На правах рукописи

Ротанова Татьяна Александровна

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ, СОДЕРЖАЩИХ ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Хлуднев Александр Михайлович.

Официальные оппоненты:

Алехин Владимир Витальевич, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник;

Намм Роберт Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тихоокеанский государственный университет», зав. кафедрой ПОВТ и АС.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 25 сентября 2012 года в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, ауд. 317а главного корпуса.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Старовойтов В.Н.

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию краевых задач о равновесии контактирующих друг с другом упругих тел, содержащих жесткие включения, в негладких областях. Предполагается, что область контакта заранее неизвестна, так что рассматриваемые задачи относятся к классу проблем с неизвестной границей. На допустимые функции накладывается ограничение типа неравенства, отражающее физическое требование непроникания. Таким образом, краевые условия имеют вид равенств и неравенств.

Актуальность темы. Механика контактных взаимодействий твердых деформируемых тел представляет в настоящее время большую и активно развивающуюся область механики сплошных сред. Широкий интерес к данной тематике обусловлен тем, что все механизмы и конструкции состоят из взаимодействующих деталей, физические процессы в которых описываются задачами контактного взаимодействия. Текущее развитие науки и техники создает необходимость в математических постановках новых задач о контакте упругих и неупругих тел и их изучении.

Большое число физических и инженерных задач с неизвестной границей могут быть сформулированы как вариационные, в частности, задачи о контакте упругих и неупругих тел. Вариационная постановка статических задач контактного взаимодействия подразумевает, что допустимые функции удовлетворяют дополнительному ограничению, имеющему форму неравенства (так называемые односторонние контактные задачи). Это ограничение-неравенство отражает физическое требование непроникания, и с точки зрения приложений эта модель предпочтительнее классических линейных моделей с граничными условиями вида равенств для контактных задач.

Теория вариационных неравенств как новый раздел теории уравнений с частными производными сформировалась во второй половине XX века. Источником для создания этой теории послужила практическая задача из теории упругости (задача Синьорини, A. Signorini 1933), впервые полностью изученная в работе G. Fichera, где были заложены основы теории вариационных неравенств. Затем исследования вариационных неравенств продолжались в теоретических работах G. Duvaut, H. Lewy, J.-L. Lions, G. Stampacchia и др. Дальнейшее развитие теория и методы решений конкретных задач получили в работах А.С. Кравчука, Г.И. Львова, В.М. Садовского, А.М. Хлуднева, C. Baiocchi, L.A. Caffarelli, G. Dal Maso,

A. Friedman, J. Haslinger, I. Hlaváček, P. Panagiotopoulos, J. Sokolowski и др.

В настоящее время в связи с активным изучением композитных материалов представляет интерес исследование нового класса задач о контакте с неизвестной границей, а именно, задач о контакте упругих тел, содержащих жесткие включения. Под жестким включением понимается подобласть пластины, характеризующаяся нулевыми деформациями. Однако перемещения точек данной области имеют заданную структуру и не всегда нулевые, в отличие от абсолютно жестких недеформируемых тел. Известно, что уравнение равновесия упругого тела не выполняется в области жесткого включения. Математическая постановка данного класса задач требует принципиально нового подхода. В ряде недавних работ А.М. Хлуднева, Г.В. Алексеева, G. Leugering, Е.М. Рудого, A.A. Novotny, J. Sokolowski, A. Zochowski, Н.В. Неустроевой, посвященных описанию и анализу двумерных задач о контакте упругих тел, содержащих трещины и жесткие включения, был предложен метод, позволяющий выписать полную систему краевых условий на границе жесткого включения.

В диссертационной работе рассматриваются однослойные пластины из неоднородного анизотропного материала, которые являются упругими и подчиняются линейному уравнению состояния в рамках модели Кирхгофа-Лява. Односторонним контактным задачам для упругих пластин с неизвестной областью контакта были посвящены работы таких исследователей, как Н.Д. Боткин, А.М. Хлуднев, К.-Х. Хоффманн, L.A. Caffarelli, Dal Maso, A. Friedman, G. Leugering, G. Paderni, B. Schild, A. Tani. В данной работе предполагается, что пластины содержат жесткие включения. Задачи о контакте пластин, одна из которых содержит жесткое включение, исследовались Н.В. Неустроевой, однако в этих работах учитываются только вертикальные перемещения пластин. Существенным продвижением в данном направлении исследований является то, что в диссертационной работе рассматриваются задачи, описывающие контакт жестких подобластей друг с другом.

Цель работы. Целью диссертационной работы является доказательство разрешимости и вывод дифференциальных постановок для вариационных задач о контакте упругих тел, содержащих жесткие включения.

Методы исследования. В диссертации используются фундаментальные результаты и методы теории дифференциальных уравнений, функциональных пространств Соболева, вариационного исчисления, выпуклого анализа.

Основные результаты диссертации. Результаты были получены для двух различных задач:

1. Задача о контакте упругой пластины с тонкой балкой:

Доказаны существование и единственность решения задачи. Найдена полная система краевых условий на множестве возможного контакта для различных случаев расположения балки относительно пластины. Доказана возможность предельного перехода по параметру жесткости балки при стремлении параметра к бесконечности. Рассмотрено жесткое включение в пластине. В предположении достаточной гладкости решения найдена полная система краевых условий на множестве возможного контакта.

2. Задача о контакте двух пластин, расположенных под заданным углом:

Доказаны существование и единственность решения задачи. Рассмотрены задачи с одним жестким включением в верхней или нижней пластинах, а также задачи с двумя жесткими включениями в пластинах, выходящими на множество возможного контакта. При этом исследованы случаи с различным расположением жестких включений. В предположении достаточной гладкости решения найдена полная система краевых условий на линии контакта для различных случаев расположения жестких включений в пластинах. Показано, что задачи с жесткими включениями могут быть получены как предельные для семейства задач теории упругости с параметром.

Научная новизна. Все основные результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми, их достоверность основана на строгих математических доказательствах.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего исследования задач контактного взаимодействия упругих тел с жесткими включениями, проведения расчетов и численного анализа. Кроме того, полученные системы дифференциальных уравнений могут послужить основой для постановки новых задач вариационного исчисления и механики деформируемого твердого тела.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на семинаре «Математические проблемы механики сплошной среды» под руководством чл.-корр. РАН П.И. Плотникова в ИГиЛ СО РАН, семинаре «Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики» под руководством проф. А.М. Блохина в ИМ СО РАН, «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа» под руководством проф. В.С. Белоносова и проф. М.В. Фокина в ИМ СО РАН, «Избранные вопросы математического анализа» под руководством проф. Г. В. Демиденко в

ИМ СО РАН.

Вошедшие в диссертацию результаты докладывались на XLVI Международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2008), на конкурсе работ молодых ученых ИГиЛ СО РАН (в 2008, 2009, 2010 гг.), на XIV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (гг. Ростов-на-Дону, Азов, 2010), на II Молодежной международной научной школе-конференции памяти академика М.М. Лаврентьева «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (г. Новосибирск, 2010), на Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики» (г. Томск, 2010), на XXXIX Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» (г. Санкт-Петербург, 2011), на IX Всероссийской конференции молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (г. Новосибирск, 2012).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [10]. Из них 4 работы – в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка цитируемой литературы. Объем работы 104 страниц, включая 16 рисунков. Список цитируемой литературы содержит 113 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность и история исследуемых задач, излагаются основные результаты диссертации и применяемые методы исследования.

В первой главе рассматривается задача об одностороннем контакте неоднородной анизотропной упругой пластины с тонким упругим препятствием (балкой). Пусть срединная плоскость пластины занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей Γ класса $C^{1,1}$, а линия $\gamma \subset \Omega$ соответствует тонкому препятствию, таким образом, γ — область возможного контакта пластины и балки. Функции $w(x_1, x_2)$, $u(x)$ описывают вертикальные перемещения точек пластины и тонкого упругого препятствия соответственно. Пластина является жестко закрепленной на внешней границе области Γ, а балка — в концевых точках линии γ. Для описания свойств пластины вводится симметричный, положительно определенный тензор модулей упругости $A = \{a_{ijkl}\}$, $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$. Свойства балки характеризуются коэффициентом упругости $b \in L^\infty(\gamma)$. На пластину и балку действуют заданные внешние силы — функции $g \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\gamma)$ соответственно.

В пункте 1.1. представлены три эквивалентные формулировки задачи, а также с помощью вариационного подхода доказывается существование и единственность ее решения. Задача формулируется как поиск минимума функционала энергии на множестве $K = \{(w,u) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma) | \; w-u \geq 0$ на $\gamma\}$, обеспечивающем условие непроникания точек пластины и балки. Таким образом, на множестве возможного контакта, имеющем меньшую размерность, чем область, в которой ищется решение, ставится условие, имеющее вид неравенства. Задача минимизации эквивалентна вариационному неравенству

$$(w,u) \in K, \quad \int\limits_\Omega a_{ijkl} w_{,kl} (\bar{w} - w)_{,ij} - \tag{1}$$

$$- \int\limits_\Omega g(\bar{w} - w) + \int\limits_\gamma b u_{xx} (\bar{u} - u)_{xx} - \int\limits_\gamma f(\bar{u} - u) \geq 0 \quad \forall (\bar{w}, \bar{u}) \in K, \tag{2}$$

где $w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial x_i}$, $i = 1,2$, $(x_1, x_2) \in \Omega$; $u_x = \frac{du}{dx}$, $x = x_1$.

В этом пункте предполагаем, что $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$. Из вариационного неравенства с использованием обобщенной формулы Грина получены все необходимые краевые условия для дифференциальной постановки задачи. Найти функции w, u, определенные в Ω и γ соответственно, такие, что:

$$-\nabla\nabla m = g \text{ в } \Omega \setminus \bar{\gamma}, \tag{3}$$

$$m + A\nabla\nabla w = 0 \text{ в } \Omega, \tag{4}$$

$$w = w_n = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{5}$$

$$w - u \geq 0, \quad [w] = [w_\nu] = 0, \quad [m_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \tag{6}$$

$$[t^\nu(m)] \geq 0, \quad [t^\nu(m)](w-u) = 0 \text{ на } \gamma, \tag{7}$$

$$[t^\nu(m)] = -(b u_{xx})_{xx} + f \text{ на } \gamma, \tag{8}$$

$$u = u_x = 0 \text{ на } \partial\gamma. \tag{9}$$

Здесь n и ν — нормали к Γ и γ соответственно, $\{m_{ij}\}$ — тензор моментов, t^n — перерезывающая (поперечная) сила, при этом

$$m_\nu = -m_{ij}\nu_j\nu_i, \quad t^\nu(m) = -m_{ij,k} s_k s_j \nu_i - m_{ij,j}\nu_i, \quad s = (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Кроме того, $w_n = \frac{\partial w}{\partial n}$, $w_\nu = \frac{\partial w}{\partial \nu}$, $[w] = w^+ - w^-$, а значения $w^\pm$ соответствуют значениям w на $\gamma^\pm$.

Утверждается, что имеет место следующий результат:

Теорема 1 *Пусть возможно продолжение γ до замкнутой кривой Σ класса $C^{1,1}$. Решение вариационного неравенства (1), (2) удовлетворяет системе (3)—(9). Гладкое решение краевой задачи (3)—(9) является решением вариационного неравенства (1), (2).*

Особое внимание в первом пункте уделяется точной интерпретации краевых условий. Последнее из условий (6) выполнено в смысле $H^{-1/2}(\Sigma)$, первое из условий (7) выполнено в смысле $\langle [t^\nu(m)], \phi\rangle_{3/2,\Sigma} \geq 0$ для всех $\phi \in H_0^2(\Omega)$ и $\phi \geq 0$ на γ. Здесь скобки $\langle\ ,\ \rangle_{3/2,\Sigma}$ обозначают двойственность между пространствами $H^{3/2}(\Sigma)$ и $H^{-3/2}(\Sigma)$, где $H^{-3/2}(\Sigma)$ — пространство, сопряженное к $H^{3/2}(\Sigma)$. В указанных формулах Σ является произвольной замкнутой кривой класса $C^{1,1}$ с заданными свойствами, содержащей γ. Отметим, что набор краевых условий представляет собой совокупность равенств и неравенств.

В пункте 1.2. рассматривается выход области возможного контакта γ на границу области, отвечающей срединной плоскости пластины, обозначаемой в этом пункте как Ω_1. Данная особенность не влияет на результаты, касающиеся существования и единственности решения. Однако продолжение γ до гладкой кривой Σ, лежащей в Ω_1, невозможно, поэтому не удается применить обобщенную формулу Грина. Предполагая достаточную гладкость решения, выписать дифференциальную постановку можно, однако точную интерпретацию краевым условиям в этом случае дать не получается. Для преодоления этой трудности используется метод фиктивных областей. В рассмотрение вводится фиктивная область Ω_2 и задача ставится уже в расширенной области Ω, объединяющей Ω_1 и Ω_2, при этом в Ω возможно продолжение γ до замкнутой кривой. В расширенной области строится семейство вспомогательных задач с параметром:

$$\begin{cases} a_{ijkl}^\varepsilon(x) = a_{ijkl}/\varepsilon, & x \in \Omega_2, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0; \\ a_{ijkl}^\varepsilon(x) = a_{ijkl}, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Основным результатом пункта является теорема о сходимости решения этих задач к решению исходной при стремлении параметра к нулю. При этом для краевых условий в каждой из задач с параметром может быть дана точная формулировка.

В пункте 1.3. с помощью вариационного подхода исследуется неограниченное возрастание параметра жесткости балки b в одной из ее частей. Вводится семейство задач с параметром, характеризующим рост параметра жесткости балки:

$$\begin{cases} b^\varepsilon(x) = b, & x \in \gamma_1; \\ b^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} b, & x \in \gamma_2, \varepsilon > 0, \end{cases}$$

и рассматривается предельный переход, соответствующий переходу балки от упругого состояния к жесткому на γ_2. Предельная задача описывает контакт пластины с балкой, часть которой является абсолютно жесткой:

$$w - u|_{\gamma_1} \geq 0, \quad w|_{\gamma_2} \geq 0, \quad w \in H_0^2(\Omega), \quad u \in H_0^2(\gamma_1), \tag{10}$$

$$\int\limits_\Omega a_{ijkl} w_{,kl} (\bar{w} - w)_{,ij} - \int\limits_\Omega g(\bar{w} - w) + \int\limits_{\gamma_1} b u_{xx} (\bar{u} - u)_{xx} - \int\limits_{\gamma_1} f(\bar{u} - u) \geq 0, \tag{11}$$

выполняющееся для всех пробных функций $(\bar{w}, \bar{u})$ таких, что

$$(\bar{w} - \bar{u})|_{\gamma_1} \geq 0, \quad \bar{w}|_{\gamma_2} \geq 0, \quad \bar{w} \in H_0^2(\Omega), \quad \bar{u} \in H_0^2(\gamma_1). \tag{12}$$

В пункте 1.4. предполагаем, что пластина содержит жесткое включение — подобласть $\Omega_1 \subset \Omega$ с границей Σ класса $C^{1,1}$, $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$. При этом $\Omega_2 = \Omega \backslash \bar{\Omega}_1$ соответствует упругой подобласти пластины. Пусть Σ состоит из γ и $\Sigma \setminus \gamma$, причем на части γ границы между жестким включением и упругой пластиной осуществляется возможный контакт между пластиной и балкой.

Перемещения точек жесткого включения Ω_1 принадлежат пространству аффинных непрерывных функций

$$L(\Omega_1) = \{ l \mid l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \ a_i = const, \ i = 0,1,2; \ x = (x_1, x_2) \in \Omega_1 \}.$$

Определим функционал энергии на $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$:

$$\Pi(w, u) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega a_{ijkl} w_{,kl} w_{,ij} - \int\limits_\Omega g w + \frac{1}{2} \int\limits_\gamma b u_{xx}^2 - \int\limits_\gamma f u.$$

Заметим, что внешняя сила g приложена ко всем точкам пластины, и к упругой, и к жесткой подобластям, несмотря на то, что в жесткой подобласти уравнение равновесия не выполняется. Допустимыми перемещениями будут являться элементы множества, задающего перемещение точек Ω_1 и условие непроникания пластины и балки:

$$K_{\Omega_1} = \{ (w, u) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma) | \ w - u \geq 0 \text{ на } \gamma; w|_{\Omega_1} \in L(\Omega_1) \}.$$

Решение задачи минимизации функционала $\Pi(w, u)$ на множестве K_{Ω_1} существует. Действительно, исходное пространство функций $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$

рефлексивно; функционал $\Pi(w,u)$ является слабо полунепрерывным снизу и коэрцитивным; множество K_{Ω_1} слабо замкнуто. Таким образом, решение задачи минимизации существует по обобщенной теореме Вейерштрасса.

Запишем задачу в виде вариационного неравенства, эквивалентного задаче минимизации:

$$(w,u) \in K_{\Omega_1}, \quad \int\limits_{\Omega_2} a_{ijkl} w_{,kl} (\bar{w} - w)_{,ij} - \tag{13}$$

$$- \int\limits_{\Omega} g(\bar{w} - w) + \int\limits_{\gamma} b u_{xx} (\bar{u} - u)_{xx} - \int\limits_{\gamma} f(\bar{u} - u) \geq 0 \quad \forall (\bar{w}, \bar{u}) \in K_{\Omega_1}. \tag{14}$$

Нетрудно показать, что решение вариационной задачи (13), (14) единственно. Из вариационного неравенства получена дифференциальная постановка задачи. Найти функции w, u, определенные в Ω, γ соответственно, такие, что:

$$-\nabla\nabla m = g \text{ в } \Omega_2, \tag{15}$$

$$m + A\nabla\nabla w = 0 \text{ в } \Omega_2, \tag{16}$$

$$w = w_n = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{17}$$

$$w - u \geq 0, \quad [w] = [w_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \tag{18}$$

$$u = u_x = 0 \text{ на } \partial\gamma, \tag{19}$$

$$w|_{\Omega_1} = l_0, \text{ где } l_0 \in L(\Omega_1), \tag{20}$$

$$(b u_{xx})_{xx} - f \leq 0 \text{ на } \gamma, \tag{21}$$

$$((b u_{xx})_{xx} - f)(w - u) = 0 \text{ на } \gamma, \tag{22}$$

$$\int\limits_{\Sigma} t^\nu(m) l - \int\limits_{\Sigma} m_\nu l_\nu - \int\limits_{\Omega_1} g l + \int\limits_{\gamma} ((b u_{xx})_{xx} - f) l = 0 \quad \forall l \in L(\Omega_1). \tag{23}$$

Отметим, что уравнение равновесия и состояния пластины (15), (16) выполняются в области упругости пластины. Условие равновесия жесткой подобласти Ω_1 описывается интегральным соотношением (23), имеющим место для всех функций из пространства, задающего структуру жестких перемещений. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2 *Если решение вариационного неравенства (13), (14) достаточно гладкое, то оно удовлетворяет системе (15)—(23). Гладкое решение краевой задачи (15)—(23) является решением вариационного неравенства (13), (14).*

Таким образом, существует единственное решение краевой задачи (15)—(23).

Во второй и третьей главах рассматривается задача об одностороннем контакте двух упругих пластин, расположенных под заданным углом α друг к другу и в естественном состоянии контактирующих по линии γ. Нижнюю пластину можно интерпретировать как тонкое упругое препятствие для верхней пластины. Центральной особенностью задачи является наличие одного или двух жестких включений в пластинах.

В пункте 2.1. описана геометрия данной задачи. Пусть ограниченные области $\Omega, G \subset \mathbb{R}^2$ отвечают срединным плоскостям верхней и нижней пластин соответственно, при этом Γ — граница области Ω, кривая класса $C^{1,1}$, а ∂G — граница области G, кривая класса $C^{0,1}$. Пусть $\gamma \subset \partial G$, $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$, и $\partial G = \gamma \cup \bar{\gamma_0}$. Нижняя пластина перемещается в своей плоскости, а верхняя подвержена изгибу, функции $w(\mathbf{y})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G$ описывают перемещения точек верхней и нижней пластин соответственно. Обозначим $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ — вектор внешней нормали к границе Γ, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор нормали к γ, расположенный в плоскости Ω, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ — вектор нормали к γ, расположенный в плоскости G. Будем рассматривать пространство функций $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$, где

$$H^1_{\gamma_0}(G) = \{\mathbf{u} \in [H^1(G)]^2 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0\}.$$

Кроме того, на нижнюю и верхнюю пластины действуют внешние силы $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$, $g_i \in L^2(G)$, $i = 1, 2$; $f \in L^2(\Omega)$ соответственно.

Для описания верхней пластины вводится билинейная форма

$$a_\Omega(w, v) = \int\limits_\Omega (w_{,11}v_{,11} + w_{,22}v_{,22} + æ(w_{,11}v_{,22} + w_{,22}v_{,11}) + 2(1 - æ)w_{,12}v_{,12}),$$

где æ — коэффициент Пуассона, изгибающий момент $m(w) = æ\triangle w + (1 - æ)\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2}$ и перерезывающая сила

$$t^\nu(w) = \frac{\partial}{\partial \nu}(\triangle w + (1 - æ)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}),\ s = (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Нижняя пластина характеризуется симметричным, положительно определенным тензором модулей упругости $B = \{b_{ijkl}\}$, $b_{ijkl} \in L^\infty(G)$, тензорами деформаций $\varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$ и напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$:

$$\sigma\mathbf{n} = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), i, j = 1, 2.$$

Функционал энергии на $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$ имеет следующий вид:

$$E(\mathbf{u}, w) = \frac{1}{2}\int\limits_G \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{u}) - \int\limits_G \mathbf{g}\mathbf{u} + \frac{1}{2}a_\Omega(w, w) - \int\limits_\Omega fw.$$

Далее во второй главе рассматривается одно жесткое включение в нижней или верхней пластинах, выходящее на область возможного контакта пластин γ.

В пункте 2.2. предполагаем, что нижняя пластина G содержит жесткое включение — подобласть $\omega \subset G$. При этом $G \setminus \bar{\omega}$ соответствует упругой части пластины, в которой выполняется закон Гука $\sigma = B\varepsilon(\mathbf{u})$. Разобьем линию возможного контакта на три части: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, тогда границу подобласти ω обозначим $\partial\omega = \gamma_2 \cup \Sigma_0$, где Σ_0 является кривой класса $C^{0,1}$.

Перемещения точек жесткого включения ω принадлежат пространству инфинитезимальных жестких перемещений

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) | \rho(x) = Cx + D, x \in \omega\},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, D = (d^1, d^2), \quad \text{где } c, d^1, d^2 = const.$$

Допустимыми перемещениями будут являться элементы следующего множества, задающего условие взаимного непроникания пластин и структуру перемещений точек ω:

$$K_\omega = \{(\mathbf{u}, w) \in H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega) |\ \mathbf{un}\sin\alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma; \mathbf{u}|_\omega \in R(\omega)\}.$$

Решение задачи минимизации функционала $E(\mathbf{u}, w)$ на множестве K_ω существует по обобщенной теореме Вейерштрасса. Задача может быть записана в эквивалентном виде:

$$(\mathbf{u}, w) \in K_\omega, \tag{24}$$

$$\int\limits_{G\setminus\bar{\omega}} \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - \int\limits_G \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) + a_\Omega(w, \bar{w} - w) - \int\limits_\Omega f(\bar{w} - w) \geq 0 \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) \in K_\omega. \tag{25}$$

Решение данной вариационной задачи единственно. Из вариационного неравенства получена дифференциальная постановка задачи. Найти функции $\mathbf{u}$, w, определенные в G и Ω соответственно, такие, что:

$$-div(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \text{ в } G \setminus \bar{\omega}, \tag{26}$$

$$\triangle^2 w = f \text{ в } \Omega_\gamma, \tag{27}$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0, \tag{28}$$

$$w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{29}$$

$$\mathbf{u}|_\omega = \rho_0, \text{ где } \rho_0 \in R(\omega), \tag{30}$$

$$\mathbf{un} \sin\alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma, \tag{31}$$

$$[w] = [w_\nu] = 0, \quad [m(w)] = 0, \quad [t^\nu(w)] \geq 0, \quad [t^\nu(w)](\mathbf{un}\sin\alpha + w) = 0 \text{ на } \gamma, \tag{32}$$

$$[t^\nu(w)]\mathbf{n}\sin\alpha = -\sigma\mathbf{n} \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_3, \tag{33}$$

$$\int\limits_{\Sigma_0} \sigma\mathbf{n}\cdot\rho + \int\limits_{\gamma_2} [t^\nu(w)]\rho\mathbf{n}\sin\alpha + \int\limits_{\omega} \mathbf{g}\rho = 0 \;\; \forall \rho \in R(\omega). \tag{34}$$

Отметим, что уравнение равновесия нижней пластины (26) выполнено в подобласти упругости, уравнение верхней пластины (27) — в области с разрезом. Условия (28), (29) обеспечивают жесткое защемление пластин на внешних границах. Условие равновесия жесткой подобласти ω описывается интегральным соотношением (34), имеющим место для всех функций из пространства, задающего структуру жестких перемещений. Имеет место следующая теорема:

Теорема 3 *Пусть возможно продолжение γ до замкнутой кривой класса $C^{1,1}$. Если решение вариационного неравенства (24), (25) является достаточно гладким, то оно удовлетворяет системе (26)—(34). Гладкое решение краевой задачи (26)—(34) является решением вариационного неравенства (24), (25).*

Таким образом, существует единственное решение краевой задачи (26)—(34).

Пункт 2.3. посвящен анализу других возможных расположений жесткого включения в нижней пластине. Если ω полностью выходит на γ или кроме области возможного контакта пластин дополнительно выходит на часть границы нижней пластины, не контактирующую с верхней, то перемещения точек ω нулевые. Имеем задачу о контакте верхней пластины с абсолютно жестким препятствием и задачу о равновесии нижней пластины с абсолютно жестким включением, функции w и $\mathbf{u}$ находятся независимо. Если же происходит односторонний выход жесткого включения на границу области возможного контакта пластин в точке x_0, то мы получаем условие на жестком включении, выполненное для особого класса функций. А именно, условие на жестком включении выполнено не для всех $\rho \in R(\omega)$, а для таких, которые принимают нулевое значение в точке x_0.

В пункте 2.4. показано, что исследуемая задача с жестким включением в нижней пластине может быть получена как предельная для семейства задач с параметром $\lambda > 0$, описывающих односторонний контакт двух упругих пластин, расположенных под углом α друг к другу:

$$b_{ijkl}^{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} b_{ijkl}, & x \in \omega, \quad 0 < \lambda < \lambda_0; \\ b_{ijkl}, & x \in G \setminus \overline{\omega}. \end{cases}$$

В задачах из указанного семейства при каждом $\lambda > 0$ подобласть ω соответствует упругому включению в пластине, а при $\lambda = 0$ точка $x \in \omega$ будет иметь перемещение $\rho_0(x) \in R(\omega)$.

В пункте 2.5. рассматривается выход γ на границу верхней пластины Γ. Область возможного контакта пластин разбивается на четыре части, при этом $\gamma_1 \cup \gamma_2$ является частью границы Γ, а $\gamma_3 \cup \gamma_4$ лежит внутри области Ω. Предполагаем, что жесткое включение в нижней пластине выходит на $\gamma_2 \cup \gamma_3$. Таким образом, на каждом из четырех участков γ выполняются различные краевые условия. Краевые условия выписаны в предположении, что формула Грина может быть применена к областям с кусочно-гладкими границами, а также в предположении достаточной гладкости решения. При этом с помощью метода фиктивных областей построено семейство задач в расширенной области и показано, что решения этих задач сходятся к решению исходной.

В пункте 2.6. предполагаем, что нижняя пластина не содержит жестких включений, а подобласть $\omega_1 \subset \Omega$ с границей $\gamma_2 \cup \Sigma_1$ (где Σ_1 кривая класса $C^{1,1}$) — жесткое включение в верхней пластине. Обозначим $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ — внутренняя нормаль к Σ_1. Перемещения точек жесткого включения ω_1 представляют собой элементы пространства аффинных непрерывных функций $L(\omega_1)$. Множество допустимых перемещений задает условие непроникания и структуру перемещений точек ω_1:

$$K_{\omega_1} = \{(\mathbf{u}, w) \in H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega) |\ \mathbf{un} \sin\alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma; w|_{\omega_1} \in L(\omega_1)\}.$$

Задача минимизации функционала $E(\mathbf{u}, w)$ на множестве K_{ω_1} эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$(\mathbf{u}, w) \in K_{\omega_1}, \quad \int\limits_G \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) - \tag{35}$$

$$-\int\limits_G \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}) + a_{\Omega\setminus\bar{\omega}_1}(w,\bar{w}-w) - \int\limits_\Omega f(\bar{w}-w) \geq 0 \quad \forall(\bar{\mathbf{u}},\bar{w}) \in K_{\omega_1}. \quad (36)$$

Отметим, что выполнены все условия обобщенной теоремы Вейерштрасса, и вариационная задача имеет единственное решение.

Из вариационного неравенства (35), (36) получена дифференциальная постановка задачи. Найти функции $\mathbf{u}$, w, определенные в G и Ω соответственно, такие, что:

$$-div(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \text{ в } G, \quad (37)$$

$$\triangle^2 w = f \text{ в } \Omega\setminus(\bar{\omega}_1\cup\bar{\gamma}), \quad (38)$$

$$\mathbf{u}=0 \text{ на } \gamma_0, \quad w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (39)$$

$$w|_{\omega_1} = l_0, \text{ где } l_0 \in L(\omega_1), \quad (40)$$

$$\mathbf{un}\sin\alpha + w \geq 0, \quad [w]=[w_\nu]=0 \text{ на } \gamma, \quad (41)$$

$$\sigma_n \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_n(\mathbf{un}\sin\alpha + w) = 0 \text{ на } \gamma, \quad (42)$$

$$[m(w)]=0, \quad [t^\nu(w)]\mathbf{n}\sin\alpha = -\sigma\mathbf{n} \quad \text{на } \gamma_1\cup\gamma_3, \quad (43)$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\int\limits_{\gamma_2}\sigma_{\mathbf{n}} l + \int\limits_{\gamma_2} t^\nu(w)^+ l - \int\limits_{\gamma_2} m(w)^+ l_\nu - \int\limits_{\Sigma_1} t^\mu(w)^- l + \int\limits_{\Sigma_1} m(w)^- l_\mu - \int\limits_{\omega_1} fl = 0$$

$$\forall l \in L(\omega_1). \quad (44)$$

Здесь $\sigma_n = \sigma_{ij}n_j n_i$, $\sigma_\tau = \sigma\mathbf{n} - \sigma_n\mathbf{n}$, $\sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2)$. Уравнение равновесия верхней пластины (38) выполнено в подобласти упругости с разрезом. Условие равновесия жесткой подобласти ω_1 описывается интегральным соотношением (44), верным для всех функций из пространства, задающего структуру жестких перемещений. В работе доказано следующее утверждение:

Теорема 4 *Пусть возможно продолжение γ до замкнутой кривой класса $C^{1,1}$. Если решение вариационного неравенства (35), (36) является достаточно гладким, то оно удовлетворяет системе (37)—(44). Гладкое решение краевой задачи (37)—(44) является решением вариационного неравенства (35), (36).*

Отсюда заключаем, что решение краевой задачи (37)—(44) существует и единственно.

В третьей главе предполагаем, что и верхняя, и нижняя пластины содержат жесткие включения. Влияние внешних сил на жесткие части пластин описывается с помощью уравнения и неравенства в соответствии с принципом виртуальных перемещений, смысл которого состоит в следующем: работа внутренних сил на допустимых перемещениях точек тела не меньше, чем работа внешних сил, а на истинных перемещениях работа обращается в нуль. Оказывается, что принцип виртуальных перемещений в точности эквивалентен вариационному принципу.

В пункте 3.1. жесткие включения в верхней и нижней пластинах — подобласть ω_1 с границей $\partial\omega_1 = \gamma_2 \cup \Sigma_1$ (где Σ_1 кривая класса $C^{1,1}$) и подобласть $\omega_2 \subset G$ с границей $\partial\omega_2 = \gamma_2 \cup \Sigma_0$ (где Σ_0 кривая класса $C^{0,1}$) — контактируют по участку γ_2, при этом линия возможного контакта пластин разбивается на три части: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. Предполагаем в этом пункте, что $\partial\omega_1 \cap \Gamma = \emptyset$. Перемещения точек ω_1 обладают структурой аффинных непрерывных функций $L(\omega_1)$, перемещения точек ω_2 принадлежат пространству инфинитезимальных жестких перемещений $R(\omega_2)$. Рассматривается множество допустимых перемещений

$$K_{\omega_1,\omega_2} = \{(\mathbf{u}, w) \in H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega) |\ \mathbf{un}\sin\alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma;$$

$$w|_{\omega_1} \in L(\omega_1), \mathbf{u}|_{\omega_2} \in R(\omega_2)\}.$$

Задача ставится следующим образом. Требуется найти функции $\mathbf{u}$, w, определенные в G и Ω соответственно, такие, что:

$$-div(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \text{ в } G \setminus \bar{\omega}_2, \tag{45}$$

$$\triangle^2 w = f \text{ в } \Omega \setminus (\bar{\omega}_1 \cup \bar{\gamma}), \tag{46}$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0, \quad w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{47}$$

$$\mathbf{u}|_{\omega_2} = \rho_0, \text{ где } \rho_0 \in R(\omega_2), \tag{48}$$

$$w|_{\omega_1} = l_0, \text{ где } l_0 \in L(\omega_1), \tag{49}$$

$$\mathbf{un}\sin\alpha + w \geq 0, \quad [w] = [w_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \tag{50}$$

$$[m(w)] = 0, \quad [t^\nu(w)] \geq 0,$$

$$[t^\nu(w)]\mathbf{n}\sin\alpha = -\sigma\mathbf{n}, \quad [t^\nu(w)](\mathbf{un}\sin\alpha + w) = 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_3, \tag{51}$$

$$-\int\limits_{\Sigma_0} \sigma\mathbf{n}\cdot\psi + \int\limits_{\gamma_2} t^\nu(w)^+\varphi - \int\limits_{\gamma_2} m(w)^+\varphi_\nu - \int\limits_{\Sigma_1} t^\mu(w)^-\varphi + \int\limits_{\Sigma_1} m(w)^-\varphi_\mu -$$

$$-\int\limits_{\omega_2} \mathbf{g}\psi - \int\limits_{\omega_1} f\varphi \geq -\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_3} [t^\nu(w)](\psi\mathbf{n}\sin\alpha + \varphi) \quad \forall(\psi,\varphi) \in K_{\omega_1,\omega_2}, \tag{52}$$

$$
-\int\limits_{\Sigma_0} \sigma\mathbf{n}\cdot\rho_0 + \int\limits_{\gamma_2} t^\nu(w)^+ l_0 - \int\limits_{\gamma_2} m(w)^+(l_0)_\nu - \int\limits_{\Sigma_1} t^\mu(w)^- l_0 + \int\limits_{\Sigma_1} m(w)^-(l_0)_\mu -
$$

$$
-\int\limits_{\omega_2} \mathbf{g}\rho_0 - \int\limits_{\omega_1} f l_0 = 0. \tag{53}
$$

Уравнение равновесия нижней пластины (45) справедливо в подобласти упругости, уравнение равновесия верхней пластины (46) выполнено в подобласти упругости с разрезом. В области $G\setminus\bar{\omega}_2$ выполняется закон Гука $\sigma = B\varepsilon(\mathbf{u})$. Условия (47) обеспечивают жесткое защемление пластин. Условия (52) и (53) представляют собой реализацию принципа виртуальных перемещений. Здесь $w|_{\omega_1} = l_0$ и $\mathbf{u}|_{\omega_2} = \rho_{\mathbf{0}}$, где $l_0 \in L(\omega_1)$, $\rho_0 \in R(\omega_2)$.

Вариационная постановка задачи имеет следующий вид:

$$
(\mathbf{u}, w) \in K_{\omega_1,\omega_2}, \qquad \int\limits_{G\setminus\bar{\omega}_2} \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}) - \tag{54}
$$

$$
-\int\limits_{G} \mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}) + a_{\Omega\setminus\bar{\omega}_1}(w, \bar{w}-w) - \int\limits_{\Omega} f(\bar{w}-w) \geq 0 \quad \forall (\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) \in K_{\omega_1,\omega_2}. \tag{55}
$$

Отметим, что решение задачи (54), (55) существует (по обобщенной теореме Вейерштрасса) и единственно.

Имеет место следующий результат:

Теорема 5 *Пусть возможно продолжение γ до замкнутой кривой класса $C^{1,1}$. Если решение вариационного неравенства (54), (55) является достаточно гладким, то оно удовлетворяет системе (45)—(53). Гладкое решение краевой задачи (45)—(53) является также решением вариационного неравенства (54), (55).*

Таким образом, решение краевой задачи (45)—(53) существует и единственно.

В пункте 3.2. рассматривается случай, в котором жесткое включение в верхней пластине выходит на всю линию контакта. В предположении гладкости решения получена дифференциальная постановка задачи, эквивалентная вариационной.

Пункт 3.3. посвящен выходу на линию контакта жесткого включения нижней пластины. Эту задачу можно сформулировать в виде вариационного неравенства:

$$
w \in K_{\omega_1} = \{w \in H_0^2(\Omega) |\ w \geq 0 \text{ на } \gamma; w|_{\omega_1} \in L(\omega_1)\}, \tag{56}
$$

$$a_{\Omega\setminus\bar\omega_1}(w,\bar w - w) - \int\limits_{\Omega} f(\bar w - w) \ge 0 \quad \forall \bar w \in K_{\omega_1}, \tag{57}$$

описывающего контакт упругой пластины, содержащей жесткое включение, с абсолютно жестким препятствием, и уравнения Эйлера для задачи о равновесии тела с абсолютно жестким включением:

$$\mathbf{u} \in K_{\omega_2} = \{\mathbf{u} \in H^1_{\gamma_0}(G) |\ \mathbf{u}|_{\omega_2} = 0\},$$

$$\int\limits_{G\setminus\bar\omega_2} \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - \int\limits_{G\setminus\bar\omega_2} \mathbf{g}\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K_{\omega_2}.$$

Задача распадается на две подзадачи, для каждой из которых решение единственно и находится независимо от решения другой. Для каждой из подзадач в предположении гладкости решения найдена дифференциальная постановка, эквивалентная вариационной.

В этом же пункте анализируется предельный случай, соответствующий возрастанию параметра жесткости нижней пластины до бесконечности. Для этого вместо закона Гука $\sigma = B\varepsilon(\mathbf{u})$ в (45) рассматривается семейство законов, характеризующихся параметром β:

$$\sigma^\beta = \frac{B}{\beta}\varepsilon(\mathbf{u}^\beta), \quad \beta > 0.$$

Предельная задача описывается в точности вариационным неравенством (56)-(57).

В пункте 3.4. предполагаем, что жесткое включение в верхней пластине выходит на границу Γ области Ω, где пластина является жестко защемленной. Таким образом, мы получаем задачу о контакте двух пластин, верхняя из которых содержит абсолютно жесткое включение, а нижняя — жесткое включение, перемещения точек которого принадлежат пространству инфинитезимальных жестких перемещений. Решение данной задачи существует и единственно. В предположении достаточной гладкости решения выписана дифференциальная постановка задачи,эквивалентная вариационной.

Также в этом пункте анализируется предельная задача, возникающая при неограниченном возрастании параметра жесткости верхней пластины.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю профессору А.М. Хлудневу за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. *Стекина Т.А.* Вариационная задача об одностороннем контакте упругой пластины с балкой// Вестн. НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т.9, №1. С. 46-56.

2. *Ротанова Т.А.* Задача об одностороннем контакте двух пластин, одна из которых содержит жесткое включение // Вестн. НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т.11, №1. С. 87-98.

3. *Ротанова Т.А.* Контакт пластин, жесткие включения в которых выходят на границу // Вестн. Томск. гос. ун-та. Серия: Математика и механика. 2011. Т.15, №3. С. 99-107.

4. *Ротанова Т.А.* О постановках и разрешимости задач о контакте двух пластин, содержащих жесткие включения // Сиб. журнал индустриальной математики. 2012. Т.15, №2. С. 107-118.

5. *Стекина Т.А.* Вариационная задача об одностороннем контакте упругой пластины с балкой // Материалы XLVI МНСК. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. 2008.

6. *Ротанова Т.А.* Задача об одностороннем контакте двух пластин, одна из которых содержит жесткое включение // XIV Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды»: Тез.докл. Ростов н/Д, Изд-во ЮФУ. 2010. С. 75.

7. *Ротанова Т.А.* Задача о контакте двух пластин, каждая из которых содержит жесткое включение // Материалы Всероссийской молодежной научной конференции Томского государственного университета. Томск: Изд-во Том. ун-та. 2010. С. 183-186.

8. *Ротанова Т.А.* Задачи о контакте упругих пластин с жесткими включениями // VI Международная конференция по математическому моделированию: Тез. докл. / Под редакцией И.Е. Егорова, В.И. Васильева. Якутск: ОАО. Медиа-холдинг Якутия. 2011. С. 208-209.

9. *Ротанова Т.А.* Односторонний контакт упругих пластин с жесткими включениями // «Математическое моделирование и краевые задачи»: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Самара: СамГТУ. 2011. С. 187-190.

10. *Rotanova T.* Contact Problem for two Plates Containing Rigid Inclusions // Book of Abstracts of XXXIX International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics». St.-Petersburg: Institute for Problems in Mechanical Engineering. 2011. P. 78.

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ, СОДЕРЖАЩИХ ЖЕСТКИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

автореферат

РОТАНОВА Татьяна Александровна

Подписано в печать Отпечатано