УДК 512.543

Ф. А. Дудкин, В. А. Чуркин

ЧИСЛО ПОДГРУПП ДАННОГО КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА В ГРУППАХ БАУМСЛАГА–СОЛИТЕРА

Гелман указал простую формулу для числа подгрупп данного конечного индекса в группах Баумслага–Солитера $BS(p,q) = \langle a,\ t \mid t^{-1}a^p t = a^q\rangle$ при взаимно простых параметрах p и q. В работе решена аналогичная задача для произвольных ненулевых целых параметров. Решение основано на комбинаторном подсчёте при заданной подстановке $x \in S_n$ количества подстановок $y \in S_n$, для которых подгруппа порожденная x и y транзитивна.

Ключевые слова: группа Баумслага–Солитера, число подгрупп данного конечного индекса, транзитивные двупорожденные подгруппы группы S_n.

Введение

Группа называется *хопфовой*, если всякий ее гомоморфизм на себя является автоморфизмом. Далее будем считать, что p и q — взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$), не равные нулю. Баумслаг и Солитер [1] указали серию нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются

$$BS(p,q) = \langle\, a,\ t \mid t^{-1}a^p t = a^q \,\rangle\,.$$

В последнее время появилось несколько работ, посвященных вычислению количества подгрупп данного конечного индекса в группах Баумслага–Солитера. Пусть $a_n(G)$ — число подгрупп индекса n в группе G, а $a_n^{\triangleleft}(G)$ — число нормальных подгрупп индекса n в группе G. Гелман [2] и Баттон [3] доказали соответственно, что

$$a_n(BS(p,q)) = \sum_{\substack{l\mid n\\ l\perp pq}} l, \quad a_n^{\triangleleft}(BS(p,q)) = \sum_{\substack{n=lm\\ l\mid p^m-q^m}} \text{НОД}(l, p-q).$$

При произвольных ненулевых целых k и l группы $BS(k,l)$ могут быть хопфовыми. Тем не менее, эти группы изучались и оказались интересными с разных позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т. д.

В этой работе будет получено обобщение формулы Гелмана для произвольных целых ненулевых параметров k и l.

§ 1. Двупорожденные транзитивные подгруппы симметрической группы

Обозначим через $\mathbb{N}_n$ множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, через $\mathcal{P}(X)$ — множество подмножеств множества X, а через $Par(\mathbb{N}_n)$ — множество разбиений множества $\mathbb{N}_n$ на собственные

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 54–60

непустые подмножества. Таким образом, $Par(\mathbb{N}_n) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_n))$, причем для всех $\mathfrak{A} \in \in Par(\mathbb{N}_n)$ верны свойства:

1) если $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{A}$, и $A \neq B$, то $A \cap B = \varnothing$,

2) $\sqcup_{A \in \mathfrak{A}} = \mathbb{N}_n$,

3) если $A \in \mathfrak{A}$, то $A \neq \mathbb{N}_n$ и $A \neq \varnothing$.

Будем говорить, что разбиение $\mathfrak{A}$ не больше, чем разбиение $\mathfrak{B}$, и писать $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, если разбиение $\mathfrak{A}$ мельче разбиения $\mathfrak{B}$. Точнее, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, если для любого $A \in \mathfrak{A}$ существует $B \in \mathfrak{B}$ такое, что $A \subseteq B$.

Если не оговорено противное, будем далее считать, что циклическая подгруппа $\langle x \rangle \subset \subset S_n$ разбивает $\mathbb{N}_n$ на орбиты $B_1, B_2, \ldots, B_m$ длин $a_1, a_2, \ldots, a_m$ при некоторой фиксированной нумерации орбит. Фактически это значит, что подстановка $x \in S_n$ распадается в произведение m независимых циклов длин $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Обозначим через $N(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ число подстановок y, для которых подгруппа $\langle x, y \rangle$ группы S_n, порожденная x и y, нетранзитивна.

Пусть $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subseteq \mathbb{N}_m$. Сужение подстановки $x \in S_n$ на $B_{i_1} \sqcup B_{i_2} \sqcup \cdots \sqcup B_{i_r}$ обозначим через $x_A \in S_{|A|}$. Аналогично определим $N(A) = N(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ — число подстановок y_A, для которых подгруппа $\langle x_A, y_A \rangle$ группы $S_{|A|}$ нетранзитивна.

Будем говорить, что $y \in S_n$ — укрупнение подстановки x, а x — измельчение y, если всякая орбита y является объединением орбит x. В этом случае возникает разбиение $\mathfrak{A}$ множества орбит подстановки x, состоящее из таких $A \subseteq \mathbb{N}_m$, что существует орбита C подстановки y со свойством $C = \sqcup_{i \in A} B_i$.

Обратно, если $\mathfrak{A} \in Par(\mathbb{N}_m)$ и y — укрупнение x, то будем говорить, что y согласована с $\mathfrak{A}$ относительно x, если для любой орбиты C подстановки y найдется $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $C = \sqcup_{i \in A} B_i$. Обозначим мощность множества $Par(\mathbb{N}_m)$ через $p(m)$, а число подстановок y, согласованных с $\mathfrak{A}$ через $N(\mathfrak{A})$.

Например, подстановки $y_1 = (123)(45)$, $y_2 = (132)(45)$, $y_3 = (1)(2435)$, $y_4 = (1)(23)(45) \in \in S_5$ являются различными укрупнениями подстановки $x = (1)(23)(45)$. При этом y_1 и y_2 согласованы с $\mathfrak{A} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ относительно x, а y_3 и y_4 не согласованы с $\mathfrak{A}$ относительно x. Кроме y_1 и y_2 других подстановок, согласованных с $\mathfrak{A}$ относительно x, нет, значит $N(\mathfrak{A}) = 2$.

Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s \in Par(\mathbb{N}_m)$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ задано свойствами:

1) $\overline{\mathfrak{A}} \leqslant \mathfrak{A}_i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$,

2) $\overline{\mathfrak{A}}$ — максимальное разбиение со свойством 1).

Отметим, что y согласована с $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s$ относительно x тогда и только тогда, когда y согласована с $\overline{\mathfrak{A}}$ относительно x. Обозначим через $N(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s)$ — число подстановок y, согласованных с $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s$ относительно x. Тогда $N(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_s) = = N(\overline{\mathfrak{A}})$.

Пусть $\mathfrak{A} \in Par(\mathbb{N}_m)$. Введем характеристические функции на S_n :

$$\chi_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle x, y \rangle \text{ транзитивна,} \\ 0, & \text{если } \langle x, y \rangle \text{ нетранзитивна;} \end{cases}$$

$$\chi_{\mathfrak{A},x}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ согласована с } \mathfrak{A} \text{ относительно } x, \\ 0, & \text{если } y \text{ не согласована с } \mathfrak{A} \text{ относительно } x. \end{cases}$$

Следующая теорема позволяет различными способами по данной цикловой структуре подстановки $x \in S_n$ находить число подстановок $y \in S_n$ таких, что подгруппа $\langle x, y\rangle$, порожденная x и y, транзитивна.

Теорема 1. *Пусть $x \in S_n$, x разбивает множество $\mathbb{N}_n$ на орбиты $B_1, B_2, \ldots, B_m$ длин $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Пусть $T(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ — число подстановок y, для которых подгруппа $\langle x, y\rangle$ группы S_n транзитивна. Тогда*

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_m) = n! - N(a_1, a_2, \ldots, a_m), \quad \text{где}$$

$$N(a_1) = 0, \quad N(a_1, a_2) = a_1!\, a_2!,$$

$$N(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{\mathfrak{A} \in Par(\mathbb{N}_m)} \prod_{A \in \mathfrak{A}} \Big[\Big(\sum_{i \in A} a_i\Big)! - N(A)\Big], \tag{1}$$

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_m) = n! + \sum_{k=1}^{p(m)} (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant p(m)} N(\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k}), \tag{2}$$

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{y \in S_n} \prod_{\mathfrak{A} \in Par(\mathbb{N}_m)} \big(1 - \chi_{\mathfrak{A},x}(y)\big). \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подсчитаем количество подстановок y, для которых подгруппа $\langle x, y\rangle$ действует нетранзитивно на $\mathbb{N}_n$. Подгруппа $\langle x, y\rangle$ разбивает $\mathbb{N}_n$ на орбиты $C_1, C_2, \ldots, C_l$, $l \geqslant 2$, при этом орбиты x содержатся в C_i так, что $C_i = \sqcup_{j \in A_i} B_j$. Таким образом, всякая такая подстановка y задает разбиение m-элементного множества орбит подстановок x. Обозначим это разбиение $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$. Всякая подстановка y, которая соответствует разбиению $\mathfrak{A}$, обеспечивает транзитивность $\langle x, y\rangle$ на C_i для всех $i = 1, 2, \ldots, l$. Пусть $y_{C_i} = y|_{C_i} \in S_{|C_i|}$ и $x_{C_i} = x|_{C_i} \in S_{|C_i|}$. Подстановки x и y однозначно задаются своими сужениями на $C_i, i = 1, 2, \ldots, l$. Поэтому задача сводится к подсчету числа таких подстановок y_{C_i}, что $\langle x_{C_i}, y_{C_i}\rangle$ действует транзитивно на C_i для каждого i от 1 до l. Это число равно $|C_i|! - N(A_i)$, где $N(A_i)$ вычисляется по формуле (1). Перемножая полученные числа, найдем число подстановок y, соответствующих разбиению $\mathfrak{A}$. Заметим, что

$$\big|C_i\big| = \sum_{j \in A_i} \big|B_j\big| = \sum_{j \in A_i} a_j.$$

Значит, при фиксированном разбиении $\mathfrak{A}$ получаем

$$\prod_{A \in \mathfrak{A}} \Big[\Big(\sum_{i \in A} a_i\Big)! - N(A)\Big]$$

возможных подстановок y. Так как $\{\{1, 2, \ldots, m\}\} \notin Par(\mathbb{N}_m)$, то всякое разбиение из $Par(\mathbb{N}_m)$ соответствует нетранзитивному действию $\langle x, y\rangle$.

Заметим, что формула (1) содержит выражение $N(A)$ по всем $A \in \mathfrak{A}$ и является рекурсивной. На каждом шаге $|A|$ убывает. Если x является циклом, то нет таких подстановок y, что $\langle x, y\rangle$ нетранзитивна. Если x — произведение двух циклов B_1 и B_2 длин a_1 и a_2, то $\langle x, y\rangle$ нетранзитивна тогда и только тогда, когда y действует произвольно на B_1 и B_2, но не перемешивает их. Таких подстановок ровно $a_1!\, a_2!$. Поэтому $N(a_1) = 0$, а $N(a_1, a_2) = a_1!\, a_2!$. Это обеспечивает корректность рекурсии.

Чтобы доказать формулу (2), надо заметить, что y обеспечивает транзитивность $\langle x, y\rangle$ тогда и только тогда, когда y не согласована ни с одним разбиением $\mathfrak{A} \in Par(\mathbb{N}_m)$ относительно x. Применяя принцип включения-исключения (см., например, [4]) получим формулу (2).

Из сказанного выше также следует, что

$$\chi_x(y) \ = \prod_{\mathfrak{A}\in Par(\mathbb{N}_m)} \big(1 - \chi_{\mathfrak{A},x}(y)\big),$$

откуда получаем формулу (3). Несложно видеть, что формула (2) получается из формулы (3) путем раскрытия скобок.

§ 2. Число подгрупп индекса n в группе $BS(dp, dq)$

Пусть $k,\ l$ — произвольные целые ненулевые числа, d — их наибольший общий делитель, $k = dp$, а $l = dq$. Тогда p и q взаимно просты. Произвольная группа Баумслага–Солитера имеет вид

$$BS(dp, dq) = \langle a,\ t \mid t^{-1}a^{dp}t = a^{dq}\rangle.$$

Будем искать число подгрупп индекса n в группе $BS(dp, dq)$ аналогично [2]. Пусть H — подгруппа индекса n в группе G. Тогда G действует на левых смежных классах H умножением слева. Занумеруем H единичкой, а остальные смежные классы числами $2, 3, \ldots, n$ в произвольном порядке. Получим гомоморфизм $\varphi\colon G \mapsto S_n$. Заметим, что, во-первых, $\varphi(G)$ транзитивна, а, во-вторых, $H = \varphi^{-1}\left(Stab_{\varphi(G)}1\right)$.

Так как существует $(n-1)!$ различных нумераций смежных классов и разные нумерации дают разные гомоморфизмы, то каждая подгруппа индекса n дает $(n-1)!$ различных гомоморфизмов $\varphi\colon G \mapsto S_n$, для которых выполнены оба условия. Обратно, всякий гомоморфизм $\varphi\colon G \mapsto S_n$ с транзитивным образом можно связать с подгруппой $\varphi^{-1}\left(Stab_{\varphi(G)}1\right)$ индекса n. Обозначим через $t_n(G)$ число гомоморфизмов из G в S_n с транзитивным образом. Получим

$$a_n(G) = \frac{t_n(G)}{(n-1)!}.$$

Чтобы найти $t_n(BS(dp, dq))$, достаточно посчитать число пар подстановок x, y, для которых

1) подгруппа $\langle x, y\rangle$ транзитивна на $\mathbb{N}_n$,

2) $x^{dp} = y^{-1}x^{dq}y$.

Обозначим через (m, n) — наибольший общий делитель двух натуральных чисел m и n, а через $\pi(n)$ — множество простых делителей числа n. Мы будем часто использовать следующее известное утверждение

Лемма 1. *Пусть w — цикл длины m. Тогда w^r — произведение $k = (r, m)$ независимых циклов одинаковой длины m/k.*

Лемма 2. *Пусть $z \in S_n$ и $p \perp q$. Подстановки z^p и z^q сопряжены в S_n тогда и только тогда, когда z – произведение независимых циклов длин, взаимно простых с pq.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w — цикл максимальной длины m из канонического разложения z. Тогда $m \perp p$ или $m \perp q$ ввиду леммы 1. Значит, w^p — цикл длины m из z^p или w^q – цикл длины m из z^q. Поскольку z^p сопряжена с z^q, то z^p и z^q содержат цикл максимальной длины m. Это возможно, если только $m \perp p$ и $m \perp q$, то есть $m \perp pq$. Аналогичные рассуждения проходят, если взять в качестве w цикл из z длины, следующей за максимальной и т. д.

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $z \in S_n$ — произведение независимых циклов длины l. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $\pi(r) \subseteq \pi(l)$. Тогда корень степени r из подстановки z является произведением независимых циклов длин rl.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v^r = z$ и v содержит цикл w длины m. Пусть $(r, m) = k$. По лемме 1 w^r — произведение независимых циклов длины $m/k = l$. Так как $r/k \perp m/k$ и $\pi(r) \subseteq \pi(l)$, то $r/k = 1$, $r = k$, $m = kl = rl$.

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть $x, y \in S_n$ и $y^{-1}x^{dp}y = x^{dq}$, где $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{N}$, $p \perp q$. Пусть подгруппа $\langle x, y\rangle$ действует транзитивно на $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда существуют такие натуральные числа l, r, s, b и целые неотрицательные числа $k_1, k_2, \dots, k_{\tau(b)}$, что*

$$\begin{gathered} n = lrs,\ l \perp pq,\ d = rb:\ \pi(r) \subseteq \pi(l),\ l \perp b, \\ k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_{\tau(b)}b_{\tau(b)} = s. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $b_1, b_2, \dots, b_{\tau(b)}$ — все натуральные делители числа b. При этом каноническое разложение x является произведением k_1 циклов длины b_1rl, k_2 циклов длины b_2rl,…, $k_{\tau(b)}$ циклов длины $b_{\tau(b)}rl$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = x^d$. Тогда $y^{-1}z^py = z^q$. По лемме 2 каноническое разложение z состоит из циклов, длины которых взаимно просты с pq. Пусть M — объединение всех носителей циклов максимальной длины из z. Тогда M — объединение носителей циклов максимальной длины для z^p и z^q. Так как $y^{-1}z^py = z^q$, то $yM \subseteq M$.

Заметим, что $xM \subseteq M$. Действительно, если $i \in M$ и i входит в цикл w из x, то w^d входит в $x^d = z$ и является произведением циклов одинаковой максимальной длины в z. Следовательно, носитель w содержится в M, $x(i) \in M$.

Так как $\langle x, y\rangle$ — транзитивная подгруппа, то $M = \mathbb{N}_n$ и z — произведение независимых циклов одинаковой длины l, $l \perp pq$, $l | n$.

Пусть теперь $d = rb$, где $\pi(r) \subseteq \pi(l)$, $b \perp l$. Тогда x^b — корень степени r из $z = x^d$. По лемме 3 x^b – произведение независимых циклов длин rl.

Осталось извлечь корень степени b из x^b. Так как b взаимно просто с длинами циклов x^b, равными rl, то x является произведением k_1 циклов длины b_1rl, k_2 циклов длины b_2rl,…, $k_{\tau(b)}$ циклов длины $b_{\tau(b)}rl$ для произвольного набора целых неотрицательных чисел $k_1, k_2, \dots, k_{\tau(b)}$, удовлетворяющих равенству

$$k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_{\tau(b)}b_{\tau(b)} = \frac{n}{rl} = s.$$

Лемма 4 доказана. □

Пусть x — произведение k_1 циклов длины b_1, k_2 циклов длины b_2,…,k_r циклов длины b_r. Обозначим через $V(b,s)$ вектор

$$\Bigl(\overbrace{b_1, b_1 \ldots, b_1}^{k_1}, \overbrace{b_2, b_2 \ldots, b_2}^{k_2}, \ldots, \overbrace{b_r, b_r \ldots, b_r}^{k_r}\Bigr).$$

Фактически $V(b,s)$ задает разбиение s в монотонную сумму натуральных делителей $b_1, b_2, \ldots, b_{\tau(b)}$ числа b:

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_{\tau(b)} b_{\tau(b)} = s.$$

Лемма 5. *Число подстановок в группе S_n с цикловой структурой, описанной выше, равно*

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r! \cdot b_1^{k_1} \cdot b_2^{k_2} \ldots b_r^{k_r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа S_n действует сопряжением сама на себе. Орбиты этого действия — это множества подстановок с одинаковой цикловой структурой. Имеем

$$|Orb_{S_n} x| = |S_n \colon Stab_{S_n} x| = \frac{n!}{|Stab_{S_n} x|}.$$

При сопряжении элементы стабилизатора могут менять циклы одинаковой длины местами, а действие внутри цикла определяется образом одного элемента. Получаем

$$|Stab_{S_n} x| = k_1! \cdot k_2! \ldots k_r! \cdot b_1^{k_1} \cdot b_2^{k_2} \ldots b_r^{k_r}.$$

Лемма 5 доказана. □

Теорема 2. *Пусть $K = k_1 + k_2 + \cdots + k_{\tau(b)}$. Тогда верна формула*

$$a_n\left(BS(dp,dq)\right) = \sum_{\substack{n=lrs \\ l \perp pq, d=rb \\ \pi(r) \subseteq \pi(l), b \perp l}} \; \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{\tau(b)}) \\ k_1 b_1 + \cdots + k_{\tau(b)} b_{\tau(b)} = s}} \frac{n\, l^{rs-K} T\left(r \cdot V(b,s)\right)}{k_1! \ldots k_{\tau(b)}!\; b_1^{k_1} \ldots b_{\tau(b)}^{k_{\tau(b)}} r^K}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 всякая подстановка x, являющаяся гомоморфным образом порождающего a группы $BS(dp,dq)$ в S_n, является произведением k_1 циклов длины $b_1 rl$, k_2 циклов длины $b_2 rl$, …, $k_{\tau(b)}$ циклов длины $b_{\tau(b)} rl$ для некоторого набора параметров, удовлетворяющего (4). Лемма 5 дает число подстановок данной цикловой структуры.

Зафиксируем x при данных $l, r, s, k_1, k_2, \ldots, k_{\tau(b)}$ и посчитаем число подстановок y, для которых подгруппа $\langle x, y \rangle$ транзитивна на $\{1, 2, \ldots, n\}$ и выполняется равенство $y^{-1} x^{dp} y = x^{dq}$. Пусть $z = x^d$. Тогда без потери общности можно считать, что

$$z = (1 \ldots l)(l+1 \ldots 2l) \ldots (l(rs-1)+1 \ldots rsl).$$

Пусть $A_i = \{l(i-1)+1, l(i-1)+2, \ldots, li\}$. Тогда

$$z^p = (a_{1,1}\ a_{1,2} \ldots\ a_{1,l})(a_{2,1}\ a_{2,2} \ldots\ a_{2,l}) \ldots (a_{rs,1}\ a_{rs,2} \ldots\ a_{rs,l}),$$
$$z^q = (c_{1,1}\ c_{1,2} \ldots\ c_{1,l})(c_{2,1}\ c_{2,2} \ldots\ c_{2,l}) \ldots (c_{rs,1}\ c_{rs,2} \ldots\ c_{rs,l}).$$

При этом $\{a_{i,j} \mid j = 1, 2, \ldots, l\} = \{c_{i,j} \mid j = 1, 2, \ldots, l\} = A_i$. Используем соотношение

$$z^p = yz^q y^{-1} = (y(c_{1,1})\ y(c_{1,2}) \ldots\ y(c_{1,l}))\ \ldots\ (y(c_{rs,1})\ y(c_{rs,2}) \ldots\ y(c_{rs,l})).$$

Очевидно, A_i инвариантно относительно z, а x действует на $\{A_1, A_2, \ldots, A_{rs}\}$ как произведение k_1 циклов длины $b_1 r$, k_2 циклов длины $b_2 r$, $\ldots$, $k_{\tau(b)}$ циклов длины $b_{\tau(b)} r$. Несложно видеть, что если $y(a_{i,1}) = c_{j,t} \in A_j$, то $y(a_{i,1+k}) = c_{j,t+k (\mathrm{mod}\ l)}$ для всякого k. Поэтому y определяет биекцию $A_i \mapsto A_j$ и действует как подстановка на $\{A_1, A_2, \ldots, A_{rs}\}$. При этом y полностью задается действием на $\{A_1, A_2, \ldots, A_{rs}\}$ и действиями внутри A_i. Так как y отображает A_i в A_j с циклическим сдвигом, то при фиксированном действии y на $\{A_1, A_2, \ldots, A_{rs}\}$ имеется l^{rs} различных вариантов для подстановки y в S_n. Осталось найти число пар подстановок x и y из S_{rs} таких, что $\langle x, y\rangle$ транзитивна на $\{A_1, A_2, \ldots, A_{rs}\}$ и x имеет известную цикловую структуру. Ввиду теоремы 1, леммы 5 и леммы 4 получаем

$$t_n\big(BS(dp, dq)\big) \ = \sum_{\substack{n=lrs \\ l\perp pq, d=rb \\ \pi(r)\subseteq\pi(l), b\perp l}} \ \sum_{\substack{(k_1,k_2,\ldots,k_{\tau(b)}) \\ k_1b_1+\cdots+k_{\tau(b)}b_{\tau(b)}=s}} \frac{n!\ l^{rs-K} T\,(r\cdot V(b,s))}{k_1!\ldots k_{\tau(b)}!\ b_1^{k_1}\ldots b_{\tau(b)}^{k_{\tau(b)}} r^K}.$$

Разделим полученное выражение на $(n-1)\,!$ и получим требуемую формулу. Теорема 2 доказана. $\square$

Список литературы

1. *Baumslag G., Solitar D.* Some Two-Generator One-Relator Non-Hopfian Groups // Bull. AMS. 1962. Vol. 68. No. 3. P. 199–201.

2. *Gelman E.* Subgroup Growth of Baumslag-Solitar Groups // J. Group Theory. 2005. Vol. 8. No. 6. P. 801–806.

3. *Button J. O.* A Formula for the Normal Subgroup Growth of Baumslag–Solitar Groups // J. Group Theory. 2008. Vol. 11. No. 6. P. 879–884.

4. *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2002.

Материал поступил в редколлегию 17.03.2010

Адреса авторов

ДУДКИН Федор Анатольевич
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: DudkinF@ngs.ru

ЧУРКИН Валерий Авдеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: churkin@math.nsc.ru