УДК 517.9

Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ, КОЭФФИЦИЕНТОВ, СИМВОЛОВ ОПЕРАТОРОВ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ*

В работе получены новые представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений. Даны некоторые приложения полученных формул к обратным задачам. В частности, получены формулы характеризующие параметры этнических процессов.

Ключевые слова: обратные задачи математической физики, символ оператора, этнос.

Введение

Представления решений и коэффициентов дифференциальных уравнений играют важную роль в теории и приложениях [1; 2]. Для иллюстрации приведем два примера. Первый из них связан с задачами теории рассеяния, в частности с обратными задачами для уравнения Штурма–Лиувилля.

$$-w'' + \lambda(x)w = p^2 w, \quad -a < x < a, \ p \in \mathbb{R},$$

с данными Коши

$$w(0,p) = 1, \quad w^{'}(0,p) = ip.$$

В этом случае, оказывается, имеют место [3] равенства

$$w(x,p) = e^{ipx} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x,z)e^{ipz}\, dz,$$
$$\lambda(x) = 2\frac{d}{dx}F(x,x),$$

где $F(x,z)$ — некоторая непрерывно-дифференцируемая функция, не зависящая от параметра p.

Приведенные представления решения $w(x,p)$ и одновременно коэффициента $\lambda(x)$ через функцию $F(x,z)$ являются фундаментальными и определяющими в различных вопросах теории и приложениях, в частности, в обратных задачах теории рассеяния. Дело сводится к поиску функции $F(x,z)$ по данным рассеяния, что и успешно делается при исследованиях [3, 4].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00422а), проекта фундаментальных исследований СО РАН (№ 93), междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований (№ 81) и гранта министерства образования (ЗН-24.10).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 25–36

Другой пример связан с проблемами теории вероятностей и содержится в работе А. Н. Колмогорова [5]. Оказывается, имеют место формулы для решения $w(x,t)$ и коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (a(t)x + b(t))\frac{\partial w}{\partial x} - a(t)w,$$

а именно

$$w = \frac{\exp(-(x-P)^2/Q)}{R},$$

где

$$P = \int\limits_0^t b(\eta)\exp\Big(\int\limits_\eta^t a(z)\,dz\Big)d\eta, \quad Q = 4\int\limits_0^t c(\eta)\exp\Big(2\int\limits_\eta^t a(z)\,dz\Big)d\eta,$$
$$R = \sqrt{\pi Q}.$$

Приложения этих формул содержатся в упомянутой статье А. Н. Колмогорова.

В данной работе приводятся новые представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений. Даются некоторые приложения полученных формул к обратным задачам.

Пусть $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m) \in \mathbb{R}^n$, $m \geq 2$, $\overline{x}_k$ — вектор размерности r_k, $k = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{k=1}^m r_k = n > m$, A_k, B_k — линейные операторы, действующие только по переменным $\overline{x}_k$, $\beta \neq 0$ некоторая постоянная, D — область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат.

Рассматривается эволюционное уравнение

$$\beta\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{j=1}^m A_j w + \sum_{j=1}^m \lambda_j(\overline{x}_j, t)B_j w, \quad \overline{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, \;\; a \leq t \leq b, \tag{1}$$

где $\lambda_j(\overline{x}_j, t)$ — некоторые непрерывно-дифференцируемые функции, зависящие соответственно только от $\overline{x}_j$ и t.

Оказывается, имеет место

Теорема 1. *Пусть $Q_j(\overline{x}_j, t)$ — функции переменных $(\overline{x}_j, t)$ и такие, что $Q_j(\overline{0}, t) = \alpha(t) \neq$ $\neq 0$, и существуют $A_jQ_j(\overline{x}_j, t)$, $B_jQ_j(\overline{x}_j, t)$, причем $B_jQ_j(\overline{x}_j, t) \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$.*

Тогда для решения $w(\overline{x}, t)$ уравнения (1) и коэффициентов $\lambda_j(\overline{x}_j, t)$ имеют место формулы

$$w(\overline{x}, t) = \frac{1}{\alpha^{m-1}(t)}\prod_{k=1}^m Q_k(\overline{x}_k, t) + \widehat{w}(\overline{x}, t), \tag{2}$$

$$\lambda_j(\overline{x}_j, t) = \frac{\beta\frac{\partial Q_j}{\partial t} - A_jQ_j - \beta\frac{m-1}{m}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}Q_j}{B_jQ_j}, \tag{3}$$

где $\widehat{w}(\overline{x}, t)$ — любое решение (1) с коэффициентами $\lambda_j(\overline{x}_j, t)$, определенными формулами (3). При этом, если $\widehat{w}|_{\overline{x}_k=0} = 0$, $k = 1, \ldots, m$, то

$$w|_{\overline{x}_k=0,\, k\neq j} = Q_j(\overline{x}_j, t). \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу линейности эволюционного уравнения (1), не умаляя общности, можно считать, что $\widehat{w}(\overline{x},t) = 0$. Используя представление (2) при $\widehat{w} = 0$ имеем

$$\beta\frac{\partial w}{\partial t} = -\beta\frac{(m-1)\alpha'(t)}{\alpha^m(t)}\prod_{k=1}^{m} Q_k(\overline{x}_k,t) + \frac{\beta}{\alpha^{m-1}(t)}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial Q_j}{\partial t}\prod_{k\neq j} Q_k(\overline{x}_k,t).$$

Так как $\prod\limits_{k=1}^{m} Q_k(\overline{x}_k,t) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m} Q_j(\overline{x}_j,t)\prod\limits_{k\neq j} Q_k(\overline{x}_k,t)$, то

$$\beta\frac{\partial w}{\partial t} = -\beta\frac{(m-1)\alpha'(t)}{m\alpha^m(t)}\sum_{j=1}^{m} Q_j(\overline{x}_j,t)\prod_{k\neq j} Q_k(\overline{x}_k,t) + \frac{\beta}{\alpha^{m-1}(t)}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial Q_j}{\partial t}\prod_{k\neq j} Q_k(\overline{x}_k,t). \quad (5)$$

Также из (2) следуют равенства

$$\sum_{j=1}^{m} A_j w = \frac{1}{\alpha^{m-1}(t)}\sum_{j=1}^{m} A_j Q_j(\overline{x}_j,t)\prod_{k\neq j} Q_k(\overline{x}_k,t), \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\overline{x}_j,t) B_j w = \sum_{j=1}^{m}\left(\beta\frac{\partial Q_j}{\partial t} - A_j Q_j - \beta\frac{m-1}{m}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} Q_j\right)\frac{1}{\alpha^{m-1}(t)}\prod_{k\neq j} Q_k(\overline{x}_k,t). \quad (7)$$

Из (5), (6), (7) очевидно следует (1).

Докажем (4). В силу того, что $Q_j(\overline{0},t) = \alpha(t)$ и $\widehat{w}|_{\overline{x}_k=0} = 0$, $k = 1,\ldots,m$, из представления

$$w(\overline{x},t) = \frac{1}{\alpha^{m-1}(t)}\prod_{k=1}^{m} Q_k(\overline{x}_k,t) + \widehat{w}(\overline{x},t) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{m-1}(t)}\, Q_j(\overline{x}_j,t)\prod_{k\neq j}^{m} Q_k(\overline{x}_k,t) + \widehat{w}(\overline{x},t)$$

имеем

$$w|_{\overline{x}_k=0,\, k\neq j} = \frac{1}{\alpha^{m-1}(t)} Q_j(\overline{x}_j,t)\alpha^{m-1}(t) = Q_j(\overline{x}_j,t).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичные результату теоремы 1 вопросы факторизации решения уравнения Шредингера и обсуждение данной тематики приведены в работе А. Ю. Хренникова [6].

Рассмотрим задачу представления решения и символов операторов эволюционного уравнения.

Пусть $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, y, $t \in \mathbb{R}^1$, $w = w(x,y,t)$ — комплекснозначная функция. Рассматривается эволюционное уравнение вида

$$A(y)\frac{\partial w}{\partial t} = D(y,t)w + B(t)\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (8)$$

где A, D, B — линейные операторы (возможно, дифференциальные), действующие по переменным x и зависящие от переменных y, (y,t), t, соответственно. Символы операторов A, D, B обозначаются $\widehat{A}$, $\widehat{D}$, $\widehat{B}$ и определяются равенствами

$$A(y)e^{i\omega x} = \widehat{A}(y,\omega)e^{i\omega x},\ \ D(y,t)e^{i\omega x} = \widehat{D}(y,t,\omega)e^{i\omega x},\ \ B(t)e^{i\omega x} = \widehat{B}(t,\omega)e^{i\omega x},$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, $\omega x = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$.

Оказывается, имеют представления для решения $w = w(x,y,t)$ уравнения (41) и одновременно для символов $\widehat{A}$, $\widehat{D}$, $\widehat{B}$ операторов A, D, B посредством пяти произвольных функций f, g, h, a, b от переменных $(z,\omega) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 2. *Пусть* $f(z,\omega)$, $g(z,\omega)$, $h(z,\omega)$, $a(z,\omega)$, $b(z,\omega)$ *— непрерывно-дифференцируемые функции,* $a(0,\omega) = 0$, $b(0,\omega) = 0$, *функция* $f(z,\omega)$ *финитна по переменной* ω.

Имеют место формулы

$$w(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(a(y,\omega) + b(t,\omega), \omega) \times$$
$$\times\, e^{\int_0^y g(a(y,\omega)-a(\eta,\omega)+b(t,\omega),\omega)d\eta}\, e^{\int_0^t h(b(t,\omega)-b(\xi,\omega)+a(y,\omega),\omega)d\xi} e^{i\omega x} d\omega + \widetilde{w}(x,t), \quad (9)$$

$$\widehat{A}(y,\omega) = \frac{\partial a}{\partial y},\ \ \widehat{B}(t,\omega) = \frac{\partial b}{\partial t},\ \ \widehat{D}(y,t,\omega) = h(a(y,\omega),\omega)\frac{\partial a}{\partial y} - g(b(t,\omega),\omega)\frac{\partial b}{\partial t}, \qquad (10)$$

где $\widetilde{w}(x,t)$ *— любое решение (8) с операторами, определенными (10).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, не умаляя общности, что $\widetilde{w}(x,t) = 0$. Применим преобразование Фурье по переменной y к (8), получим уравнение

$$\widehat{A}(y,\omega)\frac{\partial w}{\partial t} = \widehat{D}(y,t,\omega)w + \widehat{B}(t,\omega)\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (11)$$

где $\widehat{A}$, $\widehat{D}$, $\widehat{B}$ — символы операторов A, D, B. Преобразование Фурье от функции w, определенной в теореме, имеет вид

$$\widehat{w} = f(a(y,\omega) + b(t,\omega), \omega) \times e^{\int_0^y g(a(y,\omega)-a(\eta,\omega)+b(t,\omega),\omega)d\eta}\, e^{\int_0^t h(b(t,\omega)-b(\xi,\omega)+a(y,\omega),\omega)d\xi}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что если символы операторов A, D, B определены формулами (10), то функция $\widehat{w}$ удовлетворяет уравнению (11).

Теорема доказана.

Замечание 2. Условие финитности функции $f(z,\omega)$ по ω в теореме 2 является достаточным условием для сходимости интеграла, и оно, естественно, может быть ослаблено с учетом роста других функций. В частности, в соответствии с формулой Леви–Хинчина [7] представления вероятностных мер с учетом безграничной делимости имеет место

Теорема 3. *Пусть в* (9)

$$f(z,\omega) = \exp\Big(i\langle\beta(z),\omega\rangle - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(z)\omega_k\omega_l\Big),$$

$$g(z,\omega) = g_1(z)g_2(\omega),\ \ h(z,\omega) = h_1(z)h_2(\omega),$$

где

$$g_2(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(e^{i\langle\omega,q\rangle} - 1 - \frac{i\langle\omega,q\rangle}{1+|q|^2}\Big)\mu_1(dq),$$

$$h_2(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(e^{i\langle\omega,q\rangle} - 1 - \frac{i\langle\omega,q\rangle}{1+|q|^2}\Big)\mu_2(dq),$$

$z \in \mathbb{R}^1$, $\beta(z) = (\beta_1(z), \ldots, \beta_n(z))$ *— вектор,* $(a_{kl}(z))$ *— положительно определенная матрица,* $g_1(z)$, $h_1(z)$ *— дифференцируемые функции,* $\mu_1(dq)$, $\mu_2(dq)$ *— вполне конечные меры на классе борелевских множеств в* $\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющие условию*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|q|^2}{1+|q|^2}\mu_k(dq) < \infty, \quad k = 1, 2.$$

Тогда функция

$$w(x,y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(a(y,\omega) + b(t,\omega), \omega) \times \\ \times \exp\Big(g_2(\omega)\int\limits_0^y g_1(a(y,\omega) - a(\eta,\omega) + b(t,\omega))d\eta\Big) \times \\ \times \exp\Big(h_2(\omega)\int\limits_0^t h_1(b(t,\omega) - b(\xi,\omega) + a(y,\omega))d\xi\Big) e^{-i\omega x} d\omega$$

корректно определена и при фиксированных (y,t) *является функцией распределения некоторой безгранично делимой случайной величины.*

Доказательство следует из теоремы Леви–Хинчина [7].

В качестве приложений приведем аналогичные и более подробные результаты, связанные с математическим моделированием этнических процессов [8; 9].

Пусть $\overline{y} = (\overline{y}', t)$, $\overline{y}' \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ — координаты пространство-время, (x,p), $x \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^m$ — координаты, связанные с пассионарностью; x — потенциальная возможность особи к активным действиям; p — пассионарный импульс. Через $w(x,p,\overline{y})$ обозначим плотность распределения особей данного этноса в пространстве $\mathbb{R}^{2m+n+1}$ переменных $(x,p,\overline{y})$, а через $H(x,p,\overline{y})$ — биохимическую энергию, определяющую пассионарное поле. Пусть $P(x,p,\overline{y})$ — закон, по которому живет этнос: появление, исчезновение, перемещение особей в пространстве.

Этнический процесс моделируется уравнением

$$P * w + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,p)\Big(\frac{\partial w}{\partial x_i} * \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial w}{\partial p_i} * \frac{\partial H}{\partial x_i}\Big) = 0, \tag{12}$$

где $*$ обозначает свертку по пространственно-временной переменной $\overline{y} = (\overline{y}', t)$:

$$P * w = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} P(x,p,\overline{y} - \overline{q}) w(x,p,\overline{q})\, \mathrm{d}\overline{q}.$$

Если, например,

$$H=\sum_{i=1}^{m}\Bigl(\int\limits_{0}^{p_i}R_i(\eta)\,d\eta+\int\limits_{0}^{x_i}Q_i(\eta)\,d\eta\Bigr)\delta(t)\delta(\overline{y}\,'),$$

$$P=a(x,p)\delta(t)f(\overline{y}\,')+\sum_{k=1}^{s}\delta^{(k)}(t)\sum\delta^{(k_1)}(y_1)\ldots\delta^{(k_n)}(y_n)b_{k,k_1,\ldots,k_n}(x,p),$$

то уравнение (12) примет вид

$$a(x,p)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}w(x,p,t,\overline{\xi}')f(\overline{y}'-\overline{\xi}')\,d\overline{\xi}'+\\+\sum_{k=1}^{s}\sum_{k_1,\ldots,k_n}b_{k,k_1,\ldots,k_n}(x,p)\frac{\partial^{k+k_1+\ldots+k_n}w}{\partial t^k\partial {y_1}^{k_1}\ldots\partial {y_n}^{k_n}}+\\+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,p)\Bigl(R_i(p_i)\frac{\partial w}{\partial x_i}-Q_i(x_i)\frac{\partial w}{\partial p_i}\Bigr)=0.$$

Аналогично теореме 2 имеет место

Теорема 4. *Пусть $f(z,\overline{\xi})$, $g_i(z,\overline{\xi})$, $h_i(z,\overline{\xi})$, $R_i(z,\overline{\xi})$, $Q_i(z,\overline{\xi})$, $z\in\mathbb{R}$, $\overline{\xi}\in\mathbb{R}^{n+1}$; $i=1,\ldots,m$ — произвольные дифференцируемые или аналитические комплекснозначные функции такие, что функции w, P, H, определенные нижеследующими формулами, корректно определены вместе со свертками*

$$P*w,\quad \frac{\partial w}{\partial x_i}*\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{\partial w}{\partial p_i}*\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$w(x,p,\overline{y})=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\Bigl\{f\Bigl(\sum_{i=1}^{m}\Bigl(R_i(p_i,\overline{\xi})+Q_i(x_i,\overline{\xi})\Bigr),\overline{\xi}\Bigr)\times\\\times\exp\Bigl(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{p_i}g_i(R_i(p_i,\overline{\xi})-R_i(\eta,\overline{\xi})+Q_i(x,\overline{\xi}),\overline{\xi})\,d\eta+\\+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{x_i}h_i(Q_i(x_i,\overline{\xi})-Q_i(\eta,\overline{\xi})+R_i(p_i,\overline{\xi}),\overline{\xi})d\eta\Bigr)\Bigr\}e^{i\overline{y}\overline{\xi}}\,d\overline{\xi},\qquad(13)$$

$$P(x,p,\overline{y})=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\sum_{i=1}^{m}a_i(x,p)\Bigl(\frac{\partial Q_i(x_i,\overline{\xi})}{\partial x_i}g_i(Q_i(x_i,\overline{\xi}),\overline{\xi})-\\-\frac{\partial R_i(p_i,\overline{\xi})}{\partial p_i}h_i(R_i(p_i,\overline{\xi}),\overline{\xi})\Bigr)e^{i\overline{y}\overline{\xi}}\,d\overline{\xi},\qquad(14)$$

$$H(x,p,\overline{y})=\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}\sum_{i=1}^{m}\Bigl(R_i(p_i,\overline{\xi})+Q_i(x_i,\overline{\xi})\Bigr)e^{i\overline{y}\overline{\xi}}\,d\overline{\xi}.\qquad(15)$$

Тогда $w(x,p,\overline{y})$, $P(x,p,\overline{y})$, $H(x,p,\overline{y})$ удовлетворяют уравнению (12).

Доказательство также осуществляется непосредственной проверкой.

Замечание 3. В данной работе мы считаем, что переменные (x, p) соответствуют пассионарному полю. Разумеется, для приложений переменные (x, p) могут иметь и другие интерпретации. Например, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, где x_j — цена, p_j — ценовое изменение [6].

Если в уравнении (12) положить $m = 1$, $a_i = 1$, то формулы (13)–(15) примут, соответственно, вид

$$w(x,p,\overline{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big\{ f(R(p,\overline{\xi}) + Q(x,\overline{\xi}),\overline{\xi}) \times \\ \times \exp\Big(\int\limits_0^p g(R(p,\overline{\xi}) - R(\eta,\overline{\xi}) + Q(x,\overline{\xi}),\overline{\xi})\, d\eta + \\ + \int\limits_0^x h(Q(x,\overline{\xi}) - Q(\eta,\overline{\xi}) + R(p,\overline{\xi}),\overline{\xi}) d\eta \Big) \Big\} e^{i\overline{y}\overline{\xi}} d\overline{\xi}, \quad (16)$$

$$P(x,p,\overline{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big(\frac{\partial Q(x,\overline{\xi})}{\partial x} g(Q(x,\overline{\xi}),\overline{\xi}) - \frac{\partial R(p,\overline{\xi})}{\partial p} h(R(p,\overline{\xi}),\overline{\xi}) \Big) e^{i\overline{y}\overline{\xi}} d\overline{\xi}, \quad (17)$$

$$H(x,p,\overline{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big(R(p,\overline{\xi}) + Q(x,\overline{\xi}) \Big) e^{i\overline{y}\overline{\xi}} d\overline{\xi}. \quad (18)$$

Найдем вид функций $f(z,\overline{\xi})$, $g(z,\overline{\xi})$, $h(z,\overline{\xi})$ из формул (16)–(18) при условии того, что функция энергии $H(x,p,\overline{y})$, определяющая пассионарное поле, имеет следующий вид:

$$H(x,p,\overline{y}) = \tilde{\alpha}(\overline{y}) p^{2k} + \tilde{\beta}(\overline{y}) x^{2l}, \quad k,\, l \in \mathbb{N}$$

и $\tilde{\alpha}(\overline{y})$, $\tilde{\beta}(\overline{y})$ — фиксированные функции.

Теорема 5. *Пусть*

$$w_0(p,\overline{y}) = w|_{x=0}, \quad w_1(x,\overline{y}) = w|_{p=0},$$

$\hat{w}_0(p,\overline{\xi})$, $\hat{w}_1(x,\overline{\xi})$ *— обратные преобразования Фурье функций* $w_0(p,\overline{y})$, $w_1(x,\overline{y})$; $\alpha(\overline{\xi})$, $\beta(\overline{\xi})$ *— обратное преобразование Фурье функций* $\tilde{\alpha}(\overline{y})$, $\tilde{\beta}(\overline{y})$. *Тогда для функций* f, g, h, $\alpha(\overline{\xi}) \neq 0$, $\beta(\overline{\xi}) \neq 0$, *из* (16)–(18) *имеют место следующие формулы:*

$$f(z,\overline{\xi}) = \sqrt{\hat{w}_0\Big(\Big(\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}},\overline{\xi}\Big)\hat{w}_0\Big(-\Big(\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}},\overline{\xi}\Big)}, \quad z \geq 0,$$

$$g(z,\overline{\xi}) = \frac{2k^2}{2k-1}\sin\Big(\frac{\pi}{2k}\Big)\alpha(\overline{\xi})^{\frac{1}{2k}} \int\limits_0^z \frac{1}{(z-\eta)^{1/2k}} \frac{d}{d\eta} \ln \frac{\hat{w}_0\Big(\Big(\frac{\eta}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{1/2k},\overline{\xi}\Big)}{\hat{w}_0\Big(-\Big(\frac{\eta}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{1/2k},\overline{\xi}\Big)}\, d\eta,$$

$$h(z,\overline{\xi}) = \frac{2l^2}{2l-1}\sin\Big(\frac{\pi}{2l}\Big)\beta(\overline{\xi})^{\frac{1}{2l}} \int\limits_0^z \frac{1}{(z-\eta)^{1/2l}} \frac{d}{d\eta} \ln \frac{\hat{w}_1\Big(\Big(\frac{\eta}{\beta(\overline{\xi})}\Big)^{1/2l},\overline{\xi}\Big)}{\hat{w}_1\Big(-\Big(\frac{\eta}{\beta(\overline{\xi})}\Big)^{1/2l},\overline{\xi}\Big)}\, d\eta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\hat{w} = f\Big(\alpha(\overline{\xi})p^{2k} + \beta(\overline{\xi})x^{2l}, \overline{\xi}\Big)\exp\Big(\int\limits_0^p g\Big(\alpha(\overline{\xi})(p^{2k} - \eta^{2k}) + \beta(\overline{\xi})x^{2l}, \overline{\xi}\Big)\mathrm{d}\eta + \\ + \int\limits_0^x h\Big(\beta(\overline{\xi})(x^{2l} - \eta^{2l}) + \alpha(\overline{\xi})p^{2k}, \overline{\xi}\Big)\,\mathrm{d}\eta\Big),$$

$$\widehat{w_0} = f\Big(\alpha(\overline{\xi})p^{2k}, \overline{\xi}\Big)\exp\Big(\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(p^{2k} - \eta^{2k}), \overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta\Big).$$

Тогда

$$\widehat{w_0}\Big(p, \overline{\xi}\Big)\widehat{w_0}\Big(-p, \overline{\xi}\Big) = f^2\Big(\alpha(\overline{\xi})p^{2k}, \overline{\xi}\Big).$$

Полагая $z = \alpha(\overline{\xi})p^{2k}$, находим

$$f(z, \overline{\xi}) = \sqrt{\widehat{w_0}\Big(\Big(\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}}, \overline{\xi}\Big)\widehat{w_0}\Big(-\Big(\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}}, \overline{\xi}\Big)}.$$

Далее

$$\frac{\widehat{w_0}(p, \overline{\xi})}{\widehat{w_0}(-p, \overline{\xi})} = \exp\Big(2\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(p^{2k} - \eta^{2k}), \overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta\Big),$$

или

$$\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(p^{2k} - \eta^{2k}), \overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\widehat{w_0}(p, \overline{\xi})}{\widehat{w_0}(-p, \overline{\xi})}.$$

Положим $z = \alpha(\overline{\xi})(p^{2k} - \eta^{2k})$. Тогда

$$\mathrm{d}\eta = -\frac{\mathrm{d}z}{2k\alpha(\overline{\xi})\Big(p^{2k} - \frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}},$$

$$\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(p^{2k} - \eta^{2k}), \overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta) = \int\limits_0^{\alpha(\overline{\xi})p^{2k}} \frac{g(z, \overline{\xi})\,\mathrm{d}z}{2k\alpha(\overline{\xi})(p^{2k} - \frac{z}{\alpha(\overline{\xi})})^{\frac{2k-1}{2k}}}.$$

Итак,

$$k\alpha(\overline{\xi})\ln\frac{\widehat{w_0}(p, \overline{\xi})}{\widehat{w_0}(-p, \overline{\xi})} = \int\limits_0^{\alpha(\overline{\xi})p^{2k}} \frac{g(z, \overline{\xi})\,\mathrm{d}z}{2k\alpha(\overline{\xi})\Big(p^{2k} - \frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{2k-1}{2k}}}.$$

Положим $q = \alpha(\overline{\xi})p^{2k}$. Тогда $p = \Big(\frac{q}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{1/2k}$ и

$$\int\limits_0^q \frac{g(z, \overline{\xi})\,\mathrm{d}z}{(q - z)^{\frac{2k-1}{2k}}} = k\alpha(\overline{\xi})^{\frac{1}{2k}}\ln\frac{\widehat{w_0}\Big(\Big(\frac{q}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}}, \overline{\xi}\Big)}{\widehat{w_0}\Big(-\Big(\frac{q}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}}, \overline{\xi}\Big)}.$$

Написанное равенство имеет вид

$$\int\limits_0^q \frac{g(z, \overline{\xi})\,\mathrm{d}z}{(q - z)^{\frac{2k-1}{2k}}} = G(q, \overline{\xi}).$$

Как известно [10], это интегральное уравнение Абеля имеет решение

$$g(z,\overline{\xi}) = \frac{\sin\frac{\pi(2k-1)}{2k}}{\frac{2k-1}{2k}}\left[\frac{G(0,\overline{\xi})}{z^{\frac{1}{2k}}} + \int\limits_0^z \frac{1}{(z-\zeta)^{\frac{1}{2k}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}G(\zeta,\overline{\xi})\,\mathrm{d}\zeta\right] =$$

$$= \frac{2k^2}{2k-1}\sin\frac{\pi}{2k}\alpha(\overline{\xi})^{\frac{1}{2k}}\int\limits_0^z \frac{1}{(z-\zeta)^{\frac{1}{2k}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\ln\frac{\widehat{w}_0\Big(\Big(\frac{\zeta}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}},\overline{\xi}\Big)}{\widehat{w}_0\Big(-\Big(\frac{\zeta}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^{\frac{1}{2k}},\overline{\xi}\Big)}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Аналогично получается формула для $h(z,\overline{\xi})$.

Теорема доказана. $\square$

Приведем еще несколько примеров для функций f, g, h из формул (16)–(18).

Пример 1. Пусть $H = \alpha(\overline{y})|p| + \beta(\overline{y})|x|$. Тогда

$$\widehat{w}_0 = f(\alpha(\overline{\xi})|p|,\overline{\xi})\exp\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(|p|-|\eta|),\overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta.$$

Отсюда

$$f^2(\alpha(\overline{\xi})|p|,\overline{\xi}) = \widehat{w}_0(p,\overline{\xi})\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})$$

или, полагая $\alpha(\overline{\xi})|p| = z$, получаем

$$f(z,\overline{\xi}) = \sqrt{\widehat{w}_0\Big(\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})},\overline{\xi}\Big)\widehat{w}_0\Big(-\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})},\overline{\xi}\Big)}.$$

Далее

$$\frac{\widehat{w}_0(p,\overline{\xi})}{\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})} = \exp\Big(2\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(|p|-|\eta|),\overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta\Big),$$

или

$$\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(|p|-|\eta|),\overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{\widehat{w}_0(p,\overline{\xi})}{\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})}.$$

Положим $z = \alpha(\overline{\xi})(p-\eta)$. Тогда это равенство перепишется в виде

$$\int\limits_0^{\alpha(\overline{\xi})p} g(z,\overline{\xi})\,\mathrm{d}z = \frac{\alpha(\overline{\xi})}{2}\ln\frac{\widehat{w}_0(p,\overline{\xi})}{\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})}.$$

Следовательно,

$$g(z) = \frac{\alpha(\overline{\xi})^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\frac{\widehat{w}_0\Big(\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})},\overline{\xi}\Big)}{\widehat{w}_0\Big(-\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})},\overline{\xi}\Big)},$$

и, аналогично,

$$h(z) = \frac{\beta(\overline{\xi})^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\frac{\widehat{w}_1\Big(\frac{z}{\beta(\overline{\xi})},\overline{\xi}\Big)}{\widehat{w}_1\Big(-\frac{z}{\beta(\overline{\xi})},\overline{\xi}\Big)}.$$

Пример 2. Пусть $H = \alpha(\overline{y})\sin^2 p + \beta(\overline{y})\sin^2 x$. Тогда

$$\widehat{w}_0(p,\overline{\xi}) = f(\alpha(\overline{\xi})\sin^2 p, \overline{\xi}) \exp \int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(\sin^2 p - \sin^2 \eta), \overline{\xi})\, d\eta.$$

Отсюда

$$f^2(\alpha(\overline{\xi})\sin^2 p, \overline{\xi}) = \widehat{w}_0(p,\overline{\xi})\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})$$

или, полагая $z = \alpha(\overline{\xi})\sin^2 p$, получаем

$$f(z,\overline{\xi}) = \sqrt{\widehat{w}_0\Big(\arcsin\sqrt{\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}}, \overline{\xi}\Big)\widehat{w}_0\Big(-\arcsin\sqrt{\frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}}, \overline{\xi}\Big)}.$$

Далее

$$\frac{\widehat{w}_0(p,\overline{\xi})}{\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})} = \exp\Big(2\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(\sin^2 p - \sin^2\eta), \overline{\xi})\, d\eta\Big).$$

Отсюда

$$\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(\sin^2 p - \sin^2\eta), \overline{\xi})\, d\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{\widehat{w}_0(p,\overline{\xi})}{\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})}.$$

Положим $z = \alpha(\overline{\xi})(\sin^2 p - \sin^2\eta)$. Тогда

$$\int\limits_0^p g(\alpha(\overline{\xi})(\sin^2 p - \sin^2\eta), \overline{\xi})\, d\eta \;=\; \frac{1}{2\alpha(\overline{\xi})}\int\limits_0^{\alpha(\overline{\xi})\sin^2 p} \frac{g(z,\overline{\xi})\, d\eta}{\sqrt{\Big(\sin^2 p - \frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big) - \Big(\sin^2 p - \frac{z}{\alpha(\overline{\xi})}\Big)^3}}.$$

Пусть $q = \alpha(\overline{\xi})\sin^2 p$. Тогда

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\widehat{w}_0(p,\overline{\xi})}{\widehat{w}_0(-p,\overline{\xi})} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha(\overline{\xi})}}\int\limits_0^q \frac{g(z,\overline{\xi})\, d\eta}{\sqrt{(q-z) - \frac{1}{\alpha^2(\overline{\xi})}(q-z)^3}}$$

и, окончательно, получаем интегральное уравнение на функцию $g(z,\overline{\xi})$:

$$\int\limits_0^q \frac{g(z,\overline{\xi})\, d\eta}{\sqrt{(q-z) - \frac{1}{\alpha^2(\overline{\xi})}(q-z)^3}} = \sqrt{\alpha(\overline{\xi})}\ln\frac{\widehat{w}_0(\arcsin\sqrt{\frac{q}{\alpha(\overline{\xi})}}, \overline{\xi})}{\widehat{w}_0(-\arcsin\sqrt{\frac{q}{\alpha(\overline{\xi})}}, \overline{\xi})}.$$

Аналогичному уравнению удовлетворяет функция $h(z,\overline{\xi})$:

$$\int\limits_0^q \frac{h(z,\overline{\xi})\, d\eta}{\sqrt{(q-z) - \frac{1}{\beta^2(\overline{\xi})}(q-z)^3}} = \sqrt{\beta(\overline{\xi})}\ln\frac{\widehat{w}_1(\arcsin\sqrt{\frac{q}{\beta(\overline{\xi})}}, \overline{\xi})}{\widehat{w}_1(-\arcsin\sqrt{\frac{q}{\beta(\overline{\xi})}}, \overline{\xi})}.$$

Аналогичные результаты получаются и для систем, имитирующих эволюции этносов.

Пусть заданы аналитические функции $f_i(z,\overline{\xi})$, $h_i(z,\overline{\xi})$, $g_i(z,\overline{\xi})$, $R(z,\overline{\xi})$, $Q(z,\overline{\xi})$, $i = 0,1,2,3$. Положим

$$\alpha_i(p,x,\overline{\xi}) = \int\limits_0^p g_i(R(p,\overline{\xi}) - R(\eta,\overline{\xi}) + Q(x,\overline{\xi}),\overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta + \\ + \int\limits_0^x h_i(Q(x,\overline{\xi}) - Q(\eta,\overline{\xi}) + R(p,\overline{\xi}),\overline{\xi})\,\mathrm{d}\eta, \quad i = 0,1,2,3,$$

$$\varepsilon = \sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2},$$

$$\sigma = \cos\varepsilon, \quad \theta = \begin{cases} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}, & \text{если } \varepsilon \neq 0, \\ 1, & \text{если } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Пусть функции α_1, α_2, α_3 удовлетворяют дополнительным условиям

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial p}\alpha_j = \frac{\partial\alpha_j}{\partial p}\alpha_i, \quad \frac{\partial\alpha_i}{\partial x}\alpha_j = \frac{\partial\alpha_j}{\partial x}\alpha_i, \text{ при } i \neq j,$$

и

$$\beta_i(p,x,\overline{\xi}) = g_i(Q(x,\overline{\xi}),\overline{\xi})\frac{\partial Q}{\partial x} - h_i(R(p,\overline{\xi}),\overline{\xi})\frac{\partial R}{\partial p}, \quad i = 0,1,2,3,$$

$$w_0 = (\sigma f_0 - \theta(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3))e^{\alpha_0},$$

$$w_1 = (\sigma f_1 + \theta(f_0\alpha_1 + f_2\alpha_3 - f_3\alpha_2))e^{\alpha_0},$$

$$w_2 = (\sigma f_2 + \theta(f_0\alpha_2 + f_3\alpha_1 - f_1\alpha_3))e^{\alpha_0},$$

$$w_3 = (\sigma f_3 + \theta(f_0\alpha_3 + f_1\alpha_2 - f_2\alpha_1))e^{\alpha_0}.$$

$$N = {f_0}^2 + {f_1}^2 + {f_2}^2 + {f_3}^2,$$

$$P_0 = \frac{1}{N}\beta_0,$$

$$P_1 = \frac{1}{N}(\beta_1({f_0}^2 + {f_1}^2 - {f_2}^2 - {f_3}^2) + 2\beta_2(f_1f_2 - f_0f_3) + 2\beta_3(f_0f_2 + f_1f_3)),$$

$$P_2 = \frac{1}{N}(\beta_2({f_0}^2 - {f_1}^2 + {f_2}^2 - {f_3}^2) + 2\beta_1(f_0f_3 + f_1f_2) + 2\beta_3(f_2f_3 - f_0f_1)),$$

$$P_3 = \frac{1}{N}(\beta_3({f_0}^2 - {f_1}^2 - {f_2}^2 + {f_3}^2) + 2\beta_1(f_1f_3 - f_0f_2) + 2\beta_2(f_2f_3 + f_0f_1)).$$

Справедлива следующая

Теорема 6. *Пусть* $f_i(z,\overline{\xi})$, $g_i(z,\overline{\xi})$, $h_i(z,\overline{\xi})$, $R(z,\overline{\xi})$, $Q(z,\overline{\xi})$, $z \in \mathbb{R}^1$, $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 0,1,2,3$ — *произвольные аналитические функции такие, что функции* w_i, P_i, $H = R(p,\overline{\xi}) + Q(x,\overline{\xi})$, *определенные вышенаписанными формулами, корректно определены вместе со свертками* $P_i * w_j$, $\frac{\partial H}{\partial x} * \frac{\partial w_i}{\partial p}$, $\frac{\partial H}{\partial p} * \frac{\partial w_i}{\partial x}$, $i,j = 0,\ldots,3$. *Тогда* w_i, P_i, H *удовлетворяют системе уравнений:*

$$P_0 * w_0 - P_1 * w_1 - P_2 * w_2 - P_3 * w_3 + \frac{\partial H}{\partial p} * \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} * \frac{\partial w_0}{\partial p} = 0,$$

$$P_1 * w_0 + P_0 * w_1 - P_3 * w_2 + P_2 * w_3 + \frac{\partial H}{\partial p} * \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} * \frac{\partial w_1}{\partial p} = 0,$$

$$P_2 * w_0 + P_3 * w_1 + P_0 * w_2 - P_1 * w_3 + \frac{\partial H}{\partial p} * \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} * \frac{\partial w_2}{\partial p} = 0,$$

$$P_3 * w_0 + P_0 * w_3 + P_1 * w_2 - P_2 * w_1 + \frac{\partial H}{\partial p} * \frac{\partial w_3}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} * \frac{\partial w_3}{\partial p} = 0.$$

Список литературы

1. *Аниконов Ю. Е.* Конструктивные методы исследования обратных задач для эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. мат. 2008. Т. 11, № 2. С. 3–20.

2. *Anikonov Yu. E.* Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems. VSP, Utrecht, 1997.

3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

4. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

5. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1938. Вып. 5. С. 5–41.

6. *Хренников А. Ю.* Введение в квантовую теорию информации. М.: Физматлит, 2008.

7. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972.

8. *Аниконов Ю. Е.* О математическом моделировании этнических процессов // ДАН. 1995. Т. 345, № 1. С. 7–9.

9. *Neshchadim M. V.* Dynamical Model of the Ethnic System. Formulas in Direct and Inverse Problems // JIIPP. 1998. Vol. 6. No. 6. P. 605–618.

10. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

Материал поступил в редколлегию 17.07.2010

Адреса авторов

АНИКОНОВ Юрий Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: anikon@math.nsc.ru

НЕЩАДИМ Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: neshch@math.nsc.ru