ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том VI, 2006 г. Выпуск 2. С. 103–113

УДК 517.958.532

Об одной начально-краевой задаче для уравнений фильтрации трех несмешивающихся капиллярных жидкостей[1]

В. В. Шелухин

§ 1. Введение

Рассматривается вопрос о глобальной разрешимости одного класса начально-краевых задач для квазилинейной параболической системы

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x, \quad x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}, \quad 0 < t < T. \tag{1}$$

Подобная система возникает в теории фильтрации трехфазных несмешивающихся капиллярных жидкостей. Здесь

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

В координатном виде система (1) имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (B_{ij}(u) \frac{\partial u_j}{\partial x}),$$

и она выводится из уравнений фильтрации следующим образом.

Пусть исследуются одномерные горизонтальные течения трех несмешивающихся жидкостей в пористой среде [1]. Закон сохранения массы каждой фазы имеет вид

$$(\Phi u_i \rho_i)_t + (\rho_i v_i)_x = 0, \quad \rho_i = \mathrm{const}; \tag{2}$$

[1]Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (05-01-00131) и грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-7525.2006.1).

здесь Φ — пористость, а u_i, ρ_i, v_i — насыщенность, плотность и скорость фильтрации i–ой фазы. Так как u_i означает долю объема, занятого i-ой фазой, то

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1. \tag{3}$$

Скорость каждой фазы подчиняется закону Дарси

$$v_i = -k\lambda_i p_{ix}, \quad \lambda_i = \lambda_i(u_1, u_2), \tag{4}$$

где k — абсолютная проницаемость, λ_i — мобильность, p_i — фазовое давление.

Функции $p_{ij}(u_1, u_2)$, определяющие разности

$$p_1 - p_3 = p_{13}, \quad p_2 - p_3 = p_{23}, \tag{5}$$

называются капиллярными давлениями.

Положительные константы Φ, ρ_i, k вместе с функциями $\lambda_i(u_1, u_2)$, $(i = 1, 2, 3)$, $p_{13}(u_1, u_2)$, $p_{23}(u_1, u_2)$ считаются входными данными фильтрационных течений. Далее будем считать для простоты, что $k = \Phi = 1$.

Введем обозначения

$$\lambda = \sum_1^3 \lambda_i, \quad v = \sum_1^3 v_i, \quad f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

$$\triangle := \{u : u \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \le u_i \le 1, \quad u_1 + u_2 \le 1\}, \tag{7}$$

Из (2) и (3) следует, что $v_x = 0$, поэтому v зависит лишь от времени t. Если положить $v \equiv 1$ и исключить третью фазу, то для вектора $u = (u_1, u_2)^T$, где индекс T служит для обозначения транспонирования, получается система (1), в которой $f(u) := (f_1, f_2)^T$ и матрица B определяется равенствами

$$B_{11} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial p_{13}}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial p_{23}}{\partial u_1}, \tag{8}$$

$$B_{12} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial p_{23}}{\partial u_2} + \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial p_{13}}{\partial u_2}, \tag{9}$$

$$B_{21} = \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial p_{23}}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial p_{13}}{\partial u_1}, \tag{10}$$

$$B_{22} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{\partial p_{13}}{\partial u_2} + \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda}\frac{\partial p_2}{\partial u_2}. \tag{11}$$

Теоретически и экспериментально о функциях $p_{ij}(u)$ известно мало [3, 6]. То же самое верно и для функций $\lambda_i(u)$, $i = 1, 2, 3$ [12]. Обычно принимаются следующие свойства [1]:

(i) Функции состояния $\lambda_i(u)$, $p_{ij}(u)$ должны быть такими, чтобы свойства матрицы B, задаваемой равенствами (6), (8)–(11), делали систему (1) параболической в каком-либо смысле;

(ii) Функции λ_i подчиняются ограничениям

$$\lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i|_{u_i=0} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \tag{12}$$

Ввиду (12) система (1) не является параболической на границе треугольника $\triangle$. Известные теории глобальной разрешимости здесь не применимы, так как B — вырождающаяся и не является диагональной. Например, в монографии Ладыженской, Солонникова и Уральцевой [7] требуется, чтобы матрица была невырожденной, диагональной и с одинаковыми элементами на диагонали. Известные результаты для системы (1) связаны с теми или другими предположениями о функциях состояния. В работе [3] предложен численный алгоритм при условии, что существует потенциал $p_c(u)$:

$$\frac{\partial p_c}{\partial u_i} = f_1 \frac{\partial p_{13}}{\partial u_i} + f_2 \frac{\partial p_{23}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2.$$

В [4] и [5] трехфазные течения изучены для треугольного тензора капиллярной диффузии B, т. е. для случая, когда

$$B_{21} \equiv \frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda} \frac{\partial p_{23}}{\partial u_1} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda} \frac{\partial p_{13}}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial B_{22}}{\partial u_1} = 0. \tag{13}$$

Данные условия означают, что фазы I и III не влияют на диффузию фазы II.

К настоящему времени в инженерной практике накопился некоторый эмпирический банк данных для описания двухфазных функций состояния [6, 10]. Другими словами, правые части равенств (5) более или менее достоверно известны лишь при $u \in \partial\triangle$. Что касается описания функций состояния внутри треугольника $\triangle$, то, если в случае мобильности применяется метод Стоуна [11] и ряд других приемов продолжения этой функции с $\partial\triangle$ в $\triangle$, то в случае капиллярных давлений какие-либо теории продолжения отсутствуют вообще. Ограничения (13) представляют собой линейную гиперболическую систему для функций p_{13}, p_{23} с коэффициентами, зависящими от мобильностей. Для согласования с двухфазной теорией мы ставим для этой системы уравнений граничные условия

$$p_{13}|_{u_2=0} = \varphi_{13}(u_1), \quad p_{23}|_{u_1=0} = \varphi_{23}(u_2), \tag{14}$$

в которых функции φ_{ij} выбираются на основе уже упоминавшихся эмпирических подходов к двухфазным жидкостям. Условия (13) и (14) в совокупности дают рецепт построения капиллярных давлений в треугольнике насыщенностей $\triangle$. В этой работе мы детально разбираем случай, когда мобильности заданы линейными зависимостями

$$\lambda_i = k_i u_i, \quad k_i = \mathrm{const} > 0. \tag{15}$$

Методами группового анализа ниже мы устанавливаем, что условия (13) играют роль средства интерполяции с двухфазных систем на трехфазные в следующем смысле.

Равенства (14) означаю, что капиллярное давление p_{13} задано в системе фаза I– фаза III, а капиллярное давление p_{23} задано в системе фаза II – фаза III. Уравнения (13) позволяют восстановить функции p_{ij} внутри треугольника $\triangle$ по формулам

$$p_{13}(u_1,u_2)=\varphi_{13}(\xi)-\int\limits_0^{u_2}\frac{k_0k_2k_3u_2\varphi_{23}'(u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\,du_2+\mathrm{const}, \tag{16}$$

$$p_{23}(u_1,u_2)=\int\limits_0^{\xi}A(\xi)\varphi_{13}'(\xi)\,d\xi+\varphi_{23}(u_2)+\mathrm{const}, \tag{17}$$

где

$$k_0=\frac{k_3-k_1}{k_1k_3},\quad \xi=\frac{u_1}{1-u_2},\quad A(\xi)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}.$$

В случае, когда мобильности и капиллярные давления определяются равенствами (15)–(17), вектор f и матрица B принимают вид

$$f=\begin{pmatrix}\frac{k_1u_1}{\varepsilon u_1+k_2u_2+k_3(1-u_2)}\\ \frac{k_2u_2}{\varepsilon u_1+k_2u_2+k_3(1-u_2)}\end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{k_1\xi(1-\xi)\varphi_{13}'(\xi)}{k_1\xi+k_3(1-\xi)} & \xi(B_{11}-B_{22})\\ 0 & \frac{k_3k_2u_2(1-u_2)\varphi_{23}'(u_2)}{k_2u_2+k_3(1-u_2)}\end{pmatrix}. \tag{19}$$

В терминах введенных обозначений уравнение баланса фазовых объемов (3) записывается в виде

$$u(x,t)\in\triangle,\quad \forall\quad (x,t)\in Q:=\Omega\times(0,T), \tag{20}$$

что эквивалентно неравенствам

$$0\le u_i(x,t)\le 1,\quad 0\le u_1(x,t)\le 1-u_2(x,t),\quad \forall\quad (x,t)\in Q.$$

Мы исследуем систему (1) с ограничениями (20), при этом f и B заданы по формулам (18) и (19). Отметим, что результаты, полученные Аманном [2] для абстрактных невырождающихся параболических систем, также используют условие $B_{21}=0$, но ограничение $\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\equiv 0$, наложенное в [2], делает систему (1) распадающейся; кроме того, в [2] нет условий связи (20) и некоторые оценки решений предполагаются выполненными a priori без доказательств.

§ 2. Глобальная разрешимость

Для системы (1), (18), (19), (20) рассматриваются следующие краевые и начальные условия:

$$\sigma u_n+u=d\quad \text{при}\quad |x|=1,\quad u|_{t=0}=u_0(x), \tag{21}$$

где $\sigma = \mathrm{const} > 0$ и

$$u_n = \pm u_x, \quad d = d^{\pm} \quad \text{при} \quad x = \pm 1.$$

Заметим, что при $k_1 = k_3$ система (1) распадается, так как $f_2(u)$ не зависит от u_1, при этом уравнение для u_2 принимает вид

$$u_{2t} + f_2^0(u_2)_x = (B_{22}(u_2)u_{2x})_x, \quad f_2^0 \equiv \frac{k_2 u_2}{k_2 u_2 + k_3(1 - u_2)}. \tag{22}$$

Однако условие (20), записанное для функции u_2 в виде

$$0 \le u_2(x, t) \le 1 - u_1(x, t), \tag{23}$$

не позволяет отыскивать функцию u_2 на основе уравнения (22) не зависимо от u_1.

Разрешимость вырождающейся задачи (1), (20), (21) при $k_1 = k_3$ установлена в [5]. Здесь мы рассмотрим более общую ситуацию, когда возможен случай $k_1 \ne k_3$, однако параметр

$$\varepsilon = k_1 - k_3$$

предполагается малым.

Далее считается, что вектор-функции $u_0(x)$ и $d(t)$ принимают значения строго внутри треугольника $\triangle_\delta \subset \Delta$; т. е., для некоторого $\delta > 0$

$$\mathrm{dist}\{u_0(x), \partial\Delta\} \ge \delta, \quad \mathrm{dist}\{d^+(t), \partial\Delta\} \ge \delta, \quad \mathrm{dist}\{d^-(t), \partial\Delta\} \ge \delta, \tag{24}$$

при всех $x \in \Omega$, $0 \le t \le T$. Первое неравенство, в частности, означает, что начально в каждой точке среды присутствуют все три фазы одновременно, т. е., физическая система не вырождается.

Что касается гладкости, мы предполагаем, что

$$u_0 \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad d^{\pm} \in H^{(1+\alpha)/2}([0, T]) \tag{25}$$

для некоторого $\alpha \in (0, 1)$.

Условия

$$\varphi_{i3}'(s) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < s < 1, \quad \varphi_{i3} \in C^3([0, T]), \tag{26}$$

на элементы матрицы B делают, в частности, систему (1) вырождающейся параболической. Главный результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть кроме условий* (23)–(26) *выполнены еще условия согласования начальных и граничных данных*

$$\pm\sigma u_0'(\pm 1) + u_0(\pm 1) = d^{\pm}(0).$$

Тогда при $|\varepsilon| \le \varepsilon_* < 1$ *задача* (1), (20), (21) *имеет решение в классе*

$$u \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q}), \quad Q = \Omega \times (0, T),$$

где ε_* — некоторая постоянная, зависящая от δ, T и числа M, ограничивающего нормы начальных и граничных функций :

$$\|u_0\|_{H^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \le M, \quad \|d^{\pm}\|_{H^{(1+\alpha)/2}([0,T])} \le M. \tag{27}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Важную роль играет замена переменных $(u_1, u_2) \to (\xi, u_2)$. Здесь $\xi = u_1/(u_1+u_3)$ — относительная фазовая насыщенность. В новых переменных исходная задача записывается в виде

$$\xi_t + A_{11}(\xi, u_2)\xi_x + \varepsilon A_{12}(\xi, u_2)u_{2x} = \tag{28}$$

$$= (B_{11}(\xi)\xi_x)_x - \xi_x u_{2x}(B_{11} + B_{22})/(1 - u_2),$$

$$\xi|_{t=0} = \xi_0(x) \equiv \frac{u_{10}(x)}{1 - u_{20}(x)}, \quad \Big(\frac{\sigma\xi_n(1 - u_2)}{1 - d_2} + \xi - \xi^{\pm}\Big)|_{|x|=1} = 0, \tag{29}$$

$$u_{2t} + \varepsilon A_{21}(\xi, u_2)\xi_x + A_{22}(\xi, u_2)u_{2x} = (B_{22}(u)u_{2x})_x, \tag{30}$$

$$u_2|_{t=0} = u_{20}(x), \quad (\sigma u_{2n} + u_2 - d_2)|_{|x|=1} = 0, \tag{31}$$

где

$$\lambda^2 A_{11} = k_1((k_2 - k_3)u_2 + k_3) - \varepsilon k_2\xi u_2, \quad \lambda^2 A_{12} = -\xi(1 - \xi)/(1 - u_2),$$

$$\lambda^2 A_{21} = -k_2 u_2(1 - u_2), \quad \lambda^2 A_{22} = k_2 k_3 + \varepsilon k_2 \xi, \quad \xi^{\pm} \equiv \frac{d_1^{\pm}}{1 - d_2^{\pm}}.$$

Преимущество новой системы заключается в том, что она распадается по старшим производным: уравнение для ξ не содержит производной u_{2xx}, а уравнение для u_2 не содержит производной ξ_{xx}. Заметим, что $A_{12} = 0$ при $\xi = 0$ и при $\xi = 1$, а $A_{21} = 0$ при $u_2 = 0$ и при $u_2 = 1$; важность таких свойств коэффициентов отмечалась в [8].

Указанные свойства новой системы (28)–(31) гарантируют, что ни одна из трех фаз не исчезает.

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ — гладкое решение вырождающегося параболического уравнения*

$$u_t + a_j(x, t, u, \nabla u)u_{x_j} + u(1 - u)F(x, t) = (B_{ij}(u)u_{x_i})_{x_j} \tag{32}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ со следующими начальными и краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (\sigma u_n + u - d(x,t))|_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

Пусть $\delta \in (0, 1)$ и

$$\delta \le u_0(x) \le 1 - \delta, \quad \delta \le d(x, t) \le 1 - \delta.$$

Тогда найдется постоянная $\delta_1 \in (0, 1)$, зависящая от δ, T, $\sup_Q |F(x,t)|$, такая, что выполняется оценка

$$\delta_1 \le u(x, t) \le 1 - \delta_1, \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}, \quad Q = \Omega \times (0, T). \tag{33}$$

Доказательство основано на переходе к новой неизвестной функции $v = \frac{1}{2}\ln u/(1-u)$ и рассмотрении эквивалентной параболической задачи

$$v_t + \tilde{a}_j(x,t,v,\nabla v)v_{x_j} + F = (\tilde{B}_{ij}(v)v_{x_i})_{x_j} - \tilde{B}_{ij}(v)v_{x_i}v_{x_j}\frac{1-e^{-2v}}{1+e^{2v}}, \tag{34}$$

$$\Big(\sigma v_n - \frac{\psi(d_1)-\psi(v)}{u'(v)}\Big)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = \frac{1}{2}\ln\frac{u_0}{1-u_0},$$

где

$$\psi(s) = \frac{s}{1+s}, \quad d_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{d}{1-d}.$$

Коэффициенты $\tilde{a}_j$ и $\tilde{B}_{ij}$ легко выписываются в терминах функций a_j и B_{ij} после замены переменных $u \to v$.

Чтобы доказать оценку (33), достаточно установить оценку ограниченности функции $|v|$. Это нетрудно сделать с помощью обычного принципа максимума.

Применение Леммы 1 сначала к уравнению (30) а затем к уравнению (28) приводит к оценкам

$$\delta_1 \le \xi \le 1-\delta_1, \quad \delta_2 \le u_2 \le 1-\delta_2, \tag{35}$$

в которых δ_i зависят от δ, T, J_i,

$$J_1 = \sup_Q |u_{2x}|, \quad J_2 = \sup_Q |\xi_x|.$$

Кроме того, δ_1 зависит от δ_2. Заметим, что δ_i не уменьшается с ростом J_i.

Хотя неравенства (35) не представляют собой априорных оценок, они гарантируют невырождаемость системы (28)–(31) на гладких решениях. Поэтому ряд результатов известной теории [7] могут быть применены.

Сведем задачу к отысканию неподвижной точки некоторого оператора. Выберем произвольное число $r > 0$ и произвольную функцию $\zeta \in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q})$, такие что

$$\|\zeta\|^{(1+\alpha)} \le r, \tag{36}$$

где $\|\cdot\|^{(k+\alpha)}$ — норма в $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{Q})$.

Подставим в уравнение (30) ζ вместо ξ и рассмотрим это уравнение как квазилинейное для u_2. Ввиду (35), имеем

$$\delta_2 \le u_2 \le 1-\delta_2, \tag{37}$$

где δ_2 зависит от δ, T, εr. При условии (36) уравнение (30) является невырождающимся, поэтому применимы результаты из [7]; т. е., при заданной функции ζ с условием (36) существует единственное решение $u_2 \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q})$, подчиняющееся оценке (37) и оценке

$$\|u_2\|^{(2+\alpha)} \le b_1(\varepsilon r, \delta, T, M). \tag{38}$$

Теперь обратимся к начально-краевой задаче (28), (29), считая, что $u_2(x,t)$ уже найдена выше как решение задачи (30), (31). Решение ξ задачи (28), (29) удовлетворяет оценке (35). Рассматривая уравнение (28) как квазилинейное невырождающееся для отыскания функции ξ, получаем $\xi \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q})$ и

$$\|\xi\|^{(2+\alpha)} \leq b_2(b_1, \varepsilon r, \delta, T, M). \tag{39}$$

Таким образом в пространстве $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q})$ определен оператор $\zeta \to \xi$, где $\xi = \mathcal{A}_\varepsilon(\zeta)$. Оценка (39) гарантирует вполне непрерывность оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$. Отметим, что постоянные в оценках (37)–(39) не зависят от r и ε, если произведение εr остается постоянным. Очевидно, неподвижные точки оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ являются решениями исходной задачи.

Применим теорему Шаудера. Положим в неравенстве (36) число r равным 1. Из (37)–(39) следует, что при любом $\varepsilon \in [0,1]$ выполняются оценки

$$\delta_2^* \leq u_2 \leq 1 - \delta_2^*, \quad \|u_2\|^{(2+\alpha)} \leq b_1^*, \quad \|\xi\|^{(1+\alpha)} \leq c_1^*. \tag{40}$$

Они, в частности, означают, что при любом $\varepsilon \in [0,1]$ оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ отображает шар $\|\zeta\|^{(1+\alpha)} \leq 1$ в шар $\|\zeta\|^{(1+\alpha)} \leq c_1^*$.

Теперь рассмотрим оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ на шаре $\|\zeta\|^{(1+\alpha)} \leq c_1^* + 1 \equiv r_1$. Выберем ε_1 так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon_1 r_1 \leq 1$. Тогда при любом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ неравенства (40) все еще выполняются. Значит, при любом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ вполне непрерывен и отображает шар $\|\zeta\|^{(1+\alpha)} \leq r_1$ в себя. По теореме Шаудера о неподвижной точке существует решение задачи (1), (21) в классе, описанном в Теореме 1. Единственность в этом классе легко доказывается тем же методом, что и в [7]. Включение (20) автоматически следует из оценок (35). Таким образом, Теорема 1 доказана.

§ 3. Капиллярные давления

Дадим вывод формул (16),(17) для капиллярных давлений, исходя из гипотезы (13) о матрице капиллярной диффузии B.

Сначала применим групповой анализ однородной системы дифференциальных уравнений для функций $p_{ij}(u_1, u_2)$

$$B_{12} = 0, \quad B_{22} = 0,$$

которая записывается в виде

$$A\frac{\partial p_{13}}{\partial u_1} = \frac{\partial p_{23}}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial p_{23}}{\partial u_2} = A\frac{\partial p_{13}}{\partial u_2}, \quad A = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3}. \tag{41}$$

Применение известного алгоритма [9] для вычисления групп симметрий показывает, что уравнения (41) допускают группы с инфинитезимальным оператором

$$X = \zeta^1(u_1, u_2, p_{13}, p_{23})\frac{\partial}{\partial u_1} + \zeta^2(\cdots)\frac{\partial}{\partial u_2} + \eta^1(\cdots)\frac{\partial}{\partial p_{13}} + \eta^2(\cdots)\frac{\partial}{\partial p_{23}},$$

где функции ζ^i, η^i подчиняются ограничениям

$$\zeta^1\frac{\partial A}{\partial u_1}+\zeta^2\frac{\partial A}{\partial u_2}+A(\frac{\partial \eta^1}{\partial p_{13}}+A\frac{\partial \eta^1}{\partial p_{23}})=\frac{\partial \eta^2}{\partial p_{13}}+A\frac{\partial \eta^2}{\partial p_{23}},$$

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial u_2}=A\frac{\partial \eta^1}{\partial u_2},\quad \frac{\partial \eta^2}{\partial u_1}=A\frac{\partial \eta^1}{\partial u_1}$$

Заметим, что A — есть функция переменного $\xi=u_1/(u_1+u_2)$ и

$$\frac{\partial A}{\partial u_1}=A^{'}(\xi)\frac{1}{1-u_2},\quad \frac{\partial A}{\partial u_2}=A^{'}(\xi)\frac{u_1}{(1-u_2)^2}.$$

Следовательно, имеется одно-параметрическая группа с оператором

$$X=-\xi\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial u_2},\quad \xi=\frac{u_1}{1-u_2}.$$

Смысл этой группы заключается в том, что система (41) инвариантна относительно замены переменных $(u_1,u_2)\to(u_1^{'},u_2^{'})$:

$$u_1^{'}=u_1-\frac{au_1}{1-u_2},\quad u_2^{'}=u_2+a,\quad a\in\mathbb{R}.$$

Легко проверяется, что система (41) обладает решением, которое зависит лишь от одной переменной ξ. В самом деле, при любой заданной функции $q_1(\xi)$ решением системы (41) являются функции

$$p_{13}=q_1(\xi),\quad p_{23}=\int A(\xi)q_1^{'}(\xi)d\xi.$$

Рассмотрим неоднородную систему (13), которая записывается в виде

$$A\frac{\partial p_{13}}{\partial u_1}=\frac{\partial p_{23}}{\partial u_1},\quad \frac{\partial p_2}{\partial u_2}=A\frac{\partial p_{13}}{\partial u_2}+\frac{\lambda B_{22}(u_2)}{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)}.\tag{42}$$

Изучим эти уравнения для функций $p_{i3}(u_1,u_2)$ в случае, когда мобильности λ_i определены линейными законами:

$$\lambda_i=k_iu_i,\quad k_i=\text{const}.$$

Анализ однородной системы подсказывает, что решение можно искать в виде

$$p_{i3}=q_i(\xi)+Q_i(u_2),\quad \xi=\frac{u_1}{1-u_2}\equiv\frac{u_1}{u_1+u_3}.\tag{43}$$

Как видно из (42), функции q_i, Q_i удовлетворяют системе уравнений

$$q_2^{'}(\xi)=q_1^{'}(\xi)A(\xi),\quad A=\frac{k_1\xi}{(k_1-k_3)\xi+k_3},\quad Q_1^{'}(u_2)=-\frac{k_0B_{22}(u_2)}{1-u_2},$$

$$Q_2^{'}(u_2)=B_{22}(u_2)(\frac{1}{k_3(1-u_2)}+\frac{1}{k_2u_2}),\quad k_0=\frac{k_3-k_1}{k_1k_3}.\tag{44}$$

Пусть капиллярное давление $p_{13}(u)$ является заданной функцией переменного u_1 на части границы треугольника Δ, на которой $u_2 = 0$:

$$p_{13}|_{u_2=0} = \varphi_{13}(u_1).$$

Предположим также, что капиллярное давление $p_{23}(u)$ является заданной функцией переменного u_2 на границе треугольника Δ, где $u_1 = 0$:

$$p_{23}|_{u_1=0} = \varphi_{23}(u_2).$$

Из (43) следует, что

$$\varphi_{13}(u_1) = q_1(u_1) + Q_1(0), \quad \varphi_{23}(u_2) = q_2(0) + Q_2(u_2).$$

Если положить

$$q_1(\xi) = \varphi_{13}(\xi), \quad Q_2(u_2) = \varphi_{23}(u_2),$$

то другие функции $Q_1(u_2)$ и $q_2(\xi)$ определяются из (44) следующими равенствами:

$$q_2(\xi) = \int\limits_0^{\xi} A(\xi)\varphi_{13}'(\xi)d\xi, \quad B_{22}(u_2) = \frac{k_2k_3u_2(1-u_2)\varphi_{23}'(u_2)}{k_2u_2 + k_3(1-u_2)},$$

$$Q_1'(u_2) = -\frac{k_0}{1-u_2}B_{22}(u_2).$$

Таким образом, формулы (16) и (17) для капиллярных давлений установлены.

Литература

[1] *M. B. Allen, J. B. Behie*, Multiphase flows in porous media: Mechanics, mathematics and numerics, Lecture Notes Eng-ing, New York, Springer-Verlag, No. 34, 1988.

[2] *H. Amann*, Dynamic theory of quasi-linear parabolic systems iii. Global existence, Math. Z., **202** (1989), 219–250.

[3] *Z. Chen, R. E. Ewing*, Comparison of various formulations of three-phase flow in porous media, Journal of Computational Physics, **132** (1997), 362–373.

[4] *H. Frid, V. Shelukhin*, A quasilinear parabolic system for three-phase capillary flow in porous media, SIAM J. Math. Anal., **35**, No. 4 (2003), 1029–1041.

[5] *H. Frid, V. Shelukhin*, Initial boundary value problems for a quasilinear parabolic system in three-phase capillary flow in porous media, SIAM J. Math. Anal., **36**, No. 5 (2005), 1407–1425.

[6] *S. M. Hassanizadeh, W. G. Gray*, Theormodynamic basis of capillary pressure in porous media, Water Resources Research, **29**, No. 10 (1993), 3389–3405.

[7] *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., Наука, 1967.

[8] *В. Н. Монахов, М. И. Жидкова*, Теоремы существования в нестационарных задачах химически реагирующих потоков, ДАН, **70**, № 2 (2004), 686–690.

[9] *Л. В. Овсянников*, Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.

[10] *D. W. Peaceman*, Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation, Amsterdam-Oxford-New York, Elsevier Scientific Publishing Company, 1977.

[11] *H. L. Stone*, Probability model for estimating three-phase relative permeability, J. of Petroleum Technology, February (1970), 214–218.

[12] *А. Н. Варченко, А. Ф. Зазовский*, Трехфазная фильтрация несмешивающихся жидкостей, Итоги науки и техники, серия Комплексные и специальные Разделы Механики, ВИНИТИ, **4** (1991), 98–154.