На правах рукописи

Балакина Екатерина Юрьевна

ИНДИКАТОР НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТОМОГРАФИИ В ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Новосибирский национальный исследовательский государственный университет”.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Аниконов Дмитрий Сергеевич**.

Официальные оппоненты:
Белых Владимир Никитич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник;
Казанцев Иван Гаврилович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждении науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, старший научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Дальневосточный федеральный университет”.

Защита состоится 20 ноября 2012 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Новосибирский национальный исследовательский государственный университет” по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан ____ октября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Старовойтов В.Н.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Диссертация посвящена вопросу радиационного зондирования неизвестной среды, что представляет интерес для таких областей, как медицина, промышленность, геология и т.д. В работе эта проблема представлена в виде некоторых обратных задач для уравнения переноса. Исследование этого направления началось в 1964 г. с работ Г.И. Марчука, посвящённых постановке и обсуждению одной обратной задачи в плоскопараллельном случае. В 1968 г. М.В. Масленников рассмотрел стационарное односкоростное уравнение переноса в полупространстве и исследовал задачу о восстановлении индикатрисы рассеяния по угловому распределению излучения в глубине слоя. В книгах Р. Беллана, Р. Калабы, Ж.-Л. Лионса обратные задачи для уравнения переноса рассматривались в основном с точки зрения получения численных результатов. Затем К. Кейзом было предложено решение обратной задачи об определении индикатрисы рассеяния по угловому распределению излучения. Теперь теория обратных задач для уравнения переноса весьма обширна. Это объясняется большим разнообразием постановок задач, различными ограничениями и методами.

Задачи, поставленные в работах Д.С. Аниконова, наиболее близки нам по характеру ограничений и методам исследования. В них ищется только лишь множество разрывов коэффициентов уравнения переноса при заданной плотности выходящего потока. Это соответствует поиску границ между различными веществами, входящими в состав зондируемой среды. Решение этой проблемы при широких ограничениях на исследуемый объект интересует специалистов в различных областях, в особенности, в дефектоскопии.

Цель работы. Целями работы являются:

1) реконструкция радиационного поля при известных характеристиках среды,

2) нахождение мест разрывов коэффициентов уравнения переноса, что является существенной характеристикой строения неизвестной среды.

Основные результаты. Рассмотрены краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения переноса, где в качестве граничного условия задана плотность падающего либо выходящего потока. Приведено достаточное условие существования и единственности этих задач. Проведено сравнение этих условий.

Исследованы задачи нахождения множества разрывов коэффициентов уравнения переноса в случае объёмного и послойного зондирования. При этом учитывалось поглощение частиц средой и их однократное рассеяние. Постановки проблем соответствуют поэтапному зондированию неизвестной среды, что обычно имеет место на практике. Для каждого случая найдена функция, которая может принимать неограниченное значение только вблизи искомых множеств. Доказывается теорема единственности решения при довольно общих предположениях и при условии, гарантирующем существование искомых поверхностей.

Методика исследования. Для реконструкции радиационного поля ставятся и решаются краевые задачи с заданным падающим либо выходящим потоком. Для их исследования мы использовали схему, предложенную в работах В.С. Владимирова, Т.А. Гермогеновой, Д.С. Аниконова: сведение краевых задач к интегральным уравнениям и их решение при некоторых условиях на операторы.

Для нахождения разрывов коэффициентов уравнения переноса строится функция, принимающая неограниченные значения в окрестности искомых множеств. Метод исследования аналогичен методу, предложенному Д.С. Аниконовым.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Все основные результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми, их достоверность основана на строгих математических доказательствах. Кроме теоретической ценности полученные выводы могут служить основанием для построения численных алгоритмов.

Аппробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на конференциях: XLVI Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 2008), IX Всероссийская молодежная школа-конференция “Лобачевские чтения-2010” (Казань, 2010), Международная научная конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Волгодонск, 2011), Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2007, 2012). Основные результаты докладывались на семинарах: семинар "Избранные вопросы математического анализа"(руководитель: д.ф.-м.н., проф. Г. В. Демиденко), семинар отдела условно-корректных задач (руководители: член-корр. РАН В.Г. Романов, д.ф.-м.н. Д.С. Аниконов), семинар по геометрическому анализу (руководитель: д.ф.-м.н., проф. С. К. Водопьянов).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-01-00384-а, 11-08-00286-а) и поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-6]. Из них 2 работы – в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Объем работы 106 страниц. Список литературы состоит из 53 наименований.

Содержание диссертации.

Во введении дается краткий обзор литературы и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе рассматриваются две прямые задачи для уравнения переноса.

В параграфе 1.1 вводятся основные обозначения и предположения.

Рассматривается стационарное линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega,E) + \mu(r,E) f(r,\omega,E) = \\ = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{E_1}^{E_2} k(r,\omega\cdot\omega',E,E') f(r,\omega',E') dE' d\omega' + J(r,\omega,E), \quad (1)$$

где r — пространственная переменная, $r \in G$, G — выпуклая ограниченная область в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$; $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{E}^3 : |\omega| = 1\}$; E — числовая переменная, $E \in I = [E_{min}, E_{max}]$.

Среда G — неоднородна. Для характеристики этой неоднородности введём в рассмотрение подмножество G_0 области G, которое является объединением конечного числа областей:

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^{p} G_i,\ p < \infty,\ G_i \cap G_j = \varnothing \text{ при } i \neq j; \quad \overline{G}_0 = \overline{G}.$$

Область G_i можно интерпретировать как часть неоднородной среды G, заполненную i-ым веществом.

Предполагается, что G_0 является обобщённо выпуклым множеством.

Величины, характеризующие среду, могут скачкообразно меняться по энергетической переменной $E \in I$ внутри любой области G_i. Поэтому мы также будем рассматривать некоторое подмножество I_0 ($I_0 \subset I$, $\overline{I}_0 = \overline{I}$) множества I :

$$I_0 = \bigcup_{i=1}^{q} I_i, q < \infty,\ I_i \cap I_j = \varnothing \text{ при } i \neq j,$$

где $I_i \subset I$, $i = 1, \ldots, q$, — открытые попарно непересекающиеся интервалы. Разбиение $I_1, I_2, \ldots, I_q$ определяет области непрерывного изменения параметров излучения по спектральной переменной E.

Определим следующий класс функций. Пусть Y — произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, ∂Y — его граница. К классу $\mathbf{D}(Y)$ отнесём вещественные функции $\varphi(y)$, непрерывные и ограниченные на Y, доопределённые в граничных точках $z \in \overline{Y} \setminus Y$, в которых они не определены, нижним пределом функции $\varphi(y)$ при $y \to z$, $y \in Y$.

Зададим множества $L_{r,\omega} = \{r + t\omega : t \geqslant 0\}$ и $\mathcal{X} = \{(r, \omega, E) : (r, \omega, E) \in \overline{G} \times \Omega \times I, L_{r,\omega} \cap G_0 \neq \varnothing\}$.

Введём функцию $d(r, \omega)$ — расстояние от точки $r \in \overline{G}$ до границы ∂G в направлении ω.

Везде в дальнейшем будем считать, что ∂G — двумерная поверхность класса $\mathcal{C}^2$.

В параграфе 1.2, который состоит из трёх пунктов, исследуется классическая краевая задача.

В пункте 1.2.1 ставится классическая краевая задача, даётся определение её решения, вводятся ограничения на коэффициенты уравнения и краевое условие.

Классическая краевая задача. *Найти функцию f из уравнения (1) и краевого условия*

$$f(\xi,\omega,E) = h(\xi,\omega,E),\ (\xi,\omega,E) \in \partial G \times \Omega \times I_0, \tag{2}$$

$$\xi = r - d(r,-\omega)\omega,\ \ r \in G,$$

где известными являются функции μ, k, J, h.

Определение. Функция $f(r,\omega,E)$— *решение классической задачи (1), (2)*, если:

а) $f(r,\omega,E) \in \mathbf{D}(G_0 \times \Omega \times I_0)$;

б) для всех $(r,\omega,E) \in G_0 \times \Omega \times I_0$ функция $f(r+t\omega,\omega,E)$ абсолютно непрерывна по t при $t \in [-d(r,-\omega), d(r,\omega)]$;

в) для всех $(r,\omega,E) \in G_0 \times \Omega \times I_0$

$$\left.\frac{df(r+t\omega,\omega,E)}{dt}\right|_{t=0} \in \mathbf{D}(G_0 \times \Omega \times I_0)$$

и выполняется:

$$\left.\frac{df(r+t\omega,\omega,E)}{dt}\right|_{t=0} + \mu(r,E)f(r,\omega,E) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{E_1}^{E_2} k(r,\omega\cdot\omega',E,E')f(r,\omega',E')dE'd\omega' + J(r,\omega,E);$$

г) $f(\xi,\omega,E) = h(\xi,\omega,E)$, где $\xi = r - d(r,-\omega)\omega$ для $(r,\omega,E) \in G_0 \times \Omega \times I_0$.

Введем вспомогательную функцию

$$\widetilde{h}(r,\omega,E) = h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E) = h(\xi,\omega,E), \quad \text{где} \quad \xi = r - d(r,-\omega)\omega.$$

Будем искать решение классической прямой задачи при следующих ограничениях на функции μ, k, J, $\widetilde{h}$:
1) $\widetilde{h}(r,\omega,E) \in \mathbf{D}(G_0 \times \Omega \times I_0)$;
2) $\mu(r,E) \in \mathbf{D}(G_0 \times I_0)$, $k(r, w \cdot w', E, E') \in \mathbf{D}(G_0 \times \Omega \times \Omega \times I_0 \times I_0)$, $J(r,\omega,E) \in \mathbf{D}(G_0 \times \Omega \times I_0)$.

В пункте 1.2.2 доказывается вспомогательная теорема.

Теорема 1.2.1. *Для того чтобы функция $f(r,\omega,E)$ была решением прямой задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы $f(r,\omega,E)$ для всех $(r,\omega,E) \in \mathcal{X}$ удовлетворяла уравнению*

$$f(r,\omega,E) = \exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r-\nu\omega,E)d\nu\right) h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E) +$$

$$+\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^t \mu(r-\nu\omega,E)d\nu\right)\left(\int\limits_\Omega\int\limits_{E_1}^{E_2} k(r-t\omega,\omega\cdot\omega',E,E')\times\right.$$

$$\left.\times f(r-t\omega,\omega',E')dE'd\omega' + J(r-t\omega,\omega,E)\right)dt$$

в классе функций $\mathbf{D}(G_0 \times \Omega \times I_0)$.

В пункте 1.2.3 доказана основная теорема этого параграфа, в которой сформулировано достаточное условие, при котором решение классической задачи существует и единственно.

Для формулировки результата введём линейные операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{S}\varphi)(r,\omega,E) = \int\limits_\Omega\int\limits_{E_1}^{E_2} k(r,\omega\cdot\omega',E,E')\varphi(r,\omega',E')dE'd\omega',$$

$$(\mathcal{A}\varphi)(r,\omega,E) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\int\limits_0^t \mu(r-\nu\omega,E)d\nu\right)\varphi(r-t\omega,\omega,E)dt.$$

Зададим функции

$$f_0(r,\omega,E) = \exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r-\nu\omega,E)d\nu\right) h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E) +$$

$$+(\mathcal{A}J)(r,\omega,E),$$

$$\mu_s^*(r,E)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2}k(r,\omega\cdot\omega',E,E')d\omega' dE',$$

$$\lambda(r,E)=\begin{cases}\mu_s^*(r,E)/\mu(r,E), & \text{если}\, \mu(r,E)>0,\\ 0, & \text{если}\, \mu(r,E)=0,\end{cases}$$

$$\overline{\tau}=\sup_{(r,\omega,E)\in\overline{G\times\Omega\times I}}\int\limits_0^{d(r,-\omega)}\mu(r-\nu\omega,E)d\nu,\ \ \overline{\lambda}=\sup_{r\in\overline{G},E\in I}\lambda(r,E)$$

и будем считать, что $\overline{\lambda}<\infty$.

Имеет место теорема существования и единственности.

Теорема 1.2.2. *Если выполняется* $\overline{\lambda}(1-\exp{(-\overline{\tau})})<1$, *то решение задачи (1), (2) существует, единственно и представимо равномерно сходящимся рядом*

$$f(r,\omega,E)=\sum_{n=0}^{\infty}((\mathcal{A}\mathcal{S})^n f_0)(r,\omega,E),\ (r,\omega,E)\in\mathcal{X}.$$

В параграфе 1.3 исследуется неклассическая краевая задача.

В пункте 1.3.1 ставится краевая задача, даётся определение её решения, вводятся ограничения на коэффициенты уравнения и краевое условие.

Неклассическая краевая задача. *Найти функцию f из уравнения (1) и краевого условия*

$$f(\eta,\omega,E)=H(\eta,\omega,E),\ (\eta,\omega,E)\in\partial G\times\Omega\times I, \tag{3}$$

$$\eta=r+d(r,\omega)\omega,\ \ r\in G,$$

где известными являются функции μ, k, J, H.

Определение. Функция $f(r,\omega,E)$— *решение неклассической задачи (1), (3)*, если:

а) $f(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$;

б) для всех $(r,\omega,E)\in G_0\times\Omega\times I_0$ функция $f(r+t\omega,\omega,E)$ абсолютно непрерывна по t при $t\in[-d(r,-\omega),d(r,\omega)]$;

в) для всех $(r,\omega,E)\in G_0\times\Omega\times I_0$

$$\left.\frac{df(r+t\omega,\omega,E)}{dt}\right|_{t=0}\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$$

и выполняется:

$$\left.\frac{df(r+t\omega,\omega,E)}{dt}\right|_{t=0}+\mu(r,E)f(r,\omega,E)=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2}k(r,\omega\cdot\omega',E,E')f(r,\omega',E')dE'd\omega'+J(r,\omega,E);$$

г) $f(\eta,\omega,E)=H(\eta,\omega,E)$, где $\eta=r+d(r,\omega)\omega$ для $(r,\omega,E)\in G_0\times\Omega\times I_0$.

Введем функцию

$$H_1(r,\omega,E)=H(r+d(r,\omega)\omega,\omega,E)=H(\eta,\omega,E),\quad\text{где}\quad\eta=r+d(r,\omega)\omega.$$

Сформулируем ограничения на функции μ, k, J, H_1:
1) $H_1(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$;
2) $\mu(r,E)\in\mathbf{D}(G_0\times I_0)$, $k(r,w\cdot w',E,E')\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times\Omega\times I_0\times I_0)$, $J(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$.

В пункте 1.3.2 доказываются вспомогательные утверждения.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Для того чтобы функция $f(r,\omega,E)$ была решением задачи (1), (3) необходимо и достаточно, чтобы $f(r,\omega,E)$ для всех $(r,\omega,E)\in\mathcal{X}$ удовлетворяла уравнению*

$$f(r,\omega,E)=\exp\left(\int\limits_0^{d(r,\omega)}\mu(r+\nu\omega,E)d\nu\right)H(r+d(r,\omega)\omega,\omega,E)-$$

$$-\int\limits_0^{d(r,\omega)}\exp\left(\int\limits_0^{t}\mu(r+\nu\omega,E)d\nu\right)\Bigg(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2}k(r+t\omega,\omega\cdot\omega',E,E')\times$$

$$\times f(r+t\omega,\omega',E')dE'd\omega' + J(r+t\omega,\omega,E)\Bigg) dt$$

в классе функций $\boldsymbol{D}(G_0 \times \Omega \times I_0)$.

В пункте 1.3.3 доказана основная теорема этого параграфа, в которой сформулировано достаточное условие, при котором решение неклассической задачи существует и единственно. Также проводится сравнение условий существования решений для классической и неклассической задач.

В этом параграфе определим линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$ следующим образом:

$$(\mathcal{S}\varphi)(r,\omega,E) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2} k(r,\omega\cdot\omega',E,E')\varphi(r,\omega',E')dE'd\omega',$$

$$(\mathcal{A}\varphi)(r,\omega,E) = -\int\limits_{0}^{d(r,\omega)} \exp\left(\int\limits_{0}^{t}\mu(r+\nu\omega,E)d\nu\right)\varphi(r+t\omega,\omega,E)dt.$$

Зададим функции:

$$f_0(r,\omega,E) = \exp\left(\int\limits_{0}^{d(r,\omega)} \mu(r+\nu\omega,E)d\nu\right) H(r+d(r,\omega)\omega,\omega,E) +$$

$$+(\mathcal{A}J)(r,\omega,E),$$

$$\mu_s^*(r,E) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{E_1}^{E_2} k(r,\omega\cdot\omega',E,E')d\omega'dE',$$

$$\lambda(r,E) = \begin{cases} \mu_s^*(r,E)/\mu(r,E), & \text{если}\, \mu(r,E) > 0, \\ 0, & \text{если}\, \mu(r,E) = 0, \end{cases}$$

$$\overline{\tau} = \sup_{(r,\omega,E)\in\overline{G\times\Omega\times I}} \int\limits_{0}^{d(r,\omega)} \mu(r+\nu\omega,E)d\nu, \;\; \overline{\lambda} = \sup_{r\in\overline{G},\ E\in I} \lambda(r,E)$$

и считаем, что $\overline{\lambda} < \infty$.

Теорема существования и единственности заключается в следующем.

Теорема 1.3.2. *Если выполняется* $\overline{\lambda}(exp\,(\overline{\tau})-1)<1$, *то решение задачи (1), (3) существует, единственно и представимо равномерно сходящимся рядом*

$$f(r,\omega,E)=\sum_{n=0}^{\infty}((\mathcal{AS})^n f_0)(r,\omega,E),\ (r,\omega,E)\in\mathcal{X}.$$

Вторая глава диссертации состоит из двух параграфов и посвящена двум обратным задачам.

В параграфе 2.1 ставится и исследуется задача рентгеновской томографии, являющаяся обратной задачей для дифференциального уравнения переноса. При этом учитывается поглощение частиц средой и их однократное рассеяние. Постановка проблемы соответствует поэтапному зондированию неизвестной среды, что обычно имеет место на практике. Ещё одним шагом в сторону реалистичности задачи является использование в качестве известных данных интегралов по энергии от плотности выходящего потока излучения, в отличие от задания плотности потока для каждого уровня энергии, как это принято в томографии. Искомым объектом являются поверхности разрывов коэффициентов уравнения, что соответствует поиску границ между различными веществами, входящими в состав зондируемой среды. Доказывается теорема единственности решения при довольно общих предположениях и при условии, гарантирующем существование искомых поверхностей.

Первый параграф состоит из четырёх пунктов. **В пункте 2.1.1** приводится постановка задачи, вводятся предположения и ограничения на среду, в которой протекает процесс.

Задача. *Найти* ∂G_0 *— границу множества* G_0 *из уравнений*

$$\omega\cdot\nabla_r f_q(r,\omega,E)+\mu(r,E)f_q(r,\omega,E)=J(r,\omega,E),\ \ q=1,\dots,K, \tag{4}$$

и краевых условий

$$f_q(\xi,\omega,E)=h_q(\xi,\omega,E), \tag{5}$$

$$(\xi,\omega,E)\in\partial G\times\Omega\times I,\ \ \xi=r-d(r,-\omega)\omega,\ \ r\in G,$$

$$\int\limits_{E_1}^{E_2} f_q(\eta,\omega,E)dE = H_q(\eta,\omega),\ [E_1,E_2]\subset[E_{min},E_{max}], \qquad (6)$$

$$(\eta,\omega)\in\partial G\times\Omega,\ \ \eta = r + d(r,\omega)\omega,\ \ r\in G,$$

где известными являются поверхность ∂G и функции $H_q(\eta,\omega)$, $q = 1,\dots,K$.

Для упрощения обозначений введем функции

$$\widetilde{H}_q(r,\omega) = H_q(r+d(r,\omega)\omega,\omega) = H_q(\eta,\omega), \quad \text{где} \quad \eta = r + d(r,\omega)\omega,$$

$$\widetilde{h}_q(r,\omega,E) = h_q(r - d(r,-\omega)\omega,\omega,E) = h_q(\xi,\omega,E),$$

$$\xi = r - d(r,-\omega)\omega,\ \ q = 1,\dots,K.$$

Будем предполагать, что $\widetilde{h}_q(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$ и, сверх того, их частные производные по r_m, $m = 1,2,3$, непрерывны в $G_0\times\Omega\times I_0$ и могут быть неограниченными только при r, близких к ∂G.

На функции μ и J введём следующие ограничения:
1) $\mu(r,E)\in\mathbf{D}(G_0\times I_0)$, $J(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(G_0\times\Omega\times I_0)$,
2) $\frac{\partial}{\partial r_j}\mu(r,E)$, $\frac{\partial}{\partial r_j}J(r,\omega,E)$, $\frac{\partial^2}{\partial r_k\partial r_j}\mu(r,E)$, $\frac{\partial^2}{\partial r_k\partial r_j}J(r,\omega,E)$ равномерно непрерывны в G_i, $j,k = 1,2,3$, $i = 1,\dots,p$.

Считаем, что граница ∂G_i, $i = 1,\dots,p$, является непрерывной кусочно-гладкой двумерной поверхностью класса $\mathcal{C}^2$.

Точку z назовём контактной, если она принадлежит границе только двух подобластей и эта граница в некоторой окрестности точки z представима в виде графика функции класса $\mathcal{C}^2$. Предполагаем, что контактные точки образуют множество, плотное в $\partial G_0\backslash\partial G$.

В целом ∂G_i для любого i считается липшицевой.

Пусть $z\in\partial G_i$, тогда существуют конечные пределы при $r\to z$, $r\in G_i$, функций $\mu(r,E)$ и $J(r,\omega,E)$, которые обозначим $[\mu(z,E)]_i$ и $[J(z,\omega,E)]_i$. Возьмём точку $z\in\partial G_0$, которая является граничной только для двух множеств G_l и G_j. Величиной скачка функций μ и J в точке z назовём: $[\mu(z,E)]_{l,j} = [\mu(z,E)]_l - [\mu(z,E)]_j$, $[J(z,\omega,E)]_{l,j} = [J(z,\omega,E)]_l - [J(z,\omega,E)]_j$.

В пункте 2.1.2 доказываются некоторые вспомогательные утверждения.

Обозначим: $F_q(r,\omega,E) = f_q(r + d(r,\omega)\omega,\omega,E) = f_q(\eta,\omega,E)$, $(r,\omega,E) \in G_0 \times \Omega \times I_0$, $\eta = r + d(r,\omega)\omega$, $q = 1,\ldots,K$.

Лемма 2.1.1. *Функции $F_q(r,\omega,E)$, $q = 1,\ldots,K$, представимы в виде*

$$F_q(r,\omega,E) = \exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu(r+\alpha\omega,E)d\alpha\right) f_q(r,\omega,E) +$$

$$+\int\limits_0^{d(r,\omega)} \exp\left(\int\limits_{d(r,\omega)}^{t} \mu(r+\alpha\omega,E)d\alpha\right) J(r+t\omega,\omega,E)dt.$$

Далее будем исследовать функцию

$$Ind(r) = \sum_{q=1}^{K} \left|\,\nabla \int\limits_{\Omega} \int\limits_{E_1}^{E_2} F_q(r,\omega,E)\beta_q(r,\omega)dEd\omega\,\right|,$$

где $\beta_q(r,\omega)$ — вспомогательные функции класса $\mathcal{C}^2(\overline{G}\times\Omega)$. Функция $Ind(r)$ также вычисляется по данным обратной задачи:

$$Ind(r) = \sum_{q=1}^{K} \left|\,\nabla \int\limits_{\Omega} \beta_q(r,\omega)\widetilde{H}_q(r,\omega)d\omega\,\right|.$$

В пункте 2.1.3 доказываются основные утверждения, из которых следует основная теорема этого параграфа.

Введём следующие обозначения:

$$mv_q(r,\omega,E) = \beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu(r+\alpha\omega,E)d\alpha\right) \times$$

$$\times\left\{\,-[\mu(z,E)]_{l,j} f_q(r,\omega,E) + [J(z,\omega,E)]_{l,j}\,\right\},$$

$$m_q^0\left(r,\frac{y-r}{|y-r|},E\right) = mv_q\left(r,\frac{r-y}{|r-y|},E\right) + mv_q\left(r,\frac{y-r}{|y-r|},E\right),$$

$$\mathcal{M}_q(r,t) = \int\limits_{E_1}^{E_2}\int\limits_{\Omega_z} m_q^0\left(r, \frac{\overline{\zeta}(ts)-r}{|\overline{\zeta}(ts)-r|}, E\right) dsdE, \;\; q = 1,\ldots,K,$$

где Ω_z — пересечение единичной сферы в $\mathbb{E}^3$ с центром в точке z и плоскости, касательной к ∂G_l в этой же точке.

Теорема 2.1.1. *Для любой контактной точки* z, $z \in \partial G_l \cap \partial G_j$, *и для* $r = z + \tau n_l$, n_l *— вектор внутренней нормали к* ∂G_l, $0 < |\tau| \le \delta$ *(*δ *— достаточно малое число) функция* $Ind(r)$ *представима в виде:*

$$Ind(r) = \widetilde{\mathcal{M}}(r)\,\Big|\,\ln(\rho(r,\partial G_0))\,\Big| + O(1),$$

здесь

$$\widetilde{\mathcal{M}}(r) = \sum_{q=1}^{K}\Big|\,\mathcal{M}_q(r,t_q(r))\,\Big|,$$

$O(1)$ *— функция, непрерывная и ограниченная при* $0 < |\tau| \le \delta$, $\rho(r,\partial G_0)$ *— расстояние от точки* r *до поверхности* G_0.

Отсюда следует основная теорема.

Теорема 2.1.2. *Функция* $Ind(r)$ *является непрерывной и ограниченной на всяком компакте в* G_0. *Пусть* z *— произвольная контактная точка. Рассмотрим точки* $r = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \le \delta$, *где* $n(z)$ *— какой-либо вектор единичной нормали к* G_0 *в точке* z, δ *достаточно малое положительное число. Если выполнено неравенство* $\widetilde{\mathcal{M}}(r) \ge const > 0$, *то* $Ind(r)$ *стремится к бесконечности при* $r \to z$, *т.е. при* $\tau \to 0$.

Таким образом, функция $Ind(r)$ может быть неограниченной только вблизи искомой поверхности ∂G_0. Это свойство служит основанием того, что функция $Ind(r)$ называется индикатором неоднородности среды G.

В пункте 2.1.4 доказывается теорема единственности решения обратной задачи и делаются замечания по поводу условия, при котором задача может быть решена.

Пусть имеются две системы подобластей $\{G_j^{(k)}\}$, $j = 1,\ldots,p$, функции $\mu^{(k)}(r,E)$, $J^{(k)}(r,\omega,E)$ и $\widetilde{h}_q^{(k)}(r,\omega,E)$, $k = 1,2$, $q = 1,\ldots,K$. Вычислим $\widetilde{H}_q^{(k)}(r,\omega)$, $q = 1,\ldots,K$, и $\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}(r)$, $k = 1,2$.

Теорема 2.1.3 (теорема единственности). *Если функции* $\widetilde{H}_q^{(1)}(r,\omega)$ *и* $\widetilde{H}_q^{(2)}(r,\omega)$ *совпадают при всех* $(r,\omega) \in G \times \Omega$, $q = 1,\ldots,K$, *и* $\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}(r) \geq const > 0$ *для всех контактных точек* z *поверхностей* $\partial G_0^{(1)}$ *и* $\partial G_0^{(2)}$, $r = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \leq \delta$, *то* $\partial G_0^{(1)} = \partial G_0^{(2)}$.

Замечание 2.1.1. Выполнение условия $\widetilde{\mathcal{M}}(r) \geq const > 0$ гарантирует наличие скачков, т.е. разрыва функций $\mu(r,E)$ или $J(r,\omega,E)$ в этой точке. Предположим противное, пусть $[\mu(z,E)]_{l,j} = 0$ и $[J(z,\omega,E)]_{l,j} = 0$, тогда из вида функции $\widetilde{\mathcal{M}}$ следует, что она равна нулю.

Случай, когда имеют место разрывы функций $\mu(r,E)$ или $J(r,\omega,E)$ ($[\mu(z,E)]_{l,j} \neq 0$, $[J(z,\omega,E)]_{l,j} \neq 0$, $r = z + \tau n_l$, $0 < |\tau| < \delta$), но при этом $\widetilde{\mathcal{M}}(r) \to 0$ ($\tau \to 0$), очень специфичен. Он означает наличие особой связи между параметрами задачи и вряд ли будет выполняться в широком классе случаев.

Замечание 2.1.2. Нетрудно указать достаточное условие, гарантирующее неравенство $\widetilde{\mathcal{M}}(r) \geq const > 0$. Сделаем естественное предположение, что хотя бы для одного q, $1 \leq q \leq K$, $f_q(r,\omega,E) \geq const > 0$, что соответствует проникновению зондирующего излучения в окрестность точки z. Тогда, если скачки $[\mu(z,E)]_{l,j}$, $[J(z,\omega,E)]_{l,j}$ имеют разные знаки, функция $\beta_q(r,\omega) > 0$, то условие $\widetilde{\mathcal{M}}(r) \geq const > 0$ выполняется. При отсутствии внутренних источников, т.е. при $J(r,\omega,E) = 0$, ситуация упрощается. Тогда достаточно только условия $[\mu(z,E)]_{l,j} \neq 0$, что соответствует наличию разрыва функции $\mu(r,E)$ в точке $r = z$.

Замечание 2.1.3. В этой работе функциям $\beta_q(r,\omega)$ предназначена роль резерва. Их можно было бы использовать, например, для учёта априорной информации, если таковая имеется. Кроме того, при построении численного алгоритма, когда искомые поверхности находятся по аномально большим значениям индикатора, можно положить $\beta_q(r,\omega) = 0$, $r \in \partial G$, чтобы аннулировать особенности $Ind(r)$ вблизи поверхности ∂G, которая и так известна из постановки задачи.

В параграфе 2.2 ставится и исследуется задача, соответствующая поэтапному и послойному зондированию неизвестной среды. В качестве исходных данных берутся интегралы по энергии от плотности выходящего потока, измеренной на части границы области G, содержащийся в сечении трёхмерной среды.

Для решения этой задачи применяются похожие преобразования, как и при решении обратной задачи из главы 2, §1. Многие выкладки и обозначения носят похожий характер. Однако решить поставленную задачу, используя §1 главы 2, не предоставляется возможным. Имеются отличия, из-за которых необходимо решать задачу с самого начала и проводить все рассуждения заново.

Второй параграф состоит из четырёх пунктов. **В пункте 2.2.1** приводится постановка задачи, вводятся предположения и ограничения на среду, в которой протекает процесс.

Пусть $\mathcal{P}$ — плоскость в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$. Без ограничения общности будем полагать, что $\mathcal{P} = \{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{E}^3 : r_3 = const\}$. Обозначим $\mathcal{D} = G \cap \mathcal{P}$ и предположим, что $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Так как G — выпуклая ограниченная область, то $\mathcal{D}$ также выпуклая ограниченная область в плоскости $\mathcal{P}$. Будем считать, что каждое непустое пересечение $G_i \cap \mathcal{P}$ состоит из конечного числа областей. Множество всех таких областей обозначим $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_\kappa$. Предположим, что $\kappa \geq 2$ и выполнены условия:

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{i=1}^{\kappa} \overline{\mathcal{D}_i},\ \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \varnothing,\ \text{при}\, i \neq j.$$

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ объединение всех $\mathcal{D}_i$:

$$\mathcal{D}_0 = \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathcal{D}_i,\ \kappa < \infty,\ \ \overline{\mathcal{D}}_0 = \overline{G \cap \mathcal{P}}.$$

Пусть $\mathcal{P}^*$— плоскость, параллельная $\mathcal{P}$ и содержащая начало координат, $\Omega^* = \Omega \cap \mathcal{P}^*$.

Рассмотрим следующую обратную задачу, соответствующую многократному облучению среды G в случае, когда измерение выходящего потока происходит послойно, т.е. только в плоскости.

Задача. *Найти $\partial\mathcal{D}_0$ — границу множества $\mathcal{D}_0$ из уравнений*

$$\omega \cdot \nabla_r f_q(r, \omega, E) + \mu(r, E) f_q(r, \omega, E) = J(r, \omega, E), \tag{8}$$

и краевых условий

$$f_q(\xi, \omega, E) = h_q(\xi, \omega, E), \tag{9}$$

$$(\xi,\omega,E)=(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E),\ (r,\omega,E)\in\mathcal{D}_0\times\Omega^*\times I_0,$$

$$\int\limits_{E_1}^{E_2} f_q(\eta,\omega,E)dE=H_q(\eta,\omega),\ [E_1,E_2]\subset[E_{min},E_{max}], \tag{10}$$

$$(\eta,\omega)=(r+d(r,\omega)\omega,\omega),\ (r,\omega)\in\mathcal{D}_0\times\Omega^*,$$

где известными являются функции $H_q(\eta,\omega),\ q=1,\ldots,K.$

В задаче ставится вопрос о нахождении множеств $\partial\mathcal{D}_i,\ i=1,\ldots,\kappa$, на которых функции $\mu(r,E)$ и $J(r,\omega,E)$ претерпевают разрыв первого рода по переменной r. Эти линии являются существенной характеристикой строения неизвестной среды.

Здесь измерение плотности выходящего потока производится в плоскости, в этом случае в постановке задачи нам даны функции $H_q(\eta,\omega)$, зависящие только от двух независимых переменных, вместо четырёх.

Для упрощения обозначений введем функции

$$\widetilde{H}_q(r,\omega)=H_q(r+d(r,\omega)\omega,\omega)=H_q(\eta,\omega),\quad \text{где}\quad \eta=r+d(r,\omega)\omega,\ \ \omega\in\Omega^*,$$

$$\widetilde{h}_q(r,\omega,E)=h_q(r-d(r,-\omega)\omega,\omega,E)=h_q(\xi,\omega,E),$$

$$\xi=r-d(r,-\omega)\omega,\ \ \omega\in\Omega^*,\ \ q=1,\ldots,K.$$

Будем предполагать, что $\widetilde{h}_q(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(\mathcal{D}_0\times\Omega^*\times I_0)$, $q=1,\ldots,K$, и, кроме того, их частные производные по r_m, $m=1,2$, непрерывны в $\mathcal{D}_0\times\Omega^*\times I_0$ и могут быть неограниченными только при r, близких к $\partial\mathcal{D}$.

На функции μ и J введём следующие ограничения:
1) $\mu(r,E)\in\mathbf{D}(\mathcal{D}_0\times I_0),\ J(r,\omega,E)\in\mathbf{D}(\mathcal{D}_0\times\Omega^*\times I_0)$,
2) $\frac{\partial}{\partial r_j}\mu(r,E),\ \frac{\partial}{\partial r_j}J(r,\omega,E),\ \frac{\partial^2}{\partial r_k\partial r_j}\mu(r,E),\ \frac{\partial^2}{\partial r_k\partial r_j}J(r,\omega,E)$ равномерно непрерывны в $G_i,\ j,k=1,2,\ i=1,\ldots,p.$

Считаем, что граница $\partial\mathcal{D}_i$, $i=1,\ldots,\kappa$, состоит из конечного числа гладких кривых класса $\mathcal{C}^2$. Предположим, что контактные точки образуют множество, плотное в $\partial\mathcal{D}_0\backslash\partial\mathcal{D}$.

В целом $\partial\mathcal{D}_i$ для любого i считается липшицевой.

В пункте 2.2.2 доказывается вспомогательная лемма.

Введём обозначение $F_q(r,\omega,E) = f_q(r+d(r,\omega)\omega,\omega,E) = f_q(\eta,\omega,E)$, $(r,\omega,E) \in \mathcal{D}_0 \times \Omega^* \times I_0$, $\eta = r + d(r,\omega)\omega$, $q = 1,\ldots,K$.

Будем исследовать функцию $Ind^*(r)$:

$$Ind^*(r) = \sum_{q=1}^{K} \left| \nabla \int\limits_{\Omega^*} \int\limits_{E_1}^{E_2} F_q(r,\omega,E)\beta_q(r,\omega)dEd\omega \right|,$$

где $\beta_q(r,\omega)$ — вспомогательные функции класса $\mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{D}} \times \Omega^*)$.

Функция $Ind^*(r)$ также представима в виде

$$Ind^*(r) = \sum_{q=1}^{K} \left| \nabla \int\limits_{\Omega^*} \beta_q(r,\omega)\widetilde{H}_q(r,\omega)d\omega \right|.$$

В пункте 2.2.3 доказываются основные утверждения, из которых следует основная теорема этого параграфа.

Введём следующие обозначения для $q = 1,\ldots,K$:

$$mv_q(r,\omega,E) = \beta_q(r,\omega)\exp\left(-\int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu(r+\alpha\omega,E)d\alpha\right)\times$$

$$\times\left\{-[\mu(z,E)]_{l,j} f_q(r,\omega,E) + [J(z,\omega,E)]_{l,j}\right\},$$

$$m_q^0\left(r,\frac{y-r}{|y-r|},E\right) = mv_q\left(r,\frac{r-y}{|r-y|},E\right) + mv_q\left(r,\frac{y-r}{|y-r|},E\right),$$

$$\mathcal{M}_q(r,t^1,t^2) = \int\limits_{E_1}^{E_2}\left\{m_q^0\left(r,\frac{y(t^1)-r}{|y(t^1)-r|},E\right) + m_q^0\left(r,\frac{y(t^2)-r}{|y(t^2)-r|},E\right)\right\}dE.$$

Теорема 2.2.1. *Для любой контактной точки z, $z \in \partial\mathcal{D}_l \cap \partial\mathcal{D}_j$, и для $r = z+\tau n_l$, $0 < |\tau| \le \delta$ (δ — достаточно малое число), функция $Ind^*(r)$ представима в виде:*

$$Ind^*(r) = \widetilde{\mathcal{M}}(r)\left|\ln(\rho(r,\partial\mathcal{D}_0))\right| + O(1),$$

здесь

$$\widetilde{\mathcal{M}}(r) = \sum_{q=1}^{K} \left| \mathcal{M}_q(r, t_q^1(r), t_q^2(r)) \right|,$$

$O(1)-$ *функция, непрерывная и ограниченная при* $0 < |\tau| < \delta$, $\rho(r, \partial\mathcal{D}_0)$ — *расстояние от точки* r *до поверхности* $\mathcal{D}_0$.

Следствием этого является

Теорема 2.2.2. *Функция* $Ind^*(r)$ *является непрерывной и ограниченной на всяком компакте в* $\mathcal{D}_0$. *Пусть* z — *произвольная контактная точка. Рассмотрим точки* $r = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \leq \delta$, *где* $n(z)$ — *какой-либо вектор единичной нормали к* $\mathcal{D}_0$ *в точке* z, δ *достаточно малое положительное число. Если выполнено неравенство* $\widetilde{\mathcal{M}}(r) \geq const > 0$, *то* $Ind^*(r)$ *стремится к бесконечности при* $r \to z$, *т.е. при* $\tau \to 0$.

В пункте 2.2.4 доказывается теорема единственности решения обратной задачи и делаются замечания по поводу условия, при котором задача может быть решена.

Пусть имеются две системы подобластей $\{\mathcal{D}_j^{(k)}\}$, $j = 1, \ldots, \kappa$, функции $\mu^{(k)}(r, E)$, $J^{(k)}(r, \omega, E)$ и $\widetilde{h}_q^{(k)}(r, \omega, E)$, $k = 1, 2$, $q = 1, \ldots, K$, по ним вычислим $\widetilde{H}_q^{(k)}(r, \omega)$, $q = 1, \ldots, K$, и $\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}(r)$, $k = 1, 2$.

Теорема 2.2.3 (теорема единственности). *Пусть функции* $\widetilde{H}_q^{(1)}(r, \omega)$ *и* $\widetilde{H}_q^{(2)}(r, \omega)$ *совпадают при всех* $(r, \omega) \in \mathcal{D} \times \Omega^*$, $q = 1, \ldots, K$, *и выполняются неравенства* $\widetilde{\mathcal{M}}^{(k)}(r) \geq const > 0$ *для всех контактных точек* z *линий* $\partial\mathcal{D}_0^{(1)}$ *и* $\partial\mathcal{D}_0^{(2)}$, $r = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \leq \delta$, *тогда* $\partial\mathcal{D}_0^{(1)} = \partial\mathcal{D}_0^{(2)}$.

Автор выражает благодарность Аниконову Дмитрию Сергеевичу за научное руководство и постановку задачи.

Работы автора по теме диссертации

[1] ***Балакина Е.Ю.* Неклассическая краевая задача для уравнения переноса // Дифференциальные уравнения, 2009. Т. 45, № 9. С. 1219-1228.**

[2] ***Аниконов Д.С., Балакина Е.Ю.* Полихроматический индикатор неоднородности неизвестной среды для задачи рентгеновской томографии // Сибирский математический журнал, 2012. Т. 53, № 4. С. 200–221.**

[3] *Балакина Е.Ю.* Применение однoракурсного индикатора неоднородности в одной задаче томографии // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2008. С. 58.

[4] *Балакина Е.Ю.* Неклассическая краевая задача для уравнения переноса// Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2010. Т. 40. С. 59-61.

[5] *Балакина Е.Ю.* Индикатор неоднородности неизвестной среды // Международная научная конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование». Тезисы докладов. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. С. 106-107.

[6] *Балакина Е.Ю.* Полихроматический индикатор неоднородности неизвестной среды для задачи рентгеновской томографии// Международная научная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики». Тезисы докладов. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. С. 120.

Балакина Екатерина Юрьевна

Индикатор неоднородности среды для задачи томографии в полихроматическом случае

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать . .12.		Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1.3.	Уч.-изд. л. 1.3.	Тираж 100 экз.
Заказ № .		

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул Пирогова, 2