УДК 512.558 : 512.643

С. Г. Далалян

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ЖОРДАНОВЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Определяется представление Мальцева линейного оператора на конечномерном линейном пространстве и доказывается необходимое и достаточное условие его существования. Дается обобщение второй ступени теорем об обобщенных жордановых нормальных формах первого и второго родов.

Ключевые слова: обобщенная жорданова нормальная форма первого и второго родов конечномерного линейного оператора, характеристический многочлен, сопровождающая матрица, обобщение второй ступени.

Введение

Классическая теорема Жордана о нормальной форме линейного оператора годится либо для алгебраически замкнутого основного поля k, либо при условии, что характеристический полином оператора разлагается на линейные множители над k. Для общего случая А. И. Мальцев предложил рассматривать представления, где вместо клеток Жордана используются блоки, по главной диагонали которых стоят сопровождающие матрицы неприводимого над k многочлена, делящего характеристический многочлен рассматриваемого оператора (эти матрицы играют роль собственных значений), а выше главной диагонали — единичные матрицы. Такие представления (которые предлагается называть представлениями Мальцева или обобщенными жордановыми нормальными формами первого рода, в [1] эта форма называется блочно-жордановой) существуют не всегда. Однако если в вышеописанной конструкции единичные матрицы заменить матрицами (того же порядка), в левом нижнем углу которых стоит единица, а все остальные элементы — нули, то представление из скомпонованных клеток такого типа будет существовать для любого линейного оператора над произвольным полем k (это так называемая нормальная форма Фробениуса, в данной статье используется название обобщенная жорданова нормальная форма второго рода, а в [1] — общая каноническая форма). Главный результат статьи — доказательство необходимого и достаточного условия, когда линейный оператор имел представление Мальцева (теоремы 1 и 2). В учебнике Д. К. Фаддеева [1] отмечена (без доказательства) достаточность этого условия и приведен пример, показывающий существенность этого условия.

Следующие два основных результата (теоремы 3 и 4) посвящены обобщению второй ступени теорем об обобщенных жордановых нормальных формах первого и второго родов. Описывается самый общий вид матриц, которые можно использовать вместо сопровождающих матриц неприводимых полиномов.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26–33

Автор глубоко признателен рецензенту за ценные замечания, которые были использованы при переработке текста статьи.

1. Жорданова нормальная форма линейного оператора

Пусть k — некоторое поле, L — конечномерное линейное пространство над полем k размерностью n, A — линейный оператор на L. Согласно классической теореме о жордановой нормальной форме линейного оператора, если поле k алгебраически замкнуто или, более общо, если (в случае произвольного поля k) характеристический многочлен (эквивалентно, минимальный многочлен) оператора A разлагается в произведение линейных множителей над k, то найдется базис $\mathbf{e}$ пространства L, в котором матрица $A_{\mathbf{e}}$ оператора A принимает жорданов нормальный вид. Последнее означает, что $A_{\mathbf{e}}$ является прямой суммой жордановых клеток $J_m(\lambda)$.

В общем случае *прямой суммой* матриц $A_{m_i \times n_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$, где $A_{m_i \times n_i}$ — матрица порядка $m_i \times n_i$, называется матрица

$$\begin{pmatrix} A_{m_1 \times n_1} & \mathbf{0}_{m_1 \times n_2} & \ldots & \mathbf{0}_{m_1 \times n_s} \\ \mathbf{0}_{m_2 \times n_1} & A_{m_2 \times n_2} & \ldots & \mathbf{0}_{m_2 \times n_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0}_{m_s \times n_1} & \mathbf{0}_{m_s \times n_2} & \ldots & A_{m_s \times n_s} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{0}_{m \times n}$ означает нулевую матрицу порядка $m \times n$.

Жорданова клетка $J_m(\lambda)$ — квадратная матрица порядка m, у которой по главной диагонали стоят λ (какое-либо собственное значение оператора A), непосредственно выше главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы — нули. Подчеркнем, что жордановы клетки неразложимы, т. е. не представимы в виде прямой суммы жордановых клеток меньшего порядка. Жорданов нормальный вид линейного оператора определяется однозначно, с точностью до порядка прямых слагаемых. Отметим, что условие разложимости характеристического многочлена оператора на линейные множители не только достаточно для существования его жордановой нормальной формы, но и необходимо.

В теоретико-матричной трактовке суть приведенного результата заключается в том, что в каждом классе сопряженных матриц существует единственный, с точностью до порядка прямых слагаемых, жорданов нормальный представитель.

2. Нормальная форма Мальцева

А. И. Мальцев в [2] предлагает такое обобщение классической теоремы о жордановой нормальной форме линейного оператора. В основу результата Мальцева кладется разложение характеристического многочлена линейного оператора A на k-линейном пространстве L в произведение неприводимых над k полиномов

$$\chi_A(t) = p_1(t)^{l_1} \ldots p_s(t)^{l_s}.$$

С произвольным многочленом

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_{d-2} t^{d-2} + p_{d-1} t^{d-1} + t^d,$$

ассоциируется его *сопровождающая матрица*

$$[p(t)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_{d-2} & -p_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы указанного вида называются *циклическими*, как и определяемые ими линейные преобразования. Очевидно, $p(t)$ совпадает с характеристическим многочленом своей сопровождающей матрицы:

$$p(t) = \det(t\mathbf{E} - [p(t)]) = \chi_{[p(t)]}(t).$$

(Через $\mathbf{E}$ обозначается единичная матрица.)

Клеткой Мальцева, или *обобщенной жордановой клеткой первого рода*, назовем матрицу вида

$$M_m(\Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{E} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \Lambda & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \Lambda \end{pmatrix},$$

где Λ, $\mathbf{E}$, $\mathbf{0}$ — соответственно произвольная, единичная и нулевая (квадратные) матрицы одинакового порядка, а m — блочный порядок матрицы $M_m(\Lambda)$ (т. е. число блоков Λ на главной диагонали).

Оказывается, что при некоторых ограничениях найдется такой базис $\mathbf{e}$ линейного пространства L, что определенный на L линейный оператор A в базисе $\mathbf{e}$ будет иметь матрицу $A_{\mathbf{e}}$, являющуюся прямой суммой клеток Мальцева $M_m(\Lambda)$ с $\Lambda = [p_i(t)]$, причем сумма индексов m всех клеток $M_m(\Lambda)$ такого представления, для которых $\Lambda = [p_i(t)]$, равна l_i. Клетки Мальцева неразложимы, и их множество для оператора A определяется однозначно, т. е. два различных представления Мальцева данного линейного оператора могут отличаться только порядком прямых слагаемых. Такое представление матрицы линейного оператора назовем *обобщенной жордановой нормальной формой первого рода* или *нормальной формой Мальцева (представлением Мальцева)*.

В [2] это утверждение доказано в случае, когда k является подполем поля комплексных чисел, но приведенное доказательство проходит (как указано в подстрочной сноске) в случае произвольного совершенного поля k. В [3] тот же результат доказывается для произвольного поля k при ограничении, что характеристический (эквивалентно, минимальный) многочлен оператора A имеет только сепарабельные неприводимые делители.

Несложный пример, приведенный в [1] и [4], показывает, что существуют линейные операторы (не удовлетворяющие этому условию), для которых представления Мальцева не существует.

3. Обобщенная жорданова нормальная форма второго рода

Небольшое изменение в конструкции клетки Мальцева позволяет получить скомпонованную из клеток этого нового вида нормальную форму для *любого* конечномерного линейного оператора A, определенного над произвольным полем k. Для этого достаточно в клетке Мальцева $M_m(\Lambda)$ все единичные матрицы $\mathbf{E}$ заменить матрицей $\mathbf{F}$ (естественно, того же порядка), в левом нижнем углу которой стоит единица, а все остальные элементы — нули. Полученную матрицу обозначим $M'_m(\Lambda)$ и назовем *обобщенной жордановой клеткой второго рода*, а прямую сумму обобщенных жордановых клеток второго рода назовем *обобщенной жордановой матрицей второго рода.*

Теорема о существовании и единственности обобщенной жордановой нормальной формы второго рода для произвольного линейного оператора доказана в [1; 4; 5]. В [4] эта теорема получается переходом к алгебраическому замыканию основного поля k с последующим применением классической теоремы о жордановой нормальной форме и некоторой процедуры сборки (это напоминает метод комплексификации вещественного пространства). Из этого метода доказательства, в частности, следует, что теоремы о существовании и единственности жордановой нормальной формы и обобщенной жордановой нормальной формы второго рода эквивалентны. В [1; 5] приводятся практически идентичные прямые геометрические доказательства той же теоремы, носящие алгоритмический характер и основанные на построении соответствующего базиса.

4. Необходимое и достаточное условие существования представления Мальцева линейного оператора

Теорема 1. *Линейный оператор A на конечномерном линейном пространстве L имеет представление Мальцева тогда и только тогда, когда все клетки Мальцева $M_m(\Lambda)$, получающиеся из соответствующих клеток $M'_m(\Lambda)$ обобщенной жордановой нормальной формы второго рода заменой блоков $\mathbf{F}$ на блоки $\mathbf{E}$, неразложимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим обобщенную жорданову нормальную форму второго рода оператора A и предположим, что она имеет представление Мальцева. Это возможно тогда и только тогда, когда существует автоморфизм линейного пространства L, устанавливающий такую биекцию между множествами клеток двух рассмотренных представлений, при которой соответствующие этим клеткам линейные операторы изоморфны. □

Таким образом, препятствием к существованию представления Мальцева для линейного оператора на конечномерном линейном пространстве является наличие разложимых клеток Мальцева.

Предложение 1. *Пусть k — некоторое поле, $p(t)$ — неприводимый над k многочлен, m — натуральное число. Клетка Мальцева $M_m([p(t)])$ разложима тогда и только тогда, когда характеристика поля k положительна, многочлен $p(t)$ — несепарабельный над k, и $m > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно п. 2, если все неприводимые делители характеристического полинома оператора A сепарабельны, то A имеет представление Мальцева. Следовательно, согласно теореме 1, для того чтобы клетка Мальцева $M_m([p(t)])$ была разложимой, необходимо, чтобы неприводимый многочлен $p(t)$ был несепарабельный. Несепарабельные многочлены существуют только над полями положительной характеристики. Таким образом, задача сводится к изучению клеток Мальцева $M_m([p(t)])$ с несепарабельным неприводимым полиномом $p(t)$ (над полем k положительной характеристики). Утверждение предложения 1 немедленно следует из нижеприведенного предложения 2. $\square$

Предложение 2. *Пусть k — поле положительной характеристики, $p(t)$ — несепарабельный (неприводимый) многочлен над k. Тогда клетка Мальцева $M_m([p(t)])$ неразложима только при $m = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ — корень $p(t)$ (в алгебраическом замыкании $\overline{k}$ поля k). Согласно обобщенной теореме Жордана, клетка Мальцева $M_m([p(t)])$ будет разложимой над k тогда и только тогда, когда коранг матрицы $\xi E - M_m([p(t])$, где E — единичная матрица соответствующего порядка, больше 1. Поэтому доказательство предложения 2 редуцируется к вычислению ранга этой матрицы. $\square$

Лемма 1. *Коранг матрицы $\xi E - M_m([p(t)])$ равен 1 при $m = 1$ и 2 при $m > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определитель матрицы $tE - [p(t)]$ равен $p(t)$. Так как $p(\xi) = 0$, матрица $\xi E - [p(t)]$ вырожденная. Следовательно, найдутся $\beta_1, \ldots, \beta_d \in k$ ($d = \deg p(t)$) такие, что линейная комбинация строк матрицы $\xi E - [p(t)]$ с этими коэффициентами равна 0, причем (без ограничения общности) можно считать $\beta_d = 1$.

Для $i = 1, \ldots, m$ строки id матрицы $\xi E - M_m([p(t)])$ можем заменить линейной комбинацией строк $(i-1)d+1, \ldots, id$ с коэффициентами соответственно $\beta_1, \ldots, \beta_d$, при этом ранг полученной матрицы B будет равен рангу матрицы $\xi E - M_m([p(\xi)])$. Матрица B будет отличаться от матрицы $\xi E - M_m([p(t)])$ только строками id, в которых у нее при $i < m$, начиная с места $id+1$, последовательно будут стоять $\beta_1, \ldots, \beta_d$, а остальные элементы будут 0. Последняя строка матрицы B будет нулевой.

При условии $\beta_d = 1$ имеем

$$\beta_i = p_{d-1}\xi^{d-1-i} + \ldots + p_i$$

для $i = d-1, \ldots, 1$. Отсюда прямым вычислением получаем, что определитель матрицы, образованной элементами, стоящими на пересечениях последних d столбцов и тех d строк, которые предшествуют последней строке, будет равняться $p'(\xi)$. Значит, этот определитель будет равен 0 тогда (и только тогда), когда многочлен $p(t)$ — несепарабельный.

Итак, в случае несепарабельного многочлена $p(t)$ при $m > 1$ коранг матрицы B больше 1. Из внешнего вида этой матрицы нетрудно заключить, что система из всех ее строк, кроме строк $(m-1)d$ и md, независима. Лемма доказана. □

С учетом предложений 1 и 2 теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Линейный оператор A на конечномерном линейном пространстве L имеет представление Мальцева тогда и только тогда, когда в его обобщенной жордановой нормальной форме второго рода нет клеток $M'_m([p(t)])$, у которых диагональный блок $[p(t)]$ является сопровождающей матрицей несепарабельного (неприводимого) многочлена $p(t)$, а число таких блоков $m > 1$. В таком случае, чтобы получить представление Мальцева, достаточно в обобщенной жордановой форме второго рода все блоки* **F** *поменять на* **E**.

Как увидим ниже (например, сравнивая теоремы 3 и 4), в некоторых случаях представление Мальцева предпочтительнее обобщенной жордановой нормальной формы второго рода.

5. Вспомогательные теоретико-матричные результаты

Лемма 2. *Пусть*

$$A = (A_{ij})\,(i = 1, \ldots, l,\ j = 1, \ldots, m), \quad B = (B_{ij})\,(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$$

есть матрицы, составленные из квадратных блоков A_{ij} и B_{ij} одинакового порядка. Тогда их произведение $C = A \cdot B$ также составлено из квадратных блоков $C_{ij}, (i = 1, \ldots, l,$ $j = 1, \ldots, n)$ того же порядка, причем

$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + \ldots + A_{im} \cdot B_{mj}.$$

Лемма 3. *Пусть*

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s, \quad B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_s,$$

где A_i — матрица порядка $l_i \times m_i$, а B_i — матрица порядка $m_i \times n_i$. Тогда произведение $C = A \cdot B$ определено и имеет вид

$$C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_s, \quad C_i = A_i \cdot B_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этих лемм достаточно аккуратно использовать определение произведения матриц. □

6. Обобщение представления Мальцева и обобщенной жордановой нормальной формы второго рода

Прежде всего подчеркнем, что в обобщенных жордановых нормальных формах как первого, так и второго рода роль классических собственных значений оператора A играют блоки сопровождающих матриц $[p(t)]$ неприводимых многочленов $p(t)$, являющихся делителями характеристического многочлена оператора A. Можно посетовать, что они недостаточно эстетичны. Нельзя ли их заменить более привлекательными блоками? Хорошая возможность такого рода используется М. М. Постниковым в [6] для вычисления нормальной формы вещественного конечномерного линейного оператора. Место сопровождающих матриц нелинейных неприводимых вещественных многочленов занимают матричные представления комплексных чисел. Ниже предлагается обобщение второй ступени нормальных форм линейного оператора, из которых, в частности, можно получить представление Постникова в общем случае [7].

Пусть $M_m([p(t)])$ — произвольная клетка Мальцева, где $p(t)$ — некоторый (неприводимый над k) многочлен, а B — квадратная матрица того же порядка, что и $[p(t)]$. Обозначим через Λ матрицу $[p(t)]^B = B^{-1} \cdot [p(t)] \cdot B$, а через mB — m-кратную прямую сумму матрицы B с самой собой. Тогда, как нетрудно проверить, применяя лемму 2,

$$M_m([p(t)])^{mB} = (mB)^{-1} \cdot M_m([p(t)]) \cdot (mB) = M_m(\Lambda).$$

Рассматривая представление Мальцева линейного оператора A и каждую клетку Мальцева преобразовывая описанным способом с помощью какой-либо невырожденной матрицы B соответствующего порядка, в силу леммы 3 получим следующее обобщение теоремы о нормальной форме Мальцева.

Теорема 3. *Пусть линейный оператор A на конечномерном линейном пространстве L допускает представление Мальцева с клетками $M_{m_i}([p_i(t)]$, где $p_i(t)$ — неприводимый делитель характеристического многочлена оператора A. Пусть далее B_i — произвольные невырожденные квадратные матрицы порядка $\deg p_i(t)$ и $\Lambda_i = [p_i(t)]^{B_i}$. Тогда существует базис $\mathbf{e}$, в котором матрица $A_{\mathbf{e}}$ является прямой суммой неразложимых клеток $M_{m_i}(\Lambda_i)$.*

При выбранных B_i такое представление единственно, с точностью до порядка прямых слагаемых.

Отметим, что при доказательстве теоремы 3 существенную роль играет тот факт, что $B^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot B = \mathbf{E}$. Именно потому, что, вообще говоря, $B^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot B \neq \mathbf{F}$, для обобщенных жордановых нормальных форм второго рода теорема 3 в сформулированном выше виде не верна. Надо поставить ограничение на выбираемые B_i, потребовав, чтобы

$$B^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot B = \mathbf{F}. \tag{$*$}$$

Лемма 4. *Для того чтобы матрица B удовлетворяла соотношению $(*)$, необходимо и достаточно, чтобы*

a) все элементы ее первой строки, за исключением первого элемента b_{11}, и все элементы ее последнего столбца, кроме последнего элемента b_{dd}, были нулями, а $b_{11} = b_{dd} \neq 0$;

b) матрица $\check{B}$, получающаяся из B откидыванием первой и последней строк и первого и последнего столбцов, была невырожденной.

Такие матрицы B назовем $(*)$-*матрицами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (*) эквивалентно условию

$$\mathbf{F} \cdot B = B \cdot \mathbf{F}, \quad \det B \neq 0. \tag{$*'$}$$

У матрицы $\mathbf{F} \cdot B$ последняя строка совпадает с первой строкой матрицы B, а остальные элементы — нули. У матрицы $B \cdot \mathbf{F}$ первый столбец совпадает с последним столбцом матрицы B, а остальные элементы — опять же нули. Отсюда на основании равенства $\mathbf{F} \cdot B = B \cdot \mathbf{F}$ получаем условие a, за исключением его последней части ($\neq 0$). Эту последнюю часть, как и условие b, получаем, используя условие невырожденности B. □

Теперь точно так же, как мы получили обобщение для представления Мальцева линейного оператора (теорема 3), из теоремы об обобщенной жордановой нормальной форме второго рода можно получить следующую теорему.

Теорема 4. *Любой линейный оператор A на конечномерном линейном пространстве L в некотором базисе представляется матрицей, являющейся прямой суммой клеток $M'_{m_i}(\Lambda_i)$, где $\Lambda_i = [p_i(t)]^{B_i}$, $p_i(t)$ — неприводимые делители характеристического многочлена оператора A, B_i — (*)-матрицы порядка $\deg p_i(t)$.*

При выбранных B_i такое представление единственно с точностью до порядка прямых слагаемых.

Предварительные результаты были доложены на Международной конференции «Мальцевские чтения – 100» в Новосибирске в 2009 г. Краткое сообщение о результатах этой статьи (без доказательств) опубликовано в [8].

Список литературы

1. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. СПб.: Лань, 2002.

2. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.

3. *Далалян С. Г.* Обобщенный жорданов нормальный вид матрицы с сепарабельными неприводимыми делителями характеристического многочлена // Вестник РА(С)ГУ. Физ.-мат. и естест. науки. 1. Ереван, 2005. С. 7–14.

4. *Далалян С. Г.* Обобщенная жорданова матрица линейного оператора // 2007. Матем. заметки. Т. 82, вып. 1. С. 27–35.

5. *Далалян С. Г.* Прямое доказательство теоремы об обобщенной жордановой форме линейного оператора // Изв. НАН РА. 2008. Т. 43, вып. 5. С. 274–284.

6. *Постников М. М.* Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.

7. *Dalalyan S. H.* Jordan-Postnikov Normal Form for a Real Linear Operator // Armenian J. of Math. 2008. Vol 1. No. 2. C. 37–43.

8. *Далалян С. Г.* Об обобщенных жордановых нормальных формах конечномерного линейного оператора // Изв. вузов. Математика. 2011. Вып. 5. С. 80–83.

Материал поступил в редколлегию 10.11.2011

Адрес автора

ДАЛАЛЯН Самвел Грантович

Ереванский государственный университет

ул. Алекса Манукяна, 1, Ереван, 0025, Армения

e-mail: dalalyan@ysu.am