И.Г. Царев
Федеральное агентство по строительству и ЖКХ,
г. Москва

РАВНОВЕСИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для описания экономической системы предлагаются динамические модели, основанные на дифференциальных уравнениях второго и третьего порядка. Проанализированы свойства моделей второго порядка. Полученные зависимости соответствуют результатам, наблюдаемым на практике.

§1. Система уравнений для простого процесса производства

Как хорошо известно [1, с. 713; 2, с. 51, с. 188-195], всякое производство есть присвоение обществом предметов природы. *Труд* соединяется с веществом природы и образует потребительные стоимости или *товары*. В этом процесс человек использует *средства труда*, т.е. вещь или комплекс вещей, которые он помещает между собой и *предметом труда*. Если рассматривать весь процесс труда с точки зрения его результата – продукта, то и средство труда и предмет труда оба выступают как *средства производства*.

Начнем с самого простого процесса производства как, например, выращивание картофеля на личном земельном участке, либо заготовка дров в лесу. Таким образом, мы можем пока не включать в рассмотрение средства труда и рассмотреть взаимодействие труда и товара (*предметов потребления*). Предметы труда пока предполагаются в виде предметов природы. В дальнейшем мы рассмотрим взаимодействие предметов потребления со средствами производства, а также взаимодействие всех трех компонентов между собой.

Обозначив через N (nature) – природу, через y – количество производимого за определенный период продукта, через x – количество затраченного в этот период труда, мы можем записать простой процесс производства в виде уравнения:

$$N + x \xrightarrow{k_1} y \quad (1)$$

Предположим, что при помощи одной условной единицы труда мы можем произвести α единиц товара. Тогда скорость процесса можно записать в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha k_1 N x$$

Подобные уравнения применяются для записи скоростей химических реакций. Зависимость скорости реакции от концентрации («действующей массы») была впервые сформулирована в 1867 г. Гульдбергом и Вааге как закон действующих масс. Коэффициент k_1 характеризует скорость этого процесса и, очевидно, должен зависеть от применяемых средств труда. Коэффициенты в таких уравнениях всегда считаются положительными.

Рассмотрим теперь процесс потребления. Произведенный продукт труда потребляется человеком для воспроизводства своей жизни. Предположим, что при помощи одной единицы условного продукта можно воспроизвести β единиц труда. Скорость воспроизводства труда в этом случае определяется уравнением:

$$y \xrightarrow{k_2} x + Z\,, \ \frac{dx}{dt} = \beta k_2 y\,. \quad (2)$$

Мы получили циклический процесс: труд используется для производства неких предметов потребления, которые, в свою очередь, используются для воспроиз-водства труда.

Под Z понимаются как различные отходы производства, так и оставшийся в результате жизнедеятельности мусор, величина Z ведена в конце цикла для баланса масс, и не входит в уравнения.

Кроме того, мы должны учесть в этом дифференциальном уравнении, что труд x расходуется для производства продукта y, общее уравнение для $\frac{dx}{dt}$ примет вид:

$$\dot{x} = \beta k_2 y - k_1 N x \text{ .}$$

Когда величины зависят только от времени, то существует запись производных по времени как $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, называемых скоростью изменения этих величин, или просто скоростью. Вторая производная по времени записывается как $\ddot{x}$ и т.д.

Запишем общий вид процессов производства продукта и воспроизводства труда:

$$N + x \xrightarrow{k_1} \alpha y \xrightarrow{k_2} \beta x + Z \qquad (3)$$

Этот процесс описывается системой из двух линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha k_1 N x - k_2 y \\ \dot{x} = \beta k_2 y - k_1 N x \end{cases}. \qquad (4)$$

Система называется линейной, так как коэффициенты при переменных x и y являются постоянными. Если бы коэффициенты зависели от переменных или от скоростей переменных, то уравнения стали бы нелинейными.

Заметим, что уравнение не содержит явно времени. Динамические системы, которые описываются такими уравнениями, называют *автономными*, или системами без внешней силы.

Подобный математический аппарат широко применяется в физике, химии и биологии, однако в экономической науке используется значительно реже. Примером может служить модель самоорганизации рынка труда отдельной отрасли [16].

Переменную $y = \frac{\dot{x} + k_1 N x}{\beta k_2}$ из второго уравнения, подставим в первое, получим:

$$\ddot{x} + (k_1 N + k_2)\dot{x} + k_1 k_2 N(1 - \alpha\beta)x = 0. \qquad (5)$$

Это уравнение аналогично уравнению гармонического осциллятора с трением:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (6)$$

где ω – круговая частота собственных колебаний в отсутствие трения, h – коэффициент затухания.

В уравнении (6) член $2h\dot{x}$ характеризует действие силы трения, член $\omega^2 x$ – действие упругой силы, а член $\ddot{x}$ изменение скорости движения под действием этих сил. Очевидно, что

$$k_1 N + k_2 = 2h \text{, а } k_1 k_2 N(1 - \alpha\beta) = n \text{ .}$$

Нам полезно сначала рассмотреть свойства уравнения гармонического осциллятора, чтобы на полученной основе толковать свойства нашей системы. Кроме того, нам придется использовать некоторые понятия, хорошо известные в математике (см. [7] – [12]), но мало используемые в экономической науке.

Перепишем уравнение (6) в виде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + nx = 0 .$$

Как известно [7, с. 301], одним только изменением величины h от больших положительных до больших отрицательных значений, можно перевести систему последовательно через пять различных типов движений и состояний равновесия, а именно: устойчивый узел, устойчивый фокус, центр, неустойчивый фокус и неустойчивый узел.

Все эти состояния возможны при положительных значениях $n = \omega^2$, т.е. при наличии в системе упругой силы, *притягивающей* к положению равновесия и пропорциональной смещению системы. При отрицательных значениях n ($n = -\omega^2$), т.е. при упругой силе *отталкивающей* систему от положения равновесия (например, маятник в непосредственной близости к верхнему, неустойчивому положению равновесия), и любых значениях γ мы имеем равновесие типа седла. Этот тип состояния равновесия не может быть изменен путем изменения трения в системе.

Если мы рассмотрим плоскость параметров (n; h), где на оси абсцисс откладывается значение n, а на оси ординат – h, то устойчивые состояния лежат в области верхнего правого угла плоскости, а все остальные неустойчивые. Их разделяет *граница устойчивости,* образованная положительными координатными полуосями. Область устойчивости делится линией $n = h^2$ на две части: устойчивых фокусов и устойчивых узлов. В нижнем правом углу лежат разделенные линией $n = h^2$ области неустойчивых фокусов и неустойчивых узлов. Точки типа фокуса лежат внутри параболы, а точки типа узла в правой полуплоскости вне параболы. Положительная полуось n образована точками, соответствующими состояниям равновесия типа центра. Область седел лежит левее оси ординат h.

Предельный случай (когда $n = h^2$) не представляет большого интереса, ибо этот случай, как и всякий, когда соотношение между параметрами системы точно фиксировано, не может быть точно реализован на практике и выполняет лишь роль границы между фокусами и узлами. Состояния равновесия типа центра, также не представляют большого интереса. Если условие параметра $h = 0$ хоть немного нарушается, то система уходит в другое состояние равновесия. Поэтому состояние равновесия типа центра физически имеет значение лишь как граница между устойчивым и неустойчивым фокусом. Ось абсцисс при $n = 0$ является границей между седлами и узлами и образует точки типа «седло-узел». Другие же состояния равновесия сохраняют свой тип, т.е. обладают устойчивостью по отношению к малым изменениям параметров системы.

При изучении поведения динамической системы нас, прежде всего, интересуют так называемые *стационарные* движения в системе. Стационарные режимы движения получили название *аттракторов* [*аттрактор*, т.е. *притягатель*], так как они «притягивают» соседние режимы (переходные процессы). В дальнейшем мы будем отбрасывать сложные для описания нестационарные процессы и рассмат-ривать только стационарные. Это упрощение оказывается очень полезным, хотя оставляет за кадром существенную часть теории колебаний. Для рассматриваемой системы второго порядка стационарными движениями могут быть только состояния равновесия и периодические движения. Для систем большего порядка стационарными движениями могут быть более сложные движения, например квазипериодические.

Отметим еще один важный момент. В линейных неконсервативных (т.е. при наличии трения) системах периодические процессы вообще невозможны. Периодические движения могут возникнуть только в нелинейной системе, когда коэффициенты зависят от переменных или от скоростей переменных.

§2. Интерпретация системы уравнений для простого процесса производства

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка (5) для нашей системы, которое аналогично уравнению гармонического осциллятора с трением, причем все коэффициенты уравнения больше нуля. Под трением (второй член уравнения) видимо следует понимать транзакционные издержки. По определению Коуза [5, с. 9] транзакционные издержки – это издержки сбора и обработки информации, издержки проведения переговоров и принятия решений, издержки контроля и юридической защиты выполнения контракта.

Исходя из выводов, сделанных в предыдущем параграфе, при $n > 0$ мы всегда будем иметь устойчивое состояние равновесия в начале координат, так как h всегда положительно. Если $n < 0$, то мы имеем неустойчивое равновесие типа седла.

Назовем $\mu = \alpha\beta$ коэффициентом воспроизводства труда. Если μ меньше единицы, то система асимптотически приближается к состоянию равновесия в начале координат. Люди «проедают» имеющиеся средства к жизни и «вымирают». Мы имеем положение равновесия модели типа устойчивого фокуса, либо устойчивого узла, в зависимости от величины транзакционных издержек. Может возникнуть вопрос, почему переменные x и y могут принимать отрицательные значения (см. рис. 1 а). Проблема легко решается, если мы будем рассматривать абсолютные значения вычисляемых величин. В этом случае фазовая траектория принимает вид, изображенный на рис. 1 б.

Если коэффициент воспроизводства μ больше единицы, состояние равновесия неустойчиво и представляет собой седло. Трудовые ресурсы и производство неограниченно экспоненциально нарастают.

При всяком теоретическом исследовании какой-либо реальной системы мы всегда вынуждены в большей или меньшей степени упрощать, идеализировать свойства описываемой системы. Для построения математической модели рассматриваемой системы нужно учесть основные решающие факторы, и отнюдь не следует стремиться учесть все без исключения ее свойства. Всегда возникает вопрос о том, как далеко мы можем идти в этом направлении и все же получить удовлетворительные результаты. Ответ на этот вопрос может дать только опыт.

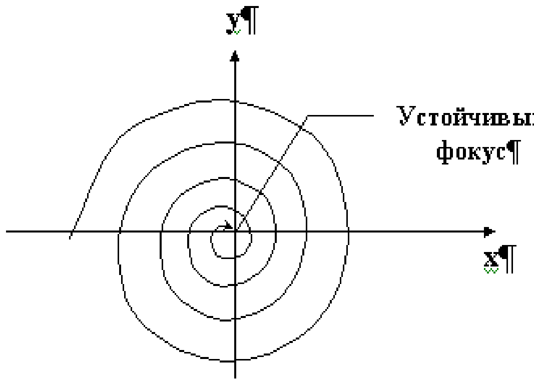

Рис. 1а.

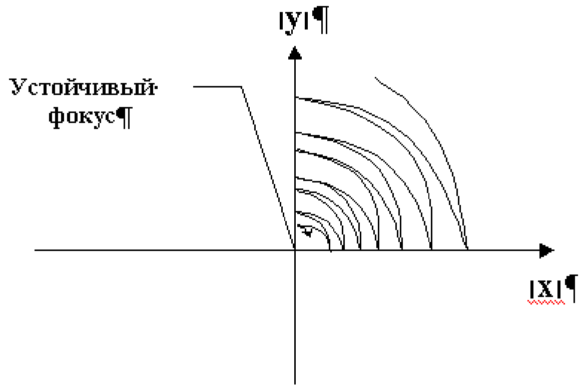

Рис. 1б.

В реальной экономической системе экспоненциальный рост наблюдается только некоторое время на начальном этапе развития системы, в дальнейшем начинает действовать некий механизм сдерживания роста. Наша модель пока не отражает действие этого ограничителя, и нам необходимо ее улучшить.

В качестве ограничителя можно добавить неотрицательную функцию $f(x)$ во втором уравнении системы (4):

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha k_1 N x - k_2 y \\ \dot{x} = \beta k_2 y - k_1 N x - f(x) \end{cases} \tag{7}$$

Мы предполагаем, что $f(x)$ явно не зависит от y, однако очевидно, что начало координат по-прежнему является точкой равновесия, поэтому при условии $(x = 0, y = 0)$, функция $f(x)$ должна обращаться в нуль. Интерпретация $f(x)$ пока представляется весьма туманной, однако это не мешает нам двигаться дальше. Как мы выяснили выше, состояния равновесия системы определяются из условий $(\dot{x} = 0, \dot{y} = 0)$, из которых получаются уравнения:

$$y_1 = \frac{\alpha k_1 N}{k_2} x, \qquad y_2 = \frac{1}{\beta k_2}\left(k_1 N x + f(x)\right). \tag{8}$$

Следовательно, состояниями равновесия являются точки пересечения этих прямой и кривой и определяются уравнением:

$$f(x) = k_1 N(\alpha\beta - 1)x. \tag{9}$$

В соответствии с трудовой теорией стоимости [3, с. 86-94] когда спрос и предложение уравновешивают друг друга, относительная стоимость любого продукта с точностью определяется заключенным в нем количеством труда. Аналогично относительная стоимость труда, также определяется количеством труда, необходимого для производства всего того, что требуется для содержания рабочего.

Мы предположили, что, обрабатывая природу одной условной единицей труда, мы можем произвести α единиц товара. Следовательно, в одной условной единице товара содержится $1/\alpha$ условных единиц труда, которые составляют его стоимость. Обозначим произведенный и проданный товар через q, чтобы не путать его с функциями $y_{1,2}$ в уравнениях (8), $q = x/\alpha$. В нашем производственном процессе произведенная стоимость образует валовой доход (TR), выраженный в условных единицах товара в виде формулы:

$$TR = \frac{k_1 N}{k_2} q, \tag{10}$$

которая получается подстановкой q в первое из уравнений (8).

Далее мы предположили, что при помощи одной единицы условного продукта можно воспроизвести β единиц труда, следовательно, для воспроизводства одной условной единицы труда нужно затратить $1/\beta$ условных единиц товара. Таким образом, стоимость рабочей силы для воспроизводства одной единицы товара составят $1/\alpha\beta$ условных единиц труда. В нашем процессе производства стоимость рабочей силы в условных единицах произведенного и проданного товара будет определяться формулой: $\frac{k_1 N}{\alpha\beta k_2} q$.

Однако затраты на заработную плату, очевидно, образуют только часть издержек производства товара, и относятся к переменным издержкам (TVC), величина которых изменяется в зависимости от изменения объема выпускаемой продукции. Если продукция не производится, то переменные издержки равны нулю. Помимо заработной платы к переменным издержкам относят материальные затраты на единицу продукции: затраты на сырье, материалы, топливо, энергию, транспортные услуги.

Кроме переменных, существуют еще постоянные издержки, величина которых не изменяется в зависимости от изменения объема производства (TFC). Постоянные издержки связаны с самим существованием производственного оборудования.

Сумма постоянных и переменных издержек образует валовые (общие) издержки производства (TC).

Можно предположить, что второе из уравнений (8) как раз и дает нам величину валовых издержек производства:

$$TC = \frac{k_1 N q + f(q)}{\alpha \beta k_2}. \qquad (11)$$

В этом случае величину $f(q)$ можно интерпретировать как сумму постоянных и переменных издержек за вычетом затрат на заработную плату рабочих и служащих.

В соответствии с *законом убывающей отдачи* [4, с. 220; 6, с. 480] при последовательном присоединении переменного ресурса (например, труда) к постоянному ресурсу фирмы (например, капиталу или земле) добавочный, или предельный, продукт, приходящийся на каждую последующую единицу пере-менного ресурса, начиная с определенного момента уменьшается. Это значит, что валовые издержки производства при достаточно больших q растут не пропорционально x, а быстрее. Кроме того, при достаточно малых q основными издержками производства являются постоянные издержки TFC, это означает, что валовые издержки при малых q очень быстро возрастают до величины постоянных издержек.

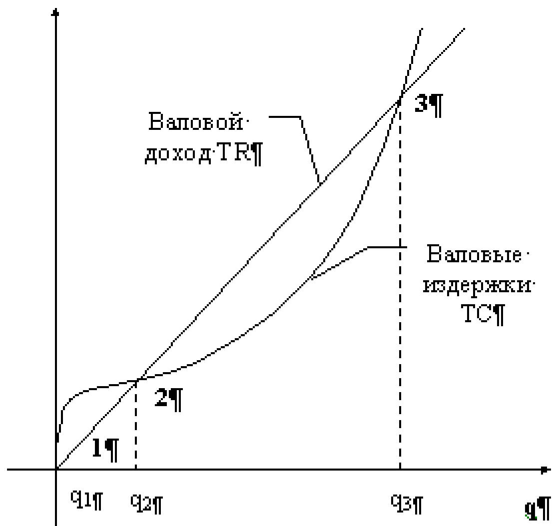

Рис. 2

На рис. 2 изображены графики зависимости валового дохода и валовых издержек производства от x. Точки пересечения кривой и прямой 1, 2 и 3 определяют три состояния равновесия системы q_1, q_2 и q_3. Эти точки находятся из уравнения (9), первая из них соответствует началу координат.

Прибыль – экономическая категория, выражающая конечные результаты хозяйственной деятельности отдельного предприятия, отрасли, экономики страны в целом,– определяется как разница между общей выручкой от реализации благ и общими издержками:

$$P_r = TR - TC = \frac{k_1 N(\alpha\beta - 1)q - f(q)}{\alpha \beta k_2}.$$

Мы видим, что согласно (9) в точках равновесия системы прибыль равна нулю.

Предположим, что $f(q)=f_0+aq+bq^2$. Величина f_0 представляет собой величину постоянных издержек TFC и одинакова для всех q кроме $q_0=0$, где $f_0=0$.

Подставив это выражение для $f(q)$ в уравнение (9), получим:

$$bq^2+\left(a-k_1N(\alpha\beta-1)\right)q+f_0=0.$$

Корнями квадратного уравнения будут:

$$q_{2,3}=\frac{k_1N(\alpha\beta-1)-a\pm\sqrt{\left(k_1N(\alpha\beta-1)-a\right)^2-4f_0b}}{2b}$$

Положение равновесия q_2 – это, так называемая точка безубыточности; положение равновесия q_3 – точка критического объема производства.

Вид наших графиков практически совпадает с рисунком, приведенным в учебнике [6, с. 509].

Для того чтобы исследовать характер состояний равновесия системы (7), перенесем начало координат в точку, соответствующую состоянию равновесия $x=x_0+x$, разложим функцию $f(x)$ в ряд вблизи значения x_0:

$$f(x)=f(x_0)+xf'(x_0)+...$$

и ограничимся двумя первыми членами ряда.

Переменную $y=\dfrac{\dot{x}+k_1Nx+f(x)}{\beta k_2}$ из второго уравнения системы (7), подставим в первое и получим:

$$\ddot{x}+\left(k_1N+k_2+f'(x)\right)\dot{x}+k_1k_2N(1-\alpha\beta)x+f(x)k_2=0. \qquad (12)$$

Подставив выражения для x и f(x) в это уравнение, и учитывая, что $f(x_0)=k_1N(\alpha\beta-1)x_0$ получим:

$$\ddot{x}+\left(k_1N+k_2+f'(x_0)\right)\dot{x}+\left(k_1N(1-\alpha\beta)+f'(x_0)\right)k_2x=0$$

Мы опять получили дифференциальное уравнение второго порядка, которое аналогично уравнению гармонического осциллятора с трением, где:

$$k_1N+k_2+f'(x_0)=2h\text{, а }\left(k_1N(1-\alpha\beta)+f(x_0)\right)k_2=n.$$

Угол наклона кривой y_2 в точках пересечения 1 и 3 больше угла наклона прямой y_1, а в точке 2 – меньше. Отсюда легко увидеть, что выражение $k_1N(1-\alpha\beta)x+f'(x_0)$ в точках 1 и 3 имеет положительное значение, а в точке 2 – отрицательное. Значит, точка равновесия 2 есть седло, а 1 и 3 – узел или фокус. Точки равновесия 1 и 3 всегда устойчивые, так как значение $k_1N+k_2+f'(x_0)$ в них всегда положительно.

Точка равновесия является фокусом при условии $h^2<n$ и узлом при $h^2>n$ (§1):

$$\left(k_1N+k_2+f'(x_0)\right)^2-4\left(k_1N(1-\alpha\beta)+f'(x_0)\right)k_2= =\left(f'(x_0)+k_1N-k_2\right)^2+4k_1k_2N(\alpha\beta-1)>0.$$

Так как левая часть неравенства всегда положительна, значит точки 1 и 3 – устойчивые узлы.

Мы полагали $f(x) = f_0 + ax + bx^2$. Как известно, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$. Мы можем предположить, что $f(x) = f_{TFC} \exp \xi x$. Постоянные издержки f_{TFC} должны быть равны нулю при отсутствии производства в точке $x_0 = 0$, с началом производства они практически сразу достигают своего постоянного значения. Этот процесс хорошо описывается функцией $f_{TFC} = f_0(1 - \exp(-\delta x))$, где постоянная времени $\delta » \xi$. В результате получим:

$$f(x) = f_0 \exp \xi x - f_0 \exp(-\delta x) \tag{13}$$

Следует помнить, что $\exp(-\delta x)$ достаточно быстро убывает, и при достаточно больших x его можно не учитывать.

Тогда уравнение (12) запишется в виде:

$$\ddot{x} + (k_1 N + k_2 + \xi f_0 \exp \xi x)\dot{x} + \left(k_1 N(1 - \alpha\beta) + \frac{f_0 \exp \xi x}{x} \right) k_2 x = 0 \tag{14}$$

Обычно стремятся получить максимальную прибыль. Максимум прибыли достигается в точке x_P:

$$\frac{dP_r}{dx} = \frac{d}{dx}(TR - TC) = MR - MC = 0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{k_1 N(\alpha\beta - 1)x - f_0 \exp \xi x}{\alpha\beta k_2} \right).$$

Откуда: $x_P = \frac{1}{\xi} \ln\left(\frac{k_1 N(\alpha\beta - 1)}{\xi f_0} \right)$.

Произведенная стоимость (труд) равно валовому доходу (10) и составляет в этой точке:

$$I = \frac{k_1 N}{k_2 \xi} \ln\left(\frac{k_1 N(\alpha\beta - 1)}{\xi f_0} \right),$$

или:

$$I = p \ln(Cp), \text{ где } p = \frac{k_1 N}{k_2 \xi},\ C = \ln\left(\frac{k_2(\alpha\beta - 1)}{f_0} \right). \tag{15}$$

Если в нашей экономической системе производится одновременно несколько товаров, то произведенная стоимость будет равна:

$$\sum_i I_i = \sum_i p_i \ln(C_i p_i).$$

Если мы рассматриваем p как функцию N, то полученное выражение с точностью до знака и константы совпадает с выражением, которое было установлено Шенноном для определения количества информации [13, с. 260]. Представим некий объект, состоящий из n элементов. Эти элементы могут образовывать различные *последовательности*, каждая из которых будет неким *состоянием* нашего объекта. Число возможных состояний объекта определяется как $N = n!$. Логарифм числа состояний по определению Больцмана [14] дает нам *энтропию* объекта, которая является мерой его неопределенности $H = lnN$. Эта же формула выражает и *количество информации*, необходимое для устранения неопределенности в задании нашего объекта. Пользуясь приближенной формулой Стирлинга, получаем: $H = \ln(n!) \approx n\ln(n)$. Если элементы нашего объекта встречаются с различной частотой $p_i = \frac{n_i}{n}$, то из аналогичных соображений легко получить (см. например [15, с. 34]) количество информации по Шеннону, задаваемой одним элементом:

$$H = -\sum_i p_i \ln p_i \ .$$

Таким образом, стоимость товара в подходящих единицах является количеством информации, которая была привнесена в природный предмет в процессе производства, т.е. труд попросту является информацией, которая соеди-нилась с веществом природы. В этом результате нет ничего удивительного. Труд, являясь целенаправленной деятельностью, служит созданию необходимого людям порядка в окружающей природе. Мерой порядка какой-либо системы как раз и выступает информация.

§3. Модель экономической системы двух видов товаров

Рассмотрим теперь экономическую модель, аналогичную известной биологи-ческой модели Вольтерра, которую он построил для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море.

Мы можем разделить все товары, производимые в некой хозяйственной системе, на два больших класса: товары, используемые для производства других товаров, в том числе и для самовоспроизводства (производственное потребление) и товары, используемые для конечного потребления (индивидуальное потребление непосредственно людьми). Причем совершенно неважно, используется ли любой данный товар для одной цели или сразу для двух. Оба вида товаров производятся при помощи известных факторов производства (труд, капитал и природные ресурсы), которые, мы предположим, имеются всегда в достаточном количестве. Количество единиц каждого товара есть, конечно, целое число, но чтобы применить методы дифференциального исчисления, мы будем рассматривать их как непрерывные функции времени. Обозначим количество условных единиц первого товара через x, второго – через y.

Если бы первый товар производился в отсутствии индивидуального потребления, то его количество непрерывно увеличивалось бы, причем скорость увеличения мы предположим пропорционально уже имеющемуся количеству. В этом случае мы можем записать $\dot{x} = \varepsilon_1 x$. Коэффициент увеличения ε_1 зависит от производства и производственного потребления.

Если бы второй товар только индивидуально потреблялся, не производился и не участвовал в производственном потреблении, то его количество постепенно уменьшалось бы. Предположим, что $\dot{y} = -\varepsilon_2 y$.

В общей хозяйственной системе мы сделаем простейшее предположение, что коэффициент увеличения ε_1 уменьшится за счет индивидуального потребления на величину, пропорциональную y. Аналогичным образом предположим, что коэффи-циент уменьшения ε_2 в результате производства (учитывается как производство, так и производственное потребление) увеличится на величину, пропорциональную x.

Из этих соображений запишем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\varepsilon_1 - \xi_1 y) \\ \dot{y} = -y(\varepsilon_2 - \xi_2 x) \end{cases}. \qquad (16)$$

Причем все коэффициенты больше нуля и обе переменных всегда больше нуля. Таким образом, фазовые траектории на фазовой плоскости (x, y) лежат в правом верхнем (первом) квадранте.

Умножая первое уравнение на ξ_2, второе – на ξ_1 и складывая, получим:

$$\xi_2 \dot{x} + \xi_1 \dot{y} = \varepsilon_1 \xi_2 x - \varepsilon_2 \xi_1 y .$$

Умножая же первое на $\dfrac{\varepsilon_2}{x}$ и второе на $\dfrac{\varepsilon_1}{y}$ и складывая, имеем:

$$\varepsilon_2 \frac{\dot{x}}{x} + \varepsilon_1 \frac{\dot{y}}{y} = -\varepsilon_2 \xi_1 y + \varepsilon_1 \xi_2 x .$$

Следовательно, $\varepsilon_1 \dfrac{d \ln y}{dt} + \varepsilon_2 \dfrac{d \ln x}{dt} - \xi_2 \dot{x} - \xi_1 \dot{y} = 0$.

Откуда, $\xi_2 x + \xi_1 y - \varepsilon_2 \ln x - \varepsilon_1 \ln y = const$.

Этот интеграл мы можем записать в виде:

$$\frac{\exp \xi_2 x}{x^{\varepsilon_2}} \cdot \frac{\exp \xi_1 y}{y^{\varepsilon_1}} = const . \qquad (17)$$

Отметим, что функция вида $\dfrac{\exp \xi x}{x}$ уже встречалась нам в уравнении (14).

Положениями равновесия системы будут точка $x = 0$, $y = 0$ – что неинтересно, и более интересная точка $x_0 = \dfrac{\varepsilon_2}{\xi_2}, y_0 = \dfrac{\varepsilon_1}{\xi_1}$.

Если координата y изображающей точки меньше y_0, то, как следует из верхнего уравнения системы (16), координата x всегда растет; если больше – всегда убывает. В свою очередь, если координата x изображающей точки меньше x_0, то как следует из нижнего уравнения, координата y всегда убывает, если больше – всегда растет. Таким образом изображающая точка на плоскости (x, y) движется против часовой стрелки вокруг точки равновесия (x_0, y_0) и пробегает замкнутую траекторию. А это означает, что решения являются функциями, периодическими во времени. Интегральные кривые все замкнуты, кроме одной, соответствующей координатным осям (рис. 3).

При этом максимум x не попадает на максимум y, т.е. колебания происходят в разных

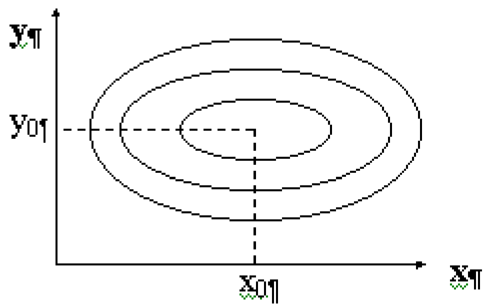

Рис. 3¶

фазах. Итак, мы видим, что в исследуемом случае изменение количества товаров происходит по периодическому закону.

На рис. 4 приведены зависимости x и y от времени.

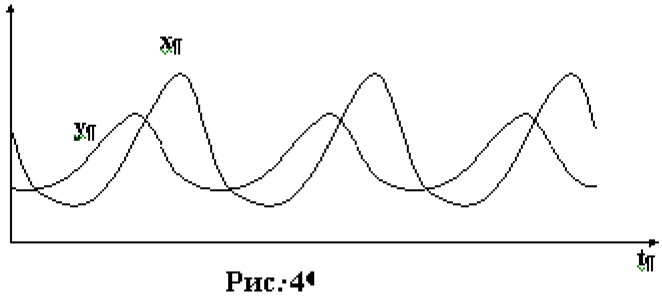

Рис. 4

§4. Общая модель производства в экономической системе

Мы рассмотрели две системы. В первой взаимодействовали *труд* и продукт труда, который, будучи полезной вещью, может являться *товаром*. Во второй взаимодействовали с*редства производства*, т.е. товары, имеющие такую форму, в которой они должны войти или, по меньшей мере, могут войти в производственное потребление и *предметы потребления*, т.е. товары, имеющие такую форму, в которой они входят в индивидуальное потребление людей.

Попробуем теперь рассмотреть модель, в которую входят уравнения из обеих систем. Запишем следующую последовательность уравнений:

$$N + x + y \xrightarrow{k_1} \alpha y\,;\; y + z \xrightarrow{\xi_1} \beta z \xrightarrow{\varepsilon_2} \gamma x + Z\,. \qquad (18)$$

Где N – природа, Z – отходы, x – труд, y – средства производства, z – предметы потребления. Этот процесс можно представить в виде системы уравнений, включающих уравнения систем (7) и (16):

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma\varepsilon_2 z - k_1 Nxy - f(x) \\ \dot{y} = y(\alpha k_1 Nx - \xi_1 z) \\ \dot{z} = z(\beta\xi_1 y - \varepsilon_2) \end{cases} . \qquad (19)$$

Из условий $(\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0)$ получаем:

$$z_1 = \frac{\alpha k_1 N}{\xi_1} x\,,\; z_2 = \frac{1}{\gamma\varepsilon_2}\left(k_1 Nxy + f(x)\right),\; y = \frac{\varepsilon_2}{\beta\xi_1}\,. \qquad (20)$$

Полученное значение y является оптимальным (равновесным) количеством средств производства, производимых за определенный период в данной экономи-ческой системе.

Рассуждения, аналогичные проведенным в §2, дают нам формулы для валового дохода и валовых издержек:

$$TR = \frac{k_1 N}{\xi_1} x\,;$$

$$TC = \frac{k_1 N}{\alpha\beta\gamma\xi_1} x + \frac{f(x)}{\alpha\gamma\varepsilon_2}\,.$$

Мы можем сказать, что при данной глубине исследования свойства нашей системы третьего порядка похожи на свойства двух систем второго порядка, рассмотренных выше. Однако более подробно исследовать систему (19) не представляется возможным.

Анализ динамических систем третьего порядка часто представляет значительные трудности. Так одним из сенсационных открытий было обнаружение в 1963 г. американским метеорологом Лоренцом сложного поведения сравнительно простой динамической системы из трех дифференциальных уравнений. Модель Лоренса появилась в связи со среднесрочным (на несколько недель) прогнозом погоды. При определенных значениях параметров траектория системы вела себя столь запутанным образом, что внешний наблюдатель мог бы принять ее характеристики за случайные, хотя никаких случайных сил в модели нет. Такие системы получили название стохастических, или странных аттракторов. Ученые столкнулись с тем обстоятельством, что совершенствование математических моделей, использование компьютеров с большим быстродействием и памятью, поиск новых численных методов в течение нескольких десятков лет не позволили разработать эффективную методику такого прогноза. Оказалось, что эта модель очень чувствительна к начальным данным и не выходит на стационарный режим.

Мы можем сделать вывод, что динамические модели второго порядка удовлетворительно описывают поведение экономической системы и могут применяться для ее исследования. Однако если мы пытаемся учесть одновременно три переменные, полученная модель не позволяет сделать однозначные выводы о поведении системы.

Список литературы

1. Маркс К., Энгельс Ф. Введение (из экономических рукописей 1857-1858 годов) Соч., т.12.
2. Маркс К. Капитал. Критика политической экономии. Т. I. – М. Политиздат, 1983.
3. Маркс К., Энгельс Ф. Нищета философии. – Гл. I. Соч., т.4.
4. Маршалл А. Принципы экономической науки. Т. I. – М.: Прогресс, 1993.
5. Коуз Р. Фирма, рынок и право. – М.: Дело ЛТД, 1993.
6. Макконнелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс: принципы, проблемы и политика. – М.: ИНФРА-М, 2002.
7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959.
8. Аленицын А.Г., Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Краткий физико-математический справочник. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
9. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
10. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука. 1967.
11. Понтрягин Л.С. Знакомство с высшей математикой: Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
12. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – К.: Вища школа. 1984.
13. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963.
14. Больцман Л. Лекции по теории газов. – М.: ГИТТЛ, 1956.
15. Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. – М.: Наука, 1987.
16. Васильев А.Н. Модель самоорганизации рынка труда // Экономика и мат. методы. 2001. Т. 37, № 2. с. 123-127.