

Д. С. Куранаков, Д. В. Есипов, В. Н. Лапин, С. Г. Черный

*Институт вычислительных технологий СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия*

kuranakov@ict.sbras.ru

ТРЕХМЕРНЫЙ ДУАЛЬНЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ С ТРЕЩИНАМИ *

Разработан трехмерный дуальный метод граничных элементов решения задач линейной упругости для тел с регулярной границей и с трещинами. Классический метод граничных элементов заключается в численном решении граничного интегрального уравнения смещений на регулярной границе упругого тела. В случае тела с трещинами уравнение смещений вырождается на трещиноватой границе. В дуальном методе граничных элементов предлагается на трещиноватой части границы решать граничное интегральное уравнение напряжений. Интегралы в этом уравнении имеют высокий порядок сингулярности и понимаются в смысле главного значения Коши и Адамара. Для их вычисления используется метод выделения сингулярности (разложение в ряд подынтегрального выражения и вычисление специальным способом главных значений интегралов от сингулярных членов разложения). Дуальный метод граничных элементов верифицирован на задаче о внешнем нагружении бесконечного материала с плоской круглой трещиной. Метод показывает высокую точность в вычислении полей смещений и напряжений в материале, а также коэффициентов интенсивности напряжений на фронте трещины.

Ключевые слова: линейная упругость, метод граничных элементов, трехмерное моделирование, трещина, коэффициенты интенсивности напряжений.

Введение

Одним из методов численного решения задач упругости является метод граничных элементов (МГЭ). Его главным отличием от метода конечных элементов и метода конечных разностей является отсутствие необходимости аппроксимации всей области упругого тела. МГЭ требует аппроксимации только границы области.

Суть классического МГЭ заключается в переходе от дифференциальных уравнений упругости к граничному интегральному уравнению смещений. При решении этих уравнений отыскиваются все неизвестные на границе области. Для нахождения неизвестных внутри области применяется фундаментальное интегральное уравнение для внутренней точки. Однако классический МГЭ не применим для задач с трещинами, потому что граничное интегральное уравнение смещений вырождается на берегах трещины.

Для преодоления указанной трудности в настоящей работе разработана модификация классического МГЭ – дуальный метод граничных элементов (ДМГЭ). Суть ДМГЭ состоит в замене граничного интегрального уравнения смещений на граничное интегральное уравнение напряжений на одном из берегов трещины. Это уравнение не включает в себя смещения

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Новосибирского технологического центра компании «Schlumberger».

на трещиноватой границе, но позволяет найти разрывы смещений на трещине. Интегральное уравнение напряжений содержит особенности более высокого порядка, чем интегральное уравнение смещений, а интегралы, входящие в него, понимаются в смысле главного значения Адамара. Ввиду этого требуется создание численного метода для их эффективного вычисления.

Авторами данной работы классический МГЭ применялся для решения задачи зарождения трещин гидроразрыва в окрестности перфорированной скважины [1; 2]. Двумерный ДМГЭ применялся в задаче распространения трещин гидроразрыва от круглой полости [3]. Целью данной работы является разработка трёхмерного ДМГЭ, который в дальнейшем может быть применен для решения трёхмерных задач распространения трещин гидроразрыва.

Постановка задачи упругости для бесконечного тела с полостью и трещиной

Задача упругости решается в бесконечной области V , которая имеет границу

$$\partial V = S = S^t + S^u + S^+ + S^-,$$

как изображено на рис. 1.

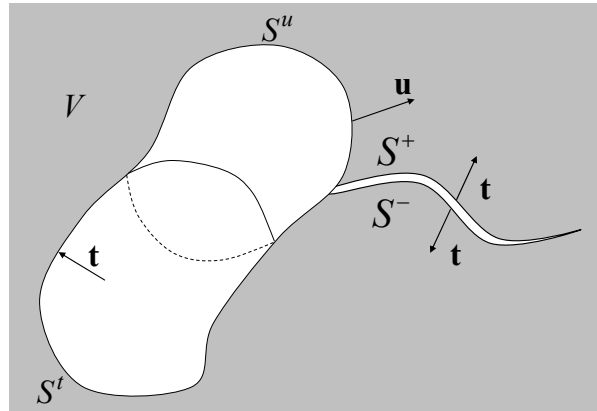


Рис. 1. Внешняя задача упругости для тела с полостью и трещиной

В каждой точке $\mathbf{x} \in V$ выполняются уравнения упругого равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Индексы i, j принимают значения 1, 2, 3. Индекс, отделённый запятой, здесь и далее обозначает дифференцирование по соответствующей координате. По повторяющемуся индексу производится суммирование.

К уравнениям (1) добавим закон Гука для изотропного однородного материала

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$ – компоненты тензора деформаций, u_i – компоненты вектора смещений, δ_{ij} – символ Кронекера, λ и μ – коэффициенты Ламе, выражаемые через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν как

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3)$$

Добавляя к дифференциальным уравнениям (1) краевые условия на полости

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{x}) \Big|_{S^t} &= t_i^*(\mathbf{x}), \\ u_i(\mathbf{x}) \Big|_{S^u} &= u_i^*(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

на берегах трещины

$$\begin{aligned} t_i(\mathbf{x}) \Big|_{S^+} &= g_i^*(\mathbf{x}), \\ t_i(\mathbf{x}) \Big|_{S^-} &= h_i^*(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5)$$

а также условие на бесконечности

$$u_i(\mathbf{x}) \Big|_{S^\infty} = 0, \quad (6)$$

получаем замкнутую дифференциальную задачу. Здесь $t_i = \sigma_{ij}n_j$ – компоненты вектора напряжений, n_j – компоненты вектора нормали к границе области. Функции, отмеченные * – это известные распределения смещений и напряжений.

Отметим, что уравнения упругого равновесия (1) с учётом закона Гука (2) и связи тензора деформаций со смещениями являются уравнениями эллиптического типа для компонент смещений.

Классический Метод Граничных Элементов

Одним из методов решения дифференциальной задачи (1)–(6) является метод граничных элементов (МГЭ) [4]. Его основная идея заключается в переходе от дифференциальной постановки (1)–(6) к граничному интегральному уравнению относительно неизвестных функций на границе. В классическом МГЭ рассматривается тело без трещин ($S^+ = S^- = \emptyset$). Тогда граничное интегральное уравнение смещений (ГИУС) для точки коллокации \mathbf{y} на регулярной границе $S^* = S^t + S^u$ запишется в виде

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y}) = \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \text{v.p.} \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Здесь \mathbf{y} – точка коллокации, \mathbf{x} – точка интегрирования. Функции $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ и $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – фундаментальное решение Кельвина [5] задачи о действии сосредоточенной в точке \mathbf{y} силы $f_i^*(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})e_i$. Коэффициент $c_{ij}(\mathbf{y})$ в общем случае зависит от геометрии поверхности в точке \mathbf{y} . В случае внешней задачи и гладкой поверхности он равен $-\delta_{ij}/2$. Заметим, что для внешней задачи интегральное уравнение (7) автоматически удовлетворяет граничному условию (6) на бесконечности [6]. Здесь и далее сингулярные интегралы *v.p.* и *v.p.h* рассматриваются в смысле главного значения Коши и Адамара соответственно.

Неприменимость классического МГЭ для тел с трещинами

Рассмотрим тело, имеющее регулярную границу S^* и трещину $S^+ + S^-$. Запишем ГИУС для точки коллокации $\mathbf{y}^+ \in S^+$ на одном из берегов трещины [7]

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y}^+) \cdot u_i(\mathbf{y}^+) + c_{ij}(\mathbf{y}^-) \cdot u_i(\mathbf{y}^-) &= \\ &= \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{S^+} U_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \text{v.p.} \int_{S^+} T_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{S^-} U_{ij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \text{v.p.} \int_{S^-} T_{ij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее индексами $^+$ и $^-$ обозначены точки верхнего S^+ и нижнего S^- берегов трещины.

На трещиноватой границе S^\pm введем разрыв смещений

$$\Delta u_i(\mathbf{x}^\pm) = u_i(\mathbf{x}^+) - u_i(\mathbf{x}^-). \quad (9)$$

Предположим, что напряжения t_i на берегах трещины S^+ и S^- равны по модулю и противоположны по знаку

$$t_i(\mathbf{x}^+) + t_i(\mathbf{x}^-) = 0. \quad (10)$$

В задачах нагружения трещины давлением жидкости выражение (10) не является существенным ограничением, так как давление на противоположные берега трещины одинаково, а сила трения жидкости мала по сравнению с давлением. Заметим, что функции ядер на верхнем и нижнем берегах трещины обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^+) &= U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^-), \\ T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^+) &= -T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^-). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда с учётом (9)–(11) уравнение смещений (8) запишется в виде

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y}^+) \cdot u_i(\mathbf{y}^+) + c_{ij}(\mathbf{y}^-) \cdot u_i(\mathbf{y}^-) &= \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) t_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \\ &- \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \text{v.p.} \int_{S^+} T_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) \Delta u_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (12)$$

В точках \mathbf{y}^- на противоположном берегу трещины S^- ГИУС совпадает с ГИУС (12) на границе S^+ . Таким образом, ГИУС вырождается на трещиноватой границе и классический МГЭ не применим для решения задач с трещинами. Для преодоления этой трудности в [8] предложена модификация классического МГЭ – дуальный МГЭ (ДМГЭ).

Дуальный метод граничных элементов

В ДМГЭ на регулярной границе решается граничное интегральное уравнение смещений, а на трещиноватой границе – граничное интегральное уравнение напряжений.

Граничное интегральное уравнение смещений

Для точек \mathbf{y} на регулярной границе S^* запишем ГИУС, аналогичное ГИУС (7) в классическом МГЭ

$$c_{ij}(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) = \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \text{v.p.} \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_{S^+} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \Delta u_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (13)$$

Граничное интегральное уравнение напряжений

Для решения проблемы с вырождающимся ГИУС (12) на трещиноватой границе в ДМГЭ предлагается на одном из берегов трещины вместо ГИУС (12) решать граничное интегральное уравнение напряжений (ГИУН)

$$t_i(\mathbf{y}^+) = \int_{S^*} L_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} M_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \text{h.v.p.} \int_{S^+} M_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) \Delta u_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Здесь $L_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) = D_{kij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) n_k(\mathbf{y}^+)$ и $M_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) = S_{kij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}) n_k(\mathbf{y}^+)$, а функции D_{kij} и S_{kij} получаются из ядер U_{ij} и T_{ij} путём дифференцирования по соответствующей координате и применения закона Гука (2) (полные выражения для функций U_{ij} , T_{ij} , D_{kij} , S_{kij} можно найти, например, в [7]). Это уравнение не содержит компонент смещений u_i на трещиноватой границе, но позволяет найти неизвестные компоненты разрывов смещений Δu_i на границе. Главной сложностью ДМГЭ является создание эффективной и точной процедуры вычисления главного значения Адамара интеграла в уравнении (14).

Дискретизация границы
и получение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Продemonстрируем численный метод решения ГИУН (14) на примере пространства с трещинами ($S = S^+ + S^-$). Вся граница области S аппроксимируется граничными элементами S^e , как показано на рис. 2 слева,

$$S \approx \sum_{e=1}^{N_e} S^e. \quad (15)$$

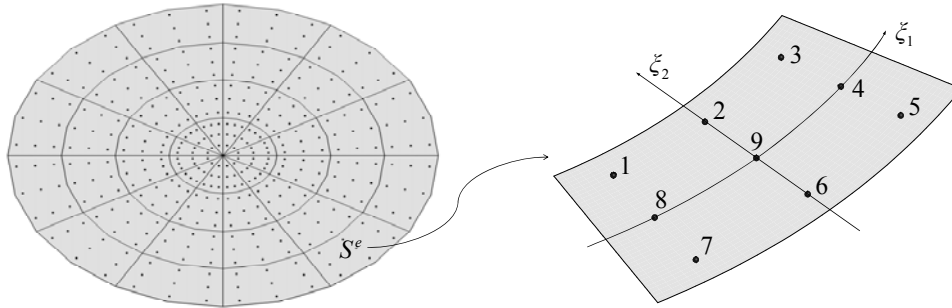


Рис. 2. Разбиение границы S на разрывные квадратичные граничные элементы S^e (слева) и параметризация (ξ_1, ξ_2) элемента с $N_\alpha = 9$ (справа)

Каждый граничный элемент S^e параметризуется локальными координатами (ξ_1, ξ_2) , как показано на рис. 2 справа. Параметризация проводится таким образом, что любой криволинейный четырехугольный элемент трансформируется в стандартный квадрат с вершинами $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$, $(-1;1)$, а криволинейный треугольный элемент – в стандартный треугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Компоненты радиус-векторов, разрывов смещений, напряжений в произвольной точке элемента (ξ_1, ξ_2) представляются в виде

$$f_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} f_i(\mathbf{x}^\alpha) \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2). \quad (16)$$

Здесь \mathbf{x}^α – узловые точки элемента, $\phi_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ – интерполирующие функции элемента, N_α – количество узлов и интерполирующих функций в элементе.

Уравнение (14) с учётом (15) и (16) запишется в виде

$$t_j(\mathbf{y}^-) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha(e)} \left(-\Delta u_i^{e\alpha} \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} M_{ij}(\mathbf{y}^-, \xi_1, \xi_2) \phi_\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right). \quad (17)$$

Здесь $J(\xi_1, \xi_2)$ – якобиан перехода в локальную систему координат элемента. Разрывы смещений $\Delta u_i^{e\alpha}$ в α -й узловой точке e -го элемента выносятся за знак интегрирования, так как не зависят от переменных интегрирования ξ_1 и ξ_2 . Заметим, что интегралы в формуле (17) зависят только от геометрии границы области и не зависят от граничных условий.

Записав уравнение (17) в узлах $\mathbf{y}^{e\alpha}$, получим СЛАУ относительно неизвестных функций Δu_i :

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{t}. \quad (18)$$

Здесь $\Delta \mathbf{u}$ и \mathbf{t} – векторы, составленные из компонент разрывов смещений и напряжений во всех узловых точках; \mathbf{M} – матрица, составленная из значений интегралов в уравнении (17).

В случае тела с регулярной границей и трещинами ($S = S^* + S^+ + S^-$) система (18) запишется в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} - 0.5\mathbf{I} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где \mathbf{U} и \mathbf{T} – подматрицы, составленные из значений интегралов по элементам в ГИУС (13), \mathbf{L} и \mathbf{M} – подматрицы из ГИУН (14).

Граничные элементы и аппроксимирующие функции

Так как ГИУН (14) требует гладкости поверхности в точках коллокации \mathbf{y} на трещине S^\pm , в ДМГЭ необходимо использовать разрывные элементы, все узлы которых находятся внутри элемента, как показано на рис. 2. В настоящей работе использовались разрывные линейные и квадратичные элементы [7], а также специальные элементы для фронта трещины [9], определяемые набором интерполирующих функций

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 - \eta)(s-1)(s-p)}{2\lambda^2(q-1)(q-p)}, \\ \phi_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-(\xi_1 - \eta)(\xi_1 + \eta)(s-1)(s-p)}{\eta^2(q-1)(q-p)}, \\ \phi_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 + \eta)(s-1)(s-p)}{2\eta^2(q-1)(q-p)}, \\ \phi_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 + \eta)(s-q)(s-p)}{2\eta^2(q-1)(p-1)}, \\ \phi_5(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-\xi_1(\xi_1 + \eta)(s-q)(s-1)}{2\eta^2(q-p)(p-1)}, \\ \phi_6(\xi_1, \xi_2) &= \frac{(\xi_1 - \eta)(\xi_1 + \eta)(s-q)(s-1)}{\eta^2(q-p)(p-1)}, \\ \phi_7(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-\xi_1(\xi_1 - \eta)(s-q)(s-1)}{2\eta^2(q-p)(p-1)}, \\ \phi_8(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1(\xi_1 - \eta)(s-q)(s-p)}{2\eta^2(q-1)(p-1)}, \\ \phi_9(\xi_1, \xi_2) &= \frac{-(\xi_1 - \eta)(\xi_1 + \eta)(s-q)(s-p)}{\eta^2(q-1)(p-1)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $s = \sqrt{1 + \xi_2}$, $p = \sqrt{1 + \eta}$, $q = \sqrt{1 - \eta}$, η – параметр, регулирующий положение узлов в элементе. В интерполирующие функции (20) входит выражение $s = \sqrt{1 + \xi_2}$, которое хорошо аппроксимирует асимптотику разрывов смещений $\Delta \mathbf{u}$ на фронте трещины, что положительно влияет на точность вычисления коэффициентов интенсивности напряжений.

Вычисление главного значения Адамара сингулярного интеграла

Главная сложность ДМГЭ заключается в построении алгоритма вычисления главного значения Адамара сингулярного интеграла по граничному элементу S^e , содержащему точку коллокации \mathbf{y}

$$I_{ij}(\mathbf{y}) = h.v.p. \int_{S^e} K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (21)$$

где подынтегральное выражение выглядит следующим образом

$$K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = M_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\phi_\alpha(\mathbf{x})J(\mathbf{x}) = S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})n_k(\mathbf{y})\phi_\alpha(\mathbf{x})J(\mathbf{x}). \quad (22)$$

Для вычисления интеграла I_{ij} (21) используем метод выделения сингулярности [10]. Этот метод заключается в разложении в ряд подынтегрального выражения (22) в окрестности особой точки \mathbf{y} и в вычислении специальным способом интегралов от первых членов этого разложения. Таким образом, интеграл I_{ij} (21) расписывается в виде суммы трёх интегралов

$$I_{ij}(\mathbf{y}) = I_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) + I_{ij}^{-2}(\mathbf{y}) + I_{ij}^{-3}(\mathbf{y}), \quad (23)$$

где

$$I_{ij}^{-1}(\mathbf{y}) = \int_{S^e} \left(K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} - \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} \right) dS(\mathbf{x}), \quad (24)$$

$$I_{ij}^{-2}(\mathbf{y}) = \text{v.p.} \int_{S^e} \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} dS(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{\rho_\varepsilon(\theta)}^{\rho_*(\theta)} \frac{K_{ij}^{-2}(\theta)}{\rho^2} \rho d\rho d\theta, \quad (25)$$

$$I_{ij}^{-3}(\mathbf{y}) = \text{h.p.v.} \int_{S^e} \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} dS(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\rho_\varepsilon(\theta)}^{\rho_*(\theta)} \frac{K_{ij}^{-3}(\theta)}{\rho^3} \rho d\rho d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right). \quad (26)$$

Здесь ρ и θ – локальные полярные координаты элемента с центром в точке коллокации \mathbf{y} , изображенные на рис. 3. Функции $K_{ij}^{-2}(\theta)$ и $K_{ij}^{-3}(\theta)$ – первые члены разложения в ряд по переменной ρ подынтегрального выражения K_{ij} (22), $\rho_\varepsilon(\theta)$ – радиус ε -окрестности в локальной полярной системе координат элемента, $\rho_*(\theta)$ – расстояние до границы элемента. Заметим, что ε -окрестность в локальной системе координат не является окружностью и $\rho_\varepsilon(\theta)$ зависит от полярного угла θ . Коэффициент $h(\mathbf{y})$ в (26) характеризует асимптотику в точке \mathbf{y} бесконечной части интеграла $I_{ij}^{-3}(\mathbf{y})$ [12].

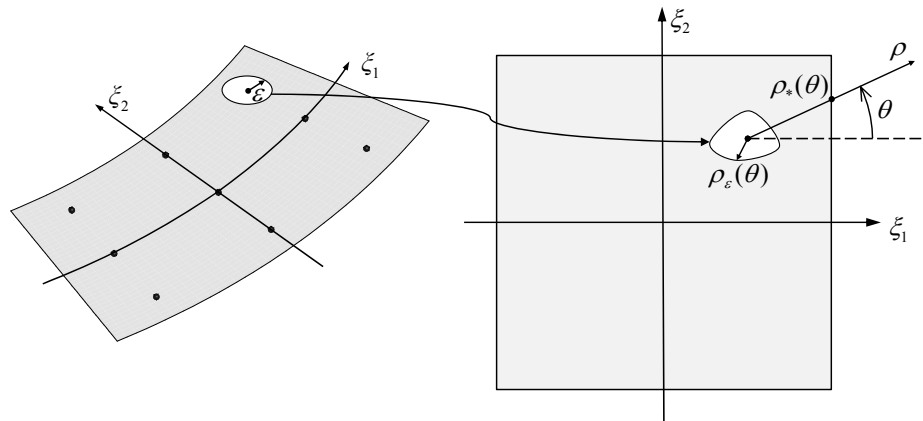


Рис. 3. Граничный элемент с ε -окрестностью в декартовой системе координат (слева) и в локальной системе координат (ξ_1, ξ_2) (справа)

Вычисление слабо сингулярной части интеграла

Для вычисления слабо сингулярного интеграла $I_{ij}^{-1} = O(1/\rho)$ (24) в настоящей работе был применен метод трансформации области интегрирования [11]. В этом методе элемент разбивается на треугольники с вершинами в точке сингулярности O с локальными координатами (η_1, η_2) , как показано на рис. 4, а. Заменой переменных $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2)$ треугольник OAB трансформируется в стандартный треугольник (рис. 4, б).

$$\begin{aligned}\zeta_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1} (\xi_1 - 1) - (\xi_2 - 1) \right], \\ \zeta_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\eta_2 + 1}{\eta_1 - 1} (\xi_1 - 1) + (\xi_2 + 1) \right].\end{aligned}\quad (27)$$

Стандартный треугольник заменой переменных $(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow (v_1, v_2)$ трансформируется в квадрат $[-1; 1] \times [-1; 1]$ таким образом, что одно из его ребер ($v_2 = -1, v_1 \in [-1; 1]$) соответствует особой точке O (рис. 4, *с*). Преобразование квадрата в треугольник $(v_1, v_2) \rightarrow (\zeta_1, \zeta_2)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\zeta_1(v_1, v_2) &= \frac{1}{4}(1 + v_1)(1 + v_2), \\ \zeta_2(v_1, v_2) &= \frac{1}{4}(1 - v_1)(1 + v_2).\end{aligned}\quad (28)$$

Тогда обратное преобразование из треугольника в квадрат $(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow (v_1, v_2)$ запишется в виде

$$\begin{aligned}v_1(\zeta_1, \zeta_2) &= \begin{cases} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} & , \zeta_1 + \zeta_2 \neq 0 \\ [-1; 1] & , \zeta_1 + \zeta_2 = 0 \end{cases} \\ v_2(\zeta_1, \zeta_2) &= \begin{cases} 2(\zeta_1 + \zeta_2) - 1 & , \zeta_1 + \zeta_2 \neq 0 \\ -1 & , \zeta_1 + \zeta_2 = 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (29)$$

Якобиан трансформации треугольника в квадрат $J^v = (1 + v_2)/8 = O(\rho)$ аннулирует сингулярность $1/\rho$ и позволяет вычислять интегралы от слабо сингулярных функций (K/ρ)

$$\int_{OAB} \frac{K}{\rho} d\zeta_1 d\zeta_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K}{\rho} J^v dv_1 dv_2.\quad (30)$$

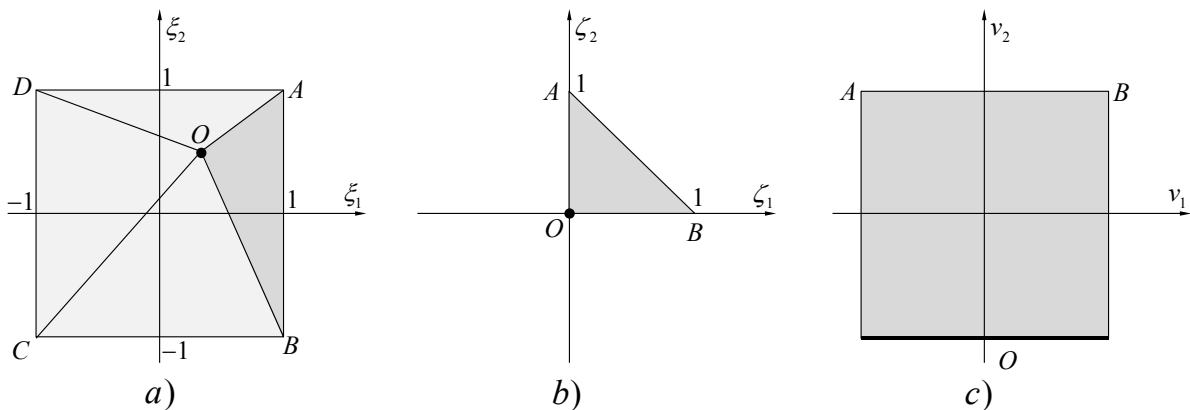


Рис. 4. Разбиение элемента на треугольники (а) трансформация треугольника OAB в стандартный треугольник (б) и в квадрат с ребром O (с)

На рис. 5 изображен характерный вид слабо сингулярной функции, возникающей в ДМГЭ, и квадратная сетка для ее численного интегрирования.

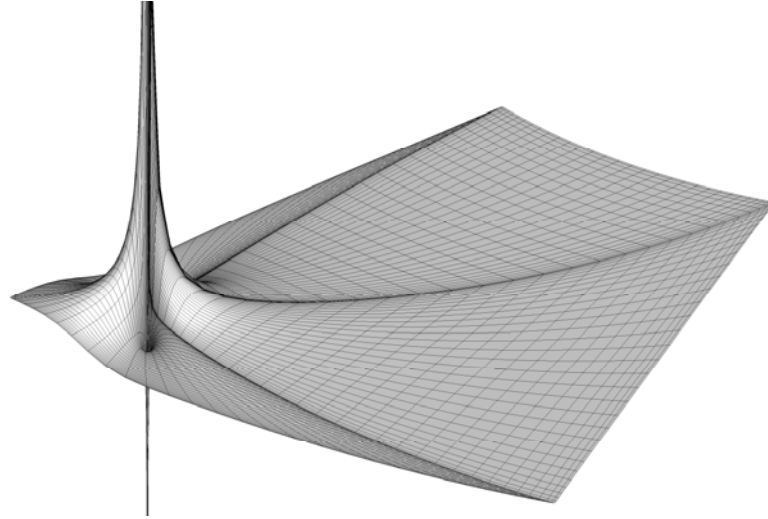


Рис. 5. Распределение подынтегрального выражения $K_{33} - K_{33}^{-2} / \rho^2 - K_{33}^{-3} / \rho^3$ по поверхности граничного элемента и квадратурная сетка его для численного интегрирования

Вычисление главных значений сильно сингулярных и гиперсингулярных интегралов

Для вычисления оставшихся двух сильно сингулярного $I_{ij}^{-2} = O(1/\rho^2)$ (25) и гиперсингулярного $I_{ij}^{-3} = O(1/\rho^3)$ (26) интегралов необходимо вычислить члены K_{ij}^{-2} и K_{ij}^{-3} разложения по ρ подынтегрального выражения в (21), а также разложить в ряд по ε радиус $\rho_\varepsilon(\theta)$.

Для этого запишем первые члены разложения радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ по переменной ρ

$$\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{a}(\theta)\rho + \mathbf{b}(\theta)\rho^2 + O(\rho^3), \quad (31)$$

где коэффициенты $\mathbf{a}(\theta)$ и $\mathbf{b}(\theta)$ выражаются через угол θ и производные радиус-вектора \mathbf{x} по локальным координатам ξ_1 и ξ_2 в точке коллокации \mathbf{y}

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{x}_{,\xi_1} \cos(\theta) + \mathbf{x}_{,\xi_2} \sin(\theta), \quad (32)$$

$$\mathbf{b}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_{,\xi_1\xi_1} \cos^2(\theta) + 2 \mathbf{x}_{,\xi_1\xi_2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \mathbf{x}_{,\xi_2\xi_2} \sin^2(\theta) \right). \quad (33)$$

Тогда длина вектора $r = |\mathbf{r}|$ запишется в виде

$$r(\theta) = \rho a(\theta) \left(1 + \rho B(\theta) + O(\rho^2) \right), \quad (34)$$

где

$$a(\theta) = |\mathbf{a}(\theta)|, \quad (35)$$

$$B(\theta) = \frac{(\mathbf{a}(\theta) \cdot \mathbf{b}(\theta))}{a^2(\theta)}. \quad (36)$$

Запишем уравнение (34) для радиус-вектора ε -окрестности и выразим из него радиус $\rho_\varepsilon(\theta)$

$$\rho_\varepsilon(\theta) = \varepsilon \frac{1}{a(\theta)} - \varepsilon^2 \frac{B(\theta)}{a^2(\theta)} + O(\varepsilon^3). \quad (37)$$

Проинтегрируем аналитически сингулярные интегралы по переменной ρ

$$\begin{aligned}
I_{ij}^{-2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) (\ln(\rho_*(\theta)) - \ln(\rho_\varepsilon(\theta))) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) \ln(a(\theta)\rho_*(\theta)) d\theta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-2}(\theta) \ln(a(\theta)\rho_*(\theta)) d\theta,
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
I_{ij}^{-3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta) \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon(\theta)} - \frac{1}{\rho_*(\theta)} \right) d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta) \left(\frac{a(\theta)}{\varepsilon} + B(\theta) - \frac{1}{\rho_*(\theta)} \right) d\theta + \frac{h(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right) = \\
&= \int_0^{2\pi} K_{ij}^{-3}(\theta) \left(B(\theta) - \frac{1}{\rho_*(\theta)} \right) d\theta.
\end{aligned} \tag{39}$$

Заметим, что коэффициенты разложения $K_{ij}^{-2}(\theta)$ и $K_{ij}^{-3}(\theta)$ зависят только от точки коллокации \mathbf{y} и переменной θ и не зависят от переменной ρ , что позволяет провести интегрирование по ρ аналитически. Значения контурных интегралов (38) и (39) подсчитываются численным интегрированием.

Разложение в ряд подынтегрального выражения

Ядро S_{kij} в (22) имеет вид [7]

$$S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \left(S_{kij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + S_{kij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + S_{kij}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + S_{kij}^{(4)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right) \frac{1}{r^3(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, \tag{40}$$

где

$$S_{kij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 3r_{,m}n_m \left((1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right), \tag{41}$$

$$S_{kij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 3\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}), \tag{42}$$

$$S_{kij}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (1-2\nu)(3n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}), \tag{43}$$

$$S_{kij}^{(4)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -(1-4\nu)n_k \delta_{ij}, \tag{44}$$

$$r_j = \frac{r_{,j}}{r}. \tag{45}$$

Для разложения в ряд по ρ ядра S_{kij} (40) необходимо найти члены разложения от его составных частей

$$\frac{1}{r^3(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \frac{1}{\rho^3 a^3(\theta)} \left(1 - 3\rho B(\theta) + O(\rho^{-1}) \right), \tag{46}$$

$$r_{,i}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = A_i(\theta) + \rho dR_i(\theta) + O(\rho^2), \tag{47}$$

где

$$A_i(\theta) = \frac{a_i(\theta)}{a(\theta)}, \tag{48}$$

$$dR_i(\theta) = \frac{b_i(\theta)}{a(\theta)} - A_i(\theta)B(\theta). \tag{49}$$

Вектор нормали в точке интегрирования \mathbf{x} представляется в виде

$$n_i(\mathbf{x}) = n_i(\mathbf{y}) + \rho dN_i(\theta) + O(\rho^2), \tag{50}$$

где

$$dN_i(\theta) = n_{i,\xi_1} \cos(\theta) + n_{i,\xi_2} \sin(\theta). \tag{51}$$

Разложим в ряд функции $S_{kij}^{(1)}$ (41), $S_{kij}^{(2)}$ (42), $S_{kij}^{(3)}$ (43), $S_{kij}^{(4)}$ (44).

Первая функция $S_{kij}^{(1)}$ (41) запишется как

$$S_{kij}^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(1)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(1)}(\theta) + O(\rho^2), \quad (52)$$

где

$$S_{kij}^{0(1)}(\theta) = (a_m(\theta)n_m(\mathbf{y}))Z_{kij}^0(\theta), \quad (53)$$

$$S_{kij}^{1(1)}(\theta) = Z_{kij}^1(\theta)[a_m(\theta)n_m(\mathbf{y})] + Z_{kij}^0(\theta)[dR_m(\theta)n_m(\mathbf{y}) + a_m(\theta)dN_m(\theta)]. \quad (54)$$

Здесь

$$Z_{kij}^0(\theta) = 3[(1-2\nu)A_k(\theta)\delta_{ij} + \nu(A_j(\theta)\delta_{ik} + A_i(\theta)\delta_{jk}) - 5A_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta)], \quad (55)$$

$$Z_{kij}^1(\theta) = 3[(1-2\nu)dR_k(\theta)\delta_{ij} + \nu(dR_j(\theta)\delta_{ik} + dR_i(\theta)\delta_{jk}) - 5(dR_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta) + A_k(\theta)dR_i(\theta)A_j(\theta) + A_k(\theta)A_i(\theta)dR_j(\theta))]. \quad (56)$$

Вторая функция $S_{kij}^{(2)}$ (42) запишется как

$$S_{kij}^{(2)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(2)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(2)}(\theta) + O(\rho^2), \quad (57)$$

где

$$S_{kij}^{0(2)}(\theta) = 3\nu[n_i(\mathbf{y})A_j(\theta)A_k(\theta) + n_j(\mathbf{y})A_i(\theta)A_k(\theta)], \quad (58)$$

$$S_{kij}^{1(2)}(\theta) = 3\nu[n_i(\mathbf{y})(A_j(\theta)dR_k(\theta) + A_k(\theta)dR_j(\theta)) + n_j(\mathbf{y})(A_i(\theta)dR_k(\theta) + A_k(\theta)dR_i(\theta)) + dN_i(\theta)A_j(\theta)A_k(\theta) + dN_j(\theta)A_i(\theta)A_k(\theta)]. \quad (59)$$

Третья функция $S_{kij}^{(3)}$ (43) равна

$$S_{kij}^{(3)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(3)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(3)}(\theta) + O(\rho^2), \quad (60)$$

где

$$S_{kij}^{0(3)}(\theta) = (1-2\nu)[3n_k(\mathbf{y})A_i(\theta)A_j(\theta) + n_j(\mathbf{y})\delta_{ik} + n_i(\mathbf{y})\delta_{jk}], \quad (61)$$

$$S_{kij}^{1(3)}(\theta) = (1-2\nu)[3n_k(\mathbf{y})(A_i(\theta)dR_j(\theta) + A_j(\theta)dR_i(\theta)) + 3dN_k(\theta)A_i(\theta)A_j(\theta) + dN_j(\theta)\delta_{ik} + dN_i(\theta)\delta_{jk}]. \quad (62)$$

Четвертая функция $S_{kij}^{(4)}$ (44) запишется как

$$S_{kij}^{(4)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{0(4)}(\theta) + \rho S_{kij}^{1(4)}(\theta) + O(\rho^2), \quad (63)$$

где

$$S_{kij}^{0(4)}(\theta) = -(1-4\nu)n_k\delta_{ij}, \quad (64)$$

$$S_{kij}^{1(4)}(\theta) = -(1-4\nu)dN_k\delta_{ij}. \quad (65)$$

Тогда с учетом (46)–(65) разложение ядра S_{kij} (40) выглядит как

$$S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = S_{kij}^{-3}(\theta)\rho^{-3} + S_{kij}^{-2}(\theta)\rho^{-2} + O(\rho^{-1}), \quad (66)$$

где

$$S_{kij}^{-3}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \frac{S_{kij}^0(\theta)}{a^3(\theta)}, \quad (67)$$

$$S_{kij}^{-2}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \frac{S_{kij}^1(\theta) - 3B(\theta)S_{kij}^0(\theta)}{a^3(\theta)}. \quad (68)$$

Здесь

$$S_{kij}^0(\theta) = S_{kij}^{0(1)}(\theta) + S_{kij}^{0(2)}(\theta) + S_{kij}^{0(3)}(\theta) + S_{kij}^{0(4)}(\theta), \quad (69)$$

$$S_{kij}^1(\theta) = S_{kij}^{1(1)}(\theta) + S_{kij}^{1(2)}(\theta) + S_{kij}^{1(3)}(\theta) + S_{kij}^{1(4)}(\theta). \quad (70)$$

Для разложения в ряд подынтегрального выражения (22) необходимо вычислить члены разложения функций $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ и $J(\mathbf{x})$.

Интерполирующие функции ϕ_α в точке интегрирования \mathbf{x} запишутся в виде

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}) = \phi_\alpha(\mathbf{y}) + \rho d\Phi(\theta) + O(\rho^2), \quad (71)$$

где

$$d\Phi(\theta) = \phi_{\alpha, \xi_1} \cos(\theta) + \phi_{\alpha, \xi_2} \sin(\theta). \quad (72)$$

Якобиан J в точке интегрирования \mathbf{x} равен

$$J(\mathbf{x}) = J(\mathbf{y}) + \rho dJ(\theta) + O(\rho^2), \quad (73)$$

где

$$dJ(\theta) = J_{, \xi_1} \cos(\theta) + J_{, \xi_2} \sin(\theta). \quad (74)$$

Тогда разложение в ряд подынтегрального выражения K_{ij} (22) запишется в виде

$$K_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = K_{ij}^{-3}(\theta)\rho^{-3} + K_{ij}^{-2}(\theta)\rho^{-2} + O(\rho^{-1}), \quad (75)$$

где

$$K_{ij}^{-3}(\theta) = n_k(\mathbf{y})S_{kij}^{-3}(\theta)\phi_\alpha(\mathbf{y})J(\mathbf{y}). \quad (76)$$

$$K_{ij}^{-2}(\theta) = n_k(\mathbf{y})\left[S_{kij}^{-2}(\theta)\phi_\alpha(\mathbf{y})J(\mathbf{y}) + S_{kij}^{-3}(\theta)\left(\phi_\alpha(\mathbf{y})dJ(\theta) + d\Phi(\theta)J(\mathbf{y})\right)\right]. \quad (77)$$

Итак, мы получили два первых члена K_{ij}^{-3} и K_{ij}^{-2} разложения подынтегрального выражения K_{ij} (22) в ряд по локальной координате ρ .

Метод экстраполяции смещений для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений

Для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИНов) в точке O фронта трещины, как показано на рис. 6, использовались интерполяционные формулы [7]

$$K_I^O = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \Delta u_b^P, \quad (78)$$

$$K_{II}^O = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \Delta u_n^P, \quad (79)$$

$$K_{III}^O = \frac{E}{4(1+\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \Delta u_t^P, \quad (80)$$

где $\Delta \mathbf{u}^P$ – разрыв смещений в точке P трещины на расстоянии l от точки фронта O , векторы \mathbf{b} , \mathbf{n} и \mathbf{t} – базис локальной системы координат на фронте трещины. Уравнения (78), (79), (80) известны как одноточечные интерполяционные формулы. Можно заметить, что их точность напрямую зависит от точности вычисления полей смещений в окрестности фронта трещины. Эти формулы применимы, если расстояние l достаточно мало по сравнению с характерным размером трещины. Если же l велико, значения КИНов получаются заниженными. В этом случае необходимо использовать экстраполяцию значений КИНов K^R and K^P , посчитанных по двум точкам P_1 и P_2 на расстояниях l_1 и l_2 соответственно, на точку O фронта трещины (рис. 6).

$$K^O = K^{P_2} + \frac{l_2(K^{P_1} - K^{P_2})}{l_2 - l_1}, \quad (81)$$

Уравнение (81) известно как двухточечная интерполяционная формула.

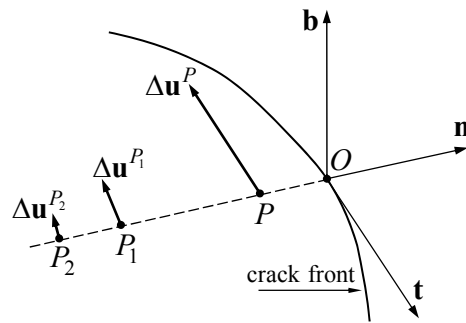


Рис. 6. Вычисление КИНов методом экстраполяции смещений в окрестности фронта трещины

Верификация ДМГЭ

Для верификации ДМГЭ рассмотрена следующая задача. В бесконечном материале, растягиваемом в направлении y напряжениями σ , имеется плоская круглая трещина радиуса R , повернутая вокруг оси Oz на угол α , как показано на рис. 7.

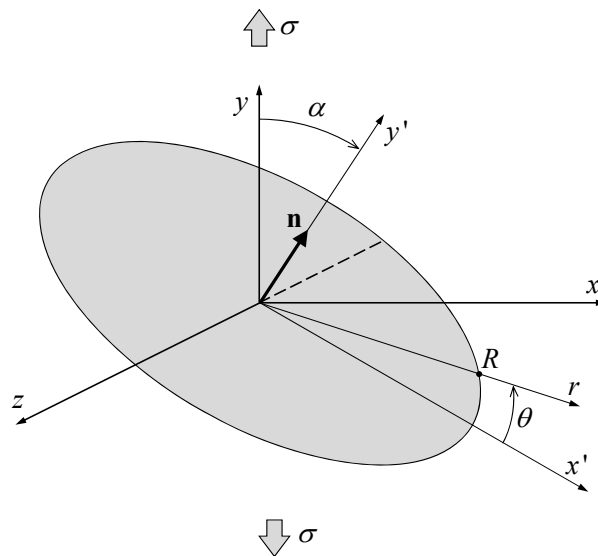


Рис. 7. Задача о круглой трещине, наклоненной на угол α относительно растягивающих напряжений σ

Ширина трещины W в этой задаче описывается соотношением [13]

$$W(r) = \sigma \cos^2 \alpha \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (82)$$

а КИНы на фронте трещины равны ([14; 15])

$$K_I = 2\sigma \cos^2 \alpha \sqrt{\frac{R}{\pi}}, \quad (83)$$

$$K_{II} = \frac{4}{2-\nu} \sigma \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta \sqrt{\frac{R}{\pi}}, \quad (84)$$

$$K_{III} = \frac{4(1-\nu)}{2-\nu} \sigma \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \sqrt{\frac{R}{\pi}}, \quad (85)$$

где θ – угловая координата, характеризующая положение точки на фронте трещины.

Для верификации метода построена серия сеток, характеризующихся разбиением в окружном направлении на N_θ элементов и в радиальном – на N_r элементов. Брались значения физических параметров $R = 1\text{ м}$, $p = 1\text{ МПа}$, $E = 20\text{ ГПа}$, $\nu = 0.2$, $\alpha = 0$.

На рис. 8 показана сеточная сходимость численного решения задачи к точному.

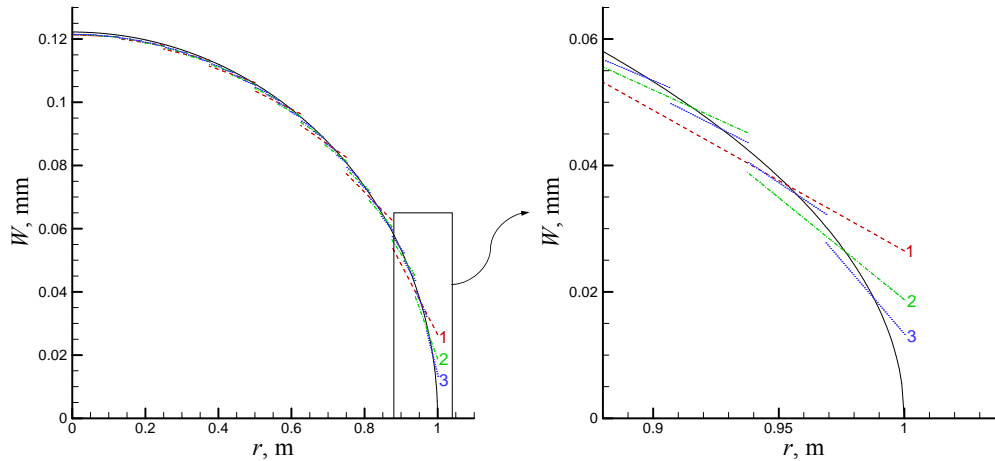


Рис. 8. Распределение раскрытия трещины W по всему радиусу r (слева) и в окрестности фронта трещины (справа): 1 – $N_\theta = 8$ (пунктир); 2 – 16 (пунктир-точка); 3 – 32 (точка), сплошная – точное решение. $N_\phi = 32$

Видно, что ДМГЭ вычисляет раскрытие трещины W с достаточно высокой точностью. Максимум погрешности достигается на фронте трещины. Порядок аппроксимации составляет $\sim 1/2$.

Посмотрим, как погрешность вычисления раскрытия трещины W влияет на погрешность в вычислении КИНов.

На рис. 9, 10 приведены значения K_I во всех узлах сетки вдоль одного радиуса, рассчитанные по формуле (78) для K_I (рис. 9 – линейные элементы, рис. 10 – квадратичные).

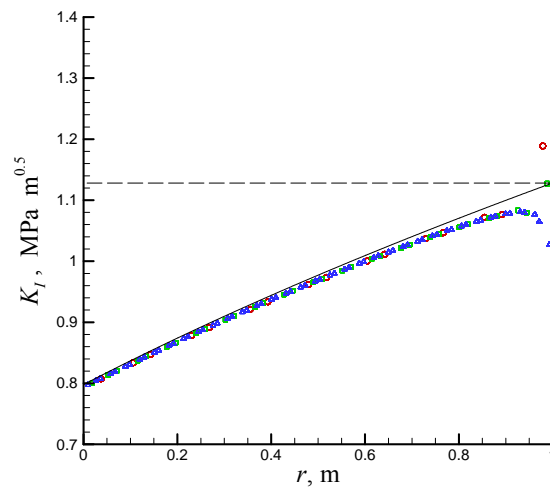


Рис. 9. КИН K_I : точное решение (83) (пунктир); формула (78) для точного решения смещений (82) (сплошная линия) и для численных решений ДМГЭ с линейными элементами: $N_\theta = 32$; \circ – $N_r = 8$, \square – 16, \triangle – 32

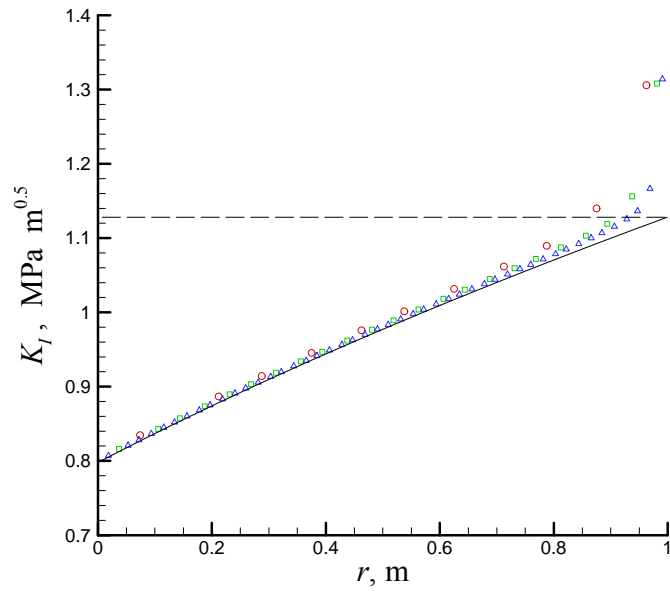


Рис. 10. КИН K_I : точное решение (83) (пунктир); формула (78) для точного решения смещений (82) (сплошная линия) и для численных решений ДМГЭ с квадратичными элементами: $N_\phi = 16$; \circ – $N_r = 4$, \square – 8, \triangle – 16

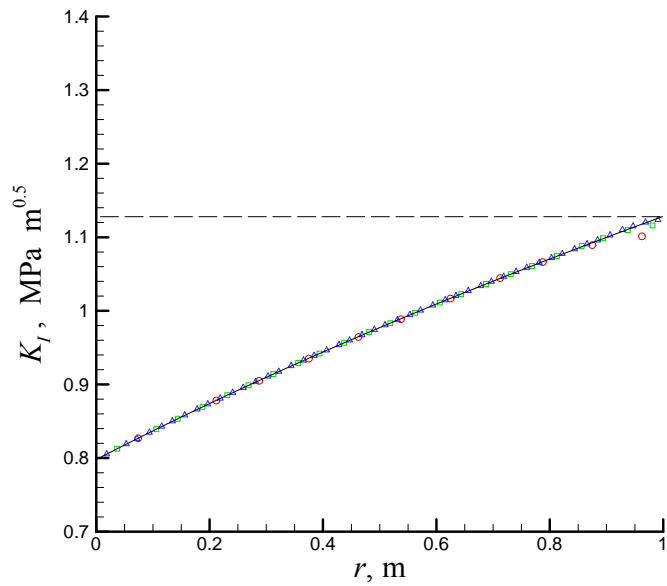


Рис. 11. КИН K_I : точное решение (83) (пунктир); формула (78) для точного решения смещений (82) (сплошная линия) и для численных решений ДМГЭ с квадратичными элементами и специальными элементами (20) на фронте трещины): $N_\phi = 16$; \circ – $N_r = 4$, \square – 8, \triangle – 16

Видно, что на расстоянии нескольких элементов от фронта K_I вычисляется достаточно точно, а на фронте трещины погрешности велики. Замена линейных элементов на квадратичные не дает никакого улучшения точности (см. рис. 10).

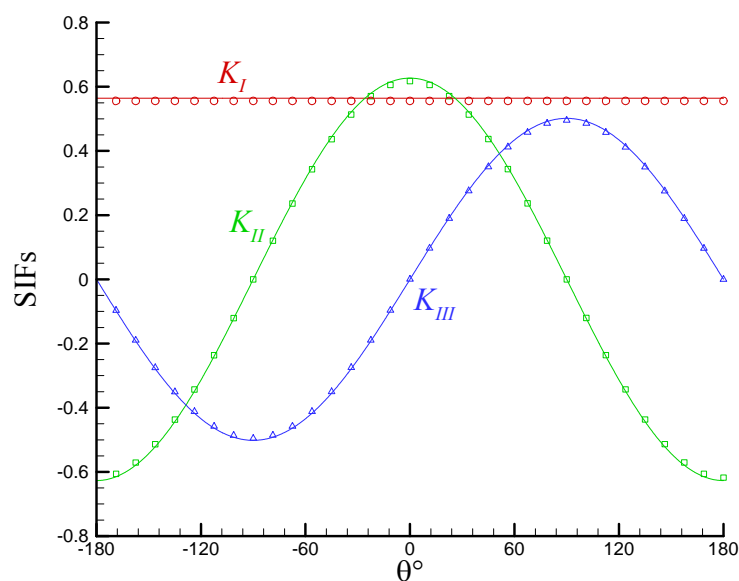


Рис. 10. Зависимость КИНов от положения точки фронта плоской круглой трещины: точное решение (сплошная); K_I (\circ), K_{II} (\square), K_{III} (\triangle)

Рассмотрим сетки, аналогичные сеткам на рис. 10, но с прифронтовыми элементами специального типа (20). Результаты расчетов K_I приведены на рис. 11.

С использованием специальных элементов КИН K_I вычислен с погрешностью не более 2 % на самой грубой сетке ($N_r = 4$).

Рассмотрим задачу о круглой трещине, наклоненной на угол $\alpha = 45^\circ$ относительно растягивающих напряжений. На рис. 12 показаны распределения всех трех КИНов по фронту трещины.

КИНы вычислены по формуле (81). Погрешность вычислений составляет не более 2 %.

Заключение

Разработан трёхмерный дуальный метод граничных элементов для решения внешних и внутренних задач упругости для тел с трещинами. Для вычисления гиперсингулярных интегралов применен метод выделения особенности. Для повышения точности вычисления КИНов на фронте трещины применены элементы специального типа, учитывающие особенность поведения решения на фронте трещины. ДМГЭ верифицирован на задаче о нагружении плоской круглой трещины и показывает высокую точность в вычислении полей смещений и напряжений в материале, а также коэффициентов интенсивности напряжений на фронте трещины. Разработанный метод может быть применен в задачах распространения трещин гидроразрыва.

Список литературы

1. Есипов Д. В., Куранакоев Д. С., Лапин В. Н., Черный С. Г. Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче инициации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 6. С. 13–26.
2. Alekseenko O. P., Potapenko D. I., Cherny S. G., Esipov D. V., Kuranakov D. S., Lapin V. N. 3D Modeling of fracture initiation from perforated non-cemented wellbore // SPE J. 2013. Vol. 18, No. 3. P. 589–600.

3. *Алексеев О. П., Есипов Д. В., Куранаков Д. С., Лапин В. Н., Черный С. Г.* Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 3. С. 36–59.
4. *Rizzo F. J.* An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics // *Quart. J. of Applied Mathematics.* 1967. Vol. 25. P. 83–95.
5. *W. Thomson (Lord Kelvin)*, On the equations of equilibrium of an elastic solid // *Cambr. Dubl. Math. J.* 1848. Vol. 3. P. 87-89.
6. *Кунрадзе В. Д.* Методы теории потенциала в теории упругости. 1963. М.: Наука. 472 с.
7. *Aliabadi M. H.* The Boundary Element Method: Vol. 2. Applications in Solids and Structures. 2002. John Wiley and Sons Ltd., 598 p.
8. *Mi Y., Aliabadi M. H.* Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. *Engineering. Analysis.* 1992. Vol. 10. No. 2. p. 161-171.
9. *Cisilino A. P., Aliabadi M. H.* Three-dimensional BEM analysis for fatigue crack growth in welded components // *Int. J. for Pressure Vessel and Piping.* 1997. Vol. 70. P. 135–144.
10. *Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T. J., Rizzo F. J.* A general algorithm for numerical solution of hypersingular equations // *J. Appl. Mech.* 1990. Vol. 57. P. 906–915.
11. *Lachat J. C., Watson J. O.* Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.* 1976. Vol. 10. P. 991–1005.
12. *Hadamard J.* Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New Haven: Yale University Press, 1923. 316 p.
13. *Sneddon, I. N., Elliott, H. A.* The Opening of a Griffith Crack Under Internal Pressure // *Quart. Appl. Math.* 1946. Vol. 4, P. 262.
14. *Murakami Y. (Editor-in-Chief)* Stress Intensity Factors Handbook. Pergamon Press, 1987.
15. *Tada H., Paris P., Irwin G.* The Stress Analysis of Cracks Handbook. ASME Press, NY 2000. 3rd ed.

Материал поступил в редколлегию 15.12.2014

D. S. Kuranakov, D. V. Esipov, V. N. Lapin, S. G. Cherny

*Institute of Computational Technologies SB RAS
6 Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation*

kuranakov@ict.sbras.ru

THREE-DIMENSIONAL DUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ELASTICITY PROBLEMS WITH CRACKS

Three-dimensional dual boundary element method for elasticity problems with regular boundary and with cracks is developed. Conventional boundary element method consists in numerical solution of displacement boundary equation on regular boundary of the elastic body. In case of the body with cracks displacement boundary equation degenerates on the crack surface. Therefore in dual boundary element method it is suggested to solve traction boundary integral equation on the crack surface. Integrals in this equation have the singularity of high order and are considered as Cauchy and Hadamard principal values. Subtraction of singularity is used for their evaluation. This method consists in derivation of Laurent series of the functions under integral sign and special method of integration of the first members of the series. Dual boundary element method is verified by the problem of penny-shaped fracture in unbounded material. The method shows high accuracy in calculation of stress and displacement fields, as well as stress intensity factors at the front of the fracture.

Keywords: linear elasticity, boundary element method, three-dimensional modeling, crack, stress intensity factors.