УДК 512.54

О. В. Брюханов

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА И ЛИНЕЙНОСТЬ ГРУПП

В статье рассмотрены достаточные условия изоморфной представимости группы матрицами над полем, основанные на их аппроксимируемости матричными группами фиксированной степени над некоторыми коммутативными ассоциативными кольцами, дан критерий матричной представимости для конечно порожденных групп.

Ключевые слова: линейная группа, матричное представление, предельная аппроксимируемость, нормирование, фильтр на множестве.

Группу G называют *линейной*, если она изоморфна подгруппе общей линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ при некотором n и поле F. Сам этот изоморфизм называют *матричным представлением* группы G, а число n — *степенью представления*.

Группу G будем называть *предельно аппроксимируемой* группами из класса $\mathfrak{G}$, если для любого конечного множества попарно различных элементов группы G существует гомоморфизм этой группы на группу из класса $\mathfrak{G}$, при котором образы этих элементов будут также попарно различны. Так, например, если в группе G существует матрешка нормальных подгрупп $\mathrm{G} \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots$ с факторами $\mathrm{G}/G_i \in \mathfrak{G}$, где $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i = 1$, то она является предельно аппроксимируемой группами из класса $\mathfrak{G}$. Отметим, что такие группы у А. И. Мальцева [1] названы *предельными*, а у Верфрица [2] — *super-residually*.

А. И. Мальцев [1] и В. Л. Нисневич [3] независимо показали связь между матричной представимостью конечно порожденной группы и ее предельной аппроксимируемостью линейными группами с фиксированной степенью представления. Если каждая конечно порожденная линейная группа является предельно аппроксимируемой конечными группами [1; 4], то уже не всякая конечно порожденная группа, предельно аппроксимируемая конечными группами, будет линейной. Например, конечно порожденная группа

$$\mathrm{G} = \langle\, a, b \mid b^6 = 1,\ [b, b^{a^i}] = 1,\ i \in \mathbb{N}\,\rangle = \mathbb{Z}_6 \wr \mathbb{Z}$$

является предельно аппроксимируемой конечными группами. Чтобы это заметить, рассмотрим гомоморфизмы

$$\varphi_k : \mathrm{G} \to \langle\, a, b \mid a^{p^k} = 1,\ b^6 = 1,\ [b, a^{-i} b a^i] = 1,\ i \in \{1, 2, \ldots, p^k - 1\}\,\rangle,$$

где p — некоторое фиксированное простое число, $k\in\mathbb{N}$. Образы группы G при этих гомоморфизмах конечны, а ядра образуют убывающую нормальную матрешку подгрупп, которые пересекаются по единице. Следовательно, по замечанию, сделанному выше, группа G является предельно аппроксимируемой конечными группами. С другой стороны, подгруппа группы G, порожденная элементами $a^{-i} b a^i$, $i \in \mathbb{N}$, изоморфна прямому

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 21–26

произведению счетного числа конечных циклических групп $\mathbb{Z}_6$, а такая абелева группа не представима матрицами ни над каким полем, по критерию А. И. Мальцева [1]. Следовательно, и вся группа G не является линейной.

В работе [5] Люботский описал p-матрешки подгрупп (p-congruence system, в терминах автора) в конечно порожденных группах, существование которых равносильно матричной представимости над полем нулевой характеристики для этих групп. В настоящей работе описаны достаточные условия для того, чтобы группа была линейной, основанные на ее предельной аппроксимируемости матричными группами фиксированной степени над некоторыми коммутативными ассоциативными кольцами. В случае конечно порожденных групп показано, что эти условия является критерием линейности группы.

Кольца $\mathfrak{o}$, над которыми будут рассматриваться гомоморфные матричные представления групп, должны обладать определенными *убывающими последовательностями* идеалов $\mathfrak{o} \trianglerighteq P_1 \trianglerighteq P_2 \ldots \trianglerighteq P_i \ldots$ Убывающую последовательность идеалов $\{P_i\}$ кольца $\mathfrak{o}$ будем называть *простой*, если для любых i, j и элементов $x \notin P_i$, $y \notin P_j$ произведение $xy \notin P_k$, где k зависит только от i и j.

Очевидно, что пересечение всех идеалов P_i из простой последовательности $\{P_i\}$ будет простым идеалом кольца $\mathfrak{o}$.

Простые последовательности идеалов естественно возникают в кольцах с «нормированием» (см. [6. С. 86]). Так, если $\mathfrak{o}$ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, Γ — линейно упорядоченная абелева группа (в аддитивной записи), Γ^{ω} — линейно упорядоченная полугруппа, полученная из Γ одноэлементным расширением наибольшим элементом ω ($\omega + \omega = \omega + \lambda = \omega, \lambda < \omega, \lambda \in \Gamma$), то *«нормированием»* кольца $\mathfrak{o}$ называют отображение $\upsilon : \mathfrak{o} \to \Gamma^{\omega}$, которое для всех $x, y \in \mathfrak{o}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\upsilon(xy) = \upsilon(x) + \upsilon(y)$;

2) $\upsilon(x + y) \geqslant \min\{\upsilon(x), \upsilon(y)\}$; если $\upsilon(x) < \upsilon(y)$, то $\upsilon(x + y) = \upsilon(x)$;

3) $\upsilon(1) = 0, \upsilon(0) = \omega$.

Далее, рассмотрим подкольцо $\mathfrak{o}_+ = \{\, x \in \mathfrak{o} \mid \upsilon(x) \geqslant 0 \,\}$. Если теперь взять $\{\upsilon_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ — такую строго возрастающую последовательность положительных (> 0) значений этого «нормирования», в которой всегда найдется элемент больший суммы двух других, то множества $P_i = \{\, x \in \mathfrak{o} \mid \upsilon(x) \geqslant \upsilon_i \,\}$ образуют простую последовательность идеалов подкольца $\mathfrak{o}_+$. Это следует из того, что если $\upsilon(x) < \upsilon_i$ ($x \notin P_i$) и $\upsilon(y) < \upsilon_j$ ($y \notin P_j$), то $\upsilon(xy) < \upsilon_i + \upsilon_j < \upsilon_k$ ($xy \notin P_k$), где υ_k — первое из значений последовательности $\{\upsilon_i\}$, которое больше суммы $\upsilon_i + \upsilon_j$.

Пусть $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$ — семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей, а в каждом кольце $\mathfrak{o}_\alpha$ выбрана убывающая последовательность идеалов $\{P_{\alpha j}\}$, $j \in \mathbb{N}$. Для $i, j \in \mathbb{N}$ определим множества индексов $\mathcal{I}_{ijk} \subseteq \Omega$ колец $\mathfrak{o}_\alpha$, в которых из того, что $x \notin P_{\alpha i}$, $y \notin P_{\alpha j}$ следует, что произведение $xy \notin P_{\alpha k}$. Очевидно, что при $k_1 \leqslant k_2$ выполняется включение $\mathcal{I}_{ijk_1} \subseteq \mathcal{I}_{ijk_2}$.

Семейство убывающих последовательностей идеалов $\{P_{\alpha j}\}$, $P_{\alpha j} \trianglelefteq \mathfrak{o}_\alpha$, $\alpha \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ будем называть *равномерно простым*, если для каждой пары $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ можно указать номер $k(i,j)$ таким образом, что не пустыми окажутся всевозможные конечные пересечения $\mathcal{I}_{i_1j_1k(i_1,j_1)}\bigcap\ldots\bigcap\mathcal{I}_{i_sj_sk(i_s,j_s)}$.

Так как множества $\mathcal{I}_{ijk(i,j)}$ и их всевозможные конечные пересечения образуют центрированную систему подмножеств, они содержатся в некотором фильтре $\mathcal{F}$ множества Ω. Поэтому с каждым равномерно простым семейством последовательностей идеалов $\{P_{\alpha j}\}$, $P_{\alpha j}\trianglelefteq\mathfrak{o}_\alpha$, $\alpha\in\Omega$, $j\in\mathbb{N}$, будем связывать некоторый максимальный фильтр $\mathcal{F}$ множества Ω, который содержит центрированную систему подмножеств, заданную этим равномерно простым семейством последовательностей идеалов.

Например, рассмотрим счетное семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей, $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha\in\mathbb{N}$, и связанное с ним семейство убывающих последовательностей идеалов $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}$, $P_{\alpha j}\trianglelefteq\mathfrak{o}_\alpha$. Если для каждой пары $i,j\in\mathbb{N}$ определена пара $\beta,k\in\mathbb{N}$ такая, что при $\alpha>\beta$ в кольцах $\mathfrak{o}_\alpha$ из того, что $x\notin P_{\alpha i}$, $y\notin P_{\alpha j}$, следует, что произведение $xy\notin P_{\alpha k}$, то данное семейство последовательностей идеалов является равномерно простым на фильтре $\mathcal{F}$. Здесь $\mathcal{F}$ — максимальный фильтр на $\mathbb{N}$, содержащий дополнения ко всем начальным отрезкам натурального ряда, так как все множества $\mathcal{I}_{ijk(i,j)}$ и их конечные пересечения содержат такие дополнения.

Лемма 1. *Пусть $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha\in\Omega$ — семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей, $\mathcal{F}$ — максимальный фильтр на множестве индексов Ω, $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha\in\Omega$, $j\in\mathbb{N}$ — равномерно простое на фильтре $\mathcal{F}$ семейство последовательностей идеалов $P_{\alpha j}\trianglelefteq\mathfrak{o}_\alpha$. Тогда множество $\overline{\mathbf{P}}$ состоящее из элементов x декартова произведения $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha$, для которых все индексные множества $\mathcal{I}_j^x=\{\alpha\in\Omega|x_\alpha\in P_{\alpha j}\}$ принадлежат фильтру $\mathcal{F}$, образуют простой идеал кольца $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha$. Следовательно, фактор-кольцо $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}}$ — без делителей нуля и вкладывается в некоторое поле.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные элементы $x,y\in\overline{\mathbf{P}}$ и $z\in\overline{\prod\limits_{i\in\Omega}}\mathfrak{o}_i$. Тогда для элементов $x+y$ и xz, на индексных множествах $\mathcal{I}_j^x\bigcap\mathcal{I}_j^y$, $j\in\mathbb{N}$ и $\mathcal{I}_j^x$, $j\in\mathbb{N}$ соответственно, выполнены включения $x_\alpha+y_\alpha\in P_{\alpha j}$ и $x_\alpha z_\alpha\in P_{\alpha j}$. В силу выбора элементов x и y множества $\mathcal{I}_j^x$ и $\mathcal{I}_j^y$ принадлежат фильтру $\mathcal{F}$ при всех $j\in\mathbb{N}$. Следовательно, фильтру $\mathcal{F}$ принадлежат и множества $\mathcal{I}_j^{x+y}$, $\mathcal{I}_j^{xz}$, как надмножества для множеств $\mathcal{I}_j^x\bigcap\mathcal{I}_j^y$, $\mathcal{I}_j^x$ соответственно. Таким образом, элементы $x+y$ и xz принадлежат множеству $\overline{\mathbf{P}}$, и оно является идеалом.

Покажем, что идеал $\overline{\mathbf{P}}$ является простым. Если $x,y\notin\overline{\mathbf{P}}$, то найдутся индексные множества $\mathcal{I}_i^x,\mathcal{I}_j^y\notin\mathcal{F}$. Так как фильтр $\mathcal{F}$ максимален, то дополнения к ним $\overline{\mathcal{I}}_i^x=\{\alpha\in\Omega\mid x_\alpha\notin P_{\alpha i}\}$ и $\overline{\mathcal{I}}_j^y=\{\alpha\in\Omega\mid y_\alpha\notin P_{\alpha j}\}$ являются элементами фильтра $\mathcal{F}$. Для всех индексов $\alpha\in\overline{\mathcal{I}}_i^x\bigcap\overline{\mathcal{I}}_j^y$ выполняются отношения $x_\alpha\notin P_{\alpha i}$ и $y_\alpha\notin P_{\alpha j}$. Следовательно, $x_\alpha y_\alpha\notin P_{\alpha k}$, для всех $\alpha\in\overline{\mathcal{I}}_i^x\bigcap\overline{\mathcal{I}}_j^y\bigcap\mathcal{I}_{ijk}$. Так как семейство последовательностей идеалов $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha\in\Omega$, $j\in\mathbb{N}$ является равномерно простым на фильтре $\mathcal{F}$, то $\overline{\mathcal{I}}_i^x\bigcap\overline{\mathcal{I}}_j^y\bigcap\mathcal{I}_{ijk}\in\mathcal{F}$ при некотором $k\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\overline{\mathcal{I}}_k^{xy}\in\mathcal{F}$, как надмножество множества индексов $\overline{\mathcal{I}}_i^x\bigcap\overline{\mathcal{I}}_j^y\bigcap\mathcal{I}_{ijk}$. Следовательно, $\mathcal{I}_k^{xy}\notin\mathcal{F}$ и $xy\notin\overline{\mathbf{P}}$. □

Лемма 2. *Пусть $\{\mathfrak{o}_\alpha\}$, $\alpha\in\Omega$ — семейство ассоциативных, коммутативных колец с единицей, $\mathcal{F}$ — максимальный фильтр на множестве индексов Ω, $\{P_{\alpha j}\}$, $\alpha\in\Omega$, $j\in\mathbb{N}$, —*

равномерно простое на фильтре $\mathcal{F}$ семейство последовательностей идеалов $P_{\alpha j} \trianglelefteq \mathfrak{o}_\alpha$. Если для некоторой группы $\mathbf{G}$ определено семейство гомоморфизмов

$$\varphi_\alpha : \mathbf{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_\alpha),$$

при которых для каждого нетривиального элемента g существует число $m(g)$ такое, что множество индексов

$$\left\{\, \alpha \in \Omega \mid (\varphi_\alpha(g) - E) \notin \mathbf{Mat}_n(P_{\alpha m(g)}) \,\right\} \in \mathcal{F},$$

где E — единичная матрица из $\mathbf{Mat}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$, то группа $\mathbf{G}$ изоморфно представима матрицами степени n над некоторым полем F.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала для каждого $g \in \mathbf{G}$ выберем матрицу

$$\overline{[g]} \in \mathrm{GL}_n(\overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha) = \overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$$

с условием $\overline{[g]}_\alpha = \varphi_\alpha(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$. Теперь в качестве матричного представления элемента $g \in \mathbf{G}$ в группе $\mathrm{GL}_n(\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}})$ возьмем гомоморфный образ матрицы $\overline{[g]}$ относительно гомоморфизма индуцированного кольцевым гомоморфизмом $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha \to \overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}}$, где $\overline{\mathbf{P}}$ — идеал из предыдущей леммы. По построению данное отображение φ является гомоморфизмом. Покажем, что ядро его тривиально.

Во-первых, по условию леммы, для каждого не единичного $g \in \mathbf{G}$ найдется такое $m(g) \in \mathbb{N}$, что множество индексов $\{\alpha \in \Omega \mid (\varphi_\alpha(g) - E) \notin \mathbf{Mat}_n(P_{\alpha m(g)})\}$ не пусто, так как принадлежит фильтру $\mathcal{F}$. Следовательно, не все $\varphi_\alpha(g) = E \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$ и матрица $\overline{[g]}$ не является единичной матрицей в декартовом произведении $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$.

Во-вторых, множество индексов $\{\alpha \in \Omega \mid (\varphi_\alpha(g) - E) \in \mathbf{Mat}_n(P_{\alpha m(g)})\}$ не может принадлежать фильтру $\mathcal{F}$ как дополнение к множеству из этого фильтра. Следовательно, матрица $(\overline{[g]} - E) \notin \mathbf{Mat}_n(\overline{\mathbf{P}})$, так как для матриц

$$X \in \mathbf{Mat}_n(\overline{\mathbf{P}}) \subseteq \mathbf{Mat}_n(\overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha) = \overline{\prod_{\alpha\in\Omega}}\mathbf{Mat}_n(\mathfrak{o}_\alpha)$$

все индексные множества

$$\mathcal{I}_j = \{\alpha \in \Omega \mid (X_\alpha - E) \in \mathbf{Mat}_n(P_{\alpha j})\}, j \in \mathbb{N},$$

должны принадлежать фильтру $\mathcal{F}$.

Таким образом, отображение φ является изоморфизмом, а по предыдущей лемме, в силу максимальности фильтра $\mathcal{F}$, идеал $\overline{\mathbf{P}}$ является простым и фактор-кольцо $\overline{\prod\limits_{\alpha\in\Omega}}\mathfrak{o}_\alpha/\overline{\mathbf{P}}$ вкладывается в некоторое поле F. □

Условия, наложенные на гомоморфизмы φ_α из последней леммы, задают предельную аппроксимируемость группы $\mathbf{G}$ своими гомоморфными образами.

Группу $\mathbf{G}$ будем называть *равномерно предельно матричной степени n*, если определена последовательность гомоморфизмов $\varphi_i : \mathbf{G} \to \mathrm{GL_n}(\mathfrak{o}_i)$, где $\mathfrak{o}_i$ — ассоциативные коммутативные кольца с единицей. При этом в каждом кольце $\mathfrak{o}_i$ найдется такая убывающая последовательность идеалов $\{P_{ij}\}$, что для каждого не единичного элемента $g \in \mathbf{G}$ и любой пары чисел $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ определена тройка чисел $m, k, l \in \mathbb{N}$ таких, что при всех $i > l$:

а) $(\varphi_i(g) - E) \notin \mathbf{Mat}_n(P_{im})$;

б) в кольцах $\mathfrak{o}_i$ из того, что $x \notin P_{ij_1}$, $y \notin P_{ij_2}$, следует, что произведение $xy \notin P_{\alpha k}$.

Теорема 1. *Группа* $\mathbf{G}$ *изоморфно представима матрицами степени* n *над некоторым полем* F *тогда, когда она является равномерно предельно матричной степени* n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ — максимальный фильтр на $\mathbb{N}$, содержащий дополнения ко всем начальным отрезкам натурального ряда. По условию «б» для любых $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ найдется такое $l \in \mathbb{N}$, что для всех $i > l$ в кольцах $\mathfrak{o}_i$ из того, что $x \notin P_{ij_1}$, $y \notin P_{ij_2}$, следует, что произведение $xy \notin P_{\alpha k}$. Следовательно, семейство последовательностей идеалов $\{P_{ij}\}$ является равномерно простым на фильтре $\mathcal{F}$, так как он содержит дополнения ко всем начальным отрезкам натурального ряда, в частности и множество $\{i \in \mathbb{N} \mid i > l\,\}$. Далее, по условию «а» множество

$$\{\, i \in \mathbb{N} \mid (\varphi_i(g) - E) \notin \mathbf{Mat}_n(P_{im(g)})\,\}$$

также содержит множество $\{\, i \in \mathbb{N} \mid i > l\,\}$ и, следовательно, принадлежит фильтру $\mathcal{F}$. Таким образом, по лемме 2, группа $\mathbf{G}$ изоморфно представима матрицами степени n над некоторым полем F. □

В случае конечно порожденных групп, верен следующий критерий матричной представимости над полем.

Теорема 2. *Конечно порожденная группа* $\mathbf{G}$ *изоморфно представима матрицами степени* n *над некоторым полем* F *тогда и только тогда, когда она является равномерно предельно матричной степени* n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{G}$ конечно порожденная счетная группа матриц степени n над полем F. Можно считать, что $\mathbf{G} \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$, где $\mathfrak{o}$ — счетное конечно порожденное подкольцо поля F, а само поле F является полем частных кольца $\mathfrak{o}$. Кольцо $\mathfrak{o}$ строго содержится в поле F [7]. В этом случае, существует такое нетривиальное нормирование υ поля F, при котором $\mathfrak{o} \subseteq \{\, x \in \mathrm{F} \mid \upsilon(x) \geqslant 0\,\}$, а множество $P = \{\, x \in \mathfrak{o} \mid \upsilon(x) > 0\,\}$ является нетривиальным собственным простым идеалом кольца $\mathfrak{o}$ [6]. Так как множество $V = \{\upsilon(x) \mid x \in \mathfrak{o}\}$ будет счетным, выберем в нем строго возрастающую последовательность $0 < \upsilon_1 < \upsilon_2 < \ldots$, в которой найдется элемент больше любого наперед заданного значения из V. Очевидно, что идеалы $P_i = \{\, x \in \mathfrak{o} \mid \upsilon(x) \geqslant \upsilon_i\,\}$ образуют простую последовательность идеалов кольца $\mathfrak{o}$. Тогда в качестве счетного семейства колец можно взять последовательность фактор-колец $\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}/P_i$, а фактор-идеалы $P_{ij} = P_j/P_i$ составляют равномерно простое семейство последовательностей идеалов счетного семейства колец $\{\mathfrak{o}_i\}$. Кольцевые гомоморфизмы $\Phi_i : \mathfrak{o} \to \mathfrak{o}_i$ индуцируют групповые гомоморфизмы $\varphi_i : \mathbf{G} \to \mathrm{GL_n}(\mathfrak{o}_i)$. При этом, если $m(g)$ — номер первого значения υ_i, которое будет больше нормы хотя бы одного матричного элемента матрицы $g - E \in \mathbf{Mat}_n(\mathfrak{o})$, а номер k — номер идеала, который определяется номерами j_1, j_2 из простой последовательности идеалов $\{P_i\}$ кольца $\mathfrak{o}$, то при всех $i > \max\{m(g), k\}$:

а) $\varphi_i(g) - E \notin \mathbf{Mat}_n(P_{im})$;

б) в кольцах $\mathfrak{o}_i$ из того, что $x \notin P_{ij_1}$, $y \notin P_{ij_2}$, следует, что произведение $xy \notin P_{\alpha k}$.

Утверждение в обратную сторону следует из предыдущей теоремы. □

Условия того, что группа $\mathbf{G}$ является равномерно предельно матричной степени n, в частности утверждают, что группа $\mathbf{G}$ предельно аппроксимируется своими гомоморфными образами, которые являются группами матриц фиксированной степени над коммутативными ассоциативными кольцами с единицей. В этом смысле теорема 3 обобщает аналогичное утверждение А. И. Мальцева из работы [1. С. 415], где рассматривался случай предельной аппроксимируемости линейными группами фиксированной степени.

Список литературы

1. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. Т. 8 (50), № 3. С. 405–423.

2. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite Linear Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1973.

3. *Нисневич В. Л.* О группах, изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем // Матем. сб. 1940. Т. 8 (50), № 3. С. 395–403.

4. *Мерзляков Ю. И.* Рационадьные группы. М.: Наука, 1980.

5. *Lubotzky A.* A Group Theoretic Characterization of Linear Group // J. Algebra. 1988. Vol. 113. P. 207–214.

6. *Ершов Ю. Л.* Кратно нормированные поля. Сибирская школа алгебры и логики. Новосибирск.: Научная книга, 2000.

7. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. М.: Наука, 1972.

Материал поступил в редколлегию 01.10.2009

Адрес автора

БРЮХАНОВ Олег Вадимович

Сибирский университет потребительской кооперации

пр. К. Маркса, 24, Новосибирск, 630087, Россия

e-mail: bryuoleg@ngs.ru