УДК 519.67

Д. Ю. Людвин

Институт вычислительных технологий СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: lyudvin@ngs.ru

ВНУТРЕННЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВЯЗЯМИ *

Рассматривается задача внутреннего оценивания объединенного множества решений интервальной линейной системы уравнений, на параметры которой наложены дополнительные связи. Для решения задачи предлагается использовать адаптивное дробление параметров системы и методы внутреннего оценивания на основе двух подходов – формального и «центрового». Разработана модификация «центрового» подхода для внутреннего оценивания множества решений интервальной линейной системы со связями, правые части уравнений которой не являются интервальными. Приведены результаты апробации разработанных алгоритмов на тестовых примерах.

Ключевые слова: интервальные линейные системы, множество решений, внутренняя оценка, формально-алгебраический подход, «центровой» подход.

Введение

В работе рассматриваются интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}x_1 + \boldsymbol{a}_{12}x_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{1m}x_n = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{a}_{21}x_1 + \boldsymbol{a}_{22}x_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{2m}x_n = \boldsymbol{b}_2, \\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 + \boldsymbol{a}_{n2}x_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_{mn}x_n = \boldsymbol{b}_m \end{cases} \tag{1}$$

с интервалами $\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\boldsymbol{b}_i$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, или, в краткой форме, $\boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b}$, с интервальными $m \times n$ -матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и m-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$.

В тексте интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) везде обозначаются жирным шрифтом, тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Далее будем также использовать следующие обозначения:

- $\mathbb{IR} = \{[x, y] \mid x \le y, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ – классическая интервальная арифметика или ее носитель – множество замкнутых интервалов $[x, y]$ на $\mathbb{R}$, $x \le y$; ;

* Автор выражает благодарность научному руководителю С. П. Шарому за активную помощь в решении рассматриваемой задачи, предложенную им идею применить метод дробления параметров для нахождения внутренней оценки множества решений ИСЛАУ со связями. Ранее этот метод был использован С. П. Шарым для внешнего оценивания множеств решений ИСЛАУ со связями [1]. Автор признателен за плодотворные консультации и ценные советы С. П. Шарого, которые помогли уяснить суть проблемы, устранить неточности и ошибки.

Людвин Д. Ю. Внутреннее оценивание множеств решений интервальных систем линейных уравнений со связями // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2013. Т. 11, вып. 1. С. 78–92.

- $\mathbb{IR}^n = \left\{ \left(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_i, ..., \boldsymbol{a}_n \right)^T \middle| \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{IR} \right\}$ – множество *n*-мерных интервальных векторов;
- $\underline{\boldsymbol{a}}$ – левый конец интервала $\boldsymbol{a}$;
- $\overline{\boldsymbol{a}}$ – правый конец интервала $\boldsymbol{a}$;
- $\mathrm{mid}\boldsymbol{a} = \left(\underline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{a}} \right) / 2$ – середина интервала $\boldsymbol{a}$;
- $\mathrm{wid}\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}$ – ширина интервала $\boldsymbol{a}$;
- $\mathrm{rad}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2} \mathrm{wid}\,\boldsymbol{a}$ – радиус интервала $\boldsymbol{a}$.

Пусть на элементы матрицы $A \in \boldsymbol{A}$ и компоненты вектора правых частей $b \in \boldsymbol{b}$ интервальной линейной системы (1) наложены дополнительные связи, т. е. $a_{11}, ..., a_{mn}, b_1, ..., b_m$ удовлетворяют некоторым соотношениям в виде равенств, неравенств и т. п.

Под *интервальной системой линейных уравнений со связями* будем понимать множество точечных линейных систем $Ax = b$ с матрицами $A \in \boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ и векторами $b \in \boldsymbol{b} \in \mathbb{IR}^m$, для которых выполняются соотношения из заданного множества *C*.

Объединенным множеством решений интервальной линейной системы уравнений со связями называется множество

$$\Xi_C\left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \left(\exists A \in \boldsymbol{A}\right)\left(\exists b \in \boldsymbol{b}\right)\left(\left(Ax = b\right) \& \left(\text{справедливы условия из } C\right)\right) \right\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $Ax = b$ с $A \in \boldsymbol{A}$ и $b \in \boldsymbol{b}$, таких что элементы матриц $\boldsymbol{A}$ и компоненты векторов $\boldsymbol{b}$ удовлетворяют ограничениям из множества *C*.

Далее объединенное множество решений ИСЛАУ будем называть просто множеством решений, поскольку другие множества решений в работе не рассматриваются.

Примером интервальной линейной системы со связями является симметричная ИСЛАУ с матрицей $\boldsymbol{A} = \left\{ A \in \boldsymbol{A} \middle| A = A^T \right\}$, содержащей точечные матрицы, обладающие свойством симметричности.

В работе мы рассмотрим частный случай интервальной линейной системы со связями, элементы матрицы которой зависят от некоторых параметров $p_1, p_2, ..., p_k$, принимающих значения из интервалов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_k$ соответственно, т. е.

$$a_{ij} = a_{ij}\left(p\right), \tag{2}$$

где $a_{ij}\left(p\right)$ – непрерывная вещественная функция аргумента $p = \left(p_1, p_2, ..., p_k\right)$. Данная система представляет собой множество

$$\left\{ A\left(p\right)x = b \middle| a_{ij} = a_{ij}\left(p\right), b_i \in \boldsymbol{b}_i, p \in \boldsymbol{p} = \left(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, ..., \boldsymbol{p}_k\right), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \right\}.$$

Здесь интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ образована точечными матрицами $A\left(p\right)$, где $p \in \boldsymbol{p}$.

Множеством решений интервальной системы, матрица которой зависит от параметров $p = \left(p_1, p_2, ..., p_k\right)$, будем называть множество

$$\Xi_p\left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \left(\exists p \in \boldsymbol{p}\right)\left(\exists b \in \boldsymbol{b}\right)\left(A\left(p\right)x = b\right) \right\}, \tag{3}$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $A\left(p\right)x = b$ с $p \in \boldsymbol{p}$ и $b \in \boldsymbol{b}$.

Например, матрица упомянутой выше симметричной ИСЛАУ содержит точечные матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

где параметры $p_{ij} \in \boldsymbol{p}_{ij}$, $i \le j$, $j = \overline{1,n}$.

Отметим, что множество решений интервальной линейной системы со связями имеет более сложную форму, чем множество решений ИСЛАУ без связей. Это множество не является параллелотопом, его границами могут быть криволинейные поверхности. В работе [2] показано, что множество решений симметричной ИСЛАУ в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$ может быть представлено как пересечение множества решений соответствующей интервальной системы без связей и некоторых множеств, имеющих границами поверхности второго порядка.

В случае, когда на матрицу и вектор правых частей системы (1) наложены аффинные связи, ее множество решений является полуалгебраическим множеством. Для описания этого множества можно использовать метод [2], основанный на процессе исключения Фурье – Моцкина для линейных неравенств, и его модификацию, предложенную в [3]. Однако данные методы оказываются весьма трудоемким для систем большой размерности. Кроме того, они не приемлемы для систем с другими типами связей.

Интервальные линейные системы, элементы матриц которых зависят от параметров, довольно часто встречаются на практике [1; 2; 4–6]. Далее будет приведен пример ИСЛАУ, описывающей синтез рычажного механизма.

Предложено немало методов оценивания множества $\Xi_p\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right)$ решений ИСЛАУ, матрицы которых зависят от параметров (см. [5–11]). Подавляющее большинство из этих работ посвящено нахождению внешней оценки множества $\Xi_p\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right)$, т. е. наименьшего бруса $\boldsymbol{V} \in \mathbb{IR}^n$, содержащего это множество.

Нас же будет интересовать задача внутреннего оценивания множества (3) или, иными словами, нахождения наибольшего интервального вектора $\boldsymbol{U} \in \mathbb{IR}^n$, содержащегося во множестве решений интервальной системы со связями. Существующие на сегодняшний день методы внутреннего оценивания разработаны в основном для ИСЛАУ со связями специального вида. Например, в работах [8–10] рассматриваются интервальные линейные системы, в которых зависимости элементов матрицы $A \in \boldsymbol{A}$ и компонентов вектора $b \in \boldsymbol{b}$ от параметров $p_1, p_2, ..., p_k$ представляют собой линейные или рациональные функции. В данной работе на зависимости (2) мы не накладываем никаких ограничений, кроме непрерывности.

Для решения задачи внутреннего оценивания множества $\Xi_p\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\right)$ будет предложено два подхода. Во-первых, описывается алгоритм, основанный на адаптивном дроблении параметров и вычислении внутренних оценок на основе формального подхода. Во-вторых, используется так называемый «центровой» подход, суть которого состоит в построении бруса, содержащегося во множестве решений, вокруг *a priori* известной точки-центра из этого множества. Найденная таким образом внутренняя оценка не единственна. В целях наилучшего исчерпывания множества решений ИСЛАУ со связями (получения его наиболее «представительной» оценки) в работе предлагается находить объединение брусов, построенных вокруг нескольких центровых точек. Заметим, что применение последнего подхода возможно только для ИСЛАУ с интервальной правой частью, поэтому предложена модификация «центрового» подхода применительно к системам со связями, правая часть которых точечная. В работе представлены результаты апробации разработанных алгоритмов на тестовых примерах.

Практический пример

В качестве практического примера описанной выше постановки задачи внутреннего оценивания ИСЛАУ со связями рассмотрим синтез восьмизвенного рычажного механизма (рис. 1).

Любой рычажный механизм может быть представлен в виде механической цепи последовательно соединенных диад, т. е. простейших рычажных систем, состоящих из двух рычагов (рис. 2). Каждая диада описывается парой уравнений, линейных относительно скоростей точек, в которых расположены шарниры механизма.

Рис. 1. Структурная схема рычажного механизма

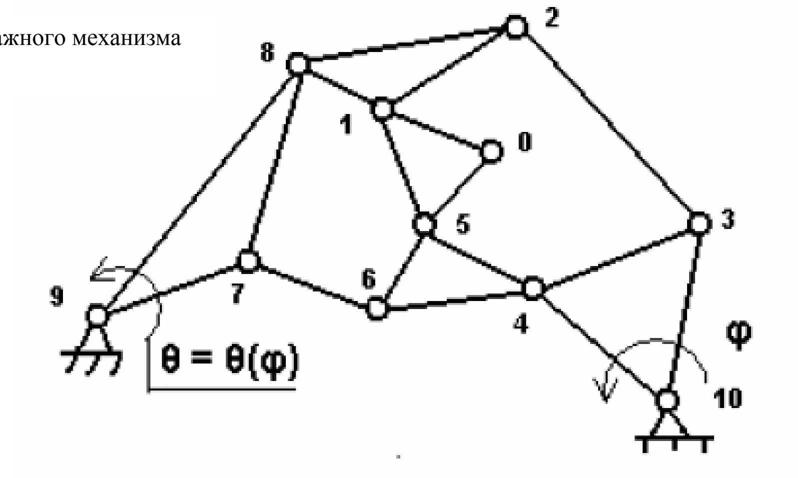
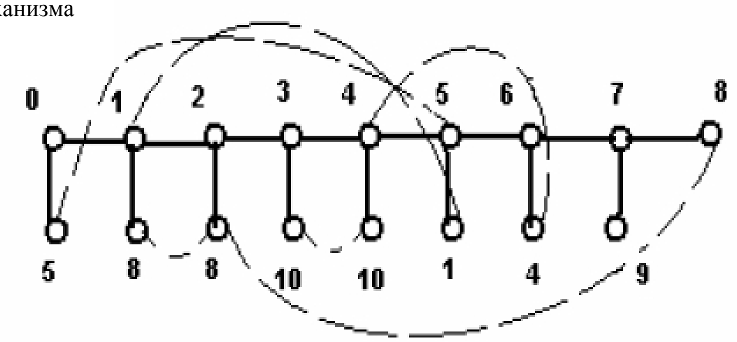


Рис. 2. Схема соединения диад механизма



В рассматриваемом примере механизм образуется из восьми диад, поэтому система уравнений состоит из восьми пар уравнений, соответствующих каждой диаде:

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix} x'_7 \\ y'_7 \end{pmatrix} = J1 \cdot \begin{pmatrix} x'_8 \\ y'_8 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x'_6 \\ y'_6 \end{pmatrix} = J2 \cdot \begin{pmatrix} x'_7 \\ y'_7 \end{pmatrix} + J3 \cdot \begin{pmatrix} x'_4 \\ y'_4 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x'_5 \\ y'_5 \end{pmatrix} = J4 \cdot \begin{pmatrix} x'_6 \\ y'_6 \end{pmatrix} + J5 \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x'_4 \\ y'_4 \end{pmatrix} = J6 \cdot \begin{pmatrix} x'_5 \\ y'_5 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} = J7 \cdot \begin{pmatrix} x'_4 \\ y'_4 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = J8 \cdot \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix} + J9 \cdot \begin{pmatrix} x'_8 \\ y'_8 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = J10 \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} + J11 \cdot \begin{pmatrix} x'_8 \\ y'_8 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = J12 \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} + J13 \cdot \begin{pmatrix} x'_5 \\ y'_5 \end{pmatrix}.
\end{cases}$$

Здесь $\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix}$ – проекции скоростей i-й точки диады в выбранной декартовой системе координат $(i = 0,1,...,8)$; $\boldsymbol{jk}$ – матрица передаточной функции диады $(k = 1,...,13)$. Скорости x_0', y_0' считаются известными.

Элементы каждой матрицы передаточной функции, входящей в векторное уравнение, зависят от двух параметров. Например,

$$J2 = \begin{pmatrix} p_1 & -\dfrac{p_1(p_1+1)}{p_2} \\ p_2 & -p_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Параметры p_1, p_2 принимают значения из интервалов $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ соответственно. Данные интервалы определяются исходя из условий работоспособности механизма.

Таким образом, имеем интервальную систему линейных уравнений, элементы матрицы которой зависят от параметров, принимающих значения из заданных интервалов.

Адаптивное дробление параметров и вычисление внутренних оценок на основе формального подхода

При решении поставленной задачи мы попытаемся использовать формально-алгебраический подход [12; 13]. Формальное решение интервальной системы уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ – это интервальный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, обращающий ее в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики (в качестве которой может выступать либо классическая интервальная арифметика $\mathbb{IR}$, либо полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$, либо какая-то другая интервальная алгебраическая система). Более подробное описание интервальных арифметик можно найти в [12; 14; 15].

Интервал $[x, y] \in \mathbb{IR}$, для которого $x \le y$, называется правильным. Пары вещественных чисел $[x, y] \in \mathbb{KR}$, не обязательно связанные соотношением $x \le y$, являются элементами полной интервальной арифметики $\mathbb{KR}$. Интервал $[x, y] \in \mathbb{KR}$, для которого $x > y$, называется неправильным. Операция дуализации $\operatorname{dual}[x, y] = [y, x]$ меняет местами концы интервала, переводя правильный интервал в неправильный и наоборот.

Нахождение внутренней оценки множества решений ИСЛАУ можно свести к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений, о чем свидетельствует следующий результат [12].

Теорема. Если правильный интервальный вектор $\boldsymbol{x}$ есть формальное решение уравнения

$$(\operatorname{dual}\boldsymbol{A})x = \boldsymbol{b}, \tag{4}$$

то $\boldsymbol{x}$ является внутренней интервальной оценкой объединенного множества решений системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$.

Таким образом, формальный подход позволяет свести задачу внутреннего интервального оценивания множества решений ИСЛАУ к задаче решения уравнения в дуализациях (4), т. е. к задаче численного анализа.

В качестве эффективного численного метода нахождения формальных решений интервальных систем уравнений можно использовать субдифференциальный метод Ньютона [12].

При нахождении формальных решений описанным выше способом не учитываются связи, наложенные на параметры системы. Поэтому полученные внутренние оценки множества решений ИСЛАУ могут содержать решения, как удовлетворяющие соотношениям (2), так и не удовлетворяющие им. Таким образом, наличие ограничений на параметры системы значительно усложняет задачу внутреннего оценивания ее множества решений.

Если элементы матрицы системы зависят от параметров, принимающих значения из интервалов достаточно малой ширины, то формальное решение соответствующей интервальной системы без связей не будет сильно отличаться от внутренней оценки ее множества решений с учетом имеющихся ограничений на параметры. Причем это отличие будет тем меньше, чем меньше ширина интервалов изменения параметров.

Следовательно, для внутреннего оценивания множества решений $\Xi_p(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ ИСЛАУ (3) можно применить адаптивное дробление интервальных параметров системы уравнений [1; 16] (или регулярное покрытие множества параметров [17]) и нахождение формальных решений полученных при этом систем-потомков.

Будем дробить интервалы параметров на подынтервалы ненулевой ширины, в объединении дающие исходные дробимые интервалы, таким образом, чтобы получающиеся системы-потомки соответствовали связям, накладываемым на систему. Для этого в интервальном векторе параметров $\boldsymbol{p}$ выбираем элемент $\boldsymbol{p}_m$, имеющий наибольшую ширину. Порождаем два интервальных вектора-потомка $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$. Вектор $\boldsymbol{p}'$ получается из $\boldsymbol{p}$ заменой элемента $\boldsymbol{p}_m$ на $\left[\underline{\boldsymbol{p}}_m, \operatorname{mid} \boldsymbol{p}_m\right]$. Вектор $\boldsymbol{p}''$ получается из $\boldsymbol{p}$ заменой элемента $\boldsymbol{p}_m$ на $\left[\operatorname{mid} \boldsymbol{p}_m, \overline{\boldsymbol{p}}_m\right]$.

Процедуру дробления повторяем по отношению к полученным ранее векторам-потомкам. В процессе дробления организуем список $\mathcal{L}1$, в котором храним интервальные векторы параметров, полученных при дроблении. Процесс дробления продолжаем до тех пор, пока ширина интервальных параметров всех систем-потомков, находящихся в списке $\mathcal{L}1$, не станет меньше некоторой пороговой константы $\varepsilon > 0$.

Если компоненты вектора-потомка $\boldsymbol{p}'$ имеют ширину, меньшую ε, то находим правильное формальное решение $\boldsymbol{x}'$, если оно существует, интервальной системы $(\operatorname{dual}\boldsymbol{A}')x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A}' = \{A(p) \mid p \in \boldsymbol{p}'\}$.

Полученные таким образом правильные формальные решения систем-потомков храним в списке $\mathcal{L}2$. На начальном этапе работы алгоритма число записей в списке $\mathcal{L}2$ может оказаться небольшим, т. е. для большинства систем-потомков, полученных при дроблении параметров, не будут найдены правильные формальные решения. Тем не менее при уменьшении пороговой константы ε и продолжении описанного выше процесса дробления формальные решения вновь полученных систем-потомков будут все чаще оказываться правильными, поскольку в пределе при уменьшении ширины интервальных элементов матрицы до нуля (т. е. для интервальных линейных систем уравнений с точечной матрицей и интервальной правой частью) формальные решения всегда существуют и правильны.

В качестве искомой внутренней оценки множества $\Xi_p(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ решений интервальной системы (3) можно взять объединение формальных решений, содержащихся в списке $\mathcal{L}2$. В случае большого количества записей в списке $\mathcal{L}2$ можно попытаться найти на их основе некоторое меньшее число непересекающихся брусов (или множеств другой формы), имеющих по возможности наибольшие размеры и принадлежащих объединению полученных формальных решений. Однако поиск такого рода внутренних оценок представляет собой нетривиальную задачу, которую мы не рассматриваем в рамках данной работы. Эта задача может стать предметом дальнейших исследований.

Опишем теперь вычислительную схему алгоритма.

Шаг 1. Помещаем в рабочий список $\mathcal{L}1$ в качестве первой записи вектор $\boldsymbol{p}$ параметров интервальной системы. Присваиваем $l := 1$.

Шаг 2. Если l больше длины списка $\mathcal{L}1$, то заканчиваем работу алгоритма. В противном случае извлекаем l-ю запись из списка $\mathcal{L}1$. Обозначим этот интервал через $\boldsymbol{r}$. Найдем компоненту $\boldsymbol{r}_m$ вектора $\boldsymbol{r}$, имеющую наибольшую ширину. Присваиваем $w := \max_{1 \le i \le k} \operatorname{wid} \boldsymbol{r}_i$.

Шаг 3. Если $w \ge \varepsilon$, то порождаем два интервальных вектора-потомка $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ так, как описано выше. Заносим $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ в список $\mathcal{L}1$. Из списка $\mathcal{L}1$ исключаем l-ю запись и переходим на шаг 2.

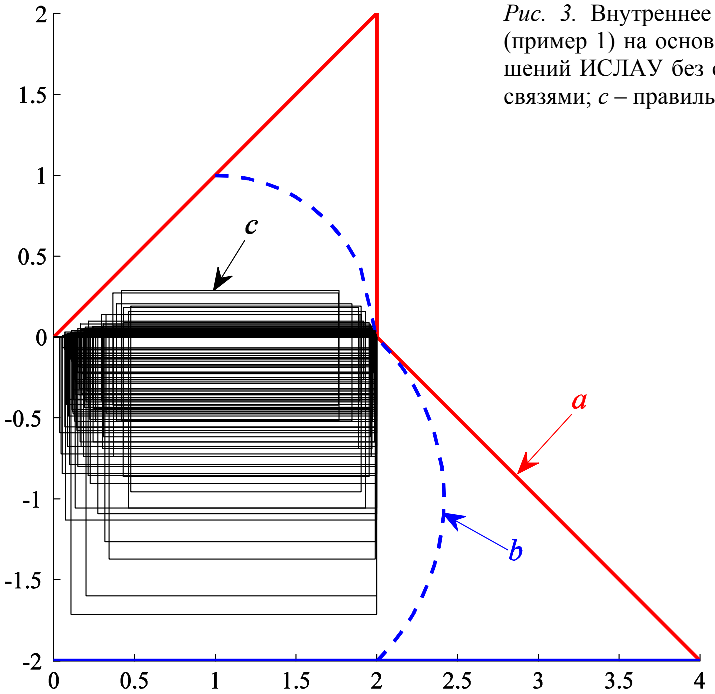


Рис. 3. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (пример 1) на основе формального подхода: *a* – множество решений ИСЛАУ без связей; *b* – множество решений ИСЛАУ со связями; *c* – правильные формальные решения

Шаг 4. Если $w < \varepsilon$, то находим формальное решение $\boldsymbol{x}$ интервальной системы $(\mathrm{dual}\,\boldsymbol{A}')x = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{A}' = \{A(p) \mid p \in \boldsymbol{p}'\}$. Если полученное решение правильное, то заносим его в список $\mathcal{L}2$. Присваиваем $l := l + 1$. и переходим на шаг 2.

Пример 1. Рассмотрим интервальную симметричную систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $p_1 = 1$, $p_2 \in [0,1]$, $p_3 \in [-4,-1]$, $\boldsymbol{b}_i = [0,2]$, $i = 1,2$.

Г. Алефельд, В. Крейнович и Г. Майер в [2] показали, что множество решений интервальной симметричной линейной системы порядка n в каждом ортанте пространства $\mathbb{R}^n$ может быть представлено как пересечение множества решений системы без связей и некоторых множеств, имеющих границами поверхности второго порядка.

Для рассматриваемого примера множество решений $\Xi(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ системы (5) без связей в квадранте $O_1 = \{(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ описывается неравенствами

$$0 \leq x_1 \leq 2,\quad 0 \leq x_2 \leq x_1,$$

в квадранте $O_4 = \{(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0\}$ – неравенствами

$$-2 \leq x_2 \leq 0,\quad 0 \leq x_1 \leq 2 - x_2.$$

Для описания множества $\Xi_p(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ решений симметричной системы (5) требуются еще два неравенства:

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1;\quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 2.$$

На рис. 3 изображены множества решений интервальной системы (5) без связей и с учетом заданных ограничений на параметры. Для решения задачи внутреннего оценивания множества решений системы (5) был применен алгоритм адаптивного дробления параметров с использованием формального подхода. В результате работы алгоритма при заданной пороговой константе $\varepsilon = 0,05$ были получены 397 правильных формальных решений, некоторые из которых изображены на рис. 3.

Адаптивное дробление параметров и вычисление внутренних оценок на основе «центрового» подхода

«Центровой» подход для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ состоит в следующем [18]. Сначала ищется некоторая точка $t \in \mathbb{R}^m$, принадлежащая множеству решений интервальной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ со связями, т. е. $t \in \Xi_C(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Затем, используя координаты найденной точки, по специальным формулам вычисляется брус $\boldsymbol{U} = t + \rho\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e} = ([-1,1], ..., [-1,1])^T$ с центром в точке t, содержащийся во множестве решений $\Xi_C(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Размер ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ можно вычислить по формуле [18]:

$$\rho = \min_{1 \le i \le n} \max_{A \in \boldsymbol{A}} \left\{ \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|} \right\}, \tag{6}$$

причем максимумы по $A \in \boldsymbol{A}$ для всех $i \in \{1, 2, ..., n\}$ находятся с учетом ограничений (2).

Таким образом, при построении внутренней интервальной оценки объединенного множества решений ИСЛАУ со связями необходимо решить для каждого $i \in \{1, 2, ..., n\}$ задачу условной оптимизации:

максимизировать функцию
$$\Phi(a_{i1}, ..., a_{in}) = \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j \right|}{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|}$$

при условиях
$$f_\nu(a_{11}, ..., a_{nm}) = 0, \quad a_{ij} \in \boldsymbol{a}_{ij},$$
$$j = 1, 2, ..., m, \quad \nu = 1, 2, ..., l.$$

Для интервальной линейной системы (3), элементы матрицы которой зависят от параметров $p_i \in \boldsymbol{p}_i$, $i = 1, ..., k$, описанная выше оптимизационная задача примет следующий вид:

максимизировать функцию
$$\Phi(p) = \frac{\operatorname{rad} \boldsymbol{b}_i - \left| \operatorname{mid} \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(p) t_j \right|}{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}(p)|}$$

при условиях
$$p \in \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_k).$$

Для решения задачи условной оптимизации используем метод проекции градиента [19]. На каждой итерации находится точка

$$p^{(r+1)} := \Pr\left(p^{(r)} + \gamma^{(r)} \nabla\Phi\left(p^{(r)}\right)\right), \quad r = 0, 1, 2, ...,$$

где $\nabla\Phi\left(p^{(r)}\right)$ – градиент целевой функции; $\gamma^{(r)} \in \mathbb{R}$ – длина шага на r-й итерации; $\Pr\left(p^{(r)} + \gamma^{(r)} \nabla\Phi\left(p^{(r)}\right)\right)$ – проекция точки $p^{(r)} + \gamma^{(r)} \nabla\Phi\left(p^{(r)}\right)$ на множество допустимых значений, определяемое заданными ограничениями.

В качестве центровой точки естественно взять решение точечной системы $A(\operatorname{mid} \boldsymbol{p})x = \operatorname{mid} \boldsymbol{b}$. Очевидно, данное решение t принадлежит множеству $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

С целью уточнения внутренней оценки множества $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ имеет смысл выбор не одной, а нескольких центровых точек и объединение построенных вокруг них интервальных оценок. Для нахождения новых центровых точек можно использовать описанный выше алгоритм

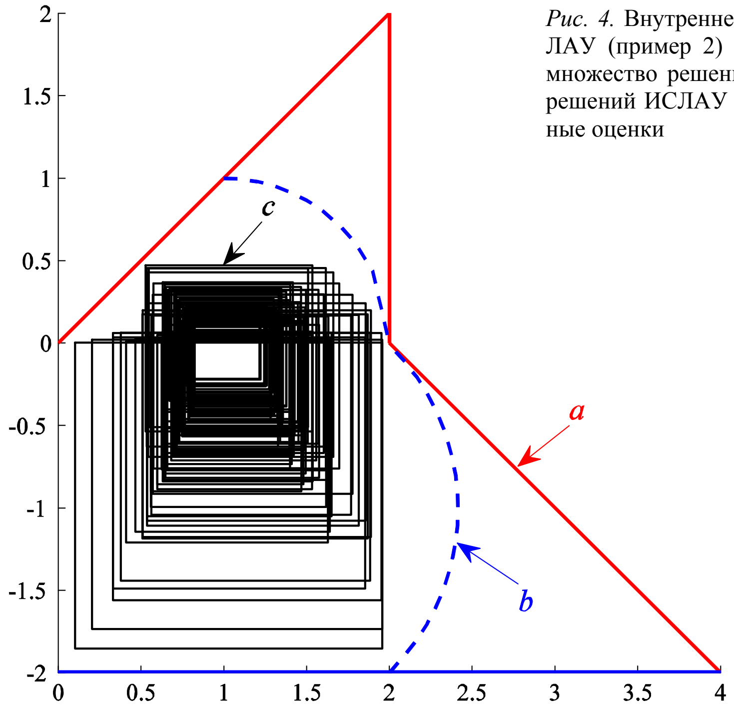


Рис. 4. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (пример 2) на основе «центрового» подхода: *a* – множество решений ИСЛАУ без связей; *b* – множество решений ИСЛАУ со связями; *c* – внутренние интервальные оценки

адаптивного дробления параметров ИСЛАУ с учетом наложенных на нее связей. В результате процедуры дробления параметров системы (3) порождаем два интервальных вектора-потомка $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$. Строим внутренние интервальные оценки вокруг точек $\boldsymbol{t}'$ и $\boldsymbol{t}''$, являющихся решениями точечных систем $A(\operatorname{mid}\boldsymbol{p}')x = \operatorname{mid}\boldsymbol{b}$ и $A(\operatorname{mid}\boldsymbol{p}'')x = \operatorname{mid}\boldsymbol{b}$ соответственно. В списке $\mathcal{L}$ храним найденные интервальные оценки множеств решений систем-потомков и их интервальные векторы параметров. Процесс дробления продолжаем до тех пор, пока ширина интервальных параметров всех систем-потомков, находящихся в списке $\mathcal{L}$, не станет меньше некоторой пороговой константы $\varepsilon > 0$.

Искомой внутренней оценкой множества решений интервальной системы (3) служит объединение интервальных решений, содержащихся в списке $\mathcal{L}$.

Пример 2. Для решения задачи внутреннего оценивания множества решений интервальной симметричной линейной системы, описанной в примере 1, применили алгоритм адаптивного дробления параметров, на каждом шаге которого для систем-потомков находили внутренние оценки «центровым» методом.

На рис. 4 изображены множества решений интервальной системы (5) без связей и с учетом заданных ограничений на параметры. В результате работы алгоритма при заданной пороговой константе $\varepsilon = 0{,}05$ были получены 410 внутренних оценок, некоторые из которых изображены на рис. 4.

Модификация «центрового» подхода

Если правая часть ИСЛАУ (3) со связями не является интервальной, то воспользоваться формулой (6) для вычисления размера ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ не представляется возможным, поскольку $\rho = 0$ при $\operatorname{rad}\boldsymbol{b}_i = 0$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Предлагается следующая модификация «центрового» подхода применительно к системам со связями, правая часть которых точечная.

Сначала найдем координаты центровой точки $t \in \mathbb{R}^n$, принадлежащей множеству $\Xi_p(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ решений интервальной системы со связями. Напомним, что компоненты a_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ матрицы системы зависят от параметров $p=(p_1,\ldots,p_k)$, где $p \in \boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k)$. Поэтому в качестве центровой точки можно взять решение $t \in \mathbb{R}^m$ точечной системы $A(\operatorname{mid}\boldsymbol{p})x=b$, положив параметры системы равными серединам соответствующих интервалов.

Далее решим задачу условной максимизации функции:

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2}}\min_{1\le i\le k} d_i(p),$$

где

$$d_i(p)=\frac{\left|b_i-\sum_{j=1}^m a_{ij}(p)t_j\right|}{\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2(p)\right)^{1/2}}, \tag{7}$$

при условии $p \in \boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k)$.

Поясним суть алгоритма на примере ИСЛАУ с интервальной $(2\times m)$-матрицей, элементы которой зависят от параметров $p=(p_1,\ldots,p_k)$. Если $t\in\Xi_p(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ – центровая точка, то величины $d_i(p)$, $i=1,2$, определяемые соотношениями (7), равны расстояниям от точки t до пары плоскостей, описываемых уравнениями системы (рис. 5). Далее решим две задачи условной максимизации функции

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2}}\min_{1\le i\le k} d_i(p)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left|d_1(p)+d_2(p)\right|-\left|d_1(p)-d_2(p)\right|\right)$$

при двух вариантах условий:

1) $b_1-\sum_{j=1}^m a_{ij}(p)t_j\le 0,\quad b_2-\sum_{j=1}^m a_{2j}(p)t_j\le 0,\quad p\in\boldsymbol{p};$

2) $b_1-\sum_{j=1}^m a_{ij}(p)t_j\ge 0,\quad b_2-\sum_{j=1}^m a_{2j}(p)t_j\ge 0,\quad p\in\boldsymbol{p}.$

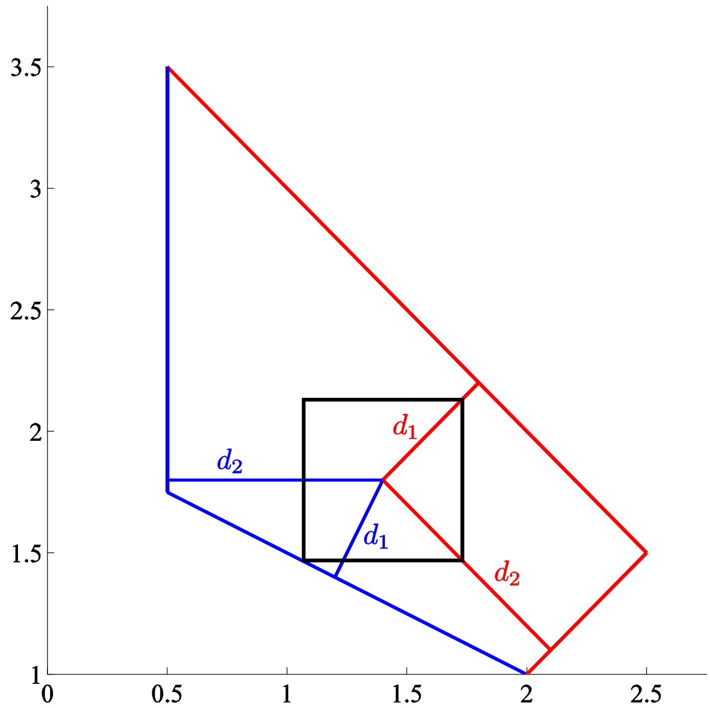


Рис. 5. Геометрический смысл целевой функции $\Phi(p)$

Значение функции $\Phi(p)$ равно минимуму из расстояний $d_1(p)$ и $d_2(p)$, деленному на $\sqrt{2}$. В результате решения задач условной оптимизации получим два максимальных значения Φ_1 и Φ_2 целевой функции. В качестве размера ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ возьмем минимальное из этих двух значений, т. е. $\rho = \min\{\Phi_1, \Phi_2\}$.

Можно гарантированно утверждать, что брус $\boldsymbol{U} = t + \rho\boldsymbol{e}$ принадлежит объединенному множеству решений ИСЛАУ $\boldsymbol{A}x = b$ без учета наложенных связей, поскольку будет вписан во все ограничивающие данное множество гиперплоскости. Однако множество решений ИСЛАУ со связями $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ имеет более сложную структуру. Например, когда на элементы матрицы ИСЛАУ наложены аффинные связи, множество решений системы является так называемым полуалгебраическим множеством [16]. Поэтому некоторые точки бруса $\boldsymbol{U}$ могут не принадлежать множеству решений ИСЛАУ со связями.

Если некоторое свойство выполняется лишь для некоторых точек бруса, необязательно для всех, то оно называется *слабым* [12]. Следовательно, брус $\boldsymbol{U}$ является, в общем случае, слабой внутренней оценкой.

Как было отмечено выше, имеет смысл находить внутренние оценки $\boldsymbol{U} = t + \rho\boldsymbol{e}$ не для одной, а нескольких центровых точек. Полученные в результате работы алгоритма брусы будем хранить в списке $\mathcal{L}$.

Выбор нового центра t выполняем следующим образом. Для очередного бруса из списка $\mathcal{L}$ на каждой его грани пытаемся найти точку, которая:

1) принадлежит множеству $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, т. е. существует вектор $p \in \boldsymbol{p}$ такой, что $A(p)x = b$;

2) не принадлежит внутренности какой-либо интервальной оценки, находящейся в списке $\mathcal{L}$.

Вокруг найденных центровых точек строим внутренние оценки $\boldsymbol{U}$ и заносим их в список $\mathcal{L}$, если размер ρ внутренних оценок $\boldsymbol{U}$ не меньше некоторой заданной величины $\delta > 0$. Далее выбираем следующий по порядку брус из списка и повторяем описанную процедуру.

Продемонстрируем работу алгоритма на следующих примерах.

Пример 3. Рассмотрим интервальную симметричную систему линейных уравнений с точечной правой частью:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $p_1 = 1$, $p_2 \in [1,2]$, $p_3 \in [-1,0]$, $b_1 = 4$, $b_2 = 1$.

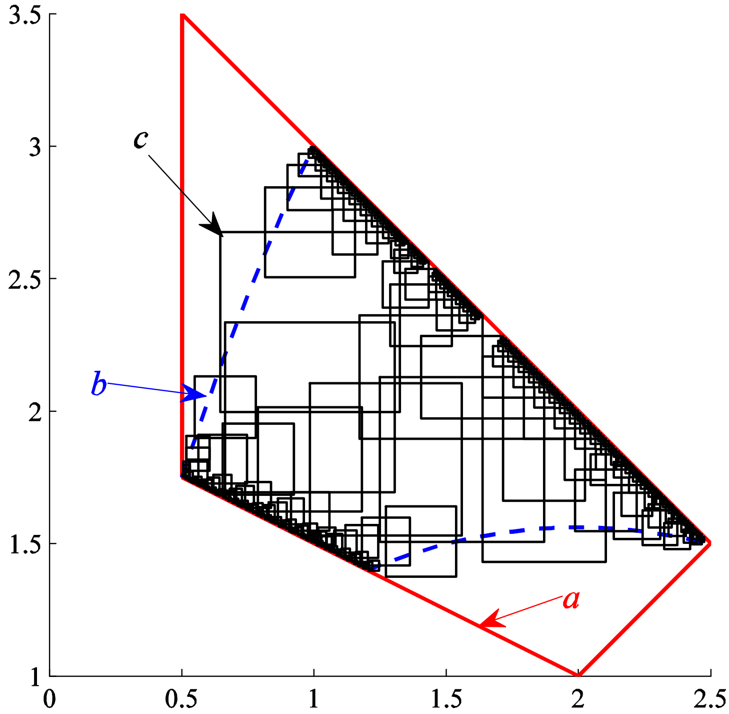
Система уравнений с той же матрицей $\boldsymbol{A}$, но интервальной правой частью $\boldsymbol{b} = (4, [1,2])^T$ рассмотрена в [2].

Множество решений $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ симметричной ИСЛАУ (8) описывается системой неравенств:

$$\begin{aligned}
&-4 + x_1 + x_2 \le 0; \\
&4 - x_1 - 2x_2 \le 0; \\
&-1 + x_1 - x_2 \le 0; \\
&1 - 2x_1 \le 0; \\
&x_1^2 - 4x_1 + x_2 \le 0; \\
&x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + x_2 \le 0.
\end{aligned}$$

Неравенства получены на основе метода, основанного на процессе исключения Фурье – Моцкина [2]. Первые четыре неравенства характеризуют множество решений $\Xi_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ ИСЛАУ (8) без учета связей.

Рис. 6. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (пример 3) на основе модифицированного «центрового» подхода: *a* – множество решений ИСЛАУ без связей; *b* – множество решений ИСЛАУ со связями; *c* – внутренние интервальные оценки



На рис. 6 представлены множества решений интервальной системы (8) без связей и с учетом наложенных на нее связей. В результате работы алгоритма при заданной константе $\delta = 0{,}005$ были получены 306 внутренних оценок, которые изображены на рис. 6.

Пример 4. Рассмотрим интервальную систему линейных уравнений, элементы матрицы которой зависят нелинейно от параметров:

$$\begin{pmatrix} p_1 & \dfrac{p_1+1}{p_2} \\ p_2 & p_1+1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $p_1 \in [4,5]$, $p_2 \in [3,5]$, $b_1 = 5$, $b_2 = 5$.

Множество решений ИСЛАУ (9) со связями изображено на рис. 7 в виде множества решений точечных систем $A(p)x = b$, где $p \in \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$, $p_i = \underline{\boldsymbol{p}}_i + \dfrac{j}{N_i}\operatorname{wid}\boldsymbol{p}_i$, $j = 0,1,\ldots,N_i$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$.

В результате работы алгоритма, основанного на предложенной модификации «центрового» подхода, при заданной константе $\delta = 0{,}005$ были получены 159 внутренних оценок, которые изображены на рис. 7.

Пример 5. На основе предложенного выше алгоритма решим задачу внутреннего оценивания множества решений следующей ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{p_1+p_2}{p_3} & p_2+p_4 \\ p_3+1 & p_3 \cdot p_5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $b = (-3,-3)^T$ и элементы матрицы системы зависят от параметров $p_1,\ldots,p_5$.

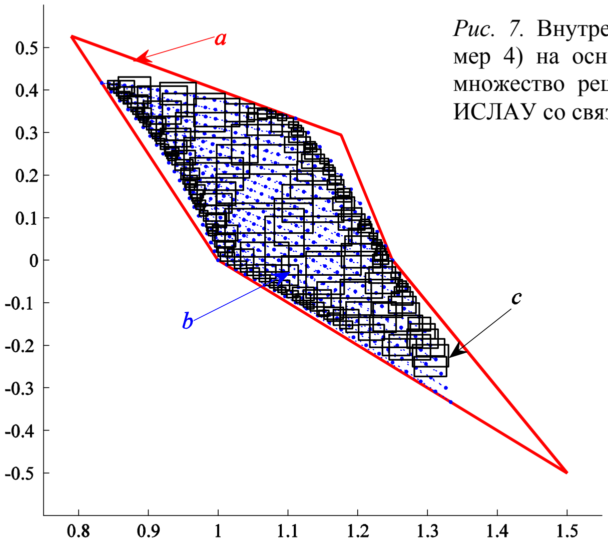


Рис. 7. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (пример 4) на основе модифицированного «центрового» подхода: *a* – множество решений ИСЛАУ без связей; *b* – множество решений ИСЛАУ со связями; *c* – внутренние интервальные оценки

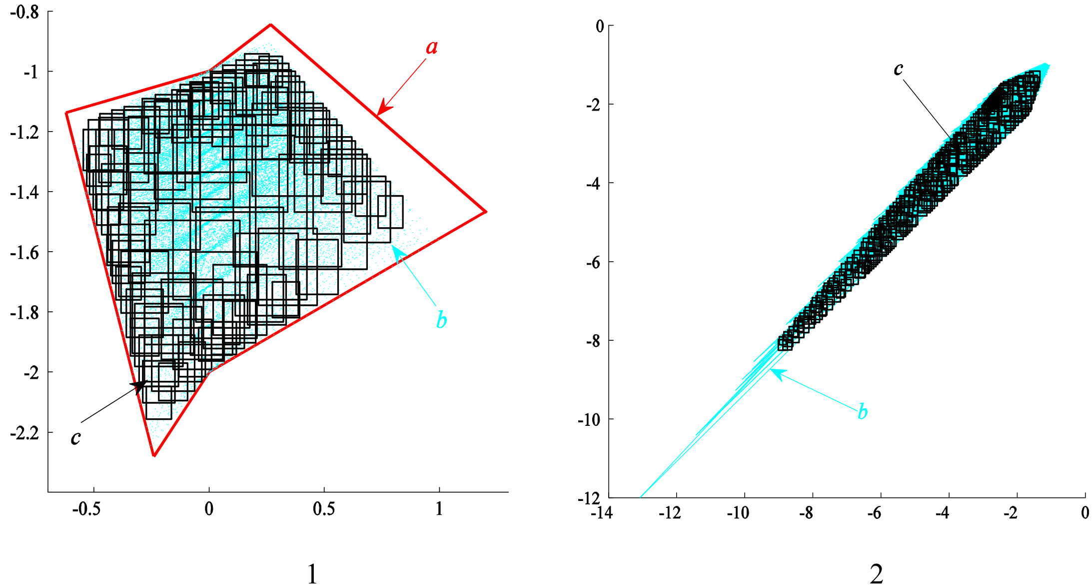


Рис. 8. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ (пример 5), элементы матрицы которой зависят от параметров, принимающих значения из области: *1* – *P*1; *2* – *P*2 (*a* – множество решений ИСЛАУ без связей; *b* – множество решений ИСЛАУ со связями; *c* – внутренние интервальные оценки)

Зададим две области изменения параметров системы:

1) $P1=\left\{(p_1,...,p_5)^T\in\mathbb{R}^5 \,\middle|\, p_1\in[1,2],\ p_2\in[1,\ 1{,}5],\ p_3\in[2,3],\ p_4\in[0{,}5,\ 1{,}5],\ p_5\in[0{,}5,\ 1{,}5]\right\}$,

2) $P2=\left\{(p_1,...,p_5)^T\in\mathbb{R}^5 \,\middle|\, p_1\in[2,3],\ p_2\in[3,4],\ p_3\in[2,3],\ p_4\in[0{,}5,\ 1{,}5],\ p_5\in[-1{,}5,\ -0{,}5]\right\}$.

В первом случае матрица ИСЛАУ (10) без связей является неособенной. На рис. 8, *1* представлены множества решений данной системы без связей и с учетом наложенных на нее связей, а также 90 внутренних оценок этого множества, полученные в результате работы алгоритма при заданной константе $\delta=0{,}005$.

Во втором случае матрица системы (10) без учета связей особенная. На рис. 8, *2* изображены множество решений ИСЛАУ со связями и 219 внутренних оценок, полученных в результате работы алгоритма при заданной константе $\delta = 0{,}1$.

Заключение

Для нахождения внутренней оценки множества решений ИСЛАУ со связями были разработаны и апробированы на тестовых примерах алгоритмы адаптивного дробления параметров с использованием формального и «центрового» подходов. Предложена модификация «центрового» подхода для внутреннего оценивания множества решений ИСЛАУ, элементы матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным. Реализован соответствующий алгоритм и апробирован на тестовых примерах. В качестве практического приложения алгоритма рассмотрена задача синтеза рычажного механизма.

Список литературы

1. *Шарый С. П.* Решение интервальных линейных систем со связями // Сибирский журнал вычислительной математики. 2004. Т. 7, № 4. С. 363–376.
2. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
3. *Popova E. D.* Explicit Description of AE Solution Sets for Parametric Linear Systems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2012. Vol. 33. P. 1172–1189.
4. *Dessombz O.* Analysis of Mechanical Systems Using Interval Computations Applied to Finite Element Methods // J. of Sound and Vibration. 2001. Vol. 239. No. 5. P. 949–968.
5. *Jansson C.* Interval Linear Systems with Symmetric, Skew-Symmetric Matrices and Dependencies in the Right Hand Side // Computing. 1991. Vol. 46. P. 265–274.
6. *Muhanna R., Mullen R.* Uncertainty in Mechanical Problems – Interval-Based Approach // J. Eng. Mech. 2001. Vol. 127. P. 557–566.
7. *Kolev L.* A Method for Outer Interval Solution of Linear Parametric Systems // Reliable Computing. 2004. Vol. 10. No. 3. P. 227–239.
8. *Popova E. D.* Solving Linear Systems whose Input Data are Rational Functions of Interval Parameters // Preprint No. 3/2005. Institute of Mathematics and Informatics, BAS. Sofia, 2005.
9. *Popova E., Krämer W.* Inner and Outer Bounds for the Solution Set of Parametric Linear Systems // J. of Computational and Applied Mathematics. 2007. Vol. 199. P. 310–316.
10. *Rump S.* Verification Methods for Dense and Sparse Systems of Equations // Topics in Validated Numerics / Ed. by J. Herzberger. Amsterdam: Elsevier, 1994. P. 63–135.
11. *Skalna I.* A Method for Outer Interval Solution of Systems of Linear Equations Depending Linearly on Interval Parameters // Reliable Computing. 2006. Vol. 12. No. 2. P. 107–120.
12. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. URL: http://www-sbras.nsc.ru/ interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf
13. *Shary S. P.* Algebraic Approach to the Interval Linear Static Identification, Tolerance and Control Problems, or One More Application of Kaucher Arithmetic // Reliable Computing. 1996. Vol. 2. No. 1. P. 3–33.
14. *Alefeld G., Kreinovich V., Mayer G.* On Symmetric Solution Sets // Computing Supplementum 16 / Ed. by J. Herzberger. Wien; N. Y.: Springer, 2003. P. 1–22.
15. *Kaucher E.* Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungsund Verbandsstrukturen // Grundlagen der Computer-Arithmetic / Eds. R. Albrecht, U. Kulisch. Wien: Springer, 1977. P. 65–79.
16. *Neumaier A.* The Enclosure Solutions of Parameter-Dependent Systems of Equations // Reliability in Computing. 1988. Vol. 19. P. 269–286.
17. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск, 2007. 468 с.

18. *Шарый С. П.* Еще раз о внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, спец. вып. С. 146–160.
19. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 551 с.

Материал поступил в редколлегию 13.10.2012

D. Yu. Lyudvin

INNER ESTIMATION OF SOLUTION SETS OF TIED INTERVAL SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

This paper is devoted to the problem of inner estimation of united solution set of interval system of linear equations whose parameters are subject to additional ties. Adaptive partitioning of system's parameters and methods of inner estimation based on formal and «center» approaches are proposed. The modification of «center» approach for inner estimation of solution set of tied interval linear system of equations with noninterval right-hand sides is developed. Results of numerical experiments are given.

Keywords: interval linear systems, solution set, inner estimation, formal algebraic approach, «center» approach.