УДК 519.716

В. И. Пантелеев

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ ДЛЯ НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ*

Рассматриваются булевы функции с двумя видами неопределенности. Вводится соответствующее определение суперпозиции, замкнутых классов и доказывается критерий полноты.

Ключевые слова: частичные булевы функции, частичные гиперфункции, клон, частичный гиперклон, замкнутые классы, максимальные классы.

Введение

При построении математических моделей часто возникают ситуации неопределенности или запретности информации. Для обработки такого рода информации используются недоопределенные частичные отображения, то есть отображения из множества A в множество всех подмножеств множества B. Образ элемента отражает степень его неопределенности (в частности, пустое множество определяет запретность данных, а одноэлементное — однозначность данных).

Особый интерес вызывает случай, когда $A = B = \{0, 1\}$, т. е. случай булевых функций (или функций алгебры логики) с двумя видами неопределенности. В [1], например, показана связь таких функций и булевых уравнений.

В данной работе рассматриваются эти функции с соответствующей операцией суперпозиции, относительно которой стандартным образом определяются полные множества. Основным результатом является доказательство критерия функциональной полноты.

Пусть $E = \{0, 1\}$, $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Тогда функции $f : E^n \to E$ назовем всюду определенными (P_2 — множество всех всюду определенных функций); $f : E^n \to F$ — недоопределенными частичными булевыми функциями (нчбф) (P_2^{∇} — множество всех недоопределенных частичных булевых функций).

Если $f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})$ — n-местные, $f(x_1, \ldots, x_m)$ — m-местная нчбф, то суперпозиция $f(f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x}))$ определяет функцию $g(\tilde{x})$ следующим образом: для любого набора значений переменных $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n$

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если существует } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ для которого} \\ \qquad f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varnothing; \\ \bigcup f(\beta_1, \ldots, \beta_m) \mid \beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ i \in \{1, \ldots, m\} \\ \qquad \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Определение (1) фактически задает вложение P_2^{∇} в множество P_4 — множество функций 4-значной логики, при этом каждая такая функция однозначно определяет-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00240).

ся своими значениями на наборах из множества E. Определим 4-х значные функции как функции на множестве $F' = \{*, 0, 1, -\}$ при соответствии $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$. Отношение $\subseteq$ на множестве F порождает порядок $\leq$ на множестве F', который можно распространить на наборы, построенные из элементов F':

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \ (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

На наборах, построенных из 0 и 1, нчбф может принимать любое значение из множества F', на наборах, содержащих хотя бы одну $*$, функция обязательно принимает значение $*$, на остальных наборах значение функции вычисляется в соответствии с (1), а именно (обозначим рассматриваемую функцию через g): если $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (F' \setminus \{*\})^n$, то

$$g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \max(g(\delta_1, \ldots, \delta_n) \mid \delta_i \leq \gamma_i, \delta_i \in \{0,1\}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}). \tag{2}$$

Из (2) сразу же вытекает, что если функция g является суперпозицией функций $f, f_1, \ldots, f_m$ в соответствии с (1), то для любого набора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (F' \setminus \{-\})^n$ выполняется

$$g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = f(f_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \ldots, f_m(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)), \tag{3}$$

а для набора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (F' \setminus \{*\})^n$ выполняется

$$g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \leq f(f_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \ldots, f_m(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)). \tag{4}$$

Обозначим рассматриваемое подмножество множества P_4 через P_2^{*-}.

Функции из P_2^{*-} будем задавать ее значениями на двоичных наборах, при этом двоичные наборы будем считать заданными в соответствии с натуральным порядком: например, запись $f = (*0-1)$ означает, что $f(00) = *$, $f(01) = 0$, $f(10) = -$, $f(11) = 1$. Для вектора значений функции будем использовать запись как в виде строки, так и в виде столбца.

Переменная x_i называется несущественной для n-местной функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in \in P_2^{*-}$, если для любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ из F' выполняется равенство

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

В противном случае переменная x_i называется существенной. Операции удаления и добавления несущественных переменных определяются обычным образом.

Для множества функций B замыкание $[B]$ определим следующим образом:

1. Тождественная функция, т. е. функция $e(x) = (01)$ принадлежит $[B]$.

2. Любая функция из B принадлежит $[B]$.

3. Если некоторая функция f принадлежит $[B]$, то и все функции, полученные из f удалением или добавлением несущественных переменных, принадлежат $[B]$.

4. Если $f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})$ — n-местные, $f(x_1, \ldots, x_m)$ — m-местная нчбф из $[B]$, то функция $g(\tilde{x})$, являющаяся суперпозицией

$$f(f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})),$$

принадлежит $[B]$.

5. Других функций в $[B]$ нет.

Множество функций называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием, и полным в замкнутом множестве M, если его замыкание совпадает с M. Множество функций A называется предполным в замкнутом множестве B, если $[A] \neq B$, но $[A \cup \{f_A\}] = B$, где $f_A \notin A$.

Можно заметить, что следующие множества являются замкнутыми: P_2; P_2^* — множество функций, принимающих только значения $*, 0, 1$; P_2^- — множество функций, принимающих только значения $0, -, 1$ (мы говорим о значениях функций на двоичных наборах). При этом первое множество содержит 5 предполных классов [2], второе — 8 предполных классов [3], а третье — 9 предполных классов [4].

В теории конечнозначных функций при описании замкнутых классов часто используются классы функций, сохраняющих предикат (см., например: [5]).

Пусть R^s — s-местный предикат, заданный на множестве F'. Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет предикат R^s, если для любых n наборов $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{s1})$, $\dots$, $(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{sn})$ принадлежащих предикату, набор

$$(f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит R^s.

Тождественная функция $e(x) = (01)$, очевидно, сохраняет любой предикат, определенный на множестве F', но функции, полученные из e добавлением несущественных переменных, не всегда сохраняют предикат. Достаточно посмотреть следующий пример: $g = (0011)$, $R = \{(----), (*000)\}$.

Пусть функции $f, f_1, \dots, f_m$ сохраняют предикат R^s, определенный на множестве F', $g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1, \dots, f_m)$, наборы

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{s1}), \dots, (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{sn})$$

принадлежат R^s. Тогда набор

$$(f(f_1(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f_m(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})), \dots, \\ f(f_1(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}), \dots, f_m(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn})))$$

в соответствии с определением принадлежит предикату. Но набор

$$(g(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, g(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}))$$

в соответствии с (4) не обязательно принадлежит предикату.

В дальнейшем наряду с $(f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}))$ будем использовать обозначение $f\begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \dots \\ \alpha_{s1} \dots \alpha_{sn} \end{pmatrix}$ и при этом указывать только различные столбцы, не обязательно сохраняя их порядок, соответственно, и наборы, принадлежащие предикату, будем записывать также в виде столбцов, а сам m-местный предикат, содержащий r наборов, задавать в виде $(m \times r)$ матрицы. Символ t будем использовать в качестве указания для транспонирования.

Обозначим через U множество всех одноместных функций, через $U^{\neg}$ — множество всех одноместных функций без отрицания и через U^- — множество всех одноместных функций, принадлежащих P_2^*, а через f_A — функцию, которая не принадлежит множеству A.

Для набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (F' \setminus \{*\})^n$ набор $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in E^n$, где $\beta_i \leq \alpha_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ назовем уточнением.

§ 1. Некоторые полные множества

Приведем примеры полных множеств, на которые мы сошлемся при доказательстве критерия полноты.

Для $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_2^{*-}$ определим f_0 — 0-характеристическую функцию следующим образом: $f_0(\tilde\sigma) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde\sigma) \in \{0,-\}$, в противном случае $f_0(\tilde\sigma) = 0$ ($\tilde\sigma \in E^n$). Аналогично определяется f_1 — 1-характеристическая функция для f: $f_1(\tilde\sigma) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde\sigma) \in \{1,-\}$. Отметим, что характеристические функции принадлежат P_2.

Определим бинарную функцию $x \triangleright y$:

$$1 \triangleright 0 = 0, \quad 0 \triangleright 1 = 1, \quad 0 \triangleright 0 = *, \quad 1 \triangleright 1 = -.$$

Предложение 1 [1]. *Множество функций $R = P \cup \{\triangleright\}$, где P — полное множество в классе P_2, является полным в классе P_2^{*-}.*

Доказательство следует из равенства $f = f_0 \triangleright f_1$, справедливого для любой $f \in P_2^{*-}$.

Определим унарную нчбф. $\lambda(x)$: $\lambda(0) = *, \lambda(1) = -$.

Предложение 2 [1]. *Множество функций $S = P \cup \{\lambda\}$, где P — полное множество в классе P_2, является полным в классе P_2^{*-}.*

Доказательство следует из предложения 1 и представления $\triangleright$ следующей суперпозицией: $x \triangleright y = x \to y\lambda(x \vee y)$.

Пусть $h(x,y,z) = (*0000000)$.

Предложение 3. *Множество функций $A_1 = U \cup \{h\}$ является полным в P_2^{*-}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $h(x,y,z)$ и $\bar x$ позволяют получить функции $h_i(x,y,z)$, где в h_i на всех позициях (кроме i-й) стоит 0, а на i-й позиции стоит $*$ ($i \in \{1,\ldots,8\}$), используя которые и функцию (01010101), можно получить $g(x,y,z) = (0*0*0**1)$. Если $g_1 = (1100)$, $g_2 = (1010)$, $g_3 = (-0-0)$, то суперпозиция $g(g_1,g_2,g_3) = (1000)$.

Пусть $u(x,y) = (0---)$.

Предложение 4. *Множество функций $A_2 = U \cup \{u\}$ является полным в P_2^{*-}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующая цепочка суперпозиций приводит к функции (1110).

$$\begin{matrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ - & - \\ - & - \\ - & - \end{pmatrix} = \begin{matrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix};\begin{matrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ * \\ 0 \end{matrix};\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ * \\ 1 \end{matrix};\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ * \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & - \\ 1 & 0 \\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ - \\ * \\ 1 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} 0 \\ - \\ * \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & - \\ - & - \\ - & - \\ - & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ - \\ - \\ 0 \end{matrix};\begin{matrix} 0 \\ - \\ * \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ - & 0 \\ - & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 1 \end{matrix};\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ * \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ - & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}.$$

§ 2. Замкнутые классы

Введем в рассмотрение 15 множеств, содержащих тождественную функцию $e(x)$.

I. $K_1 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f \equiv *$ или $f(0, \ldots, 0) \in \{0, -\}\}$.

II. $K_2 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f \equiv *$ или $f(1, \ldots, 1) \in \{1, -\}\}$.

III. $K_3 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f(0, \ldots, 0) \in \{0, *\}\}$.

IV. $K_4 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f(1, \ldots, 1) \in \{1, *\}\}$.

V. $K_5 = P_2^- \cup \{*\}$.

VI. $K_6 = P_2^*$.

VII. $K_7 = \{f | * \in \{f(0, \ldots, 0), f(1, \ldots, 1)\} \cup [e]$.

VIII. K_8 — класс функций, сохраняющих предикат

$$R_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & - \\ 0 & 1 & * & - \end{pmatrix}.$$

IX. K_9 — класс функций, сохраняющих предикат

$$R_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & - & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * \end{pmatrix}.$$

X. K_{10} — класс функций, сохраняющих предикат

$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & 0 & - & 1 & * \\ 1 & 0 & 1 & - & 1 & 0 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

XI. K_{11} — класс функций, сохраняющих предикат

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & - & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & - & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

XII. K_{12} — класс функций, сохраняющих предикат R_{12}. R_{12} содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 0 & 1 & 1 & - & 1 & 0 & - & - & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 & 1 & - & 0 & 1 & - & 0 & 1 & 0 & - & - & - & 1 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

XIII. K_{13} — класс функций, сохраняющих предикат R_{13}. R_{13} содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & - & - & 0 & 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & 1 & - & 0 & - & 1 & 0 & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix}.$$

XIV. K_{14} — класс функций, сохраняющих предикат R_{14}. R_{14} не содержит наборы $(\alpha, \beta, \gamma \neq *)$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и не содержит наборы $(\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4)$ такие, что $\delta_i \neq *$ $(i \in \{1,2,3,4\})$, и среди $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ встречается $\alpha \in E$ и $\beta = -$.

XV. Для набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in (F')^n$ определим двойственный ему набор $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ следующим образом: если $\alpha_i = 0$, то $\beta_i = 1$; если $\alpha_i = 1$, то $\beta_i = 0$; в остальных случаях $\alpha_i = \beta_i$ $(i \in \{1,\ldots,n\})$.

K_{15} — класс функций, сохраняющих предикат R_{15}, не содержащий следующие наборы и двойственные к ним ($\alpha,\beta,\delta \neq *$, $\nu \in \{1,-\}$, $\mu \in \{0,1,-\}$).

$$\begin{pmatrix} * \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ - \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Предложение 5. *Множества функций $K_1 - K_7$ являются замкнутыми.*

Доказательство этого утверждения очевидно.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ сохраняет предикат R^m, переменная x_i несущественная. Тогда функция $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$, полученная из f удалением несущественной переменной x_i, сохраняет предикат R^m.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n) \notin R^m$ для некоторых $\tilde\alpha_1, \ldots, \tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n \in R^m$. Тогда несложно показать, что $g(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n) = f(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_n,\tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n)$. Получили противоречие с тем, что f сохраняет R^m. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть R^m — m-местный предикат. Пусть для любого набора $(\beta_1,\ldots,\beta_{i_1},\ldots,\beta_{i_2},\ldots,\beta_{i_s},\ldots,\beta_m)$ из R^m такого, что $\beta_{i_1},\beta_{i_2}\ldots,\beta_{i_s}$ и только они равны $*$, выполняется: если набор*

$$(\gamma_1,\ldots,\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_2},\ldots,\gamma_{i_s},\ldots,\gamma_m) \in R^m,$$

то набор

$$(\delta_1,\ldots,\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_2},\ldots,\delta_{i_s},\ldots,\delta_m) \in R^m,$$

где $\delta_j = *$ для $j \in \{i_1,i_2,\ldots,i_s\}$ и $\delta_j = \gamma_j$ для остальных j.

Тогда, если функция $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ сохраняет предикат R^m, то и функция $f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$, полученная из g добавлением несущественной переменной x_i, сохраняет R^m.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_i,\tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n) = \tilde\delta$, где наборы $\tilde\alpha_j = (\alpha_{1_j}\alpha_{2_j}\ldots\alpha_{m_j})^t$, $(j \in \{1,\ldots,n\})$ принадлежат R^m и в i-м столбце $*$ встречается только в строках с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_s$.

Обозначим набор $g(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n)$ через $\tilde\gamma$. Очевидно $f(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_n, \tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n) = g(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_{i-1},\tilde\alpha_{i+1},\ldots,\tilde\alpha_n)$.

Но набор $\tilde\delta$ получен из набора $\tilde\gamma$ заменой символов в $i_1,i_2,\ldots,i_s$ строках на $*$. Тогда по условию леммы $\tilde\delta \in R^m$.

Лемма доказана.

Следствие. *Множества $K_8 - K_{15}$ замкнуты относительно добавления и удаления несущественных переменных.*

Предложение 6. *Множества функций $K_8 - K_{11}$ являются замкнутыми относительно операции суперпозиции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \in \{8, 9, 10, 11\}$, функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ сохраняют предикат R_i,

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Предположим, что $h(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) \notin R_i$ для некоторых $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ из R_i. Очевидно, что ни один из $\tilde{\alpha}_k$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) не содержит $*$. Для любого набора $\tilde{\alpha}_k$ можно подобрать набор $\tilde{\gamma}_k \in R_i$ такой, что $\tilde{\gamma}_k \leq \tilde{\alpha}_k$, $\tilde{\gamma}_k \in E^2$ и $h(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n) = \tilde{\delta} \notin R_i$.

Но $h(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n) = f_0(f_1(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n), \ldots, f_m(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n))$. Получили противоречие с тем, что функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ сохраняют предикат R_i. Лемма доказана.

Предложение 7. *Множества функций K_{12}, K_{13} являются замкнутыми относительно операции суперпозиции.*

Доказательство проведем только для множества K_{12}, для K_{13} оно аналогично. Наборы без $*$, принадлежащие предикату R_{12}, обладают тем свойством, что при любой замене «$-$» на 0 или 1 в первой и второй строках получившийся набор, либо является двоичным и тоже принадлежит R_{12}, либо в нем в третьей строке можно так заменить «$-$» на 0 или 1, что полученный двоичный набор будет принадлежать предикату.

Предположим, что для некоторых наборов $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ из R_{12} выполняется $f(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) = (\beta_1 \beta_2 \beta_3)^t \notin R_{12}$. Наборы $\tilde{\alpha}_i$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) заменим на двоичные наборы $\tilde{\gamma}_i$ из R_{12} такие, что $\tilde{\gamma}_i \leq \tilde{\alpha}_i$ и при этом $f(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n) = (\delta_1 \delta_2 \delta_3)^t$.

В первой и второй строках наборов $\tilde{\alpha}_i$ замену выполняем в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

исход-	β_1	1	0	$-$	$-$	$-$	0
ный	β_2	$-$	$-$	1	0	0	0
набор	β_3	0	0	0	0	1	1
получив-	δ_1	1	0	$\in \{-, 1\}$	$\in \{-, 1\}$	$\in \{-, 0\}$	0
шийся							
набор	δ_2	$\in \{-, 0\}$	$\in \{-, 1\}$	1	0	0	0

исход-	β_1	$-$	$-$	0	α	1	1	0
ный	β_2	$-$	$-$	$-$	β	1	0	1
набор	β_3	0	1	1	$*$	0	0	0
получив-	δ_1	$\in \{-, 1\}$	$\in \{-, 0\}$	0	$\neq *$	1	1	0
шийся								
набор	δ_2	$\in \{-, 1\}$	$\in \{-, 0\}$	$\in \{-, 0\}$	$\neq *$	1	0	1

Если в третьей строке набора $\tilde{\alpha}_i$ стоит «$-$», то заменяем «$-$» на 0 или 1 так, чтобы полученный двоичный набор принадлежал предикату. Если же в третьей строке была константа 0 или 1, то получившийся набор все равно принадлежит предикату.

В результате таких замен $\delta_3 \in \{\beta_3, *\}$, а получившийся набор $(\delta_1 \delta_2 \delta_3)^t \notin R_{12}$. Если функция f является суперпозицией функций $f_0, f_1, \ldots, f_m$, сохраняющих R_{12}, то получаем противоречие.

Предложение 8. *Множество функций K_{14} является замкнутым относительно операции суперпозиции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = f_0(f_1, \ldots, f_m)$ и функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ сохраняют предикат R_{14}. Предположим, что для некоторых наборов $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ из R_{14} выполняется $f(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) = (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)^t \notin R_{14}$. Наборы $\tilde{\alpha}_i$ не должны содержать $*$ и по крайней мере один набор — это набор $(----)^t$. Двоичные наборы (без $*$), принадлежащие R_{14}, содержат четное число единиц, поэтому можно считать, что $\beta_1 = *$ или $\beta_1 \in \{0,1\}$.

Так как для любой тройки $(\delta_2\delta_3\delta_4) \in E^3$ есть двоичный набор $(\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4) \in R_{14}$, то наборы $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ можно заменить на двоичные наборы $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n$, принадлежащие R_{14} так, что

$$f(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n) = (\beta'_1\beta'_2\beta'_3\beta'_4)^t \notin R_{14}.$$

Если $\tilde{\alpha}_j$ — двоичный набор, то $\tilde{\gamma}_j = \tilde{\alpha}_j$, а если $\tilde{\alpha}_j = (----)^t$, то $\tilde{\gamma}_j = (\gamma_j^1\gamma_j^2\gamma_j^3\gamma_j^4)$ подбираем следующим образом:

- $\beta_1 = *$. Тогда $\gamma_j^2, \gamma_j^3, \gamma_j^4$ должны быть такими, что $\beta'_2 \neq *$, $\beta'_3 \neq *$, $\beta'_4 \neq *$.
- $\beta_1 = 0$ (случай $\beta_1 = 1$ аналогичен).

  1) $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -$. Тогда $\beta'_2 \in \{-,1\}$, $\beta'_3 \in \{-,1\}$, $\beta'_4 \in \{-,1\}$.
  2) $\beta_2 = \beta_3 = -$, $\beta_4 = 1$. Тогда $\beta'_2 \in \{-,0\}$, $\beta'_3 \in \{-,0\}$, $\beta'_4 \in \{1\}$.
  3) $\beta_2 = \beta_3 = -$, $\beta_4 = 0$. Тогда $\beta'_2 \in \{-,1\}$, $\beta'_3 \in \{-,0\}$, $\beta'_4 \in \{0\}$.
  4) $\beta_2 = -$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 0$. Тогда $\beta'_2 \in \{-,1\}$, $\beta'_3 \in \{0\}$, $\beta'_4 \in \{0\}$.
  5) $\beta_2 = -$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 1$. Тогда $\beta'_2 \in \{-,0\}$, $\beta'_3 \in \{0\}$, $\beta'_4 \in \{1\}$.
  6) $\beta_2 = -$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 1$. Тогда $\beta'_2 \in \{-,1\}$, $\beta'_3 \in \{1\}$, $\beta'_4 \in \{1\}$.
  7) В остальных случаях $\beta'_2 = \beta_2$, $\beta'_3 = \beta_3$, $\beta'_4 = \beta_4$.

Но для двоичных наборов $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n$

$$f(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n) = f_0(f_1(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n), \ldots, f_m(\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n)),$$

а функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ сохраняют предикат R_{14}. Получили противоречие. Утверждение доказано.

Предложение 9. *Множество функций K_{15} является замкнутым относительно операции суперпозиции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим вначале, что легко проверить следующее утверждение: если $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — два набора длины 4 такие, что 1) $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ совпадают в первой позиции; 2) $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$; 3) $\tilde{\alpha} \notin R_{15}$, то $\tilde{\beta} \notin R_{15}$.

Предположим, что $f = f_0(f_1, \ldots, f_m)$ и функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ сохраняют предикат R_{15}, $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ принадлежат R_{15}.

Пусть

$$f(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) = (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)^t = \tilde{\beta} \notin R_{15}.$$

Можно считать, что в каждом наборе $\tilde{\alpha}_i$ на четвертой позиции не встречается «$-$».

Заменим наборы $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ на $\tilde{\alpha}'_1, \ldots, \tilde{\alpha}'_n$: для $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\tilde{\alpha}'_j = \begin{cases} \tilde{\alpha}_j, & \text{если } \tilde{\alpha}_j \text{ начинается с 0 или 1;} \\ (- - -\alpha_j^4)^t, & \text{если } \tilde{\alpha}_j \text{ имеет вид } (-\alpha_j^2\alpha_j^3\alpha_j^4)^t. \end{cases}$$

Все наборы $\tilde{\alpha}'_j$ принадлежат R_{15}. Пусть $f(\tilde{\alpha}'_1, \ldots, \tilde{\alpha}'_n) = \tilde{\beta}'$. Так как $\tilde{\beta} \le \tilde{\beta}'$ (это легко получается из того, что $\tilde{\alpha}_j \le \tilde{\alpha}'_j$), причем эти наборы совпадают в первой позиции, то $\tilde{\beta}' \notin R_{15}$.

Обозначим через k число наборов из $\tilde{\alpha}'_1, \ldots, \tilde{\alpha}'_n$, начинающихся с «$-$».

Индуктивно построим последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_k$: $A_0 = (\tilde{\alpha}'_1, \ldots, \tilde{\alpha}'_n)$, $A_1 = (\tilde{\alpha}_1^2, \ldots, \tilde{\alpha}_n^2)$, $\ldots$, $A_k = (\tilde{\alpha}_1^{k+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{k+1})$, где A_{p+1} получается из A_p ($p = 0, \ldots, k-1$) заменой одного набора, начинающегося с «$-$», на двоичный набор, принадлежащий предикату, и $f(\tilde{\alpha}_1^l, \ldots, \tilde{\alpha}_n^l) \notin R_{15}$ для всех $l \in \{2, \ldots, k+1\}$.

Пусть A_s $(0 \le s \le k-1)$ построено. Выделим в A_s набор $\tilde{\alpha}_j^{s+1}$, начинающийся с «$-$».

Пусть $f(\tilde{\alpha}_1^{s+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{s+1}) = (\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^t = \tilde{\gamma} \notin R_{15}$ и выделенный набор $\tilde{\alpha}_j^{s+1} = (---0)^t$. (Если $\tilde{\alpha}_j^{s+1} = (---1)^t$, то рассуждения аналогичны.)

Для набора $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^t$ рассмотрим 3 случая (остальные рассматриваются двойственным образом):

а) $\gamma_1 = *, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \ne *$;

б) $\gamma_1 = 0, (\gamma_2, \gamma_3) \in \{(11), (-1), (1-), (--)\}, \gamma_4 \in \{0, 1, -\}$;

в) $\gamma_1 = 0, (\gamma_2, \gamma_3) \in \{(-0), (01), (10), (0-)\}, \gamma_4 \in \{1, -\}$.

Можно найти a_2, a_3 из E и заменить $\tilde{\alpha}_j^{s+1}$ на $\tilde{\delta} = (-a_2a_30)^t$ так, что

$$f(\tilde{\alpha}_1^{s+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{j-1}^{s+1}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}_{j+1}^{s+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{s+1}) = (\gamma_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma_4)^t$$

и в случае а) $\gamma'_2, \gamma'_3 \ne *$; в случае б) $(\gamma'_2\gamma'_3) \in \{(11), (-1), (1-), (--)\}$; в случае в) $(\gamma'_2\gamma'_3) \in \{(-0), (0-), (01), (10)\}$.

Для любых a_2, a_3 из E можно единственным образом найти a_1 из E такой, что набор $\tilde{\delta}' = (a_1a_2a_30)$ принадлежит предикату.

Заменив $\tilde{\delta}$ на $\tilde{\delta}'$, получим

$$f(\tilde{\alpha}_1^{s+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{j-1}^{s+1}, \tilde{\delta}', \tilde{\alpha}_{j+1}^{s+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{s+1}) = (\gamma''_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma_4)^t.$$

Для случая а) $\gamma''_1 = *$; для б) и в) $\gamma''_1 \in \{*, 0\}$.

Все наборы такого вида не принадлежат R_{15}.

Итак, $f(\tilde{\alpha}_1^{k+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{k+1}) \notin R_{15}$ и наборы $\tilde{\alpha}_1^{k+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{k+1}$ не начинаются с «$-$». Тогда

$$f_0(f_1(\tilde{\alpha}_1^{k+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{k+1}), \ldots, f_m(\tilde{\alpha}_1^{k+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_n^{k+1})) \notin R_{15}.$$

Получили противоречие. Утверждение доказано.

§ 3. Вспомогательные утверждения

В этом пункте собраны леммы, которые составляют основу доказательства критерия полноты. Вектор значений функции здесь, как правило, будем записывать в виде столбца. В формулировке утверждения будет использоваться функция, не сохраняющая некоторый предикат, т. е. функция, значение которой на наборах из предиката совпадает с набором, не принадлежащим предикату. Не ограничивая общности, в качестве таких наборов мы будем записывать все наборы, принадлежащие предикату.

Лемма 3. *Имеет место* $(--) \in [0, 1, f_{K_6}]$.

Доказательство очевидно.

Лемма 4. *Выполняется включение*

$$\left\{ \begin{matrix} * \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ - \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} - \\ * \end{matrix} \right\} \subseteq [\bar{x}, f_{K_8}, f_{K_6}, f_{K_5}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для доказательства леммы достаточно получить функцию $(*-)$, так как

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ - & 1 \\ * & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 1 \\ * \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} * \\ 0 \end{matrix}.$$

Функция f_{K_8} не сохраняет предикат R_8, поэтому

$$f_{K_8} \begin{pmatrix} 1\,0\,- \\ 0\,1\,- \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}, \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix}, \begin{matrix} - \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} - \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ - \end{matrix} \right\}.$$

Для любого набора из предиката двойственный набор тоже принадлежит предикату, поэтому достаточно рассмотреть следующие случаи.

а) $f_{K_8} \binom{1\,0\,-}{0\,1\,-} = \binom{*}{0}$, б) $f_{K_8} \binom{1\,0\,-}{0\,1\,-} = \binom{*}{-}$,
в) $f_{K_8} \binom{1\,0\,-}{0\,1\,-} = \binom{0}{0}$, г) $f_{K_8} \binom{1\,0\,-}{0\,1\,-} = \binom{0}{-}$.

Для нижней строки берем уточнение, при котором значение функции равно 0 для случаев а), в) и равно «$-$» или 0 для случаев б) и г). Для верхней строки берем соответственно противоположное уточнение. В результате получим одну из одноместных функций: $(*0)$, $(*-)$, (00), $(0-)$.

Перейдем к f_{K_6}. $f_{K_6} \binom{0\,0\,1\,1}{0\,1\,0\,1} = \binom{-}{\alpha}$, $\alpha \in \{*, 0, 1, -\}$.

Столбцы $\binom{0}{0}, \binom{1}{1}$ заменим, соответственно, на $\binom{0}{1}, \binom{1}{0}$, что позволит получить функцию $(-\beta)$. Можно считать, что $\beta \in \{0, -\}$.

Функция $(*0)$ с любой из $(-0), (--)$ позволит получить константу (00), затем функцию $(--)$ и после этого $(*-)$.

Функции (00) и $(0-)$ с любой из $(-0), (--)$ также позволят получить функцию $(--)$. Так как $f_{K_5} \binom{0\,0\,1\,1}{0\,1\,0\,1} = \binom{*}{\alpha}$, $\alpha \neq *$, то и $f_{K_5} \binom{0\,0\,1\,1}{-\,1\,0\,-} = \binom{*}{\beta}$, $\beta \neq *$. И теперь $\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \binom{*}{\gamma} = \begin{matrix} * \\ - \end{matrix}$, $\gamma \neq *$. Лемма доказана.

Лемма 5. *В* $[f_{K_1}, f_{K_2}]$ *обязательно содержится одно из множеств функций*

$$\left\{\begin{matrix} - & 1 & - & 0 \\ 0, & -, & 1, & - \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ *, & * \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} * & * \\ 0, & 1 \end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix} * & 0 \\ 1, & * \end{matrix}\right\} \quad \textit{или} \quad \left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0, & 1 \end{matrix}\right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отождествляя переменные в функции f_{K_1}, получим одну из 7 функций — (10), (11), (1−), (1∗), (∗0), (∗1) или (∗−). Последний случай сводится к предыдущему.

Отождествляя теперь переменные в функции f_{K_2}, получим одну из 6 функций — (00), (10), (−0), (∗0), (0∗) или (1∗).

Справедливость леммы показана в табл. 2.

Таблица 2

<table>
<tr><td></td><td>$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}-\\0\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}*\\0\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}0\\*\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}1\\*\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$</td><td colspan="6">$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$</td><td rowspan="2">$\begin{matrix}1 & 0\\1, & 0\end{matrix}$</td><td rowspan="5">$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}0 & 1\\0, & 1\end{matrix}$</td><td rowspan="5">$\begin{matrix}* & *\\1, & 0\end{matrix}$</td><td rowspan="3">$\begin{matrix}1 & 0\\*, & *\end{matrix}$</td><td rowspan="5">$\begin{matrix}1 & 0\\*, & *\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{matrix}1\\-\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}0 & 1 & - & -\\-, & -, & 0, & 1\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{matrix}1\\*\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}0 & 1\\*, & *\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}0 & 1\\*, & *\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{matrix}*\\0\end{matrix}$</td><td rowspan="2">$\begin{matrix}* & *\\1, & 0\end{matrix}$</td><td rowspan="2">$\begin{matrix}* & *\\1, & 0\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}* & *\\1, & 0\end{matrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{matrix}*\\1\end{matrix}$</td><td>$\begin{matrix}* & 0\\1, & *\end{matrix}$</td></tr>
</table>

В таблице прямоугольниками объединены случаи, дающие одинаковый результат.

Лемма 6. *В множестве* $[f_{K_8}, (--)]$ *имеется одна из функций* (00), (0−), (10), (1−), (11), (−0 − −), (−1 − −), (−0) *или* (−1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суперпозицией функций $f_{K_8}, x, (--)$ можно получить двухместную функцию: $f_{K_8}\begin{pmatrix} 0\,0\,- \\ 1\,0\,- \\ 0\,1\,- \\ 1\,1\,- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & 0 & * & 1 & * & * & - \\ 0, & 1, & -, & 0, & -, & 1, & *, & 0, & *, & 1, & -, & * \end{matrix}\right\}$, $\{\alpha, \delta\} \subseteq \{0, 1, *, -\}$.

Дальнейшие рассуждения проведем в зависимости от числа ∗ в полученной функции.

Две ∗ дадут (10) или константу. Три ∗ позволяют легко получить константу.

Пусть полученная функция содержит ∗ только на первой позиции, либо только на второй позиции, либо только на третьей позиции, либо только на четвертой позиции. Тогда, соответственно, можно получить функции (∗101), (0 ∗ 01), (01 ∗ 1) или (010∗).

Подставив теперь в эти функции вместо первой переменной функцию x, а вместо второй переменной — одноместную функцию (−−), получим, соответственно, одноместную функцию (1−), (0−), (−1) или (−0).

Осталось рассмотреть случай, когда двухместная функция не содержит $*$ и при этом $\alpha = 0$ и $\delta = 1$ или $\alpha = -$ и $\delta = -$. Если в полученной функции имеется три вхождения «$-$», то очевидно лемма справедлива (получаем $(-0--)$ или $(-1--)$).

Для функций, имеющих два вхождения «$-$», получим

$$\begin{matrix} - \\ 0 \\ 0 \\ - \end{matrix}\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} - \\ - \\ 0 \\ - \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} - \\ 1 \\ 1 \\ - \end{matrix}\begin{pmatrix} - & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} - \\ 1 \\ - \\ - \end{matrix}.$$

Подставляя в функции, содержащие одно вхождение «$-$» или не содержащие «$-$», одноместные функции x и $(--)$, получим одноместную функцию $(0-)$ или (-1).

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть*

$$A = \left\{ \begin{matrix}0\\0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\-\end{matrix} \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\*\end{matrix}, \begin{matrix}0\\*\end{matrix}, \begin{matrix}*\\*\end{matrix}, \begin{matrix}-\\*\end{matrix}, \begin{matrix}*\\-\end{matrix}, \begin{matrix}0\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \right\}.$$

Тогда выполняются включения $A \subseteq [f_{K_8}, f_{K_1}, f_{K_2}, f_{K_6}, f_{K_5}, (--)]$ *или* $B \subseteq [f_{K_8}, f_{K_1}, f_{K_2}, f_{K_6}, f_{K_5}, (--)]$ *или* $C \subseteq [f_{K_8}, f_{K_1}, f_{K_2}, f_{K_6}, f_{K_5}, (--)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 $[f_{K_1}, f_{K_2}]$ обязательно содержит одно из множеств 1) $\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}$; 2) $\left\{\begin{matrix}0\\*\end{matrix}, \begin{matrix}1\\*\end{matrix}\right\}$; 3) $\left\{\begin{matrix}0\\-\end{matrix}, \begin{matrix}1\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\0\end{matrix}, \begin{matrix}-\\1\end{matrix}\right\}$; 4) $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 1 & * \end{pmatrix}$; 5) $\left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}$; 6) $\left\{\begin{matrix}*\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\1\end{matrix}\right\}$.

По лемме 6 $[f_{K_8}, (--)]$ обязательно содержит одну из функций I) (00), II) $(0-)$, III) (10), IV) $(1-)$, V) (11), VI) (-0), VII) (-1), VIII) $(-0--)$, IX) $(-1--)$.

В табл. 3 показаны соответствующие включения

Таблица 3

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*
1	A	B	C	B	A	B	B	C	C
2	A	A	A	A	A	A	A	A	A
3	B	B	B	B	B	B	B	B	B
4	A	A	A	A	A	A	A	A	A
5	A	A	A	A	A	A	A	A	A
6	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Здесь в вариантах 1III, 1VIII, 1IX применена лемма 4, а для строк 2, 4, 6 то, что $\begin{matrix}0\\*\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix} = \begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ и $\begin{matrix}1\\*\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix} = \begin{matrix}1\\1\end{matrix}$.

Остальные случаи очевидны.

Лемма 8. *Справедливо включение* $\left\{ \begin{matrix}*\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\1\end{matrix}, \begin{matrix}*\\-\end{matrix}, \begin{matrix}0\\*\end{matrix}, \begin{matrix}1\\*\end{matrix}, \begin{matrix}-\\*\end{matrix}, \begin{matrix}*\\*\end{matrix} \right\} \subseteq \left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\-\end{matrix}, f_{K_5} \right]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $f_{K_5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \beta \end{pmatrix}$, $(\beta \neq *)$. Следовательно $f_{K_5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ - & 1 & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \gamma \end{pmatrix}$ $(\gamma \neq *)$.

Аналогично $f_{K_5}\left(\begin{smallmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\beta\\ *\end{smallmatrix}\right)$, $(\beta \neq *)$. И тогда получаем $f_{K_5}\left(\begin{smallmatrix}-&0&-&-\\0&1&0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\psi\\ *\end{smallmatrix}\right)$ $(\psi \neq *)$.

Дальнейшие рассуждения очевидны.

Лемма 9. *Справедливо включение*

$$\left\{\begin{matrix}1\\ *\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ *\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ *\end{matrix}, \begin{matrix}*\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}*\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\ -\end{matrix}, \begin{matrix}*\\ *\end{matrix}\right\} \subseteq \left[\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ -\end{matrix}, f_{K_9}, f_{K_{10}}, f_{K_8}, f_{K_5}, f_{K_6}\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $f_{K_9}\left(\begin{smallmatrix}0&0&1&0&-&-&1\\1&0&1&-&1&-&-\end{smallmatrix}\right) \in \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\ *\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0\\ *\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}-\\ *\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\right\}$.

Если $f_{K_9}\left(\begin{smallmatrix}0&0&1&0&-&-&1\\1&0&1&-&1&-&-\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, то, взяв для верхней строки уточнение, при котором значение функции равно 1, а для нижней — такое уточнение, при котором все получающиеся столбцы являются имеющимися одноместными функциями, получим одну из функций (10) или (1∗). По лемме 4 можно рассмотреть только вариант (1∗). Имея (1∗), легко получить (0∗) и (−∗).

Три следующих случая, очевидно, вновь позволят получить (0∗), (−∗) и (1∗).

Если же $f_{K_9}\left(\begin{smallmatrix}0&0&1&0&-&-&1\\1&0&1&-&1&-&-\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\right)$, то, взяв для верхней строки уточнение, при котором значение функции равно «−» (или 1), а для нижней — такое уточнение, при котором все получающиеся столбцы являются имеющимися одноместными функциями, получим одну из функций (10), (1∗), (−0), (−∗), из которых мы не рассматривали только (−0).

Таким образом, на этом этапе мы имеем одно из множеств функций: 1) (1∗), (0∗), (−∗) или 2) (−0).

Аналогично, рассматривая функцию $f_{K_{10}}$, получим одно из множеств функций I) (∗1), (∗0), (∗−) или II) (1−).

Для доказательства леммы осталось рассмотреть 3 варианта: $\left\{\begin{smallmatrix}*\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}*\\0\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}*\\-\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\right\}$; $\left\{\begin{smallmatrix}1\\ *\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}0\\ *\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}-\\ *\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\\-\end{smallmatrix}\right\}$ и $\left\{\begin{smallmatrix}1\\-\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\right\}$.

В первом варианте

$$\begin{matrix}*\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix}*\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ *\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix}*\\-\end{matrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\\ *\end{pmatrix}.$$

Второй вариант аналогичен.

И теперь $f_{K_5}\left(\begin{smallmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}*\\ \beta\neq *\end{smallmatrix}\right)$. Поэтому $f_{K_5}\left(\begin{smallmatrix}0&0&1&1\\0&1&-&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}*\\ \gamma\neq *\end{smallmatrix}\right)$.

Оставшаяся часть доказательства очевидна.

Лемма 10. *Пусть*

$$A = \left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\-\end{matrix}, \begin{matrix}1\\ *\end{matrix}, \begin{matrix}0\\ *\end{matrix}, \begin{matrix}-\\ *\end{matrix}, \begin{matrix}*\\-\end{matrix}, \begin{matrix}*\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\1\end{matrix}, \begin{matrix}*\\ *\end{matrix}\right\}.$$

Тогда $U^{\neg} \subseteq \left[A \cup \{f_{K_{12}}, f_{K_{13}}\}\right]$ *или* $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \left[A \cup \{f_{K_{12}}, f_{K_{13}}\}\right]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$f_{K_{13}}\begin{pmatrix}1&-&-&-&-&-&-&-&-&-&0&0&0&0&0\\1&-&0&1&-&1&1&0&0&-&0&0&1&0&-\\1&0&-&-&1&0&1&1&0&-&0&1&0&-&0\end{pmatrix} \in B, \tag{5}$$

что запишем символически $f\begin{pmatrix}\tilde\delta_1\\ \tilde\delta_2\\ \tilde\delta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}\in B$, где

$$B=\left\{\begin{matrix} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \alpha\,, & -\,, & 0\,, & 0\,, & 1\,, & 0\,, & -\,, & 1\,, & -\,, & 1\,, & -\,, & -\,, & 1\\ \beta & 0 & - & 1 & 0 & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - \end{matrix}\right\}.$$

Для второй и третьей строк формулы (5) (не затрагивая столбцы, которые имеют вид $(- - -)^t$), подбираем такие уточнения $\tilde\tau_2$ и $\tilde\tau_3$, что $f_{K_{13}}\binom{\tilde\tau_2}{\tilde\tau_3}=\binom{\beta_2'}{\beta_3'}$ и выполняется

- $\beta_1=*$, тогда $\beta_2'\neq *$ и $\beta_3'\neq *$;
- $\beta_1=1$, тогда для $i\in\{2,3\}$ справедливо $\beta_i'\in\{\beta_i,0\}$, если $\beta_i=-$ и $\beta_i'=\beta_i$, если $\beta_i\neq -$;
- $\beta_1=0$, тогда для $i\in\{2,3\}$ справедливо $\beta_i'\in\{\beta_i,1\}$, если $\beta_i=-$ и $\beta_i'=\beta_i$, если $\beta_i\neq -$.

После этого подбираем уточнение τ_1 первой строки (опять же не затрагивая столбцы, которые имеют вид $(- - -)^t$), при котором каждый столбец длины 3 является двоичным и принадлежит R_{13}. Затем добавляем четвертую строку τ_4 таким образом, чтобы полученные столбцы длины 4 представляли 2-местные функции 0, 1, x или y.

Суперпозиция $f_{K_{13}}$ и функций 0,1, x, y представляет одну из 13 функций

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\\ \hline * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \alpha & - & 0 & 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & 1 & - & - & 1\\ \beta & 0 & - & 1 & 0 & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & -\\ \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma \end{array}\right).$$

Вторая, третья, шестая и девятая функции вместе с функцией $(0*)$, десятая, одиннадцатая, двенадцатая, тринадцатая вместе с функцией $(*0)$ позволят получить функцию $(*00\gamma_1)$. Если $\gamma_1\neq *$, то легко получить функцию $(1-)$, а если $\gamma_1=*$, то функцию (10).

Для остальных вариантов сразу получаем функцию $(1-)$ или функцию (10).

Аналогичные рассуждения для $f_{K_{12}}$ дадут (10) или (-0).

И теперь $\begin{smallmatrix}1\\-\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}-\\0\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}$.

Лемма 11. $(1\,0)\in\left[U^{\neg}\cup\{f_{K_{15}}\}\right]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что если набор $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^t\notin R_{15}$, то для любого набора $(\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4)^t$ такого, что $\alpha_2\le\beta_2$, $\alpha_3\le\beta_3$, $\alpha_4\le\beta_4$ выполняется $(\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4)^t\notin R_{15}$.

Пусть $f_{K_{15}}(\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_n)=\tilde\gamma\notin R_{15}$ для некоторых наборов $\tilde\alpha_1,\ldots,\tilde\alpha_n$, принадлежащих R_{15}. Каждый из этих наборов заменим на набор $\tilde\beta_i=(\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_5})^t$ такой, что для некоторых $\beta_{i_6}\beta_{i_7}\beta_{i_8}$ соответствующий набор $(\beta_{i_1}\ldots\beta_{i_5}\beta_{i_6}\beta_{i_7}\beta_{i_8})^t$ является вектором значений некоторой функции $f_i(x,y,z)$ с двумя несущественными переменными. Замену осуществим в соответствии со схемой:

$$\begin{matrix}0\\0\\0\\\beta\end{matrix}\to\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\\beta\end{matrix};\quad \begin{matrix}-\\-\\-\\\beta\end{matrix}\to\begin{matrix}-\\-\\-\\-\\\beta\end{matrix};\quad \begin{matrix}-\\-\\0\\\beta\end{matrix}\to\begin{matrix}-\\-\\0\\0\\-\end{matrix};\quad \begin{matrix}-\\0\\-\\\beta\end{matrix}\to\begin{matrix}-\\0\\-\\0\\-\end{matrix};\quad \begin{matrix}-\\0\\0\\\beta\end{matrix}\to\begin{matrix}-\\0\\-\\0\\-\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}0\\-\\0\\0\end{matrix} \to \begin{matrix}0\\-\\0\\-\\0\end{matrix};\quad \begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix} \to \begin{matrix}0\\1\\0\\1\\0\end{matrix};\quad \begin{matrix}0\\0\\-\\0\end{matrix} \to \begin{matrix}0\\0\\-\\-\\0\end{matrix};\quad \begin{matrix}0\\0\\1\\0\end{matrix} \to \begin{matrix}0\\0\\1\\1\\0\end{matrix};\quad \begin{matrix}1\\1\\1\\\beta\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\1\\1\\1\\-\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}-\\1\\-\\\beta\end{matrix} \to \begin{matrix}-\\1\\-\\1\\-\end{matrix};\quad \begin{matrix}-\\1\\0\\\beta\end{matrix} \to \begin{matrix}-\\1\\-\\1\\-\end{matrix};\quad \begin{matrix}1\\-\\1\\1\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\-\\1\\-\\1\end{matrix};\quad \begin{matrix}1\\0\\1\\1\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\-\\1\\-\\1\end{matrix};\quad \begin{matrix}1\\1\\-\\1\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\1\\-\\-\\1\end{matrix};$$

$$\begin{matrix}-\\0\\1\\\beta\end{matrix} \to \begin{matrix}-\\0\\-\\0\\-\end{matrix};\quad \begin{matrix}-\\-\\1\\\beta\end{matrix} \to \begin{matrix}-\\-\\1\\1\\-\end{matrix};\quad \begin{matrix}1\\1\\0\\1\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\1\\-\\-\\1\end{matrix};\quad \begin{matrix}-\\1\\1\\\beta\end{matrix} \to \begin{matrix}-\\1\\-\\1\\-\end{matrix}.$$

В результате вместо набора $\tilde{\gamma} = (\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^t$ получим набор $\tilde{\psi} = (\gamma_1\psi_2\psi_3\psi_4)^t$, где $\gamma_2 \le \psi_2$, $\gamma_3 \le \psi_3$, $\gamma_4 \le \psi_4$, который не принадлежит R_{15}.

Исходя из этого, суперпозиция $f_{K_{15}}(f_1,\dots,f_n)$ определяет функцию $g(x,y,z)$, причем

$$(g(000)g(001)g(010)g(100))^t \notin R_{15}. \tag{6}$$

Любая функция, удовлетворяющая (6), позволяет получить отрицание.

Рассмотрим следующие случаи (функцию будем записывать в виде вектора значений, причем двоичные наборы длины 3 записаны в соответствиии с натуральным порядком):

а) $g(x,y,z) = (*\alpha\beta\dots)$ $(\alpha \ne *, \beta \ne *)$. В этом случае можно получить функцию $g_1(x,y,z) = (*\ 1\ 0\ \dots)$, но $g_1\begin{pmatrix}0\ 0\ -\\0\ -\ 0\end{pmatrix} = \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}$.

б) Если $g(x,y,z) \in \{(011\dots), (0--\dots), (01-\dots), (0-1\dots)\}$, то пусть $h_1(x,y) = (*0*0)$ и тогда $h_1(g,g) = (*00\dots)^t$. Таким образом, этот случай мы свели к первому.

Если $g(x,y,z) \in \{(100\dots), (1--\dots), (10-\dots), (1-0\dots)\}$, то возьмем вместо $h_1(x,y)$ функцию $(0*0*)$ и снова получим первый случай.

в) Осталось рассмотреть случаи

$g(x,y,z) \in \{(0-0ab\dots), (010ab\dots), (00-ab\dots), (001ab\dots)\}$ и

$g(x,y,z) \in (1-1ac\dots), (101ac\dots), (110ac\dots), (11-ac\dots)\}$, где $a \in \{0,1,-,*\}$, $b \in \{1,-\}$, $c \in \{0,-\}$.

Подставляя в 1 и 2-ю функции вместо переменной y, а в 3 и 4-ю вместо переменной z функцию, тождественно равную 0, и, меняя местами оставшиеся переменные, получим функцию $h(x,y) = (0\ d\ b\ \dots), d \in \{-,1\}$.

Аналогичные подстановки в оставшиеся дадут функцию $h_1(x,y) = (1\ d_1\ c\ \dots)$, $d_1 \in \{-,0\}$. И этот случай мы свели к а).

Лемма доказана.

Лемма 12. *Выполняется включение*

$$\left\{\begin{matrix}0\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\1\end{matrix}\right\} \subseteq [f_{K_{14}} \cup (--) \cup U^-].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\bar{x} \in U^-$, то достаточно получить одну из недостающих функций и рассмотреть три случая.

Если $f_{K_{14}}$ на наборах из предиката дает набор, содержащий $(0-)^t$ или $(1-)^t$, то утверждение леммы очевидно.

Рассмотрим остальные варианты. Пусть

$$f_{K_{14}}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) \notin R_{14}.$$

Набор α_i представляет либо функцию из U^-, либо функции $(0\ 1\ 1\ 0)$, $(1\ 0\ 0\ 1)$. Покажем, как столбцы, не представляющие функции из U^-, можно заменить на функции из U^- и при этом в результате получили бы набор, не принадлежащий предикату.

Рассмотрим только столбцы $(0\ 1\ 1\ 0)^t$.

Случай 1.

$$f_{K_{14}}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) = (*\ \alpha\ \beta\ \gamma)^t = \tilde{\beta}, \alpha, \beta, \gamma \neq *. \tag{7}$$

В первой и четвертой строках из (7) в столбцах $(0\ 1\ 1\ 0)^t$ вместо 0 подставим единицы. В результате на первой позиции в $\tilde{\beta}$ вместо $*$ получим $\delta \in \{0, 1, -, *\}$, вместо γ на четвертой позиции получим $\psi \in \{0, 1, -, *\}$. Если среди $\delta, \alpha, \beta, \psi$ встречается одна $*$ или две $*$, то вместо $(0110)^t$ подставляем $(1111)^t$ в первом случае и $(----)^t$ во втором. В результате получим двухместную функцию, которая только на одном наборе равна $*$.

Пусть теперь среди $\delta, \alpha, \beta, \psi$ в получившемся наборе $*$ нет. Тогда во второй строке вместо 1 рассмотрим 0. Значение функции в результате замены изменится на ϕ. Если $\phi \neq *$, то вместо столбца $(0110)^t$ подставляем столбец $(0011)^t$, если же $\phi = *$, то подставляем столбец $(1010)^t$. И получаем функцию, вектор значений которой содержит одну $*$.

Но функции $g(x, y)$, вектор значений которых содержит одну $*$, позволяют получить функцию $(*101)$, из которой, подставив вместо второй переменной функцию $(--)$, получим функцию $(1-)$.

Случай 2. $f_{K_{14}}(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) = (1\ 0\ 0\ 0)^t$. Опять же в первой и четвертой строках вместо 0 подставим единицы.

Если получившийся набор содержит две $*$ (или содержит одну $*$), то вместо столбца $(0110)^t$ подставляем столбец $(----)^t$.

Если получившийся набор не содержит $*$, то вместо столбца $(0110)^t$ подставляем столбец $(1111)^t$ в случае, когда в первой позиции получили 0, а в четвертой — 1 и подставляем столбец $(----)^t$ в остальных случаях. Мы не рассматриваем варианты, в которых появляется «$-$».

Дальнейшие рассуждения очевидны. Лемма доказана.

Лемма 13. *Имеет место включение*

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right\} \subseteq \left[\begin{matrix} * \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ - \end{matrix}, \begin{matrix} * \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} - \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ * \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, f_{K_{11}} \right].$$

Доказательство очевидно.

Лемма 14. *Система $U \cup \{f_{K_{15}}\}$ полна.*

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были использованы в лемме 11, получим функцию $g(x,y,z)$, причем

$$(g(000)g(001)g(010)g(100))^t \notin R_{15}.$$

Но любая такая функция позволит получить одну из функций: $g_1 = (*0000000)$ или $g_2 = (0 - --)$.

Случай 1. $(g(000)g(001)g(010)g(011)g(100)) = (*\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$, $\alpha_i \neq *$.

Пусть $h_1(x,y,z) = (0000 - - - -)$, $h_2(x,y,z) = (00110011)$, $h_3(x,y,z) = (01010101)$. Тогда $g(h_1,h_2,h_3) = (*0000\beta_6\beta_7\beta_8)$, где $\beta_i \neq *$ и после этого несложно получить функцию g_1.

Случай 2: $(g(000)g(001)g(010)g(011)g(100)) = (*\alpha_2\alpha_3*\alpha_5)$,$\alpha_i \neq *$ сводится к случаю 1. Пусть $h_4(x,y,z) = (00001111)$, а функция $h_5(x,y,z) = (00 - -00 - -)$, $h_6(x,y,z) = (0 - 0 - 0 - 0-)$. Тогда $g(h_4,h_5,h_6) = (*\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8)$, $\gamma_2 \neq *, \gamma_3 \neq *, \gamma_4 \neq *, \gamma_5 \neq *$.

Случай 3 — все оставшиеся варианты. Подставляя вместо переменных в функцию g (или $\bar{g}$) функции $h_7 = (0000)$, $h_8 = (00 - -)$, $h_9 = (0 - 0-)$, получим функцию $g_2 = (0 - --)$.

Справедливость леммы следует из предложений 3 и 4.

Лемма 15. *Классы $K_1 - K_{15}$ попарно различны.*

Доказательство приведено в табл. 4, где на пересечении i-й строки и j-го столбца указана функция (вектором-столбцом своих значений на двоичных наборах), принадлежащая классу K_i и не принадлежащая классу $K_j (i,j \in \{1,\ldots,15\})$.

§ 4. Критерий полноты

Теорема. *Система функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из классов $K_1 - K_{15}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Rightarrow$. Справедливость утверждения следует из замкнутости этих классов и леммы 15.

$\Leftarrow$.

Пусть в системе имеются функции $f_{K_1} - f_{K_{15}}$. Функция f_{K_3} не принадлежит классу K_3, поэтому, отождествляя переменные у этой функции, можно получить одну из 8 одноместных функций — $h_1 - h_8$:

$$\begin{array}{c|cccccccc} x & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & * & 1 & - & * & - & 0 \end{array}.$$

Так как

$$\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix} = \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} - \\ - \end{matrix}, \tag{8}$$

то можно рассматривать только 6 вариантов: $h_1 - h_6$.

Таблица 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	•	0 ∗	– 1	– –	0 ∗	– –	– –	0 ∗	0 ∗	0 0 1 0	0 0	0 0 0 1	0 1 1 1	0 0 0 1	0 1 1 0
2	∗ 1	•	– –	– –	∗ –	– –	– –	∗ 1	1 0 0 1	1 –	1 –	0 – – 1	∗ 0 0 1	∗ 0 0 1	1 0 0 1
3	∗ 0	∗ 0	•	0 –	0 ∗	0 –	0 0	∗ 0	0 ∗	∗ 0	0 0	0 – – 1	∗ 0 0 1	∗ 0 0 1	0 1 1 0
4	1 1	0 ∗	1 1	•	1 ∗	– 1	1 1	0 ∗	1 ∗	∗ 1	– 1	0 – – 1	∗ 0 0 1	∗ 0 0 1	1 0 0 1
5	1 –	– 0	– –	– –	•	– –	– –	– 0	– 0	1 –	1 –	0 – – 1	1 – – 1	0 – 0 –	0 1 1 0
6	1 ∗	∗ 0	1 ∗	∗ 0	∗ 0	•	0 ∗ ∗ 0	∗ 1	0 ∗	∗ 0	0 0	0 0 0 1	1 0 0 0	0 0 0 1	0 1 1 0
7	1 ∗	∗ 0	1 ∗	∗ 0	∗ 0	∗ –	•	∗ 1	0 ∗	∗ 0	∗ 0 0 0	0 0 0 ∗	∗ 0 0 0	∗ 0 0 0	f
8	1 0	1 0	1 0	1 0	∗ – – ∗	∗ – – ∗	– –	•	∗ – – ∗	∗ – – ∗	– –	1 0 1 0	1 0 1 0	0 – – 1	f
9	∗ 0	∗ 0	1 1	0 0	∗ 0	– –	– –	∗ 1	•	∗ 0	– –	1 – – 1	1 – – 1	1 – – 1	g_1
10	1 ∗	1 ∗	1 ∗	– 0	– ∗	– ∗	– –	– ∗	– ∗	•	– –	– 0	0 – – 0	0 – – 0	g_2
11	∗ 0	∗ 0	1 ∗	1 0	– ∗	– ∗	1 0	0 ∗	– ∗	∗ 1	•	0 0 1 ∗	∗ 0 1 0	∗ 0 1 0	f
12	1 1	0 0	1 1	0 0	∗ 0	– –	– –	0 ∗	– ∗	∗ 1	1 –	•	1 –	1 –	$\vee$
13	1 1	0 0	1 1	0 0	∗ 0	– –	– –	0 ∗	0 ∗	∗ 0	– 0	– 0	•	– 0	&
14	1 0 0 1	0 1 1 0	1 0 0 1	0 1 1 0	0 ∗	– –	– –	0 ∗	0 ∗	∗ 0	0 0	1 0 0 1	1 0	•	0 1 1 0
15	∗ 1	∗ 0	1 1	– –	0 ∗	– –	– –	0 ∗	0 ∗	∗ 0	0 0	– 0	∗ 0 1 0	∗ 0 1 0	•

$f = (*000111*)$, $g_1 = (*0000000)$, $g_2 = (0000000*)$.

Отождествляя переменные у функции f_{K_4} и учитывая (8), можно получить одну из 6 функций $h'_1 - h'_6$:

x	h'_1	h'_2	h'_3	h'_4	h'_5	h'_6
0	$-$	0	$*$	0	1	$*$
1	$-$	$-$	$-$	0	0	0 .

Введем 4 множества функций:

$$A_1 = \left\{ \begin{matrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{matrix} \right\}; \quad A_2 = \left\{ \begin{matrix} 0\,- \\ 1\,- \end{matrix} \right\}; \quad A_3 = \left\{ \begin{matrix} 0\,0\,1 \\ 1\,0\,1 \end{matrix} \right\}; \quad A_4 = \left\{ \begin{matrix} 0\,1\,0*\,* \\ 1*\,*\,0\,1 \end{matrix} \right\}.$$

Тогда $[f_{K_3}, f_{K_4}]$ содержит одно из множеств $A_1 - A_4$. (табл. 5). В таблице прямоугольниками объединены случаи, которые приводят к одинаковому результату.

Таблица 5

<table>
<tr><th></th><th>h'_1</th><th>h'_2</th><th>h'_3</th><th>h'_4</th><th>h'_5</th><th>h'_6</th></tr>
<tr><td>h_1</td><td colspan="6">A_1</td></tr>
<tr><td>h_2</td><td rowspan="5">A_2</td><td colspan="2">A_2</td><td>A_3</td><td rowspan="5">A_1</td><td>A_3</td></tr>
<tr><td>h_3</td><td rowspan="4">A_2</td><td>A_4</td><td>A_3</td><td>A_4</td></tr>
<tr><td>h_4</td><td colspan="2">A_2</td><td>A_3</td></tr>
<tr><td>h_5</td><td colspan="2">A_2</td><td>A_2</td></tr>
<tr><td>h_6</td><td>A_4</td><td>A_2</td><td>A_4</td></tr>
</table>

Покажем справедливость некоторых случаев:

$h_2h'_6$) Имеем функции $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}*\\0\end{smallmatrix}$. Тогда $\begin{smallmatrix}*\\0\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$.

$h_3h'_2$) Имеем $\begin{smallmatrix}1\\*\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}0\\-\end{smallmatrix}$. Тогда $\begin{smallmatrix}1\\*\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix} = \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}0\\-\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{smallmatrix}-\\-\end{smallmatrix}$.

$h_3h'_3$) Имеем $\begin{smallmatrix}1\\*\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}*\\-\end{smallmatrix}$. Тогда $\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\begin{pmatrix}cc1 & 0\\ * & 1\\ 1 & 0\\ * & 1\end{pmatrix} = \begin{smallmatrix}0\\*\\0\\*\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}0\\*\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}*\\-\end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix}*\\0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\*\end{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}*\\-\end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix}*\\1\end{smallmatrix}$.

Остальные варианты проверяются несложно.

Отождествляя переменные в функции f_{K_7}, получим одну из функций $h''_1 - h''_8$:

x	h''_1	h''_2	h''_3	h''_4	h''_5	h''_6	h''_7	h''_8
0	0	1	1	$-$	0	$-$	1	$-$
1	0	0	1	0	$-$	1	$-$	$-$.

Каждая из них множество A_4 сводит к A_1, A_2 или A_3.

Лемма 3 сводит множество A_3 к множеству A_2.

Если получено множество функций A_1, то по лемме 4 можно получить функции $\left\{ \begin{smallmatrix} * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ , & , & , & , & , & , & \\ 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{smallmatrix} \right\}$. Затем по лемме 13 получить $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 & 1 & - \\ , & , & \\ 0 & 1 & - \end{smallmatrix} \right\}$ и по лемме 12 — все одноместные функции.

Для множества A_2 по лемме 7 получим одно из множеств функций:

$$B_1 = \left\{ \begin{matrix}0\\0\end{matrix}, \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\-\end{matrix} \right\}; \quad B_2 = \left\{ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\-\end{matrix}, \begin{matrix}-\\-\end{matrix} \right\};$$

$$B_3 = \left\{ \begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}1\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\1\end{matrix}, \begin{matrix}*\\-\end{matrix}, \begin{matrix}*\\*\end{matrix}, \begin{matrix}1\\*\end{matrix}, \begin{matrix}0\\*\end{matrix}, \begin{matrix}-\\*\end{matrix} \right\}.$$

Рассмотрим эти случаи.

Случай B_1. По лемме 9 получим функции

$$\begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \begin{matrix}0\\0\end{matrix}, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}, \begin{matrix}-\\-\end{matrix}, \begin{matrix}*\\1\end{matrix}, \begin{matrix}*\\-\end{matrix}, \begin{matrix}*\\0\end{matrix}, \begin{matrix}*\\*\end{matrix}, \begin{matrix}1\\*\end{matrix}, \begin{matrix}0\\*\end{matrix}, \begin{matrix}-\\*\end{matrix}.$$

Затем по лемме 10 получим все одноместные без отрицания или отрицание. Но отрицание приводит к множеству A_1, поэтому считаем, что есть все одноместные функции без отрицания. Лемма 11 позволит получить отрицание.

Случай B_2. По лемме 8 получим одноместные функции, на одной или двух позициях имеющие $*$, и затем функции-константы. Лемма 11 позволит получить отрицание.

Случай B_3. Последовательное применение лемм 13, 12 позволит получить все одноместные функции.

И завершает доказательство лемма 14.

Список литературы

1. *Пантелеев В. И., Перязев Н. А.* Недоопределенные частичные булевы функции и булевы уравнения // Материалы VII международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». М.: МАКС Пресс, 2006. С. 262–265.

2. *Post E.* Introduction to a General Theory of Elementary Proposition // Amer. J. Math. 1921. Vol. 43. No. 4. P. 163–185.

3. *Фрейвалд Р. В.* О полноте частичных функций алгебры логики // ДАН СССР. 1966, Т. 167, № 6. С. 1249–1250.

4. *Тарасов В. В.* Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики. Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 30. С. 319–325.

5. *Марченков С. С.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит. 2000.

Материал поступил в редколлегию 22.12.2008

Адрес автора

ПАНТЕЛЕЕВ Владимир Иннокентьевич

РОССИЯ, 664003, Иркутск

ул. К. Маркса, 1

Институт математики, экономики и информатики

Иркутского государственного университета

e-mail: vp@math.isu.ru