УДК 621.01.512

С. С. Мамонов

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ФИЛЬТРАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Исследуется математическая модель системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка в цепях управления. Получены критерии глобальной устойчивости и условия существования предельного цикла второго рода. На примере системы с коэффициентами передачи фильтров нижних частот первого порядка показано влияние частотного кольца на глобальную устойчивость.

Ключевые слова: фазовая синхронизация, предельные циклы, автоматическая подстройка частоты.

Введение

В работе изучается вопрос глобальной асимптотической устойчивости системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1–3], что соответствует режиму синхронизации системы. Для синхронного режима разность частот эталонного и управляемого колебаний равна нулю, а разность фаз приближается к постоянному значению. Условия глобальной устойчивости системы определяют область начальных расстроек генераторов, в которой при любых начальных условиях устанавливается режим синхронизации. Нахождение условий синхронного режима связано с исследованием асинхронных режимов, особенностью которых является нарастание разности фаз. Среди асинхронных режимов выделяют вращательный режим, соответствующий предельному циклу второго рода. Вращательный режим представляет интерес, так как он предшествует режиму синхронизации. Известно, что добавление частотного кольца в систему фазовой автоподстройки приводит к увеличению области параметров системы для режимов синхронизации [3–6]. Среди результатов исследования, полученных качественночисленными методами [3–5], следует отметить применение метода нелокального сведения для системы ЧФАП, предложенное в работах [7–8]. В настоящей работе рассматривается система ЧФАП с коэффициентами передачи фильтров нижних частот первого порядка. На основе метода нелокального сведения [7–8] получены условия глобальной устойчивости и условия существования предельного цикла второго рода. Рассмотрено влияние частотного кольца на область параметров для режимов синхронизации.

1. Модель системы частотно-фазовой автоподстройки

Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки описывается дифференциальным уравнением вида [1–2]

$$p\sigma(t) + \Omega_1 K_1(p) F_1(\sigma(t)) + \Omega_2 K_2(p) F_2(p\sigma(t)) = \Omega_0, \tag{1}$$

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 70–81

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; $\sigma(t)$ — разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов; Ω_1 — полоса удержания фазового кольца; Ω_2 — полоса удержания частотного кольца; $K_1(p)$ и $K_2(p)$ — коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотных цепях управления; $F_1(\sigma)$ и $F_2(p\sigma)$ — характеристики фазового и частотного детекторов; Ω_0 — начальная расстройка. Перейдем в уравнении (1) к новому времени $\tau = \Omega_1 t$. В случае дробно-рациональных фильтров $K_1\,(p) = (A_0p^2 + A_1p + A_2)/(B_0p^2 + B_1p + B_2)$, $K_2\,(p) = (D_1p + D_2)/(B_0p^2 + B_1p + B_2)$ и характеристики частотного детектора $F_2\,(p\sigma) = (2\beta p\sigma)/(1 + (\beta p\sigma)^2)$ (β-расстройка по частоте, при которой напряжение на выходе частотного детектора максимально), заменой переменных $\dot\sigma = x_2 + \rho\varphi(\sigma)$, $\dot x_2 = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma) - \delta_1 f\,(\dot\sigma)$, $\varphi(\sigma) = F_1\,(\sigma) - \gamma$, $\gamma = (\Omega_0 B_2)/(\Omega_1 A_2)$, $f\,(\dot\sigma) = (2\alpha\beta\dot\sigma)/(1 + \beta^2\,(\dot\sigma)^2)$, $\alpha = \Omega_2\Omega_1^{-1}$, $\rho = A_0B_0^{-1}$, $\delta_1 = D_1B_0^{-1}$, $\Gamma = A_1B_0^{-1} + B_1B_0^{-1}\rho$ уравнение (1) приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot x = Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2\alpha\beta\left(c^Tx + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\left(c^Tx + \rho\varphi(\sigma)\right)^2}, \\ &\dot\sigma = c^Tx + \rho\varphi(\sigma), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \in R^2$, $c = \binom{0}{1}$, $A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_1 = B_1B_0^{-1}$, $a_2 = B_2B_0^{-1}$, $b = \binom{\nu}{-\Gamma}$, $\rho = -A_0B_0^{-1}$, $\Gamma = A_1B_0^{-1} + B_1B_0^{-1}\rho$, $\nu = \Gamma B_1B_0^{-1} - \rho B_2B_0^{-1} - A_2B_0^{-1}$, $d = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ -\delta_1 \end{pmatrix}$, $\delta_1 = D_1B_0^{-1}$, $\delta_2 = -D_2B_0^{-1} + B_1D_1B_0^{-2}$. Система (2) рассматривается в случае, когда $\varphi(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой и Δ-периодической функцией. Система (2) имеет цилиндрическое фазовое пространство. Если для системы (2) выполняются соотношения $\rho \neq 0$, $\det\left(A - \rho^{-1}bc^T\right) \neq 0$, то стационарные точки системы (2) определяются нулями функции $\varphi\,(\sigma)$. Пусть функция $\varphi(\sigma)$ имеет m нулей на периоде, $\varphi\,(\sigma_i) = 0$, $\sigma_i \in [0;\ \Delta)$, $i = \overline{1,\ m}$, тогда стационарными точками системы (2) являются точки вида $A_{i,k}\,(0,\ 0,\ \sigma_i + \Delta k)$, $i = \overline{1,\ m}$, $k \in Z$.

Перейдем в уравнении (1) к новому времени $\tau = \Omega_1 t$ и рассмотрим уравнение (1) с коэффициентами передачи фильтров нижних частот $K_1\,(p) = (p + a)^{-1}$, $K_2\,(p) = (gp + a)^{-1}$, характеристикой фазового детектора $F_1\,(\sigma) = \sin\sigma$, характеристикой частотного детектора $F_2\,(\dot\sigma) = (2a\beta_0\dot\sigma)/(1 + (a\beta_0\dot\sigma)^2)$. Заменой переменных $\dot\sigma = x_1 + x_2$, $\dot x_1 = -ax_1 - \varphi(\sigma)$, $\dot x_2 = -ag^{-1}x_2 - g^{-1}\psi\,(\dot\sigma)$, где $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $\gamma = a\Omega_0\Omega_1^{-1}$, $\psi\,(\dot\sigma) = (2b_0a\beta_0\dot\sigma)/(1 + (a\beta_0\dot\sigma)^2)$, $b_0 = \Omega_2\Omega_1^{-1}$, уравнение (1) сводится к системе

$$\dot x = Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2\alpha\beta c^Tx}{1 + \beta^2\left(c^Tx\right)^2}, \quad \dot\sigma = c^Tx, \tag{3}$$

для которой $A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -ag^{-1} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \binom{1}{1}$, $d = \begin{pmatrix} 0 \\ -g^{-1} \end{pmatrix}$, $\alpha = b_0$, $\beta = a\beta_0$. Пусть функция $\varphi(\sigma)$ имеет m нулей на периоде, $\varphi\,(\sigma_i) = 0$, $\sigma_i \in [0;\ \Delta)$, $i = \overline{1,\ m}$, тогда стационарными точками системы (2) являются точки вида $A_{i,k}\,(0,\ 0,\ \sigma_i + \Delta k)$, $i = \overline{1,\ m}$, $k \in Z$. Система (3) рассматриваемого вида изучалась в работах [3–6] в которых получены условия глобальной устойчивости.

2. Предельные циклы второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки

Определение [7]. Решение $z\,(t,\, z_0) = \begin{pmatrix} x(t, x_0) \\ \sigma(t, \sigma_0) \end{pmatrix}$ системы (2) называется предельным циклом второго рода, если существует $\tau > 0$, целое число $j \neq 0$, такие, что $\sigma\,(t+\tau,\, \sigma_0) = \sigma\,(t,\, \sigma_0) + \Delta j,\;\; x\,(t,\, x_0) = x\,(t+\tau,\, x_0)$.

Для системы (2) получены условия существования предельного цикла второго рода, содержащиеся в теоремах 1, 2. Наличие у системы (2) предельного цикла второго рода означает, что система ФАПЧ имеет вращательный режим, и система (2) является неустойчивой.

Теорема 1. *Пусть для системы* (2) *выполнены условия:*

1) *матрица* A *— гурвицева;*

2) $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $c^T d = -\delta_1 < 0$, $l^T b = \nu$, $l^T d = \delta_2$, $l^T A = -a_1 l^T - a_2 c^T$, $\rho \leq 0$, $\operatorname{rang} \|c, l\| = 2$*;*

3) $\gamma_1 = \frac{\nu}{\Gamma} a_1 - \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - a_2 \geq 0$, $\gamma_2 = \delta_2 - \frac{\nu \delta_1}{\Gamma} \geq 0, \gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$*;*

4) *система уравнений*

$$\dot{y} = -\lambda_1 y - \varphi(\sigma) - \frac{2s\lambda r\,(y - k\varphi(\sigma))}{1 + (\lambda r)^2\,(y - k\varphi(\sigma))^2},$$

$$\dot{\sigma} = y - k\varphi(\sigma) \tag{4}$$

при $\lambda_1 > \nu\Gamma^{-3/2}$, $\lambda = \nu\Gamma^{-3/2}$, $r = \Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s = \alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$ *имеет предельный цикл второго рода* $F(\sigma) > 0$, $F(\sigma) - k\varphi\,(\sigma) > 0$ *для любого* $\sigma \in (-\infty; +\infty)$*;*

тогда система (2) *имеет предельный цикл второго рода.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $V_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F(\sigma)$, где $F(\sigma)$ — предельный цикл второго рода системы уравнений (4), $V_2(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x$, $z = \operatorname{colon}(x,\, \sigma)$. Пусть $\Omega_1 = \{\, z:\; V_1\,(z) \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{\, z:\; V_2\,(z) \geq 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, тогда граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, где $\partial\Omega_1 = \{\, z:\;\; V_1\,(z) = 0,\;\; V_2\,(z) \geq 0\,\}$, $\partial\Omega_2 = \{z: V_1\,(z) \geq 0,\;\; V_2\,(z) = 0\,\}$. Если $z \in \partial\Omega_1$, то выполняются соотношения:

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} F(\sigma), \tag{5}$$

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x \geq 0. \tag{6}$$

Используя условия 2, 4 теоремы 1, соотношения (5), (6), найдем производную функции $V_1\,(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\begin{aligned}\dot{V}_1\,(z) &= l^T x - \Gamma\varphi\,(\sigma) - \frac{2\alpha\beta\delta_1\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\,(c^T x + \rho\varphi(\sigma))^2} - \sqrt{\Gamma}\frac{dF\,(\sigma)}{d\sigma}\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right) \geq \\ &\geq -\frac{\nu}{\sqrt{\Gamma}} F(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - 2\alpha\beta\frac{\delta_1\sqrt{\Gamma}\,(F(\sigma) - k\varphi\,(\sigma))}{1 + \beta^2\Gamma\,(F\,(\sigma) - k\varphi(\sigma))^2} - \Gamma\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\,(F\,(\sigma) - k\varphi(\sigma)) = \\ &= \Gamma F\,(\sigma)\left(\lambda_1 - \frac{\nu}{\Gamma\sqrt{\Gamma}}\right) + \frac{2\beta\sqrt{\Gamma}\,(F\,(\sigma) - k\varphi(\sigma))}{1 + \beta^2\Gamma\,(F(\sigma) - k\varphi\,(\sigma))^2}\,(s\Gamma - \alpha\delta_1) > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_2 = \left\{\, z:\;\; l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x = 0,\; V_1\,(z) \geq 0\right\}$. Если$z \in \partial\Omega_2$, то выполняются соотношения

$$c^T x \geq \sqrt{\Gamma} F(\sigma), \tag{8}$$

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1} c^T x. \tag{9}$$

Используя условия 2, 3, 4 теоремы 1, соотношения (8), (9), найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_2$

$$\dot{V}_2(z) = -a_1 l^T x - a_2 c^T x + \nu\varphi(\sigma) + \frac{2\alpha\beta\delta_2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2} -$$
$$- \frac{2\nu\alpha\beta\delta_1\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{\Gamma\left(1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2\right)} + \frac{\nu}{\Gamma} l^T x - \nu\varphi(\sigma) =$$
$$= \left(\frac{\nu}{\Gamma}a_1 - \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - a_2\right) c^T x + \frac{2\alpha\beta\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2}\left(\delta_2 - \frac{\nu\delta_1}{\Gamma}\right) > 0. \tag{10}$$

Из неравенств (7), (10) следует, что множество Ω положительно инвариантно. Пусть $\Omega_R = \left\{z : W(z) = x^T H x - R^2 \le 0\right\}$, $H = H^T > 0$-решение матричного уравнения Ляпунова $(A+\mu I)^T H + H(A+\mu I) = -I$, $\mu > 0$. В силу условия 1 теоремы 1 такое решение существует. Производная функции $W(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_R = \{z : W(z) = 0\}$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}(z) \le -2\mu R^2 + 2\left|x^T H d\right|\left|\frac{2\alpha\beta\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1+\beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2}\right| + 2\left|x^T H b\varphi(\sigma)\right| \le$$
$$\le -2\mu R^2 + 2\left|x^T H d\right|\alpha + +2\left|x^T H b\varphi(\sigma)\right|. \tag{11}$$

Используя соотношение (11), получим, что при достаточно большом значении R множества Ω_R, $\Omega \cap \Omega_R$ являются положительно инвариантными. Рассмотрим множества $G = \Omega \cap \Omega_R \cap P_0$, $P_0 = \{z : \sigma = 0\}$, $P_\Delta = \{z : \sigma = \Delta\}$, $\bar{G} = P_\Delta \cap \Omega \cap \Omega_R$. В силу соотношения (8) и условия 4 теоремы 1, получим, что для любого $z \in \Omega \cap \Omega_R$ выполняется неравенство $\dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma) \ge \sqrt{\Gamma} F(\sigma) + \rho\varphi(\sigma) = \sqrt{\Gamma}\left(F(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right) > 0$. Система (2) не имеет стационарных точек, содержащихся во множестве $\Omega \cap \Omega_R$. В силу неравенства $F(\sigma) - k\varphi(\sigma) > 0$ для $\sigma \in [0; \Delta]$ получим, что любая траектория $(x(t), \sigma(t))$, начинающаяся при $t = 0$ на множестве G, попадает через конечное время t_x на множество $\bar{G}$. Введем отображение G в $\bar{G}$ соотношением: $T(x, 0) = (x(t_x), \Delta)$[7]. Пусть S — отображение сдвига фазового пространства [7], определенное равенством $S(x, \sigma) = (x, \sigma - \Delta)$. Таким образом, ST — непрерывное отображение множества G в себя. Множество G является ограниченным, выпуклым и замкнутым. В силу теоремы Брауэра [7. С. 92], отображение ST имеет неподвижную точку $(x_0, 0)$ во множестве G. Из определения отображений T и S для решения с начальным условием $(x_0, 0)$ вытекают равенства $x(t_{x_0}) = x_0$, $\sigma(t_{x_0}) = \Delta$. Система (2) имеет предельный цикл второго рода, содержащийся во множестве $\Omega \cap \Omega_R$.

Теорема 2. *Пусть для системы* (2) *выполнено условие* 2 *теоремы* 1 *и справедливы утверждения:*

1) $\gamma_1 = \frac{\nu}{\Gamma}a_1 - \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - a_2 \le 0$, $\gamma_2 = \delta_2 - \frac{\nu\delta_1}{\Gamma} \le 0$, $\gamma_3 = a_1 - \frac{\nu}{\Gamma} > 0$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$;

2) *система уравнений (4) при* $\lambda_1 < \nu\Gamma^{-3/2}$, $\lambda = \nu\Gamma^{-3/2}$, $r = \Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s = \alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$ *имеет предельный цикл второго рода* $F(\sigma) > 0$ *для любого* $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\max\limits_{\sigma} F(\sigma) = M_1$;

3) *система уравнений* (4) *при* $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 > \nu\Gamma^{-3/2}$, $\lambda = \nu\Gamma^{-3/2}$, $r = \Gamma^2\beta\nu^{-1}$, $s = \alpha\delta_1\Gamma^{-1}$, $k = -\rho\Gamma^{-1/2}$ *имеет предельный цикл второго рода* $F_0(\sigma) > 0$, $F(\sigma) > F_0(\sigma)$, $F_0(\sigma) - k\varphi(\sigma) \geq m_2 > 0$ *для любого* $\sigma \in (-\infty; +\infty)$, $\min\limits_{\sigma} F_0(\sigma) = m_0$, $\min\limits_{\sigma} \varphi(\sigma) = -m < 0$;

4) $-\gamma_1\sqrt{\Gamma}M_1 - \frac{2\alpha\beta\gamma_2\sqrt{\Gamma}(M_1+km)}{1+\beta^2 m_2^2\Gamma} < \gamma_3\Gamma m_0\left(\bar{\lambda}_1 - \nu\Gamma^{-3/2}\right)$;

тогда система (2) *имеет предельный цикл второго рода.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $V_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}F(\sigma)$, $W_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}F_0(\sigma)$, где $F_0(\sigma)$ — предельный цикл второго рода системы уравнений (4), $V_2(z) = l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x$. Пусть $\Omega = \{z:\ V_1(z) \leq 0,\ W_1(z) \geq 0,\ -r_1 \leq V_2(z) \leq 0,\ \ r_1 > 0\}$, тогда граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, где $\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, -r_1 \leq V_2(z) \leq 0\}$, $\partial\Omega_2 = \{z : V_1(z) \leq 0, W_1(z) \geq 0, V_2(z) = 0\}$, $\partial\Omega_3 = \{z : V_1(z) \leq 0, W_1(z) \geq 0, V_2(z) = -r_1\}$, $\partial\Omega_4 = \{z : W_1(z) = 0, -r_1 \leq V_2(z) \leq 0\}$. Если $z \in \partial\Omega_1$, то выполняются соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma}F(\sigma), \tag{12}$$

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1}c^T x \leq 0. \tag{13}$$

Используя условие 2 теоремы 1, условие 2 теоремы 2 и соотношения (12), (13), найдем производную функции $V_1(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_1$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(z) &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{2\alpha\beta\delta_1\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2} - \sqrt{\Gamma}\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right) \leq \\
&\leq -F(\sigma)\frac{\nu}{\sqrt{\Gamma}} - \Gamma\varphi(\sigma) - 2\alpha\beta\frac{\delta_1\sqrt{\Gamma}\left(F(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\Gamma\left(F(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)^2} - \Gamma\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\left(F(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right) = \\
&= \Gamma F(\sigma)\Big(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-3/2}\Big) + \frac{2\beta\sqrt{\Gamma}\left(F(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\Gamma\left(F(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)^2}\left(s\Gamma - \alpha\delta_1\right) < 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_2$. Пусть $z \in \partial\Omega_2$, тогда справедливы соотношения

$$\sqrt{\Gamma}F_0(\sigma) \leq c^T x \leq \sqrt{\Gamma}F(\sigma), \tag{15}$$

$$l^T x = -\nu\Gamma^{-1}c^T x. \tag{16}$$

В силу условия 2 теоремы 1, условия 1 теоремы 2 и соотношений (15), (16) производная функции $V_2(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_2$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(z) &= -a_1 l^T x - a_2 c^T x + \nu\varphi(\sigma) + \frac{2\alpha\beta\delta_2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2} - \\
&\quad - \frac{2\nu\alpha\beta\delta_1\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{\Gamma\left(1 + \beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2\right)} + \frac{\nu}{\Gamma}l^T x - \nu\varphi(\sigma) = \\
&= \left(\frac{\nu}{\Gamma}a_1 - \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - a_2\right)c^T x + \frac{2\alpha\beta\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2}\left(\delta_2 - \frac{\nu\delta_1}{\Gamma}\right) < 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Для границы $\partial\Omega_3$ возьмем значение r_1, удовлетворяющее неравенству

$$\gamma_3^{-1}\left(-\gamma_1\sqrt{\Gamma}M_1 - \frac{2\alpha\beta\gamma_2\sqrt{\Gamma}\left(M_1 + km\right)}{1 + \beta^2 m_2^2\Gamma}\right) < r_1 < \Gamma m_0\left(\bar{\lambda}_1 - \nu\Gamma^{-3/2}\right). \tag{18}$$

В силу условия 4 теоремы 2 такое r_1 существует. Если $z \in \partial\Omega_3$, то выполняется неравенство (15) и справедливо соотношение

$$l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x = -r_1. \tag{19}$$

Используя условие 2 теоремы 1, условие 1 теоремы 2 и соотношения (15), (18), (19), найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_3$:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(z) = \left(\frac{\nu}{\Gamma}a_1 - \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - a_2\right) c^T x + \\ + \left(a_1 - \frac{\nu}{\Gamma}\right) r_1 + \frac{2\alpha\beta\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2}\left(\delta_2 - \frac{\nu\delta_1}{\Gamma}\right) \geq \\ \geq \sqrt{\Gamma}\gamma_1 M_1 + \gamma_3 r_1 + \frac{2\alpha\beta\gamma_2\sqrt{\Gamma}\left(M_1 + km\right)}{1 + \beta^2 m_2^2 \Gamma} > 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_4$. Пусть $z \in \partial\Omega_4$, тогда справедливы соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} F_0(\sigma), \tag{21}$$

$$-r_1 \leq l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x \leq 0. \tag{22}$$

В силу условия 3 теоремы 2 и соотношений (18), (21), (22) производная функции $W_1(z)$ в силу системы (2) на множестве $\partial\Omega_4$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}\dot{W}_1(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{2\alpha\beta\delta_1\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right)^2} - \\ - \sqrt{\Gamma}\frac{dF_0(\sigma)}{d\sigma}\left(c^T x + \rho\varphi(\sigma)\right) \geq -r_1 - \frac{\nu}{\Gamma}\sqrt{\Gamma}F_0(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \\ - \frac{2\alpha\beta\delta_1\sqrt{\Gamma}\left(F_0(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\Gamma\left(F_0(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)^2} - \Gamma\frac{dF_0(\sigma)}{d\sigma}\left(F_0(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right) = \\ = -r_1 + \Gamma\left(\bar{\lambda}_1 - \frac{\nu}{\Gamma\sqrt{\Gamma}}\right)F_0(\sigma) + 2\beta\left(s\Gamma - \alpha\delta_1\right)\frac{\sqrt{\Gamma}\left(F_0(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)}{1 + \beta^2\Gamma\left(F_0(\sigma) - k\varphi(\sigma)\right)^2} > 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Из неравенств (14), (17), (20), (23) следует, что множество Ω — положительно инвариантно. В силу условия $\mathrm{rang}\,\|c, l\| = 2$ получим, что множество Ω — ограничено при фиксированном значении σ. Повторяя для множеств $G = \Omega \cap P_0$, $P_0 = \{z : \sigma = 0\}$, $P_\Delta = \{z : \sigma = \Delta\}$, $\bar{G} = P_\Delta \cap \Omega$ рассуждения, проведенные в теореме 1, получим, что во множестве Ω содержится предельный цикл второго рода.

В условиях теорем 1, 2 одним из требований к системе (2) является выполнение условия 2 теоремы 1. Для проверки условия 2 теоремы 1 необходимо найти вектор $l = A^T c$, если $\mathrm{rang}\,\|c,\, l\| = 2$, то система линейных уравнений $l^T A = -a_1 l^T - a_2 c^T$ имеет решение относительно неизвестных a_1, a_2. Выполнение условия $\mathrm{rang}\,\|c,\, l\| = 2$ обеспечивает ограничение $\det A \neq 0$. После определения значений a_1, a_2 находится величина γ_1 из условия 3 теоремы 1. В зависимости от знака γ_1 будет выполняться условие 3 теоремы 1 или условие 1 теоремы 2. Коэффициенты системы (4) определяются параметрами изучаемой системы (2). Для проверки условия 4 теоремы 1 и условий 2, 3, 4 теоремы 2 целесообразно использовать методы исследования систем дифференциальных уравнений второго порядка, содержащиеся в работах [3; 4; 7].

3. Глобальная устойчивость системы частотно-фазовой автоподстройки

Для системы (3) получены условия глобальной устойчивости, которые позволяют определить полосу захвата системы ЧФАП.

Теорема 3. *Пусть для системы* (3) *существуют положительные значения* ε, h, ν, s, ε_0 *для которых справедливы утверждения:*

1) $\tau_1^2 = a\,(1-\varepsilon) > 0, \quad \tau_2 = ag^{-1}\,(g-1), \quad \tau_3^2 = hag^{-1}\,(1-\varepsilon g) > 0;$

2) $r_1^2 = \varepsilon a - \nu^2 a^2 \left(4\tau_1^2\right)^{-1} > 0, \quad hr_1^2 + \tau_3^2 - \tau_2^2 \left(4r_1^2\right)^{-1} \geq 0;$

3) $\varepsilon_1^2 = a\left(1 - \varepsilon + 2b_0\beta_0 g^{-1}\right), \quad \varepsilon_2 = -a\left(g^{-1} - 1 + 2hb_0\beta_0 g^{-1}\right), \quad (\nu + 2s\beta_0)^2 < 4\varepsilon a^{-1} \times \times \left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 (4\tau_3^2)^{-1}\right);$

4) *система уравнений*

$$\dot{y} = -\lambda y - \varphi(\sigma) - \frac{2s\beta y}{1+\beta^2 y^2}, \quad \dot{\sigma} = y, \tag{24}$$

где $\lambda = \nu a$, $\beta = a\beta_0$, $\varphi(\sigma_2) = 0$, $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$, $\int\limits^{\Delta} \varphi(\xi)\,d\xi < 0$, *имеет решение* $(F\,(\sigma\,(t))\,, \sigma\,(t))$ *для которого* $F\,(\sigma_2) = 0, \sigma_2 \in (-\infty; +\infty)$; $F(\sigma) > 0$ *при* $\sigma \in (-\infty; \sigma_2)\,,\ \lim\limits_{\sigma \to -\infty} F(\sigma) = = +\infty$;

5) $(1 - g\varepsilon_0)\,(1-\varepsilon_0) > 0$; $1 - \frac{1-g}{2(1-g\varepsilon_0)} - \frac{(1-g)^2}{8g(1-g\varepsilon_0)^2(1-\varepsilon_0)} \geq 0$;

тогда система (3) *глобально асимптотически устойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+h \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu = \varepsilon a$, тогда выполняются соотношения:

$$(A + \mu I)^T H + H\,(A+\mu I) = -L_1 - 2\tau_1^2 cc^T + \tau_2\left(cq^T + qc^T\right) - 2\tau_3^2 qq^T, \tag{25}$$

$$\left(A + 2ab_0\beta_0 dc^T + \mu I\right)^T H + H\left(A + 2ab_0\beta_0 dc^T + \mu I\right) = = -L_2 - 2\varepsilon_1^2 cc^T + \varepsilon_2\left(cq^T + qc^T\right) - 2\tau_3^2 qq^T, \tag{26}$$

$$Hb = -c, \tag{27}$$

где $L_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$,$c^T b = -1$, $H = H^T > 0$, $H - cc^T - hqq^T \geq 0$.

Рассмотрим функцию $V_1\,(z) = x^T Hx - F^2\,(\sigma)$, где $F(\sigma)$ удовлетворяет условию 4 теоремы 3. Пусть $\Omega_1 = \left\{z : x^T Hx \leq F^2\,(\sigma)\,,\ \sigma \leq \sigma_2 + k\Delta,\ k \in N\right\}$, тогда из условия $H - -cc^T - hqq^T \geq 0$ получим, что если $z \in \Omega_1$, то выполняется неравенство

$$\left(c^T x\right)^2 + h\left(q^T x\right)^2 \leq F^2(\sigma). \tag{28}$$

Используя условия 1, 2, 3, 4 теоремы 3 и соотношения (25), (26), (27), (28), найдем производную функции $V_1\,(z)$ в силу системы (3) на множестве $\partial\Omega_1 = \left\{z : x^T Hx = F^2(\sigma),\right.$ $\left.\sigma \leq \sigma_2 + k\Delta, k \in N\right\}$:

$$\dot{V}_1\,(z) \leq \frac{1}{1+\beta^2\left(c^T x\right)^2}\left(\beta^2\left(c^T x\right)^2 x^T\left(A^T H + HA\right)x + x^T\left(\left(A + 2\alpha\beta dc^T\right)^T H + \right.\right.$$
$$\left.\left. + H\left(A + 2\alpha\beta dc^T\right)\right)x + 2c^T x F(\sigma)\left(1 + \beta^2\left(c^T x\right)^2\right)\lambda + 4\left|c^T x\right| F(\sigma)\beta s\right) \leq$$
$$\leq -\frac{2\beta^2\left(c^T x\right)^2}{1+\beta^2\left(c^T x\right)^2}\left(\left(r_1\left|c^T x\right| - \frac{|\tau_2|}{2r_1}\left|q^T x\right|\right)^2 + \left(q^T x\right)^2\left(hr_1^2 + \tau_3^2 - \frac{\tau_2^2}{4r_1^2}\right)\right) -$$

$$-\Big(\Big(\sqrt{\mu}F(\sigma)-\frac{(\lambda+2s\beta)}{2\sqrt{\mu}}\left|c^Tx\right|\Big)^2+\left(c^Tx\right)^2\Big(\frac{(\lambda+2s\beta)^2}{4\mu}+\frac{\varepsilon_2^2}{4\tau_3^2}-\varepsilon_1^2\Big)\Big)\times$$
$$\times\frac{2}{1+\beta^2\left(c^Tx\right)^2}\le 0. \quad (29)$$

Из соотношения (29) получим, что множество Ω_1 является положительно инвариантным.

Пусть $\Omega_R=\left\{\, z: W_0(z)=x^TH_0x-R^2\le 0\,\right\}$, $H_0=H_0^T>0$ — решение матричного уравнения Ляпунова $(A+\mu_0I)^T H_0+H_0(A+\mu_0I)=-I$, $\mu_0>0$, тогда в силу соотношения (11) получим, что при достаточно большом значении R, множество Ω_R является положительно инвариантным.

Если $H_1=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1+h_1\end{smallmatrix}\right)$, $h_1=\frac{(1-g)^2}{4g(1-g\varepsilon_0)(1-\varepsilon_0)}>0$, $\mu_1=\varepsilon_0a$, то в силу условия 5 теоремы 3 выполняются соотношения (25), (26), (27) при $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, $\mu=\mu_1$, $H=H_1$. Рассмотрим функцию $W(z)=x^TH_1x+2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)\,d\xi$. Используя условие 4 теоремы 3 и соотношения (25), (26), (27), найдем производную функции $W(z)$ в силу системы (3):

$$\begin{aligned}\dot W(z)&=x^T\big(A^TH_1+H_1A\big)x+2x^TH_1b\varphi(\sigma)+\\&\quad+\frac{2\alpha\beta}{1+\beta^2\left(c^Tx\right)^2}x^T\big(cd^TH_1+H_1dc^T\big)x+c^Tx2\varphi(\sigma)=\\&=\frac{1}{1+\beta^2(c^Tx)^2}\Big(\beta^2(c^Tx)^2x^T\big(A^TH_1+H_1A\big)x+\\&\quad+x^T\Big(\big(A+2\alpha\beta dc^T\big)^TH_1+H_1\big(A+2\alpha\beta dc^T\big)\Big)x\Big)\le\\&\le\frac{1}{1+\beta^2(c^Tx)^2}\Big(-2\mu_1\beta^2(c^Tx)^2x^TH_1x-2\mu_1x^TH_1x\Big)\le 0. \quad (30)\end{aligned}$$

Из соотношения (30) и того, что $H_1>0$, следует, что множество $Q=\left\{z:\ \dot W(z)=0\right\}$ не содержит целых траекторий.

Рассмотрим множество $\Omega_3=\left\{z\mid x^TH_1x\le-2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)\,d\xi,\ \sigma\ge\sigma_2\right\}$. В силу соотношения (30) множество Ω_3 является положительно инвариантным. Из условий $\varphi(\sigma_2)=0$, $\frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{\Delta}\varphi(\xi)\,d\xi<0$, $\dot\varphi(\sigma_2)<0$ получим, что $-\lim\limits_{\sigma\to+\infty}2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)\,d\xi=+\infty$. Следовательно, существует $\sigma_3\in(\sigma_2;\ +\infty)$, для которого выполняется соотношение $R^2=-2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_3}\varphi(\xi)\,d\xi$. Из условия 4 теоремы 3 следует существование функции $F(\sigma)$, для которой выполняются соотношения $F(\sigma_2)=0$, $\lim\limits_{\sigma\to-\infty}F(\sigma)=+\infty$. Следовательно, существует $\sigma_4\in(-\infty;\ \sigma_2)$, для которого $F(\sigma_4)=R$. Пусть $k\in N$ такое, что $\sigma_4+k\Delta>\sigma_3$, $F_k(\sigma)$ — решение системы (24), для которого $F_k(\sigma_2+k\Delta)=0$, $\lim\limits_{\sigma\to-\infty}F_k(\sigma)=+\infty$, тогда в силу цилиндричности фазового пространства системы (24) получим, что $F_k(\sigma_4+k\Delta)=R$. Рассмотрим множество $\Omega_4=\left\{z\mid x^THx\le F_k(\sigma),\ \sigma\le\sigma_2+k\Delta\right\}$. Из соотношения (29) следует, что множество Ω_4 положительно инвариантно. Множество $\Omega=\Omega_4\cap\Omega_R\cap\Omega_3$ — положительно инвариантно и ограничено. Множество $Q=\left\{z:\ \dot W(z)=0,\ \ W(z)=x^TH_1x+2\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma}\varphi(\xi)\,d\xi\right\}$ не содержит целых траекторий системы (3). Из леммы 2.3.1 [8] будет следовать дихотомичность системы (3). Множество Ω является положительно инвариантным и ограниченным при достаточно большом значении R, следовательно, система (3) является глобально асимптотически устойчивой.

Условия 1, 2, 3 теоремы 3 являются условиями разрешимости матричных уравнений (25), (26), (27). Уравнения (25), (26) являются матричными уравнениями Ляпунова [8]. Для определения условий разрешимости и нахождения решения матричных уравнений (25), (26) были использованы результаты работы [9]. Проверка условия 4 теоремы 3 сводится к анализу системы дифференциальных уравнений второго порядка (24), содержащемуся в работе [3].

4. Результаты моделирования

Рассмотрим систему (3) в случае $g > 1$. Для условий 1, 2, 3 теоремы 3 возьмем значение $h = \frac{g-1}{2b_0\beta_0} > 0$, получим, что если существуют ε, ν, s, для которых выполнены неравенства

$$\varepsilon < g^{-1}, \quad \nu^2 < 4\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,, \quad (\nu + 2s\beta_0)^2 < 4\varepsilon\left(1 - \varepsilon + 2b_0\beta_0 g^{-1}\right),$$
$$\left(\varepsilon - \frac{\nu^2}{4\,(1-\varepsilon)}\right)^2 + \frac{(1-\varepsilon g)}{g}\left(\varepsilon - \frac{\nu^2}{4\,(1-\varepsilon)}\right) - \frac{2b_0\beta_0\,(g-1)}{4g^2} \geq 0, \tag{31}$$

то будут справедливы условия 1, 2, 3 теоремы 3. Рассмотрим систему (3) при $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $b_0 = 3$, $\beta_0 = 0{,}5$, $g = 1{,}1$, $\gamma \in (0;\,1)$. Стационарные точки системы (3) определяются корнями уравнения $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma = 0$, $\sigma_1 = \arcsin\gamma$, $\sigma_2 = \pi - \arcsin\gamma$ на промежутке $[0;\,2\pi)$. Точки $A_k(0,\,0,\,\sigma_1 + 2\pi k)$, $B_k(0,\,0,\,\sigma_1 + 2\pi k)$, $k \in Z$ определяют все стационарные точки системы (3). Для случая $g < 1$ система (3) исследована в [6]. Если $\varepsilon = 0{,}908$, $\nu = 0{,}488$, $s = 2{,}711$, то выполняются соотношения (31). Пусть $\varepsilon_0 = 0{,}7$, тогда справедливо условие 5 теоремы 3. Таким образом, если для системы (24) при $\lambda = 0{,}488a$, $\beta = 0{,}5a$, $s = 2{,}711$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$ выполнено условие 4 теоремы 3, то система (3) является глобально устойчивой. На рис. 1 в координатах (γ, a^{-2}) изображена линия 4, ниже которой расположены значения γ, a^{-2}, при которых система (3) глобально асимптотически устойчива в случае отсутствия частотного кольца [10]. Линия 1 получена численными методами для системы (3) с частотным кольцом. Ниже линии 1 находятся значения γ, a^{-2}, при которых система (3) глобально асимптотически устойчива. Линия 2 получена численными методами для системы (24). Ниже линии 2 расположены значения γ, a^{-2}, при которых выполняется условие 4 теоремы 3. Линия 3 получена для системы (24) при $g = 1,2$. Ниже линии 3 расположены значения γ, a^{-2}, при которых выполняются условия теоремы 3. Добавление частотного кольца увеличило область параметров γ, a^{-2}, глобальной асимптотической устойчивости.

Для системы (3) проверим условия теоремы 2. В рассматриваемом случае $g > 1$, для условия 2 теоремы 1 получим: $c^T b = -\Gamma = -1 < 0$, $c^T A = \left(-a,\ -ag^{-1}\right) = l^T$, $c^T d = -\delta_1 = -g^{-1} < 0$, $l^T b = \nu = a$, $l^T d = \delta_2 = ag^{-2}$, $l^T A = \left(a^2,\ a^2 g^{-2}\right) = -a_1 l^T - a_2 c^T$, $a_1 = ag^{-1}\,(g+1)$, $a_2 = a^2 g^{-1}$, $\rho = 0$, $\det\|c,\,l\| = ag^{-1}\,(g-1) \neq 0$, $\operatorname{rang}\|c,\,l\| = 2$. Для значений γ_1, γ_2, γ_3 из условия 1 теоремы 2 получим соотношения $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = ag^{-2}\,(1-g) < 0$, $\gamma_3 = ag^{-1} > 0$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$. Таким образом, при $g > 1$ для системы

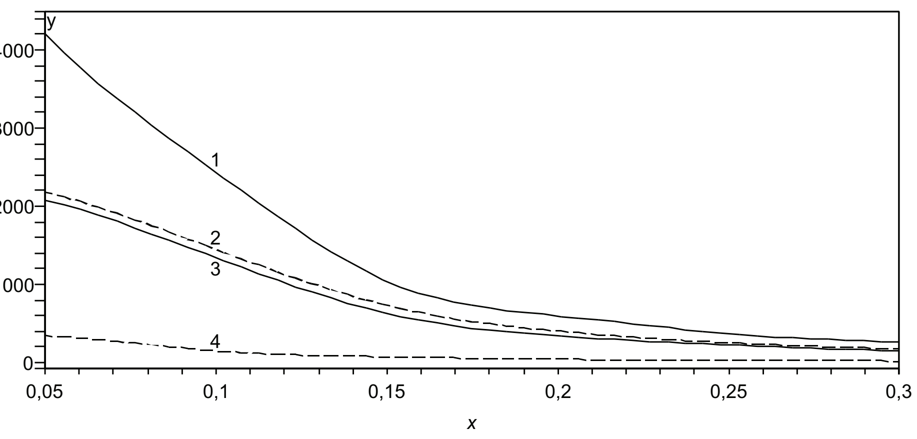

Рис. 1. Области параметров γ, a^{-2} глобальной устойчивости системы (3)

(3) выполнено условие 2 теоремы 1 и условие 1 теоремы 2. Если система уравнений (4) при $\lambda_1 < a$, $\lambda = a$, $r = \beta_0$, $s = b_0 g^{-1}$, $k = 0$ имеет предельный цикл второго рода $F(\sigma)$ и система уравнений (4) при $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 > a$, $\lambda = a$, $r = \beta_0$, $s = b_0 g^{-1}$, $k = 0$ имеет предельный цикл второго рода $F_0(\sigma)$, то выполняются условия 2, 3 теоремы 2. Пусть выполнены соотношения $\min\limits_{\sigma} F_0(\sigma) = m_0 > 0$, $\max\limits_{\sigma} F(\sigma) = M_1$, $F(\sigma) > F_0(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$,

$$\frac{2b_0 a\beta_0 M_1 (g-1)}{g\left(1 + (a\beta_0)^2 m_0^2\right)} < m_0 \left(\bar{\lambda}_1 - a\right), \tag{32}$$

тогда справедливо условие 4 теоремы 2, и система (3) имеет предельный цикл второго рода.

Рассмотрим систему (3) при $\varphi(\sigma) = \sin\sigma - \gamma$, $b_0 = 3$, $\beta_0 = 0{,}5$, $g = 1{,}1$, $\gamma = 0{,}8$, $a = 0{,}1$. На рис. 2 изображен предельный цикл второго рода $F(\sigma)$ и траектории системы (4) из окрестности предельного цикла $F(\sigma)$ при $\lambda_1 = 0{,}099$, $\lambda = 0{,}1$, $r = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}8$, $s = 3(1,1)^{-1}$, $k = 0$. Численными методами определяется $M_1 = \max\limits_{\sigma} F(\sigma) = 2{,}65$. На рис. 3 изображен предельный цикл второго рода $F_0(\sigma)$ и траектории системы (4) из окрестности предельного цикла $F_0(\sigma)$ при $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 = 0{,}2$, $\lambda = 0{,}1$, $r = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}8$, $s = 3(1,1)^{-1}$, $k = 0$. Численными методами определяется $\min\limits_{\sigma} F_0(\sigma) = m_0 = 1{,}05$. Для рассматриваемого случая выполняется соотношение (32). В силу теоремы 2 система (3) имеет предельный цикл второго рода.

Условия теоремы 2 позволяют определить область Ω, содержащую предельный цикл второго рода, $\Omega = \{z : c^T x \le F(\sigma),\ c^T x \ge F_0(\sigma),\ -r_1 \le l^T x + ac^T x \le 0\}$. Значение r_1 удовлетворяет неравенству (18), следовательно, $0{,}072 < r_1 < 0{,}105$. На рис. 4 изображены траектории системы (3) из окрестности предельного цикла второго рода. На рис. 5 изображены проекции траектории системы (3) из окрестности предельного цикла второго рода на плоскость $(x_1,\ x_2)$.

Предельный цикл второго рода $z(t) = colon\,(x_1(t), x_2(t), \sigma(t))$ системы (3) не является периодической функцией по переменной t, так как $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma(t) = +\infty$. Для предельного цикла второго рода системы (3), определяющего траекторию, изображенную на рис. 4, численно показываются устойчивость $z(t)$ и периодичность по фазовой переменной σ с периодом 2π.

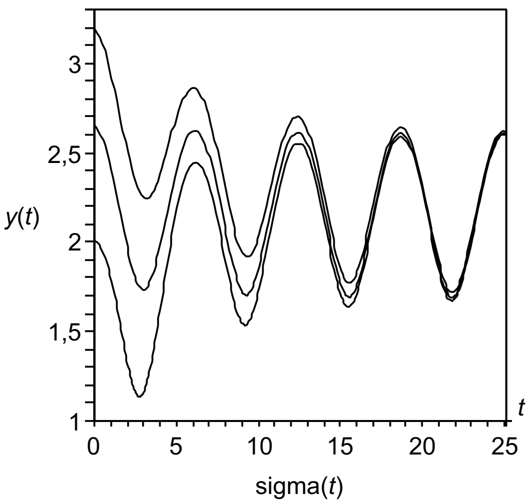

Рис. 2. Предельный цикл $F(\sigma)$ системы (4) при $\lambda_1 = 0{,}099$

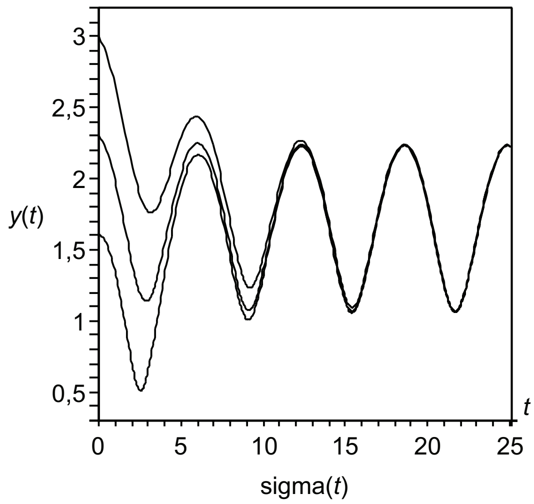

Рис. 3. Предельный цикл $F(\sigma)$ системы (4) при $\lambda_1 = 0{,}2$

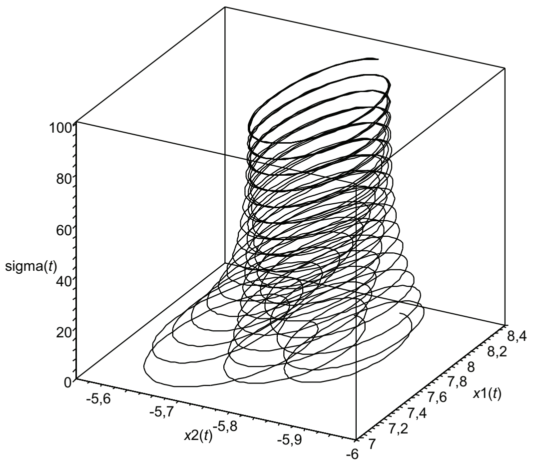

Рис. 4. Траектории из окрестности предельного цикла второго рода системы (3)

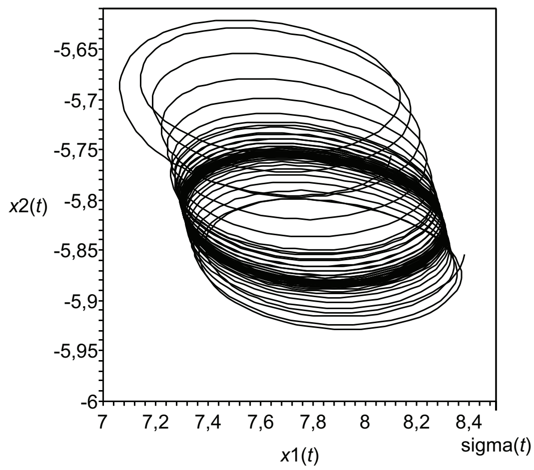

Рис. 5. Проекции траекторий из окрестности предельного цикла второго рода системы (3) на плоскость (x_1, x_2)

В результате исследования динамики модели системы ЧФАП выявлены закономерности появления вращательных режимов и режимов синхронизации. Определена область фазового пространства, содержащая предельный цикл второго рода. Показано, что исследование системы дифференциальных уравнений третьего порядка сводится к изучению систем второго порядка. Установлено, что введение частотного кольца приводит к расширению полосы захвата системы.

Список литературы

1. *Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.

2. *Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М.* Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.

3. *Шалфеев В. Д.* К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях // Радиофизика. 1969. Т. 12, № 7. С. 1037–1051.

4. *Пономаренко В. П.* Об устойчивости системы частотной автоподстройки с фильтром второго порядка // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 1. С. 113–116.

5. *Пономаренко В. П., Матросов В. В.* Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125–1133.

6. *Леонов Г. А., Томаев А. М., Чшиева Т. Л.* Устойчивость системы частотно-фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 4. С. 671–679.

7. *Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И.* Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.

8. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

9. *Мамонов С. С.* Решение матричных уравнений // Вест. Рязан. гос. ун-та. 2009. № 1/21. С. 115–136.

10. *Системы* фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.

Материал поступил в редколлегию 24.09.2010

Адрес автора

МАМОНОВ Сергей Станиславович

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

ул. Свободы, 46, Рязань, 390000, Россия

e-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru