УДК 519.174.2
DOI 10.25205/1818-7900-2017-15-4-32-42

А. Е. Малых [1, 2], **А. Л. Пережогин** [1, 3]

[1] *Новосибирский государственный университет*
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия

[2] ООО НЦИТ «УНИПРО»
ул. Ляпунова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

[3] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН*
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

awa149@rambler.ru, pereal@math.nsc.ru

КОНСТРУКТИВНЫЙ ПОДХОД К ПЕРЕЧИСЛЕНИЮ СПЕКТРОВ КОДОВ ГРЕЯ В БУЛЕВЫХ КУБАХ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Спектром *n*-разрядного кода Грея называется набор из количеств изменений соответствующей позиции при переходе к следующему кодовому слову. Исследуются множества спектров кодов Грея, порождаемых различными известными конструкциями. Перечислены все спектры 7- и 8-разрядных кодов Грея.

Ключевые слова: код Грея, гамильтонов цикл, булев куб.

Постановка задачи

Булевым *n*-кубом Q_n называется граф, вершинами которого являются двоичные слова длины n и пара вершин соединены ребром, если соответствующие слова различаются ровно в одной позиции, номер этой позиции определяет направление соответствующего ребра.

Гамильтоновым циклом (цепью) в графе называется такой простой цикл (цепь), который содержит все вершины данного графа. Таким образом, гамильтонов цикл в Q_n является циклическим перечислением всех двоичных слов длины n в порядке минимального изменения. Такое перечисление называется кодом Грея (гамильтонову циклу соответствует два кода Грея: обход вершин по циклу в одну сторону и в другую).

Переходная последовательность кода Грея – циклическое слово $t = t_0 t_1 \ldots t_{2^n-1}$, над алфавитом $\{1,...,n\}$ такое, что *i*-е и $(i+1)$-е слова в коде отличаются в позиции t_i, а первое и последнее – в позиции t_{2^n-1}.

Наиболее известным кодом Грея является двоично-отражённый или бинарно-рефлексивный код Грея, который был запатентован Френком Греем в 1953 году для использования в преобразовании аналогового сигнала в цифровой [1]. После публикации обзора Карлы Сэведж [2] комбинаторными кодами Грея стали называть перечисления любых комбинаторных объектов в порядке минимального изменения.

Малых А. Е., Пережогин А. Л. Конструктивный подход к перечислению спектров кодов Грея в булевых кубах малых размерностей // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, № 4. С. 32–42.

Спектром кода Грея в Q_n называется набор $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, где a_i – число рёбер i-го направления в коде Грея. Так, например, двоично-отражённый код Грея имеет спектр $(2,2,4,8,...,2^{n-1})$. Большая разница между числами вхождений рёбер разного направления сужает область применения такого кода, что привело к задаче существования и построения сбалансированных [3–5] и локально сбалансированных [6–10] кодов Грея.

Код Грея со спектром $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, где $a_1 \le ... \le a_n$, называется

- *сбалансированным*, если $a_n - a_1 \le 2$;
- *тотально сбалансированным*, если $a_n = a_1$;
- *экспоненциально сбалансированным*, если существует такое k, что для любого $1 \le i \le n$ $a_i \in \{2^k, 2^{k+1}\}$.

Сбалансированные и тотально сбалансированные коды были впервые построены Бакошем (результат опубликован в монографии [3]) и переоткрыты в [4]. Экспоненциально сбалансированные коды построены в [5]. Эти результаты показывают существование кодов Грея с определенным спектром.

В 4-м томе Д. Кнута «Искусство программирования» [11], в разделе, посвящённом кодам Грея, приведены условия, которым должен удовлетворять спектр $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $a_1 \le ... \le a_n$, любого кода Грея:

1) a_i – чётные положительные;
2) $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2^n$;
3) $\sum_{i=1}^{k} a_i \ge 2^k$.

Набор $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ назовём *допустимым*, если он удовлетворяет этим трём условиям. В [11] в качестве нерешённой исследовательской задачи поставлен вопрос: всякий ли допустимый набор является спектром некоторого кода Грея?

Сложность решения данной задачи перебором кодов Грея иллюстрируется следующей таблицей, в которой указано количество допустимых спектров и кодов Грея для малых размерностей куба:

n	Количество [1] допустимых наборов в Q_n	Количество [2] кодов Грея в Q_n	Количество [3] кодов Грея в Q_n с точностью до автоморфизма
3	1	12	1
4	4	2688	9
5	28	1813091520	237675
6	550	71676427445141767741440	777739016577752714
7	28456	–	
8	4134861	–	
9	1781622569	–	

[1] https://oeis.org/A091969
[2] https://oeis.org/A003042
[3] https://oeis.org/A159344

При перечислении кодов Грея с точностью до автоморфизма куба при $n=4$ [12] и $n=5$ [13] для всех допустимых наборов были найдены коды с таким спектром. В [14] с использованием SAT-решателей были перебраны все 6-мерные коды Грея и получено 550 различных спектров. Уже для следующей размерности такой подход крайне неэффективен, поскольку число кодов Грея растет дважды экспоненциально.

В [15] В. Н. Потаповым была предложена новая конструкция кодов Грея, позволившая доказать теорему, согласно которой существует такое N, что если для всех меньших размерностей любой допустимый набор является спектром некоторого кода, то и для всех больших это утверждение верно. Таким образом, для полного решения задачи нужно уточнение константы N и доказательство базы индукции.

В настоящей статье исследуются известные конструкции кодов Грея на мощность множества порождаемых спектров, и доказано, что при $n = 7$ и 8 любой допустимый набор является спектром некоторого кода Грея.

Известные конструкции кодов Грея

Конструкция Рамраса. Пусть T_n – переходная последовательность n-мерного кода Грея. Пусть T_n' получается из T_n заменой нечетного числа вхождений буквы n на новую букву $n+1$. Тогда $T_n'T_n'$ является переходной последовательностью $(n+1)$-мерного кода Грея [16]. Эта конструкция является обобщением простейшей рекурсивной процедуры построения двоично-отражённого кода Грея [1]. Спектр нового кода Грея легко получается из спектра исходного кода, но полученный спектр удовлетворяет жёсткому ограничению: в нём все a_i, кроме двух, делятся на четыре. Для нашей задачи данная конструкция малоэффективна.

Торическая конструкция. Разложим n-куб Q_n как декартово произведение $Q_k \times Q_{n-k}$. Тогда тор, образованный декартовым произведением гамильтоновых циклов в каждом из подкубов Q_k и Q_{n-k}, является подграфом Q_n. А следовательно, гамильтонов цикл в полученном торе будет гамильтоновым циклом в n-кубе. Подобная конструкция применялась для перечисления кодов Грея [17–19]. В общем виде она была описана и обоснована в [6] для построения локально равномерных кодов Грея. В [7] она была обобщена на случай произведения трех подкубов и циклов. В [6] доказано, что гамильтоновы циклы в торе, использующие круговой обход вершин, обязательно будут периодическими, что накладывает большие ограничения на спектры кодов Грея, порождаемых этой конструкцией. Также для получения спектра нового кода используются не только спектры исходных кодов, но и сами коды, что недалеко нас уводит от полного перечисления кодов. В общем виде конструкция малоэффективна для нашей задачи.

Потоковая конструкция. В [8] предложено следующее обобщение торической конструкции. В одном из подкубов берется гамильтонов цикл, а в другом поток, порождённый сдвигом вершин куба. Тогда круговой обход декартова произведения цикла на поток будет давать гамильтонов цикл в исходном кубе при некоторых ограничениях на поток. Эта конструкция оказалась очень эффективной для построения локально равномерных кодов Грея с параметрами равномерности близкими к оптимальным [8; 9]. В связи с еще более жесткими ограничениями на периодичность, чем у торической, и сложностью вычисления спектра потока эта конструкция оказалась неприменимой для нашей задачи.

Конструкция Бакоша. Эта конструкция была опубликована в [3] и переоткрыта в [4]. С её помощью построены сбалансированные [3; 4] и экспоненциально сбалансированные [5] коды Грея. Она является частным случаем торической конструкции при $k = 2$, со специальным видом обхода тора. Рассмотрим переходную последовательность $t_0 t_1 \dots t_{2^{n-2}-1}$ гамильтонова цикла в Q_{n-2}, и кортеж $\left(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2^{n-2}-1}\right) \in \{2,4\}^{2^{n-2}-1}$. В декартовом произведении $Q_2 \times Q_{n-2}$ четыре копии подкуба Q_{n-2}. В каждой из этих копий строим гамильтонову цепь с переходной последовательностью $t_1 t_2 \dots t_{2^{n-2}-1}$, начинающуюся с нулевой вершины. В одной копии цепь сохраняем, в трёх оставшихся для каждого i, $1 \le i \le 2^{n-2} - 1$, если $\delta_i = 2$, то в двух копиях рёбра, соответствующие t_i, удаляем так, чтобы с помощью рёбер двух новых направлений $n-1$ и n получить общую гамильтонову цепь в этих трёх подкубах. В [3] показано, что такая гамильтонова цепь строится однозначно и соединяется с гамильтоновой цепью в первой копии в гамильтонов цикл в Q_n. Пример цикла, построенного такой конструкцией, на развёртке соответствующего тора показан на рис. 1.

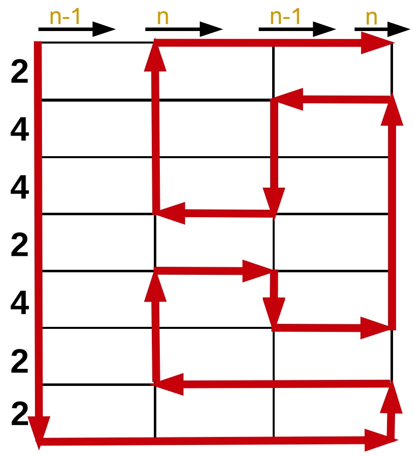

Рис. 1. Конструкция Бакоша

В данной конструкции спектр получаемого кода Грея строится по спектру исходного и не требует перебора самих кодов, что позволяет эффективно получить все спектры, порождаемые этой конструкцией. С ее помощью реализуются сбалансированные и близкие к ним спектры. Выделим два ограничения на получаемые спектры: существует такое i, что

- $a_{i+1} - a_i \le 2$ (это ограничение существенно для больших размерностей куба);
- для любого $j \notin \{i, i+1\}$ существует такое b_j, что $2b_j \le a_j \le 4b_j$, и набор чисел $(b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+2}, \dots, b_n)$ является допустимым.

Конструкция Потапова. В [15] предложена следующая конструкция кодов Грея. Разложим n-куб Q_n как декартово произведение $Q_k \times Q_{n-k}$. Рассмотрим гамильтонов цикл в Q_k. Множество его рёбер разбивается на два совершенных паросочетания P_1 и P_2. Поскольку каждой вершине из Q_k в декартовом произведении $Q_k \times Q_{n-k}$ соответствует $(n-k)$-куб, то каждому ребру e из P_1 можно сопоставить в соответствие пару параллельных $(n-k)$-кубов, то есть один $(n-k+1)$-куб. Возьмём в этом кубе гамильтонову цепь с концами в вершинах ребра e. Тогда объединение гамильтоновых цепей по всем рёбрам из P_1 с рёбрами из P_2 образует гамильтонов цикл в исходном кубе Q_n. Таким образом, спектр нового кода Грея складывается из спектров гамильтоновых цепей в 2^{k-1} кубах размерности $(n-k+1)$ и спектра паросочетания P_2.

Обобщенная конструкция Потапова[1]. В случае, когда два соседних по коду ребра паросочетания P_1 имеют одно направление, то соответствующие $(n-k+1)$-кубы параллельны и вместо двух гамильтоновых цепей можно рассматривать одну в $(n-k+2)$-кубе. Такое обобщение конструкции Потапова позволяет получать больше спектров, но усложняет реализацию, поскольку для нее требуется рассматривать гамильтоновы циклы в Q_k, а не только спектры паросочетаний, составляющих эти циклы.

[1] Предложена В. Н. Потаповым в личной беседе.

Свойства конструкции Потапова

Рассмотрим несколько утверждений о спектрах гамильтоновых циклов, которые можно построить с помощью конструкции Потапова. В [15] доказана следующая лемма.

Лемма 1 [15]. Если любой допустимый набор длиной $n-k+1$ является спектром гамильтонова цикла в Q_{n-k+1} и имеется гамильтонов цикл в Q_k со спектром $(b_1,...,b_k)$, то любой допустимый набор $(b_1,...,b_k,a_{k+1},...,a_n)$ является спектром гамильтонова цикла в Q_n.

Лемма 2. Если любой допустимый набор длиной $n-1$ является спектром гамильтонова цикла в Q_{n-1}, то любой допустимый набор $(2,a_2,...,a_n)$ является спектром гамильтонова цикла в Q_n.

Доказательство. Построим два набора $(b_1,...,b_{n-1})$ и $(c_1,...,c_{n-1})$ следующим образом. Числа b_1 и c_1 – такие чётные числа, что $b_1+c_1=a_2+2$ и $|b_1-c_1|\le 2$. Пусть найдены числа $b_1,...,b_{t-1}$ и $c_1,...,c_{t-1}$. Тогда чётные числа b_t и c_t выбираем так, чтобы были выполнены три условия: $b_t+c_t=a_{t+1}$, $|b_t-c_t|\le 2$ и каждая из сумм $\sum_{i=1}^{t} b_i$ и $\sum_{i=1}^{t} c_i$ была не меньше 2^t. Это можно сделать, поскольку из допустимости набора $(2,a_2,...,a_n)$ справедливо $\sum_{i=2}^{t+1} a_i \ge$ $\ge 2^{t+1}-2$. Тогда наборы $(b_1,...,b_{n-1})$ и $(c_1,...,c_{n-1})$ являются допустимыми и по условию леммы существуют гамильтоновы циклы H_1 и H_2 в Q_{n-1} со спектрами $(b_1,...,b_{n-1})$ и $(c_1,...,c_{n-1})$ соответственно. Применим конструкцию Потапова с параметром $k=2$. В двух подкубах Q_{n-1} берём полученные из H_1 и H_2 гамильтоновы цепи со спектрами $(b_1-1,b_2,...,b_{n-1})$ и $(c_1-1,c_2,...,c_{n-1})$ и добавляем два оставшихся ребра в Q_2. В итоге получим гамильтонов цикл в Q_n со спектром $(2,a_2,...,a_n)$.

Заметим, что конструкция Потапова при $k=2$ совпадает с простейшей рекурсивной конструкцией и, как видно из леммы 2, позволяет строить коды Грея со всеми допустимыми спектрами, начинающимися с двойки.

Лемма 3. Гамильтонов цикл в Q_8 со спектром (32,32,32,32,32,32,32,32) нельзя получить посредством конструкции Потапова.

Доказательство. Поскольку в Q_2 и Q_3 нет паросочетаний, содержащих рёбра всех направлений, то при применении конструкции Потапова для $k\le 3$ в спектре получившегося гамильтонова цикла будет присутствовать число, не превосходящее 4. Рассмотрим $k=4$. В Q_4 существует совершенное паросочетание со спектром (2,2,2,2). Но в любом гамильтоновом цикле, содержащем такое паросочетание, спектр второго совершенного паросочетания обязательно содержит ноль [12]. Но в подкубе Q_5 на ребре e любая гамильтонова цепь с концами в вершинах ребра e имеет не более 15 сонаправленных с e рёбер. Следовательно, у полученного гамильтонова цикла в спектре обязательно будет число, не превосходящее 30. В случае $k=5$ в каждом из 16 подкубов Q_4 на рёбрах совершенного паросочетания в гамильтоновой цепи присутствуют рёбра всех четырех направлений. Но тогда в спектре этой цепи три двойки, что противоречит необходимым условиям на спектр гамильтонова цикла. При $k\ge 6$ подкубов на рёбрах совершенного паросочетания не меньше 32, следовательно, в спектре итогового гамильтонова цикла должно быть число, не меньшее 64.

Аналогично можно показать, что сбалансированные коды Грея в Q_6 и Q_7 также нельзя получить посредством конструкции Потапова. Рассмотрим сбалансированный код Грея в Q_9.

Лемма 4. Посредством конструкции Потапова можно построить гамильтонов цикл в Q_9 со спектром (56,56,56,56,56,58,58,58,58).

Доказательство. Применим конструкцию Потапова при $k=4$. В Q_4 берём гамильтонов цикл с переходной последовательностью

1 2 4 2 3 4 2 4 1 4 3 4 2 3 4 3.

Он состоит из двух совершенных паросочетаний со спектрами (2,2,2,2) и (0,2,2,4) соответственно. На рёбрах первого паросочетания рассматриваем 6-кубы. В них берём гамильтоновы цепи со спектрами

$$\begin{array}{lllllllll}
(27, & 0, & 0, & 0, & 6, & 6, & 8, & 8, & 8)\\
(29, & 0, & 0, & 0, & 8, & 8, & 6, & 6, & 6)\\
(0, & 27, & 0, & 0, & 6, & 6, & 8, & 8, & 8)\\
(0, & 27, & 0, & 0, & 8, & 8, & 6, & 6, & 8)\\
(0, & 0, & 27, & 0, & 6, & 6, & 8, & 8, & 8)\\
(0, & 0, & 27, & 0, & 8, & 8, & 6, & 8, & 6)\\
(0, & 0, & 0, & 25, & 6, & 8, & 8, & 8, & 8)\\
(0, & 0, & 0, & 27, & 8, & 8, & 8, & 6, & 6)
\end{array}$$

Объединяя эти цепи со вторым совершенным паросочетанием, получим искомый гамильтонов цикл.

Теорема 1 [15]. Существует такое натуральное число N, что если для всех меньших размерностей любой допустимый набор является спектром некоторого кода Грея, то для любого $n \geq N$ и любого допустимого набора длины n с помощью конструкции Потапова можно построить гамильтонов цикл в Q_n с данным спектром.

Из леммы 3 следует, что константа N из теоремы 1 не меньше 9. Следовательно, для реализации всех спектров в Q_7 и Q_8 надо использовать другие конструкции. Остаётся открытым вопрос: будет ли константа N больше 9?

Жадная торическая конструкция

Для построения гамильтоновых циклов со спектрами, близкими к спектру двоично-отражённого кода Грея (т. е. сильно несбалансированные спектры) нами предложена следующая конструкция. Она использует тор как в конструкции Бакоша, только обходит его в одном направлении по большому циклу.

Пусть $T = t_0 t_1 t_2 \ldots t_{2^{n-2}-1}$ – переходная последовательность $(n-2)$-разрядного кода Грея, а набор $d = \left(d_0, \ldots, d_{2^{n-2}-1}\right)$ таков, что $d_i \in \{0,1,2,3,4\}$, причём $d_i = 0$ тогда и только тогда, когда $d_{i-1} \geq 3$. Поскольку код Грея циклический, без ограничения общности положим $d_0 \neq 0$, $d_{2^{n-2}-1} \leq 2$. Построим слово T' из слова T по следующим правилам $\left(\text{для} \quad 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1\right)$:

- если $d_i = 1$, то t_i заменяем на слово $t_i\, n-1\; n\; n-1$;
- если $d_i = 2$, то t_i заменяем на слово $t_i n\; n-1\; n$;
- если $d_i = 3$, то $t_i t_{i+1}$ заменяем на слово $t_i t_{i+1} n-1\; t_{i+1} n\; n-1\; t_{i+1} n-1$;
- если $d_i = 4$, то $t_i t_{i+1}$ заменяем на слово $t_i t_{i+1} n\; t_{i+1} n-1\; n\; t_{i+1} n$.

Фрагмент тора с обходом, порождённым такими заменами, показан на рис. 2. Видно, что мы обходим все вершины тора, и для того, чтобы этот обход оказался гамильтоновым циклом, достаточно обеспечить возврат в начальную вершину. Обозначим через k_j количество j в наборе d, $j \in \{0,1,2\}$. Тогда, обход всего тора обеспечивает условие $2k_0 + k_1 + k_2 = 2^{n-2}$, а для возврата в исходную вершину необходимо и достаточно, чтобы все три числа k_0, k_1 и k_2 были одной чётности. Таким образом, при выполнении этих двух условий T' будет переходной последовательностью n-разрядного кода Грея.

По построению, в последовательность T' буква t_i из последовательности T утраивается тогда и только тогда, когда $d_i = 0$. Но в наборе d два нуля рядом стоять не могут. Поэтому, чтобы не перебирать все гамильтоновы циклы в Q_{n-2}, а использовать только спектры, мы будем утраивать только рёбра одного направления. Таким образом, верна следующая лемма.

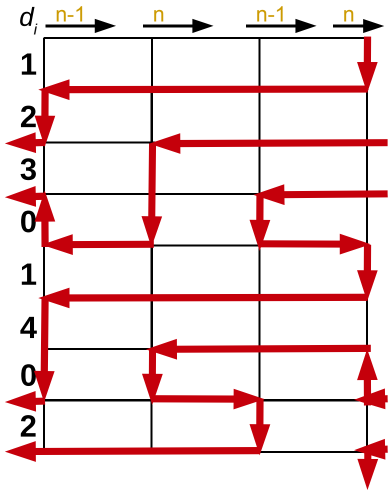

Рис. 2. Жадная торическая конструкция

Лемма 5. Пусть $(a_1,\ldots,a_{n-2})$ – спектр некоторого гамильтонова цикла в Q_{n-2}. Тогда для любых натуральных чисел k_0, k_1, k_2, m_1, m_2, s, удовлетворяющих условиям

- $2k_0+k_1+k_2=2^{n-2}$;
- $k_0+k_1\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$;
- $m_1+m_2=k_0$;
- $1\le s\le n-2$;
- $k_0\le a_s$,

набор $(a_1,\ldots,a_{s-1},2k_0+a_s,a_{s+1},\ldots,a_{n-2},2k_1+k_2+3m_1+m_2,2k_2+k_1+3m_2+m_1)$ является спектром гамильтонова цикла в Q_n.

Спектры кодов Грея в 7-кубе

Сначала были протестированы все конструкции в применении к допустимым наборам длины 7. Напомним, что всего таких наборов 28 456. Торическую в общем виде и потоковую конструкции не удалось эффективно реализовать и проверить на всех допустимых наборах. Остальные конструкции показали следующие результаты:

Q_7	Простейшая рекурсивная конструкция	Конструкция Рамраса	Конструкция Бакоша	Конструкция Потапова $(k=4)$	Обобщённая конструкция Потапова $(k=4)$	Жадная торическая конструкция
Количество спектров	11 692	7 592	21 445	23 362	28 389	3 896
Процент от всех допустимых	41	27	75	82	99,8	14

Как и ожидалось, конструкция Рамраса реализовала мало спектров и в дальнейшем рассматриваться не будет. Простейшая рекурсивная (конструкция Потапова при $k=2$) даёт только спектры, начинающиеся с 2. Конструкция Бакоша реализовала все сбалансированные и близкие к ним спектры.

Конструкция Потапова была реализована только для случая $k=4$. Как уже отмечалось в доказательстве леммы 4, при $k=3$ в спектре построенного этой конструкцией кода Грея обязательно присутствует число, не превосходящее 4, а при $k=5$ – три числа, не меньших 32. В первом случае такие спектры оказались реализованы рекурсивной конструкцией и конструкцией Потапова при $k=4$, во втором случае таких спектров очень мало, а реализация конструкции трудоёмка. При $k \geq 6$ в данной размерности куба конструкция Потапова вырождается.

Обобщённая конструкция Потапова при $k=3$ вырождается в конструкцию Потапова при $k=2$, а при $k \geq 5$ сложно реализуема, поскольку использует перебор всех гамильтоновых циклов в Q_k. При $k=4$ в Q_4 всего 9 классов эквивалентности гамильтоновых циклов. Обобщённая конструкция Потапова наилучший результат показала на коде Грея из доказательства леммы 4. С его помощью было реализовано 24 736 спектров.

После применения обобщённой конструкции Потапова ко всем кодам Грея в Q_4 осталось всего 67 допустимых наборов длины 7. Среди них оказались как близкие к сбалансированным, так и сильно не сбалансированные. Первые были реализованы конструкцией Бакоша, а для вторых была предложена и реализована жадная торическая конструкция. Таким образом, обобщённая конструкция Потапова, конструкция Бакоша и жадная торическая конструкции реализовали все допустимые спектры гамильтоновых циклов в Q_7.

Спектры кодов Грея в 8-кубе

Данная размерность куба уже настолько большая, что любая конструкция, использующая перебор кодов Грея, становится сложно реализуемой. Мы рассматривали только четыре конструкции. Результаты их применения таковы (напомним, что допустимых наборов 4 134 861):

Q_8	Простейшая рекурсивная конструкция	Жадная торическая конструкция	Конструкция Бакоша	Конструкция Потапова $(k=5)$
Количество спектров	1 288 770	300 090	3 274 718	3 319 047
Процент от всех допустимых	31	7	79	80

Три из этих конструкций: Бакоша, простейшая рекурсивная и жадная торическая, реализуются эффективно, но не покрывают все допустимые наборы. Базовой конструкцией для данной размерности куба стала конструкция Потапова. Рассмотрим основные сложности её реализации.

Параметр k нельзя брать большим, поскольку в конструкции перебираются все коды Грея в Q_k. Заметим, что уже в Q_7 количество кодов Грея неизвестно. С другой стороны, необходимость перечисления и склейки всех спектров гамильтоновых цепей в 2^{k-1} подкубах Q_{n-k+1} на рёбрах паросочетания ограничивает сверху и число $n-k$. Мы остановились на параметре $k=5$.

На первом этапе были перечислены гамильтоновы циклы в 5-кубе и выделены все различные пары спектров совершенных паросочетаний, образующих эти циклы. Таких пар оказалось 836. В каждой паре на рёбрах одного из паросочетаний были рассмотрены 16 кубов размерности 4. Хотя различных спектров кодов грея в 4-кубе всего 4, но для конструкции нужны спектры гамильтоновых цепей, причём с учётом порядка. Таких спектров 31. Склейка этих спектров требует 31^{16} операций. Чтобы уменьшить это количество мы склеивали спектры попарно и после каждой такой склейки убирали повторы. Это позволило полностью реализовать конструкцию Потапова для $k = 5$.

После применения конструкции Потапова осталось 815 814 спектров. Добавление конструкции Бакоша уменьшило количество нереализованных спектров до 91 851. А после рекурсивной и жадной торической осталось 11 937. Тогда в Q_4 был взят гамильтонов цикл, приведённый в доказательстве леммы 4, и к нему применялась обобщённая конструкция Потапова для $k = 4$, пока не были реализованы все оставшиеся спектры. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2. Любой допустимый набор длины $n \leq 8$ является спектром некоторого кода Грея.

Заключение

В [15] приведено условно асимптотическое решение задачи (теорема 1). Но оценка на константу *N*, получаемая из доказательства, очень грубая. Лемма 3 показывает, что $N \geq 9$, а следовательно, размерности 7 и 8 входят в базу индукции. Лемма 4 даёт надежду, что данная статья полностью доказывает эту базу индукции. Но если это так, и, начиная с размерности 9, конструкция Потапова реализует все спектры, то использованный в данной статье подход с порождением всех спектров, примененный к длине 9, этого не докажет. Для полного решения задачи нужно усиление теоремы Потапова в части уточнения размерности, подходящей в качестве базы индукции.

Список литературы

1. *Gilbert E. N.* Gray codes and paths on the *n*-cube // Bell System Tech. J. 1958. Vol. 37. No. 3. P. 815–826.

2. *Savage C. D.* A survey of combinatorial Gray codes // SIAM Rev. 1996. Vol. 39. No. 4. P. 605–629.

3. *Adam A.* Truth functions and the problem of their realization by two-terminal graphs. Budapest: Academiai Kiado, 1968.

4. *Bhat G. S., Savage C. D.* Balanced Gray codes // Electron. J. Comb. 1996. Vol. 3. Research Paper 25.

5. *Suparta I. N.* A simple proof for the existence of exponentially balanced Gray codes // Electron. J. Comb. 2005. Vol. 12. Note 19.

6. *Евдокимов А. А.* О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск. 1980. Вып. 34. С. 8–26.

7. *Goddyn L., Lawrence G. M., Nemeth E.* Gray codes with optimized run lengths // Util. Math. 1988. Vol. 34. P. 179–192.

8. *Goddyn L., Gvozdjak P.* Binary Gray codes with long bit runs // Electron. J. Comb. 2003. Vol. 10. R27.

9. *Быков И. С.* О локально равномерных кодах Грея // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2016. Т. 23, № 1. С. 51–64.

10. *Быков И. С., Пережогин А. Л.* О дистанционных кодах Грея // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2017. Т. 24, № 2. С. 5–17.

11. *Knuth D. E.* The art of computer programming. Addison; Wesley, New-Jersey, 2009. Vol. 4. 944 p.

12. *Пархоменко П. П.* Классификация гамильтоновых циклов в двоичных гиперкубах // Автоматика и телемеханика. 2001. № 6. С. 136–150.

13. *Dejter I. J., Delgado A. A.* Classes of Hamilton cycles in the 5-cube // J. Comb. Math. Comb. Comput. 2007. Vol. 61. P. 81–95.

14. *Chebiryak Yu., Kroening D.* Towards a classification of Hamiltonian cycles in the 6-cube // J. Satisf., Boolean Model. Comput. 2008. Vol. 4. No. 1. P. 57–74.

15. *Потапов В. Н.* Построение гамильтоновых циклов с заданным спектром направлений рёбер в булевом *n*-мерном кубе // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2012. Т. 19, № 2. С. 75–83.
16. *Ramras M.* A new method of generating Hamiltonian cycles on the *n*-cube // Discrete Mathematics. 1990. Vol. 85. Issue 3. P. 329–331.
17. *Dixon E., Goodman S.* On the number of Hamiltonian circuits in the n-cube // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 50. P. 500–504.
18. *Douglas R. G.* Bounds on the number of Hamiltonian circuits in the n-cube // Discrete Math. 1977. Vol. 17, No. 2. P. 143–146.
19. *Mollard M.* Un nouvel encadrement du nombre de cycles hamiltoniens du n-cube // European J. Combinatorics. 1988. Vol. 9. No. 1. P. 49–52.

Материал поступил в редколлегию 07.11.2017

A. E. Malykh [1, 2], **A. L. Perezhogin** [1, 3]

[1] Novosibirsk State University
1 Pirogov St., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

[2] *Ltd. UNIPRO*
2 Lyapunov St., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

[3] *Institute of Mathematics SB RAS*
4 Academician Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

awa149@rambler.ru, pereal@math.nsc.ru

CONSTRUCTIVE APPROACH TO ENUMERATING THE SPECTRA OF GRAY CODES IN BOOLEAN CUBES OF SMALL DIMENSION

The spectrum of the *n*-bit Gray code is a set of the number of changes in the corresponding position in the transition to the next codeword. Spectra sets of Gray codes generated by various known constructions are investigated. All the spectra of 7- and 8-bit Gray codes are enumerated.

Keyword: Gray code, Hamiltonian cycle, Boolean cube.

References

1. Gilbert E. N. Gray codes and paths on the *n*-cube. *Bell System Tech. J.*, 1958, vol. 37, no. 3, p. 815–826.
2. Savage C. D. A survey of combinatorial Gray codes. *SIAM Rev.*, 1996, vol. 39, no. 4, p. 605–629.
3. Adam A. Truth functions and the problem of their realization by two-terminal graphs. Budapest, Academiai Kiado, 1968.
4. Bhat G. S., Savage C. D. Balanced Gray codes. *Electron. J. Comb.*, 1996, vol. 3, research paper 25.
5. Suparta I. N. A simple proof for the existence of exponentially balanced Gray codes. *Electron. J. Comb.*, 2005, vol. 12, note 19.
6. Evdokimov A. A. On enumeration of subsets of a finite set. *Methods of Discrete Analysis for Solving Combinatorial Problems*, 34, Novosibirsk, Izd. Inst. Mat., 1980, p. 8–26 (In Russ.).
7. Goddyn L., Lawrence G. M., Nemeth E. Gray codes with optimized run lengths. *Util. Math.*, 1988, vol. 34, p. 179–192.
8. Goddyn L., Gvozdjak P. Binary Gray codes with long bit runs. *Electron. J. Comb.*, 2003, vol. 10, R27.
9. Bykov I. S. On locally balanced Gray codes. *J. Appl. Ind. Math.*, 2016, vol. 10, issue 1, p. 78–85.

10. Bykov S., Perezhogin A. L. On distance Gray codes. *J. Appl. Ind. Math.*, 2016, vol. 11, issue 2, p. 185–192.

11. Knuth D. E. The art of computer programming, vol. 4. Addison, Wesley, New-Jersey, 2009, 944 pp.

12. Parkhomenko P. P. Classification of the Hamiltonian Cycles in Binary Hypercubes. *Automation and Remote Control*, 2001, vol. 62, no. 6, p. 978–991.

13. Dejter I. J., Delgado A. A. Classes of Hamilton cycles in the 5-cube. *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 2007, vol. 61, p. 81–95.

14. Chebiryak Yu., Kroening D. Towards a classification of Hamiltonian cycles in the 6-cube. *J. Satisf., Boolean Model. Comput.*, 2008, vol. 4, no. 1, p. 57–74.

15. Potapov V. N. Construction of Hamiltonian cycles with a given spectrum of edge directions in an n-dimensional Boolean cube. *J. Appl. Ind. Math.*, 2012, vol. 6, issue 3, p. 339–345.

16. Ramras M. A new method of generating Hamiltonian cycles on the *n*-cube. *Discrete Math.*, 1990, vol. 85, issue 3, p. 329–331.

17. Dixon E., Goodman S. On the number of Hamiltonian circuits in the *n*-cube. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 50, p. 500–504.

18. Douglas R. G. Bounds on the number of Hamiltonian circuits in the *n*-cube. *Discrete Math.*, 1977, vol. 17, no. 2, p. 143–146.

19. Mollard M. Un nouvel encadrement du nombre de cycles hamiltoniens du *n*-cube. *European J. Combinatorics*, 1988, vol. 9, no. 1, p. 49–52.

For citation:

Malykh A. E., Perezhogin A. L. Constructive Approach to Enumerating the Spectra of Gray Codes in Boolean Cubes of Small Dimension. *Vestnik NSU. Series*: *Information Technologies*, 2017, vol. 15, no. 4, p. 32–42. (In Russ.)