечности» (1850)

[27] Гаусс, Карл Фридрих (1777-1855) – немецкий математики, особенно известный своими исследованиями по теории чисел

Эту теорему обобщил Абель[28] (1826). Коши продолжая свои исследования (1833, 1844), ввел понятие радиуса сходимости. Более тонкие признаки сходимости дали Раабе[29] (1832), Куммер[30] (1835), Ж. Бертран[31] (1842) и другие математики XIX века. Коши (1823) впервые установил точные условия сходимости ряда Тейлора к данной функции и (1829) сформулировал четкое различие между сходимостью этого ряда вообще и сходимостью к данной функции.

Из приложений математики выросли ряды Фурье[32], возникло понятие равномерной сходимости.

Явление полусходимости[33] ряда было замечено уже Эйлером (1750), хотя понятие и термин ввел Лежандр[34] (1811). Лаплас [35](1814) показал, что

---

[28] Абель, Нильс Генрих (Хенрик) (1802-1829) – норвежский математик, считается одним из создателей теории эллиптических и гиперэллиптических функций, основателем общей теории интегралов алгебраических функций. Важные работы Абеля относятся к теории рядов.

[29] Раабе, Йозеф Людвиг (1801-1859) – швейцарский математик. Имеет труды по анализу, геометрии, алгебое, прикладной математике, теории функций.

[30] Куммер, Эрнст Эдуард (1810-1893) – немецкий математик. Первые его работы посвящены рядам. Создал теорию алгебраических чисел, методы которой оказали огромное влияние на последующее развитие теории чисел и алгебры. Доказал великую теорему Ферма для всех $n \leq 100$, за что получил премию Парижской Академии наук. Написал работы по геометрии, определенным интегралам, теоретической механике.

[31] Бертран, Жозеф Луи Франсуа (1822-1900) – французский математик, бывший в 17 лет доктором математики, автор классического трактата по дифференциальному и интегральному исчислению. На русский язык переведены его курсы арифметики и алгебры

[32] Фурье, Жозеф (1768-1830) – французский математик, автор монографии «Аналитическая теория теплоты» (1822) по теории теплопроводности. Эта книга стала источником всех современных методов математической физики, относящихся к интегрированию уравнений в частных производных при заданных граничных условиях. Методом Фурье было применение тригонометрических рядов.

[33] В настоящее время полусходимость ряда называется условной сходимостью.

[34] Лежандр, Адриен Мари (1752-1833) – французский математик, автор ряда капитальных трудов в области интегрального исчисления и теории чисел. Одновременно с Гауссом, но независимо от него, Лежандр разработал метод вычисления вероятнейших результатов совокупности наблюдений, известных как «способ наименьших квадратов».. В 1788 г., определяя компоненту силы притяжения эллипсоида вращения в направлении радиуса-вектора, открыл многочлены, получившие название полиномов Лежандра, и доказал их важнейшие свойства. В вариационном исчислении установил признаки существования экстремумов. Автор 2-томного труда «Теория чисел», самого полного изложения теории чисел в то время. Автор классического учебника «Начала геометрии» (1794), которое обычно кладется в основу систематических курсов элементарной геометрии и в котором осуществлена алгебраизация и арифметизация геометрии, используются элементы учения о симметрии. Лежандр считал, что метод пределов не подходит в изложении начал науки.

[35] Лаплас, Пьер Симон (1749-1827) – родился в Нормандии, математик, физик и астрономии, профессор математики военной школы в Париже. Автор монументальных работ по математике, физике и небесной механике, в частности, «Аналитическая теория вероятностей» (1812) и «Небесная механика» (1799-1825, в 5 томах). Является одним из создателей теории вероятностей. Лаплас имеет математические труды по теории дифференциальных уравнений, в частности по интегрированию уравнений с частными производными. Подробно изучил урав-

разложение по формуле Тейлора может привести к полусходящимся рядам. Расходящимися рядами, которые приобрели значение только к концу XIX в., занимался А. де-Морган[36].

Теория расходящихся рядов получила развитие в XX веке. Рассмотрим два расходящихся ряда:

$$1-1+1-1+1-1+\ldots \quad \text{и} \quad 1-2+3-4+5-6+\ldots .$$

Обозначим их «суммы» S_0 и S_1 соответственно. Имеем: $S_0 = 1- S_0$, откуда $S_0 = \frac{1}{2}$. Так как

$$S_1 = 1-2+3-4+5-6+\ldots = \\ = 0+1-2+3-4+5-\ldots,$$

то, складывая почленно, получаем, что

$$2\,S_1 = 1-1+1-1+1-1+\ldots = S_0 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S_1 = \frac{1}{4}$. Итак,

$$1-1+1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2} \text{ и } 1-2+3-4+5-6+\ldots = \frac{1}{4}.$$

По-видимому, Лейбниц был первым, кто приписал сумме 1-1+1-1+1-1+… значение $\frac{1}{2}$.

Этот пример демонстрирует два способа суммирования: суммирование в среднем и суммирование Абеля. Подробно о расходящихся рядах см. Рамис Жан-Пьер «Расходящиеся ряды и асимптотические теории».

Исторические задачи.

Задача Шридхары. Один купец, взяв 3 рупа, отправился для получения прибыли. Если его капитал удваивался после каждого месяца, каким он стал после 3 лет?

нений, названное его именем, на котором основывается решение задач теории потенциала, теплопроводности, электростатики и гидродинамики. В математике известны также оператор и преобразование Лапласа. Завершил объяснение движения тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения Ньютона. Предложил новый способ вычисления орбит небесных тел.

[36] де Морган, Августус (Огастес) (1806-1871) –шотландский математик, секретарь Королевского астрономического общества (1847), член Лондонского королевского общества, первый президент Лондонского математического общества, профессор математики в университетском колледже в Лондоне. Основные труды посвящены алгебре, математическому анализу, математической логике. В теории рядов впервые опубликовал шкалу логарифмических признаков сходимости (1839), занимался теорией расходящихся рядов. Один из основателей формальной алгебры.

Задача Шридхары. Первый человек получил 3 рупа, последующие в 2 раза больше предыдущих. Быстро скажи, сколько денег получает 5 человек.

Задача Леонардо Фибоначчи[37]. Семь старух отправляются в Рим. У каждой по семь мулов, каждый мул несет по семь мешков, в каждом мешке по семи хлебов, в каждом хлебе по семь ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всего предметов?

Задача Ферма. Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$, то $\frac{S}{S-a_1}=\frac{a_1}{a_2}$.

[37] Леонардо Фибоначчи из Пизы (родился в 1180), автор двух популярных трактатов «Книга абака» и «Практическая геометрия».

Ответы и указания

1.2. $\frac{2}{3}$. **1.3.** $\frac{1}{4}$. **1.4 и 1.6.** Указание. Доказать, что последовательности частичных сумм не имеют предела.

4.1. Сходится. **4.2.** Расходится.

5.1. Сходится. **5.3.** Сходится. **5.4.** Расходится. **5.5.** Сходится. **5.7.** Расходится. **5.9.** Сходится. **5.11.** Сходится. **5.12.** Расходится. **5.13.** Сходится. **5.14.** Расходится. **5.16.** Сходится. **5.18.** Сходится. **5.19.** Сходится при $p > 2$ и расходится при $p \le 2$. **5.20.** Сходится при $p > \frac{3}{2}$ и расходится при $p \le \frac{3}{2}$. **5.21.** Сходится. **5.22.** Расходится. **5.23.** Сходится.

6.2. Сходится. **6.3.** Сходится.

7.2. Указание. Применить признак Дирихле. Для доказательства ограниченности последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha$ умножить и разделить S_n на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, $\alpha \ne 2\pi m$. **7.3.** Сходится. **7.4.** Сходится. **7.5.** Сходится.

8.2. Сходится абсолютно. **8.3.** Сходится условно. Указание. Воспользуйтесь формулой синуса суммы. **8.4.** Сходится условно. **8.6.** Сходится абсолютно.

9.1. $\frac{1}{2}$. **9.2.** $\frac{5}{12}$. **9.3.** $1-\sqrt{2}$. **9.4.** 1. Указание. Умножить числитель и знаменатель на $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. **9.5.** 1. **9.6 и 9.7.** Расходятся. Указание. Проверить выполнение необходимого условия сходимости ряда. **9.8.** Сходится, $S = \frac{1}{2}$. Указание. Воспользуйтесь примером 1.2. **9.9.** Сходится, $S = \frac{3}{4}$. **9.10.** Сходится, $S = \frac{3}{4}$. **9.11.** Сходится, $S = \frac{1}{3}$. **9.12.** Сходится, $S = \frac{1}{3}$. **9.13.** Сходится, $S = \frac{1}{4}$. **9.14 – 9.22.** Указание. Проверить выполнение необходимого условия сходимости ряда. **9.13 и 9.14.** Сходятся. Указание. Воспользоваться теоремой 4.1. **9.25.** Сходится. **9.26.** Расходится. **9.27.** Сходится. **9.28.** Сходится. **9.29.** Расходится. **9.30.** Сходится. **9.31.** Сходится. **9.32.** Сходится. **9.33.** Сходится. **9.34.** Расходится. **9.35.** Расходится. **9.36.** Расходится. **9.37.** Сходится. **9.38.** Расходится. **9.39.** Расходится. **9.40.** Сходится. **9.41.** Расходится. **9.42.** Сходится. **9.43.** Сходится. **9.44.** Сходится. **9.45.** Сходится. **9.46.** Сходится. **9.47.** Сходится. **9.48.** Сходится. **9.49.** Сходится при $a < e$ и расходится при $a > e$. **9.50.** Расходится. **9.51.** Расходится. **9.52.** Сходится. **9.53.** Сходится. **9.54.** Сходится. **9.55.** Сходится. **9.56.** Сходится. Указание. Применив признак Коши, рассмотреть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}}$. **9.57.** Сходится. **9.58.** Сходится. Указание. Применить признак Коши. **9.59.** Расходится. Указание. Применить признак Раабе. **9.60.** Сходится при $\gamma-\alpha-\beta>0$ и расходится при $\gamma-\alpha-\beta\le 0$. Указание. Применить признак Гаусса. Пользуясь разложениями

$$\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\dfrac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}\,,\quad \frac{1}{1+\dfrac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\dfrac{\beta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}\,,$$

представить отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\nu_n}{n^2}\,,\ \text{где}\ |\nu_n|<c\,.$$

9.61. - 9.64. Указание. Воспользоваться признаками сравнения. **9.65.** Указание. Применив признак сравнения, воспользоваться неравенством $\ln n < n$, $n \ge 1$. **9.66 и 9.67.** Указание. Применить признак Даламбера. **9 68.** Указание. Воспользоваться признаками сравнения. **9.69.** Сходится условно. **9.70.** Сходится условно. **9.71.** Сходится условно. **9.72.** Сходится абсолютно. **9.73.** Сходится условно. Указание. Для доказательства сходимости применить признак Лейбница и сравнить a_{2k-1}, a_{2k}, $=a_{2k+1}$, $k \ge 1$. **9.74.** Сходится абсолютно. **9.75.** Сходится условно. **9.76.** Сходится условно. **9.77.** Сходится условно. **9.78.** Сходится. Указание. Воспользоваться формулой косинуса суммы. **9.79.** Сходится. Указание. Воспользоваться формулой для синуса в третей степени. **9.80.** Расходится при $p \le 0$, сходится условно при $0 < p \le 1$, сходится абсолютно при $p > 1$. **9. 81.** Расходится при $p \le 0$, сходится условно при $0 < p \le 1$, сходится абсолютно при $p > 1$. **9. 82.** Расходится при $p \le 0$, сходится условно при $0 < p \le 1$, сходится абсолютно при $p > 1$. **9.83.** Расходится при $p \le 0$, сходится условно при $0 < p \le 1$, сходится абсолютно при $p > 1$. Указание. Для исследования абсолютной сходимости воспользоваться признаками сравнения и оценить $|a_n|$ сверху и снизу. Для исследования сходимости ряда при $p > 0$ воспользоваться разложением $\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = (-1)^n n^{-p} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. **9. 84.** При $p \le 1$ расходится; при $1<p\le 2$ сходится условно; при $p>2$ сходится абсолютно. Указание. Для исследования абсолютной сходимости воспользоваться признаками сравнения и оценить $|a_n|$ сверху и снизу. Для исследования сходимости ряда при $p > 0$ воспользоваться разложением

$$\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n}+(-1)^n)^p} = (-1)^n n^{-\frac{p}{2}} \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-p}$$

по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. **9. 85.** Указание. Воспользоваться теоремой 2.2. **9. 86.** Указание. Для рядов 1), 2) оценить разность S-S_n соответствующим несобственным интегралом; для рядов 3), 4) оценить $|S$-$S_n|$, воспользовавшись следствием 6.2.

Ключи к тестам.

Тест 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-

Тест 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	-	+	+	+	+	-	-	+	-	-

Тест 3.1.

1	2	3	4	5	6	7
+	-	-	-	-	+	+

Тест 3.2.

1	2	3	4	5	6
-	-	+	-	-	-

Тест 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
+	-	+	+	+	-	-	+	+	+

Тест 5.1.

1	2	3	4	5	6
2, 3	1, 3	1, 4	1, 3, 6	3, 6	1, 4, 6

Тест 5.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-

Тест 5.3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	-

Тест 6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+

Тест 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+

Тест 8.1.

1	2	3	4	5	6
1-8	2,4,6,7	1,3,5,8	4	1, 2, 4	1, 6

Тест 8.2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
+	-	-	-	+	-	-	-	-	+

Тест 8.3.

1	2	3	4	5	6	7
1,2	1	2	1	1, 2, 3	1	1, 2, 4

Тест 8.4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-

Список литературы

Основная литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу: Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В.А. Садовничего. М.: Высш. шк. 1999. – 695 с.

2. Воробьев Н.Н. Теория рядов. 3-е изд., испр. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 368 с.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Учеб. пособие для вузов. 10-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 624 с.

4. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Учеб. пособие. В 6 ч. Минск: БГУ, 2003. Ч. 1. Ведение в анализ и дифференциальное исчисление. – 295 с.

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 528 с.

6. Ляшко С.И., Боярчук А.К., Александрович И.Н., Молодцов А.И., Номировский Д.А., Рублев Б.В.. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Часть 1 / Под ред. И.И. Ляшко. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 432 с.

7. Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2 тт. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. Т. 1. – 432 с.

8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. 7-е изд., стереотип. М.: Наука, 1969. Т. 2. – 860 с.

Дополнительная литература

1. Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики: Биогр. слов.-справ. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Рад. шк., 1987. - 656 с.

2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Пер. с нем. под ред. А.П. Юшкевича. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. – 468 с.

3. Володарский А.И., Очерки истории средневековой индийской математики. М.: Наука, 1977. – 184 с.

4. Попов Г.Н., Сборник исторических задач по элементарной математике. 2-е изд. М., Л.: ОНТИ, Гл. ред. науч.-попул. и юнош. лит., 1938. – 216 с.

5. Рамис Жан-Пьер. Расходящиеся ряды и асимптотические теории / Пер. с фр. В.В. Шуликовской. Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2002. – 80 с.

6. Стройк Д.Я., Краткий очерк истории математики / Пер с нем. и доп. И.Б. Погребысского. 4-е изд. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 485 с.

Оглавление