УДК 513.83

П. В. Черников

ОДНА ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ АБСОЛЮТНЫХ РЕТРАКТОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. II

Приведены утверждения, относящиеся к вопросу нахождения топологических характеризаций пространств Q и l_2. Установлены некоторые свойства абсолютных (окрестностных) ретрактов. В доказательствах полученных результатов использовано равенство $ANR(\mathfrak{M}) \cap AR_\epsilon(\mathfrak{M}) = AR(\mathfrak{M})$.

Ключевые слова: абсолютный (окрестностный) ретракт, Q-многообразие, l_2-многообразие, Z-множество, ϵ-ретракт.

Настоящая работа является продолжением статей [1; 2]. Методами теории ретрактов в [1] доказана

Теорема 1. *Метрическое пространство Y принадлежит классу $ANR(\mathfrak{M}) \cap AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$ в том и только в том случае, когда $Y \in AR(\mathfrak{M})$.*

В [3. С. 138] указано, что «...остающаяся проблема — получить полезные и простые топологические характеризации Q и l_2, не зависящие явным образом от свойств линейных пространств или от структуры пространства как произведения пространств». В данной работе получены с помощью теоремы 1 некоторые такие характеризации пространств Q и l_2 (теоремы 4, 5).

Установлены также некоторые свойства абсолютных (окрестностных) ретрактов.

Отметим, что Келлер доказал в 1931 г., что любое компактное выпуклое бесконечномерное подмножество l_2 гомеоморфно Q. Из недавних работ Веста и Эдвардса следует, что любое счетное бесконечное произведение компактов гомеоморфно Q тогда и только тогда, когда каждый сомножитель является абсолютным ретрактом и бесконечное число из них не вырождено. Принадлежащие Андерсону и Кадецу результаты характеризуют l_2 как топологическое пространство, гомеоморфное любому сепарабельному бесконечномерному пространству Фреше.

Результаты Торунчика утверждают, что $X \times l_2$ гомеоморфно l_2 тогда и только тогда, когда X — топологически полное сепарабельное $AR(\mathfrak{M})$-пространство. Характеризации пространств Q и l_2 получены также Торунчиком в [4; 5].

Торунчик доказал в [4], что если X — компактный метрический абсолютный ретракт, допускающий сколь угодно близкое к тождественному отображение на Z-множество, то X гомеоморфен Q.

Сформулируем определение абсолютного ε-ретракта из [1; 2], которое будет далее использовано.

Замкнутое подмножество A метрического пространства X называется ε-ретрактом X, если для всякого $\delta > 0$ существует такое непрерывное отображение $r_\delta : X \to A$, что $\rho\,(x, r_\delta(x)) \leq \delta$ для всех $x \in A$. Метрическое пространство Y называется абсолютным

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 119–123

ε-ретрактом, если всякое замкнутое подмножество A любого метрического пространства X, изометричное Y, является ε-ретрактом X.

Совокупность всех абсолютных ε-ретрактов обозначим через $AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$.

Замкнутое подмножество A метрического пространства X называется Z-множеством в X, если для произвольного открытого покрытия α пространства X найдется непрерывное отображение X в $X \setminus A$, α — близкое к тождественному отображению id_X [3].

Имеют место

Теорема 2 [3. С. 143]. *Если X есть метрический ANR-компакт, $A \subset X$ — такое Z-множество, что $X \setminus A$ является Q-многообразием, то X также является Q-многообразием.*

Теорема 3 [3. С. 148]. *Если X есть топологически полное $ANR(\mathfrak{M})$-пространство, $A \subset X$ — такое Z-множество, что $X \setminus A$ является l_2-многообразием, то X также является l_2-многообразием.*

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если в метрическом пространстве Y найдется такое Z-множество B, что $Y \setminus B \in AR(\mathfrak{M})$, то $Y \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — метрическое пространство, A — замкнутое подмножество X, $f : A \to Y$ — непрерывное отображение, $\delta > 0$. Поскольку B — Z-множество в пространстве Y, то найдется такое непрерывное отображение $h_\delta : Y \to Y \setminus B$, что $\rho(h_\delta(x), x) \le \delta$ для всех $x \in Y$. Рассмотрим непрерывное отображение $f' = h_\delta f$; $f' : A \to Y \setminus B$. Так как пространство $Y \setminus B$ принадлежит $AR(\mathfrak{M})$, то существует такое непрерывное отображение $g_\delta : X \to Y \setminus B$, что $g_\delta(x) = f'(x)$ для всех $x \in A$. Следовательно,

$$\rho\left(f(x), g_\delta(x)\right) \le \delta$$

для всех $x \in A$. Согласно предложению 1 из [2] получаем, что $Y \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$. Лемма доказана.

Отметим, что в условиях леммы метрическое пространство Y не будет, вообще говоря, абсолютным ретрактом. Приведем

Пример 1. Пусть $C = C_1 \cup C_2$, где

$$C_1 = \left\{(x, y) \in R^2 : \quad -1 \le y \le 1, \quad x = 0\right\},$$
$$C_2 = \left\{(x, y) \in R^2 : \quad y = sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x \le 1\right\}.$$

Множество C_1 является Z-множеством в компакте C; $C_2 \in AR(\mathfrak{M})$. При этом $C \notin AR(\mathfrak{M})$, $C \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$.

Теорема 4. *Если X есть метрический ANR-компакт, $A \subset X$ — такое Z- множество, что $X \setminus A$ является стягиваемым Q-многообразием, то X гомеоморфен гильбертову кубу Q.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 пространство X является Q-многообразием. Согласно лемме 1 имеем $X \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$. Так как $X \in ANR(\mathfrak{M}) \cap AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$, то по теореме 1 X — абсолютный ретракт. По теореме 22.1 из [3] стягиваемое компактное Q-многообразие гомеоморфно гильбертову кубу Q, т. е. $X \approx Q$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если X есть топологически полное $ANR(\mathfrak{M})$-пространство, $A \subset X$ — такое Z-множество, что $X \setminus A$ является стягиваемым l_2-многообразием, то X гомеоморфно l_2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 X является l_2-многообразием. Согласно лемме 1 имеем $X \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$. Поскольку $X \in ANR(\mathfrak{M}) \cap AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$, то по теореме 1 пространство X стягиваемо. Согласно результату Хендерсона [6] стягиваемое l_2-многообразие гомеоморфно пространству l_2, т. е. $X \approx l_2$.

Теорема доказана.

Теорема 4 обобщает теорему 22.1 из [3]; теорема 5 обобщает теорему Хендерсона из [6].

При доказательстве теорем 4 и 5 была использована

Теорема 6 [7]. *Если X — стягиваемое $ANR(\mathfrak{M})$-пространство, то $X \in AR(\mathfrak{M})$.*

Приведем обобщение теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть $X \in ANR(\mathfrak{M})$ и существует такое Z-множество $B \subset X$, что подпространство $X \setminus B$ стягиваемо. Тогда $X \in AR(\mathfrak{M})$.*

Доказательство аналогично доказательству теорем 4,5.

Отметим также следующее. В связи с требованием топологической полноты в теореме 3 возникает вопрос: пусть X — метрическое пространство, B — Z-множество в X и пусть пространство $X \setminus B$ топологически полно. Будет ли тогда X топологически полным? Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный. Далее потребуются такие две теоремы из [8].

Теорема 8. *Любое непустое G_δ-множество полного метрического пространства топологически полно.*

Теорема 9. *Если подмножество X_0 метрического пространства X гомеоморфно полному метрическому пространству, то X_0 является G_δ-подмножеством X.*

Приведем

Пример 2. Пусть $K_0 = (0,1) \times (0,1) \subset R^2$, A — множество всех рациональных чисел на интервале $(0,1) \times \{0\}, K = K_0 \cup A$. Множество A является, очевидно, Z-множеством в пространстве K. По теореме 8 открытый квадрат K_0 есть топологически полное метрическое пространство.

Пространство K топологически полным не является. Действительно, если бы K было топологически полным, то тогда по теореме 9 множество K было бы G_δ-подмножеством плоскости R^2 и, значит, множество A было бы G_δ-подмножеством прямой R^1,что не верно [9].

Теорема 10. *Пусть X есть $ANR(\mathfrak{M})$-пространство, $Y \subset X$ плотно в X, и пусть для всякого $\delta > 0$ существует такое непрерывное отображение $h_\delta : X \to Y$, что $\rho(h_\delta(x), x) \leq$ $\leq \delta$ для всех $x \in X$. Тогда если $Y \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$, то всякое открытое подмножество X_0 пространства X, содержащее Y, является $AR(\mathfrak{M})$-пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta > 0$, Z_0 — метрическое пространство, A — замкнутое подмножество Z_0, $f : A \to X_0$ — непрерывное отображение. Для данного $\delta > 0$ найдется такое непрерывное отображение $h_\delta : X \to Y$, что $\rho(h_\delta(x), x) \leq \delta$ для всех $x \in X$.

Рассмотрим непрерывное отображение $g_\delta = h_\delta f; g_\delta : A \to Y$. Так как Y — абсолютный ε-ретракт, то по предложению 1 из [2] существует непрерывное отображение $f_\delta : Z_0 \to Y$ такое, что

$$\rho\left(f_\delta(x), g_\delta(x)\right) \leq \delta$$

для всех $x \in A$. Следовательно,

$$\rho\left(f(x), f_\delta(x)\right) \leq 2\delta$$

для всех $x \in A$. Согласно предложению 1 из [2] имеем $X_0 \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$. По теореме Ханнера [7] $X_0 \in ANR(\mathfrak{M})$. Поскольку $X_0 \in ANR(\mathfrak{M}) \cap AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$, то по теореме 1 получаем $X_0 \in AR(\mathfrak{M})$.

Теорема доказана.

Теорема 10 обобщает теорему 1.

Отметим, что теорема 7 является также следствием теоремы 10.

Далее ε-ретрактом метрического пространства X будем называть такое подмножество A пространства X (не обязательно замкнутое), что для всякого $\delta > 0$ существует δ-ретракция $r_\delta : X \to A$ (т. е. такое непрерывное отображение $r_\delta : X \to A$, что $\rho(x, r_\delta(x)) \leq \delta$ для всех $x \in A$). Если B — Z-множество в метрическом пространстве X, то очевидно, что $X \setminus B$ — ε-ретракт X.

Теорема 11. *Пусть U — открытое подмножество гильбертова пространства l_2, являющееся его ε-ретрактом. Тогда U гомеоморфно l_2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — метрическое пространство, X_0 — замкнутое подмножество X, $f : X_0 \to U$ — непрерывное отображение, $\delta > 0$. Существует непрерывное отображение $f' : X \to l_2$ такое, что $f'|\,X_0 = f$. Найдется непрерывное отображение $r_\delta : l_2 \to U$, для которого $\rho(x, r_\delta(x)) \leq \delta$ для всех $x \in U$. Положим $f_\delta = r_\delta f'$; $f_\delta : X \to U$ — непрерывное отображение. Если $x \in X_0$, то

$$\rho\left(f(x), f_\delta(x)\right) = \rho\left(f(x), r_\delta f(x)\right) \leq \delta.$$

Согласно предложению 1 из [2] имеем $U \in AR_\varepsilon(\mathfrak{M})$. По теореме Ханнера [7] $U \in ANR(\mathfrak{M})$. По теореме 1 получаем, что $U \in AR(\mathfrak{M})$. Таким образом, U — стягиваемое l_2-многообразие и, значит, U гомеоморфно l_2 по теореме 5.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если A и B — Z-множества в l_2, то пространства $l_2 \setminus A$ и $l_2 \setminus B$ гомеоморфны.*

Приведенное следствие хорошо известно.

Автор благодарен профессору В. И. Кузьминову за обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Черников П. В.* Одна характеризация абсолютных ретрактов и ее приложения // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 69–72.

2. *Черников П. В.* Об одной характеризации абсолютных ретрактов // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 215–217.

3. *Чепмэн Т.* Лекции о Q-многообразиях. М.: Мир, 1981.

4. *Torunczyk H.* On CE-images of Hilbert Cube and Characterization of Q-manifolds // Fund. Math. 1980. Vol. 106. No. 1. P. 31–40.

5. *Torunczyk H.* Characterizing Hilbert Space Topology // Fund. Math. 1981. Vol. 111. No. 3. P. 247–262.

6. *Henderson D. W.* Infinite-Dimensional Manifolds are Open Subsets of Hilbert Space // Topology. 1970. Vol. 9. No. 1. P. 25–34.

7. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.

8. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.

9. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

Материал поступил в редколлегию 18.02.2009

Адрес автора

ЧЕРНИКОВ Павел Васильевич

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: vestnikmath@nsu.ru