УДК 517.983 : 519.642

Е. Ю. Деревцов, А. П. Полякова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ 2-ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ*

Рассматривается задача интегральной геометрии, состоящая в определении заданного в единичном круге симметричного 2-тензорного поля по его известным лучевым преобразованиям. Построены сингулярные разложения операторов продольного, поперечного и смешанного лучевых преобразований, представляющих собой интегралы от проекций поля на прямую, вдоль которой они вычисляются. Результаты получены с существенным использованием теоремы разложения тензорных полей и их представления через потенциалы. Полученные сингулярные разложения конструктивны и, в сущности, являются основой для алгоритма восстановления тензорного поля по его известным лучевым преобразованиям.

Ключевые слова: тензорное поле, интегральная геометрия, тензорная томография, лучевое преобразование, сингулярное разложение, ортогональные многочлены.

Введение

Развитие математических инструментов, с одной стороны, и систем сбора и обработки данных — с другой, привели к новым томографическим постановкам и математическим моделям, таким как термо- и диффузионная, векторная и тензорная томография и многим другим. Так, векторная и тензорная томография возникли с целью определения нескалярных характеристик сред, таких как, например, скорости течения жидкости или газа, анизотропные свойства твердых тел и земных пород. Если по отношению к векторным полям можно смело использовать термин «векторная томография», так как разработаны методы измерений соответствующих томографических данных, то по отношению к тензорным полям термин «тензорная томография» можно применять лишь к ограниченному числу задач, так как физические методы измерений необходимых данных для широкого круга задач отсутствуют или недостаточно развиты. По этой причине корректнее говорить о «задаче интегральной геометрии тензорных полей», в которой исходные данные продиктованы постановкой задачи, но не с физической возможностью их измерений.

Рассматривается задача интегральной геометрии симметричных 2-тензорных полей, состоящая в определении поля или его частей по известным лучевым преобразованиям. Иными словами, требуется обратить операторы продольного, поперечного или смешанного лучевых преобразований, примененных к тензорному полю, т. е. требуется решить операторное уравнение вида $Af = g$, где A — линейный ограниченный (в нашем случае

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РАН (проект ОМН РАН № 1.3.1), РФФИ (проект 11-07-00447), СО РАН (проект совместных фундаментальных исследований СО и УрО РАН № 2012-32).

интегральный) оператор, f — неизвестное тензорное поле, а g — известная правая часть, являющаяся значениями лучевых преобразований и исходными данными в поставленной задаче.

Для обращения операторов часто используется метод разложения по сингулярным числам (метод SVD, singular value decomposition). Суть метода заключается в том, что оператор A представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа. В скалярном и векторном случаях задача решена ранее, построены разложения как оператора Радона [1–5], так и некоторых операторов лучевых преобразований векторных полей [6; 7]. В работе [8] построено сингулярное разложение оператора продольного лучевого преобразования веерного типа, действующего на соленоидальные тензорные поля. Решение задачи в векторном (см. [7]) и тензорном случаях, предлагаемое в данной работе, основано на возможности представления соответствующих полей с использованием потенциалов, которые строятся в виде произведения гармонических функций и классических ортогональных полиномов.

1. Структура, свойства и лучевые преобразования симметричных 2-тензорных полей

Введем обозначения $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ для единичного круга, $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ для единичной окружности и $Z = \{(\xi, s) \subset \mathbb{R}^3 \mid \xi \in \partial B, s \in (-1, 1)\}$, $Z = \partial B \times (-1, 1)$ для цилиндра. Единичные векторы $\xi \in \partial B, \xi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\eta := \xi^{\perp} / \in \partial B$, $\eta = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ и вещественное число $s \in \mathbb{R}$ задают прямую $L_{\xi,s}$ в форме либо нормального уравнения $x\cos\alpha + y\sin\alpha - s = 0$, либо параметрических уравнений $x = s\cos\alpha - t\sin\alpha,\ y = s\sin\alpha + t\cos\alpha$.

Функции (скалярные поля) обозначаем через $f(x), g(x), \ldots$ За потенциалами, которые задают тензорные поля, закрепляем обозначения $\varphi(x), \psi(x), \chi(x), \ldots$ Считаем их определенными в $B \subset \mathbb{R}^2$; при этом обозначения $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2)$,… удобны для постановки задачи и формулировок необходимых свойств тензорных полей, но иногда мы будем использовать и обозначения (x, y) для координат точек на плоскости. Множество симметричных m-тензорных полей $w(x) = (w_{i_1\ldots i_m}(x))$, $u(x) = (u_{i_1\ldots i_m}(x))$, $v(x) = (v_{i_1\ldots i_m}(x))$, …, $i_1, \ldots, i_m = 1, 2$, определенных в B, обозначается $S^m(B)$. Скалярное произведение в $S^m(B)$ вводится формулой

$$\langle u(x), v(x)\rangle = u_{i_1\ldots i_m}(x) v^{i_1\ldots i_m}(x), \tag{1}$$

где по повторяющимся сверху и снизу одноименным индексам подразумевается суммирование от 1 до 2. Напомним, что в евклидовом пространстве с заданной в нем декартовой прямоугольной системой координат различия между контравариантными и ковариантными компонентами нет. В дальнейшем мы будем пользоваться ковариантными компонентами.

Напомним обозначения для функциональных пространств. Прежде всего, это пространство интегрируемых с квадратом функций $L_2(B)$ или симметричных m-тензорных полей $L_2(S^m(B))$, а также весовое L_2-пространство $L_2(Z,\rho)$, где $\rho(s)>0$ задана на цилиндре Z. Симметричные m-тензорные поля u,v являются элементами из $L_2(S^m(B))$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{L_2(S^m(B))} = \int_B \langle u(x),v(x)\rangle\,dx. \tag{2}$$

Пространства дифференцируемых, с конечным порядком k, симметричных m-тензорных полей обозначаем через $C^k(S^m(B))$, $C_0^k(S^m(B))$; пространства Соболева — через $H^k(S^m(B))$, $H_0^k(S^m(B))$, $H^k(Z)$, $m=0,1,2$; $k=0,1,\ldots$

1.1. *Дифференциальные операторы*

Наряду с известными операторами градиента $\mathrm{d}: H^k(B)\to H^{k-1}(S^1(B))$ и дивергенции $\delta: H^k(S^1(B))\to H^{k-1}(B)$,

$$\mathrm{d}\varphi = \big((\mathrm{d}\varphi)_1,(\mathrm{d}\varphi)_2\big) = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big),\quad (\delta u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

определим операторы *ортогонального градиента* $\mathrm{d}^\perp: H^k(B)\to H^{k-1}(S^1(B))$ и *ортогональной дивергенции* $\delta^\perp: H^k(S^1(B))\to H^{k-1}(B)$,

$$\mathrm{d}^\perp\varphi = \big((\mathrm{d}^\perp\varphi)_1,(\mathrm{d}^\perp\varphi)_2\big) = \Big(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big),\quad \big(\delta^\perp u\big) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Напомним, что векторное поле $u\in H^k(S^1(B))$ потенциально, если существует функция $\varphi\in H^{k+1}(B)$ (потенциал) такая, что $u=\mathrm{d}\varphi$. Поле $v\in H^k(S^1(B))$ *соленоидально*, если $\delta v\in H^{k-1}(B)=0$. Для всякого соленоидального векторного поля v, также существует потенциал $\psi\in H^{k+1}(B)$ такой, что $\mathrm{d}^\perp\psi\in H^k(S^1(B))$.

Определенные выше операторы естественным образом обобщаются. Так, операторы *внутреннего дифференцирования* d и *внутреннего $\perp$-дифференцирования* $\mathrm{d}^\perp$ являются композициями операторов ковариантного дифференцирования и симметризации, $\mathrm{d},\mathrm{d}^\perp$: $H^k(S^1(B))\to H^{k-1}(S^2(B))$, действуют на векторные поля по правилам

$$u_{ij} := (\mathrm{d}w)_{ij} = \frac12\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x^j}+\frac{\partial w_j}{\partial x^i}\Big),\quad v_{ij} := (\mathrm{d}^\perp w)_{ij} = \frac12\Big((-1)^j\frac{\partial w_i}{\partial x^{3-j}}+(-1)^i\frac{\partial w_j}{\partial x^{3-i}}\Big),$$

и в результате дают симметричные 2-тензорные поля, где $w\in H^k(S^1(B))$, $u,v\in H^{k-1}(S^2(B))$. Операторы *дивергенции* δ и *$\perp$-дивергенции* $\delta^\perp$, $\delta,\delta^\perp$: $H^k(S^2(B))\to$ $\to H^{k-1}(S^1(B))$, действуют на симметричное 2-тензорное поле w,

$$u_i := (\delta w)_i = \frac{\partial w_{ij}}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial w_{i1}}{\partial x^1}+\frac{\partial w_{i2}}{\partial x^2},\quad v_i := (\delta^\perp w)_i = -\frac{\partial w_{i1}}{\partial x^2}+\frac{\partial w_{i2}}{\partial x^1},$$

и дают векторные поля u, v.

С использованием потенциалов из пространства H_0^k, $k\geq 2$, и операторов d, $\mathrm{d}^\perp$ можно построить три типа симметричных 2-тензорных полей [12].

Потенциальное симметричное 2-тензорное поле $u\in H^{k-2}(S^2(B))$,

$$u_{ij} := \mathrm{d}^2\psi = \frac12\Big(\frac{\partial(\mathrm{d}\psi)_i}{\partial x^j}+\frac{\partial(\mathrm{d}\psi)_j}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^j}, \tag{3}$$

задается потенциалом $\psi\in H_0^k(B)$. Потенциальное симметричное 2-тензорное поле $\widetilde{u}\in$ $\in H^{k-2}(S^2(B))$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
\widetilde{u}_{ij} \;:=\; \mathrm{d}(\mathrm{d}^{\perp}\chi) = \mathrm{d}^{\perp}(\mathrm{d}\chi) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial(\mathrm{d}^{\perp}\chi)_i}{\partial x^j} + \frac{\partial(\mathrm{d}^{\perp}\chi)_j}{\partial x^i}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big((-1)^j\frac{\partial(\mathrm{d}\chi)_i}{\partial x^{3-j}} + (-1)^i\frac{\partial(\mathrm{d}\chi)_j}{\partial x^{3-i}}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big((-1)^i\frac{\partial^2\chi}{\partial x^{3-i}\partial x^j} + (-1)^j\frac{\partial^2\chi}{\partial x^{3-j}\partial x^i}\Big)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

и определяется потенциалом $\chi \in H_0^k(B)$. Соленоидальное симметричное 2-тензорное поле $v \in H^{k-2}(S^2(B))$,

$$
v_{ij} := (\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi = \frac{1}{2}\Big((-1)^j\frac{\partial(\mathrm{d}^{\perp}\varphi)_i}{\partial x^{3-j}} + (-1)^i\frac{\partial(\mathrm{d}^{\perp}\varphi)_j}{\partial x^{3-i}}\Big) = (-1)^{i+j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{3-i}\partial x^{3-j}}\,, \tag{5}
$$

задается потенциалом $\varphi \in H_0^k(B)$.

Следующие связи между скалярными произведениями (1) симметричных 2-тензорных полей, определенных (3)–(5), легко проверяются непосредственно (через Δ обозначается оператор Лапласа),

$$
\langle \mathrm{d}^2\varphi\,,\,\mathrm{d}^2\psi\rangle = \langle(\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi\,,\,(\mathrm{d}^{\perp})^2\psi\rangle; \quad \langle \mathrm{d}^2\varphi\,,\,(\mathrm{d}^{\perp})^2\psi\rangle = \langle(\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi\,,\,\mathrm{d}^2\psi\rangle;
$$

$$
\langle \mathrm{d}^2\varphi\,,\,\mathrm{d}^2\psi\rangle = \Delta\varphi\Delta\psi - \langle \mathrm{d}^2\varphi\,,\,(\mathrm{d}^{\perp})^2\psi\rangle;
$$

$$
\langle(\mathrm{d}^{\perp}\mathrm{d})\varphi\,,\,(\mathrm{d}^{\perp}\mathrm{d})\psi\rangle = \frac{1}{2}\Delta\varphi\Delta\psi - \langle \mathrm{d}^2\varphi\,,\,(\mathrm{d}^{\perp})^2\psi\rangle.
$$

Теоремы разложения на соленоидальную и потенциальную части играют важную роль в исследованиях тензорных полей. Общая теорема разложения симметричного m-тензорного поля, определенного на римановом многообразии размерностью n, доказана в [13]. Мы приводим ее в терминах наших постановок.

Теорема 1. *Для каждого поля $w \in H^{k-m}(S^m(B))$, $k \geq m$, существуют потенциальное $u \in H_0^{k-m+1}(S^{m-1}(B))$ и соленоидальное $v \in H^{k-m}(S^m(B))$ симметричные m-тензорные поля такие, что*

$$
w = v + \mathrm{d}u, \quad \delta v = 0.
$$

Это разложение единственно.

Используя эту теорему при $m = 1, 2$, теорему о разложении векторного поля [9; 10] и представление соленоидального поля через потенциал [11], получаем один из вариантов теоремы разложения симметричного 2-тензорного поля (см. также [12]), приведенной ниже. Ортогональность соответствующих подпространств проверяется с помощью теоремы Гаусса–Остроградского.

Теорема 2. *Для каждого поля $w \in H^{k-2}(S^2(B))$, $k \geq 2$, существует единственное разложение на потенциальное $u, \widetilde{u} \in H^{k-2}(S^2(B))$ и соленоидальное $v \in H^{k-2}(S^2(B))$ симметричные 2-тензорные поля, образуемые потенциалами $\varphi, \chi, \psi \in H_0^k(B)$,*

$$
w = v + \widetilde{u} + u \equiv (\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi + (\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})\chi + \mathrm{d}^2\psi, \quad \delta v = 0, \quad \delta^{\perp}u = 0. \tag{6}
$$

Разложение (6) ортогонально в $L_2(S^2(B))$ в смысле скалярного произведения (2). Иными словами,

$$
\mathrm{d}^2\psi\,,\,(\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi \;= 0; \quad \mathrm{d}^2\psi\,,\,(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})\chi \;= 0; \quad (\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi\,,\,(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})\chi \;= 0.
$$

1.2. *Преобразование Радона и лучевые преобразования*

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задано скалярное поле (функция) $f \in L_2(B)$, $f : B \to \mathbb{R}$. Преобразование Радона $\mathcal{R} : L_2(B) \to L_2(Z)$ функции f задается формулой

$$(\mathcal{R}f)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\big(x(s,t,\alpha), y(s,t,\alpha)\big)\, dt,$$

где, напомним, $\xi = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — нормальный вектор прямой $L_{\xi,s}$, и

$$x(s,t,\alpha) = s\cos\alpha - t\sin\alpha, \quad y(s,t,\alpha) = s\sin\alpha + t\cos\alpha.$$

Для направляющего вектора прямой $L_{\xi,s}$ используем обозначение

$$\eta := \xi^{\perp} = (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Существует три типа лучевых преобразований симметричных 2-тензорных полей. Это продольное лучевое преобразование симметричного 2-тензорного поля $w = (w_{ij})$, $w \in H_k(S^2(B))$, которое определяется формулой

$$(\mathcal{P}w)(\eta, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\langle w(s\xi + t\eta), \eta^2 \big\rangle\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{ij}\eta^i\eta^j\, dt, \tag{7}$$

поперечное лучевое преобразование поля w, которое задается формулой

$$(\mathcal{P}^{\perp}w)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\langle w(s\xi + t\eta), \xi^2 \big\rangle\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{ij}\xi^i\xi^j\, dt, \tag{8}$$

и смешанное лучевое преобразование поля w, определяемое формулой

$$(\mathcal{P}^{\dagger}w)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big\langle w(s\xi + t\eta), \eta\xi \big\rangle\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{ij}\eta^i\xi^j\, dt. \tag{9}$$

Следующее предложение устанавливает связи операторов, лучевых преобразований симметричных 2-тензорных полей и преобразования Радона их потенциалов. Соотношения проверяются непосредственно, для чего необходимо воспользоваться определениями лучевых преобразований симметричных 2-тензорных полей (3)–(5) и свойствами преобразования Радона, см. [12; 14].

Предложение 1. *Пусть задано симметричное 2-тензорное поле w, $w = v + \widetilde{u} + u$, где $v = (\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi$, $\widetilde{u} = (\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})\chi$, $u = \mathrm{d}^2\psi$, и потенциалы φ, χ, ψ обращаются в 0 на ∂B вместе со своими первыми производными. Тогда*

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}\widetilde{u})(\eta, s) = (\mathcal{P}u)(\eta, s) &= 0, && (\mathcal{P}^{\perp}v)(\xi, s) = (\mathcal{P}^{\perp}\widetilde{u})(\xi, s) = 0, \\ (\mathcal{P}^{\dagger}v)(\xi, s) = (\mathcal{P}u)(\xi, s) &= 0, && \mathcal{P}w = \mathcal{P}v, \\ \mathcal{P}^{\dagger}w &= \mathcal{P}^{\dagger}\widetilde{u}, && \mathcal{P}^{\perp}w = \mathcal{P}^{\perp}u. \end{aligned}$$

Лучевые преобразования симметричных 2-тензорных полей u, v, $\widetilde{u}$ связаны с их потенциалами ψ, φ, χ соотношениями

$$\big(\mathcal{P}^{\perp}w\big)(\xi, s) = \big(\mathcal{P}^{\perp}u\big)(\xi, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{R}\psi(\xi, s) = \mathcal{R}\big(\Delta\psi\big),$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}w\ (\eta, s) = \ \mathcal{P}v\ (\eta, s) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{R}\varphi(\xi, s) = \mathcal{R}\ \Delta\varphi\ , \\
\mathcal{P}^{\dagger}\not{w}\ (\xi, s) = \ \mathcal{P}^{\dagger}\not{\tilde{u}}\ (\xi, s) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{R}\chi(\xi, s) = \frac{1}{2}\mathcal{R}\ \Delta\chi\ .
\end{aligned}
$$

В частности, для $u = \mathrm{d}^2\varphi$, $v = (\mathrm{d}^{\perp})^2\varphi$, $\widetilde{u} = (\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})\varphi$

$$
\mathcal{P}^{\perp}\not{u}\ \ = \ \ \mathcal{P}v\ \ = 2\ \mathcal{P}^{\dagger}\not{\tilde{u}}\ \ = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{R}\varphi = \mathcal{R}\ \Delta\varphi\ .
$$

Соотношения первой группы описывают ядра и области значений операторов лучевых преобразований. Следующие соотношения связывают образы лучевых преобразований между собой и с образами преобразований Радона их потенциалов. Наконец, последнее свойство связывает образы лучевых преобразований между собой и образами преобразования Радона их потенциала при условии, что они обладают одним и тем же потенциалом.

1.3. *Метод сингулярного разложения*

Одним из методов решения операторных уравнений, в частности интегральных уравнений первого рода вида (7)–(9), является *метод сингулярного разложения*, краткое описание которого приводится ниже.

Пусть H, K — гильбертовы пространства, и A — линейный ограниченный оператор, действующий из H в K. Рассматривается операторное уравнение

$$
Af\ =\ g. \tag{10}
$$

Ставится задача по известной (как правило, с ошибкой) правой части $g \in K$ найти элемент $f \in H$, удовлетворяющий уравнению (10). Для решения некорректно поставленных задач типа (10) строится обобщенное решение Мура–Пенроуза, обозначаемое A^+g и минимизирующее норму $\|Af - g\|_K$. Линейный оператор $A^+ : K \to H$, определенный на $ImA + (ImA)^{\perp}$, называется *обобщенным обратным оператором Мура–Пенроуза*. В общем случае, когда область значений A является бесконечномерным подпространством, оператор A^+ не является непрерывным. Поэтому строится семейство $(T_\gamma)_{\gamma>0}$ определенных на всем пространстве K непрерывных линейных операторов $T_\gamma : K \to H$, для которого

$$
\lim_{\gamma\to 0} T_\gamma g = A^+ g
$$

на всей области определения оператора A^+. Очевидно, если оператор A^+ не ограничен, то $\|T_\gamma\| \to \infty$ при $\gamma \to 0$. Регуляризирующее семейство операторов позволяет найти приближенное решение задачи (10) в следующем смысле. Пусть $g^\varepsilon \in K$ аппроксимирует g, т. е. $\|g^\varepsilon - g\|_K \le \varepsilon$. Пусть функция $\gamma(\varepsilon)$ такова, что при $\varepsilon \to 0$

$$
\text{(i)}\ \gamma(\varepsilon) \to 0; \quad \text{(ii)}\ \|T_{\gamma(\varepsilon)}\|\varepsilon \to 0.
$$

Тогда (см. [15]) при $\varepsilon \to 0$

$$
\|T_{\gamma(\varepsilon)}g^\varepsilon - A^+g\|_H \to 0\,.
$$

Таким образом, элемент $T_{\gamma(\varepsilon)}g^\varepsilon$ близок к A^+g, если близки элементы g^ε и g.

Для операторов, допускающих SVD-разложение, одним из методов регуляризации является усеченное сингулярное разложение. *Сингулярное разложение* оператора A состоит в его представлении в виде ряда

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k)_H g_k, \tag{11}$$

где (f_k), (g_k) суть нормированные ортогональные базисы в пространствах H и K, а величины $\sigma_k > 0$ — *сингулярные числа* оператора A. Будем считать последовательность $\{\sigma_k\}$ ограниченной. Тогда A представляет собой непрерывный линейный оператор из H в K с сопряженным оператором

$$A^* g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (g, g_k)_K f_k\,.$$

Операторы

$$A^*Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (f, f_k)_H f_k, \quad AA^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (g, g_k)_K g_k$$

являются самосопряженными в H и K соответственно. Спектр оператора A^*A содержит собственные значения σ_k^2, которым соответствуют собственные элементы f_k и, возможно, собственное значение 0, кратность которого может быть бесконечной. То же самое справедливо для оператора AA^* с собственными элементами g_k. При этом собственные элементы связаны соотношениями

$$A^* g_k = \sigma_k f_k, \;\; Af_k = \sigma_k g_k. \tag{12}$$

Обратно, если (f_k), (g_k) — ортонормированные системы собственных элементов операторов A^*A и AA^*, удовлетворяющие соотношениям (12), то оператор A допускает представление (11). В частности, компактные операторы всегда допускают сингулярное разложение [16]. Следующая теорема приводится без доказательства, которое может быть найдено, например, в [15].

Теорема 3. *Если оператор A допускает сингулярное разложение* (11), *то*

$$A^+ g = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} (g, g_k)_K f_k\,.$$

Согласно этой теореме, оператор A^+ не ограничен в том случае, когда $\sigma_{k_j} \to 0$ для некоторой последовательности $k_j \to \infty$. Тогда оператор A^+ можно регуляризовать с помощью *усеченного сингулярного разложения*,

$$T_\gamma g = \sum_{k \le 1/\gamma} \sigma_k^{-1} (g, g_k)_K f_k.$$

Из теоремы 3 следует, что $T_\gamma g \to A^+ g$ при $\gamma \to 0$ и

$$\|T_\gamma\| \le \sup_{k \le 1/\gamma} \sigma_k^{-1}.$$

В задачах томографии метод сингулярного разложения позволяет также сконструировать приближенное обращение, в котором используется априори вычисленное ядро реконструкции, см. [17; 18]. Кроме того, описанный метод существенно используется при анализе задач томографии, в которых имеются ограничения в данных [5], и очень полезен при прямом восстановлении по преобразованию Радона особенностей решения, см. [19].

2. Ортогональные базисы потенциальных и соленоидальных симметричных 2-тензорных полей

Построение сингулярных разложений операторов поперечного $\mathcal{P}^{\perp}$, продольного $\mathcal{P}$ и смешанного $\mathcal{P}^{\dagger/}$лучевых преобразований, действующих из пространства $L_2(S^2(B))$ в $L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})$, осуществляется по той же схеме, что и для лучевых преобразований, действующих на векторные поля [7].

Ядра лучевых преобразований известны (предложение 1), поэтому оператор поперечного лучевого преобразования $\mathcal{P}^{\perp/}$достаточно рассматривать лишь на множестве потенциальных тензорных полей вида $\mathrm{d}^2\psi$, оператор продольного лучевого преобразования $\mathcal{P}$ — на соленоидальных тензорных полях, а смешанное лучевое преобразование $\mathcal{P}^{\dagger/}$— на потенциальных полях вида $(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})$. Напомним, что поля обладают носителем, лежащем в единичном круге B, а образующие их потенциалы обращаются вместе со своими первыми производными в 0 на границе ∂B.

Базисные тензорные поля в исходном пространстве $L_2(S^2(B))$ строим на основе потенциалов, т. е. выбираем определенную систему функций в пространстве потенциалов $H_0^2(B)$ и далее путем применения дифференциальных операторов d^2 и $(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})$ (для построения потенциальных полей) или $(\mathrm{d}^{\perp})^2$ (для построения соленоидальных полей) получаем ортогональные базисы подпространств потенциальных и соленоидальных тензорных полей в пространстве $L_2(S^2(B))$.

Исходная система потенциалов выбирается следующим образом:

$$\Phi_{k,n}^{\cos,\sin}(x,y)=(1-x^2-y^2)^2H_k^{\cos,\sin}(x,y)P_n^{(k+3,k+1)}(x^2+y^2),\ k,n=0,1,2,\dots$$

или, в полярной системе координат,

$$\left\{\begin{matrix}\tilde{\Phi}^{\cos}\\ \tilde{\Phi}^{\sin}\end{matrix}\right\}_{k,n}(r,\varphi)=(1-r^2)^2r^k\left\{\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix}\right\}P_n^{(k+3,k+1)}(r^2).$$

Применяя к потенциалам оператор d^2, получим семейство потенциальных тензорных полей

$$(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos,\sin})^{pot}(x,y)\overset{def}{=}\mathrm{d}^2\Phi_{k,n}^{\cos,\sin}(x,y); \tag{13}$$

оператор $(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})$ приводит к семейству потенциальных полей другого типа

$$(\widehat{\mathbb{T}}_{k,n}^{\cos,\sin})^{pot}(x,y)\overset{def}{=}(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})\Phi_{k,n}^{\cos,\sin}(x,y); \tag{14}$$

а применение оператора $(\mathrm{d}^{\perp})^2$ дает семейство соленоидальных тензорных полей

$$(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos,\sin})^{sol}(x,y)\overset{def}{=}(\mathrm{d}^{\perp})^2\Phi_{k,n}^{\cos,\sin}(x,y). \tag{15}$$

Для построения сингулярного разложения операторов лучевых преобразований необходимо нормировать систему базисных тензорных полей. Исходя из определений потенциальных и соленоидальных полей, путем непосредственной проверки можно показать, что

$$\begin{aligned}\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2_{L_2(S^2(B))} &= \|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{sol}\|^2_{L_2(S^2(B))} &= 2\|(\widehat{\mathbb{T}}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2_{L_2(S^2(B))},\\ \|(\mathbb{T}^{\sin}_{k,n})^{pot}\|^2_{L_2(S^2(B))} &= \|(\mathbb{T}^{\sin}_{k,n})^{sol}\|^2_{L_2(S^2(B))} &= 2\|(\widehat{\mathbb{T}}^{\sin}_{k,n})^{pot}\|^2_{L_2(S^2(B))}.\end{aligned}$$

Ниже мы убедимся в том, что

$$\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2_{L_2(S^2(B))} = \|(\mathbb{T}^{\sin}_{k,n})^{pot}\|^2_{L_2(S^2(B))},$$

поэтому достаточно вычислить лишь одну из норм, например $\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2_{L_2(S^2(B))}$. Далее мы будем опускать индекс у знака нормы, если это не вызовет путаницы.

По определению,

$$\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2 = \iint\limits_B \left(\Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial y^2}\Big)^2\right) dx\,dy.$$

Переходя к полярной системе координат, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x^2} &= S\cos^2\varphi + R\sin^2\varphi + Q\sin 2\varphi,\\ \frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x\partial y} &= S\sin\varphi\cos\varphi - R\sin\varphi\cos\varphi - Q\cos 2\varphi,\\ \frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial y^2} &= S\sin^2\varphi + R\cos^2\varphi - Q\sin 2\varphi,\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$S = \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n}}{\partial r^2},\quad R = \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n}}{\partial\varphi^2},\quad Q = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n}}{\partial r\partial\varphi}.$$

Так как

$$\Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial y^2}\Big)^2 = S^2 + R^2 + 2Q^2,$$

то

$$\begin{aligned}\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2 &= \iint\limits_B \left(\Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial x\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2\Phi^{\cos}_{k,n}}{\partial y^2}\Big)^2\right) dx\,dy =\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(S^2 + R^2 + 2Q^2\right) r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(S^2 + R^2 + 2Q^2\right) dr^2\,d\varphi.\end{aligned}$$

До тех пор пока это не вызывает недоразумений, введем обозначение $P_n^{(k+3,k+1)}(r^2) = P_n$, подразумевая аргумент r^2 у функции P_n. Дифференцирование по аргументу, как обычно, будем обозначать через «штрих». Тогда $\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n}$ примет вид

$$\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n} = r^k(1-r^2)^2 P_n\cos k\varphi.$$

Подставляя последнее выражение в $S,\ R,\ Q$, получим

$$S = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(r^k(1-r^2)^2 P_n\Big)\cos k\varphi =: S_1\cos k\varphi,$$

$$
\begin{aligned}
R &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k(1-r^2)^2P_n\right) + \frac{1}{r^2}(-k^2)r^k(1-r^2)^2P_n\right)\cos k\varphi =: R_1\cos k\varphi,\\
Q &= \left(- kr^{k-2}(1-r^2)^2P_n + \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k(1-r^2)^2P_n\right)\right)\sin k\varphi =: Q_1\sin k\varphi,
\end{aligned}
$$

и, таким образом,

$$
\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((S_1)^2\cos^2 k\varphi + (R_1)^2\cos^2 k\varphi + 2(Q_1)^2\sin^2 k\varphi\right) dr^2\, d\varphi =
$$

$$
= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left((S_1)^2 + (R_1)^2 + 2(Q_1)^2\right) dr^2\,.
$$

Сформулируем полученный результат.

Лемма 1. *Пусть* $S_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^k(1-r^2)^2P_n\right)$,

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k(1-r^2)^2P_n\right) + \frac{1}{r^2}(-k^2)r^k(1-r^2)^2P_n,\\
Q_1 &= -kr^{k-2}(1-r^2)^2P_n + \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^k(1-r^2)^2P_n\right),
\end{aligned}
$$

тогда $\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{\mathrm{pot}}\|^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left((S_1)^2 + (R_1)^2 + 2(Q_1)^2\right) dr^2$.

Следствие 1. *Норма потенциального тензорного поля, построенного на основе потенциала вида* $\widetilde{\Phi}^{\sin}_{k,n}$, *совпадает с нормой тензорного поля, построенного через потенциал* $\widetilde{\Phi}^{\cos}_{k,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$
\|(\mathbb{T}^{\sin}_{k,n})^{pot}\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((S_1)^2\sin^2 k\varphi + (R_1)^2\sin^2 k\varphi + 2(Q_1)^2\cos^2 k\varphi\right) dr^2\, d\varphi =
$$

$$
= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left((S_1)^2 + (R_1)^2 + 2(Q_1)^2\right) dr^2 = \|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2. \quad \square
$$

Лемма 2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$
\int_0^1 r^{2k}(1-r^2)^2P_n\,P_n\,dr^2 = \|P_n\|^2, \qquad \int_0^1 r^{2k+2}(1-r^2)^3P_n'P_n'dr^2 = \|P_n'\|^2, \tag{17}
$$

$$
\int_0^1 r^{2k+4}(1-r^2)^4P_n''P_n''dr^2 = \|P_n''\|^2\,. \tag{18}
$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти формулы легко получить, используя следующие свойства полиномов Якоби:

$$
\begin{aligned}
\|P_n^{p,q}(t)\|^2 &= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-q}P_n^{p,q}(t)P_n^{p,q}(t)\,dt =\\
&= \frac{n!\Gamma(q)\Gamma(p-q+n+1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)(p+2n)\Gamma(p+n)}\,,
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$\frac{d}{dt}\left(P_n^{p,q}(t)\right) = -\frac{n(n+p)}{q} P_{n-1}^{p+2,q+1}(t)\,. \tag{20}$$

Ограничимся проверкой второго из соотношений (17), формула (18) доказывается аналогично. Используя сначала (20), затем (19) и, наконец, снова (20), получаем

$$\int_0^1 r^{2k+2}(1-r^2)^3 \left(P_n^{(k+3,k+1)}(r^2)\right)'\left(P_n^{(k+3,k+1)}(r^2)\right)' dr^2 =$$

$$= \int_0^1 r^{2k+2}(1-r^2)^3 \left(-\frac{n(n+k+3)}{k+1}\right) P_{n-1}^{(k+5,k+2)}(r^2) \left(-\frac{n(n+k+3)}{k+1}\right) P_{n-1}^{(k+5,k+2)}(r^2)\, dr^2 =$$

$$= \left(-\frac{n(n+k+3)}{k+1}\right)^2 \left\|P_{n-1}^{(k+5,k+2)}(r^2)\right\|^2 = \left\|\left(P_n^{(k+3,k+1)}(r^2)\right)'\right\|^2 = \|P_n'\|^2.$$

□

Лемма 3. *Выражение* $(S_1)^2 + (R_1)^2 + 2(Q_1)^2$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}
&(S_1)^2 + (R_1)^2 + 2(Q_1)^2 = \\
&\qquad = aP_n(r^2)P_n(r^2) + bP_n(r^2)P_n'(r^2) + cP_n(r^2)P_n''(r^2) + \\
&\qquad\qquad + dP_n'(r^2)P_n'(r^2) + eP_n'(r^2)P_n''(r^2) + fP_n''(r^2)P_n''(r^2),
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
a &= 64r^{2k+4} + 32k^2(1-k)r^{2k-2}(1-r^2)^3 + 16(7k^2+3k+2)r^{2k}(1-r^2)^2 - \\
&\qquad -64(2k+1)r^{2k+2}(1-r^2) + 4k^2(k-1)^2 r^{2k-4}(1-r^2)^4, \\
b &= 16k^2(k-1)r^{2k-2}(1-r^2)^4 + 160(2k+1)r^{2k+2}(1-r^2)^2 - \\
&\qquad -32(4k^2+k+1)r^{2k}(1-r^2)^3 - 256r^{2k+4}(1-r^2), \\
c &= 8k(k-1)r^{2k}(1-r^2)^4 - 32(2k+1)r^{2k+2}(1-r^2)^3 + 64r^{2k+4}(1-r^2)^2, \\
d &= 256r^{2k+4}(1-r^2)^2 - 64(2k+1)r^{2k+2}(1-r^2)^3 + 8(3k^2+2k+1)r^{2k}(1-r^2)^4, \\
e &= 16(2k+1)r^{2k+2}(1-r^2)^4 - 128r^{2k+4}(1-r^2)^3, \\
f &= 16r^{2k+4}(1-r^2)^4.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из определений S_1, R_1, Q_1 (см. лемму 1), производя дифференцирования по r, возводя полученные выражения в квадрат и приводя подобные члены, получим утверждение леммы. □

Теорема 4. *Норма потенциального тензорного поля вычисляется по формуле*

$$\left\|(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos})^{\mathrm{pot}}\right\|^2 = \frac{8\pi(n+1)^2(n+2)^2}{(k+2n+3)(C_{n+k}^k)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем исходное выражение для квадрата нормы:

$$\left\|(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos})^{pot}\right\|^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(aP_n\,P_n + bP_n\,P_n' + cP_n\,P_n'' + dP_n'P_n' + eP_n'P_n'' + fP_n''P_n''(r^2)\right) dr^2\,.$$

Подставляя в подынтегральное выражение значение f и используя (18), получим

$$\|(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos})^{pot}\|^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big(aP_n P_n + bP_n P_n'(r^2) + cP_n P_n'' + dP_n'P_n' + eP_n'P_n''\Big)\,dr^2 + 8\pi\|P_n''\|^2.$$

Далее, представляя выражение справа в виде двух слагаемых,

$$\|(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos})^{pot}\|^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 c\,\big(P_n P_n'' + P_n'P_n'\big)\,dr^2 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 \big(aP_n P_n + bP_n P_n' + (d-c)P_n'P_n' + eP_n'P_n''\big)\,dr^2 + 8\pi\|P_n''\|^2,$$

интегрируя первое из них по частям, принимая во внимание $c(0) = c(1) = 0$ и замечая, что

$$\int_0^1 eP_n'P_n''(r^2)\,dr^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 e\,\big((P_n')^2\big)'dr^2 = \frac{1}{2}e(P_n')^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e'P_n'P_n'dr^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 e'P_n'P_n'\,dr^2,$$

поскольку $e(0) = e(1) = 0$, получим

$$\|(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos})^{pot}\|^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big(aP_n P_n + (b-c')P_n P_n' + (d-c-\frac{1}{2}e')P_n'P_n'\Big)\,dr^2 + 8\pi\|P_n''(r^2)\|^2.$$

Вычисляя коэффициент перед слагаемым $P_n'P_n'$, $d - c - \frac{1}{2}e' = 64(k+2)r^{2k+2}(1-r^2)^3$ и используя (17), получаем

$$\int_0^1 (d-c-\frac{1}{2}e')P_n'P_n'dr^2 = 64(k+2)\|P_n'\|^2.$$

Наконец, интегрирование по частям,

$$\int_0^1 (b-c')P_n P_n'dr^2 = \frac{1}{2}(b-c')\big(P_n\big)^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (b-c')'P_n P_n\,dr^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 (b-c')'P_n P_n\,dr^2,$$

приводит к следующему выражению для квадрата нормы:

$$\|(\mathbb{T}_{k,n}^{\cos})^{pot}\|^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big(a - \frac{1}{2}(b-c')'\Big)P_n P_n\,dr^2 + 32\pi(k+2)\|P_n'(r^2)\|^2 + 8\pi\|P_n''\|^2.$$

Вычисляя коэффициент перед слагаемым $P_n P_n$, $a - \frac{1}{2}(b-c')' = 32(k+1)(k+2)r^{2k}(1-r^2)^2$, с использованием (19) получим

$$\int_0^1 \Big(a - \frac{1}{2}(b-c')'\Big)P_n P_n\,dr^2 = 32(k+1)(k+2)\|P_n\|^2,$$

что в итоге приводит к выражению для квадрата нормы в следующей форме:

$$\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2 = \pi\ 16(k+1)(k+2)\|P_n\|^2 + 32(k+2)\|P_n'\|^2 + 8\|P_n''\|^2\ . \tag{22}$$

Используя (19) и (20) и возвращаясь к прежним обозначениям $P_n^{(k+3,k+1)}(r^2)$ для P_n, вычислим значения норм полиномов Якоби и их производных:

$$\begin{aligned}
\|P_n\|^2 &= \|P_n^{(k+3,k+1)}\|^2 = \frac{n!k!(n+2)!}{(k+1)\dots(k+n)(k+2n+3)(k+n+4)!},\\
\|P_n'\|^2 &= \Big\| \frac{n(n+k+3)}{k+1} P_{n-1}^{(k+5,k+2)}\Big\|^2\\
&= \frac{n^2(n+k+3)^2}{(k+1)^2}\frac{(n-1)!(k+1)!(n+2)!}{(k+2)\dots(k+n)(k+2n+3)(k+n+3)!},\\
\|P_n''\|^2 &= \Big\|\Big(\frac{n(n+k+3)}{k+1}\Big)\Big(\frac{(n-1)(n+k+4)}{k+2}\Big)P_{n-2}^{(k+7,k+3)}\Big\|^2\\
&= \frac{n^2(n+k+3)^2(n-1)^2(n+k+4)^2}{(k+1)^2(k+2)^2}\times\\
&\qquad\times\frac{(n-2)!(k+2)!(n+2)!}{(k+3)\dots(k+n)(k+2n+3)(k+n+4)!}\,.
\end{aligned}$$

Подставляя значения норм в (22), получим

$$\begin{aligned}
\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2 &= \frac{8\pi(n+1)(n+2)\ n!\ ^2\ k!\ ^2}{(k+2n+3)\ (n+k)!\ ^2}\Big(\frac{2(k+1)(k+2)}{(k+n+1)(k+n+2)} +\\
&+\frac{4n(k+2)(n+k+3)}{(k+n+1)(k+n+2)} + \frac{n(n-1)(n+k+3)(n+k+4)}{(n+k+1)(n+k+2)}\Big).
\end{aligned}$$

Выражение в скобках справа, после приведения к общему знаменателю и упрощения, оказывается равным $(n+1)(n+2)$. В итоге получаем утверждение теоремы:

$$\|(\mathbb{T}^{\cos}_{k,n})^{pot}\|^2 = \frac{8\pi(n+1)^2(n+2)^2\ n!\ ^2\ k!\ ^2}{(k+2n+3)\ (n+k)!\ ^2} = \frac{8\pi(n+1)^2(n+2)^2}{(k+2n+3)(C^k_{n+k})^2}\,. \qquad \square$$

Перейдем к доказательству ортогональности тензорных полей. Достаточно доказать ортогональность системы потенциальных тензорных полей (13), ортогональность систем потенциальных полей (14) и соленоидальных тензорных полей (15) будет тогда следовать автоматически, как это отмечалось выше.

Рассмотрим потенциалы $\widetilde{\Phi}^{\cos,\sin}_{k_1,n_1}$ и $\widetilde{\Phi}^{\cos,\sin}_{k_2,n_2}$, где $k_1 \neq k_2$ или $n_1 \neq n_2$. По аналогии с соотношениями (16)) имеем для $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial x^2} &= S_j\cos^2\varphi + R_j\sin^2\varphi + Q_j\sin 2\varphi,\\
\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial x\partial y} &= S_j\sin\varphi\cos\varphi - R_j\sin\varphi\cos\varphi - Q_j\cos 2\varphi,\\
\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial y^2} &= S_j\sin^2\varphi + R_j\cos^2\varphi - Q_j\sin 2\varphi,
\end{aligned}$$

где

$$S_j = \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial r^2},$$

$$R_j = \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{\Phi}^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial\varphi^2},$$
$$Q_j = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\widetilde{\Phi}^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}^{\cos,\sin}_{k_j,n_j}}{\partial r\partial\varphi}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_1,n_1}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_2,n_2}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_1,n_1}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_2,n_2}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_1,n_1}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi^{\cos,\sin}_{k_2,n_2}}{\partial y^2} = S_1S_2 + R_1R_2 + 2Q_1Q_2.$$

Тогда

$$\left((\mathbb{T}^{\cos,\sin}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos,\sin}_{k_2,n_2})^{pot}\right)_{L_2(S^2(B))} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (S_1S_2 + R_1R_2 + 2Q_1Q_2)\, dr^2\, d\varphi.$$

Далее значок функционального пространства, в котором вычисляется скалярное произведение, опускаем.

Пусть $k_1 \neq k_2$. Тогда, представляя функции S_j, R_j, Q_j, $j = 1,2$, в виде произведения функций, зависящих только от φ и только от r, и замечая, что величины $\widehat{S_i}, \widehat{R_i}, \widehat{Q_i}$, $i = 1,2$, не зависят от φ, получим

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_2,n_2})^{pot}\right) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (S_1S_2 + R_1R_2 + 2Q_1Q_2)\, r\, dr\, d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(\cos k_1\varphi\cos k_2\varphi\widehat{S_1}\widehat{S_2} + \cos k_1\varphi\cos k_2\varphi\widehat{R_1}\widehat{R_2} +$$
$$+\ 2\sin k_1\varphi\sin k_2\varphi\widehat{Q_1}\widehat{Q_2}\Big)\, r\, dr\, d\varphi = 0\,.$$

Аналогично доказывается, что

$$\left((\mathbb{T}^{\sin}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\sin}_{k_2,n_2})^{pot}\right) = 0, \qquad \left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\sin}_{k_2,n_2})^{pot}\right) = 0\,.$$

Пусть теперь $k_1 = k_2$, $n_1 \neq n_2$. Поскольку

$$\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\sin k\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2k\varphi\, d\varphi = 0,$$

то $\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\sin}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = 0$. Так как из следствия 1

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = \left((\mathbb{T}^{\sin}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\sin}_{k_1,n_2})^{pot}\right),$$

то достаточно проверить, что $\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = 0$.

Лемма 4. *Пусть*

$$\widehat{S_i} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^{k_1}(1-r^2)^2P_{n_i}(r^2)\right),$$
$$\widehat{R_i} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{k_1}(1-r^2)^2P_{n_i}(r^2)\right) + \frac{1}{r^2}(-k_1{}^2)r^{k_1}(1-r^2)^2P_{n_i}(r^2),$$

$$\widehat{Q_i} = -k_1 r^{k_1-2}(1-r^2)^2 P_{n_i}(r^2) + \frac{k_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{k_1}(1-r^2)^2 P_{n_i}(r^2)\right),$$

тогда

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\widehat{S_1}\widehat{S_2} + \widehat{R_1}\widehat{R_2} + 2\widehat{Q_1}\widehat{Q_2}\right) dr^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение доказывается так же, как и лемма 1. □

Лемма 5. *Для $n \neq m$ имеют место следующие равенства:*

$$\int_0^1 r^{2k}(1-r^2)^2 P_n(r^2)P_m(r^2)\,dr^2 = 0, \qquad \int_0^1 r^{2k+2}(1-r^2)^3 P'_n(r^2)P'_m(r^2)\,dr^2 = 0,$$

$$\int_0^1 r^{2k+4}(1-r^2)^4 P''_n(r^2)P''_m(r^2)\,dr^2 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого утверждения аналогично приведенному в лемме 2. □

Используя обозначения для S_1, R_1, Q_1 (лемма 1), вычисленные при доказательстве леммы 3, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
\widehat{S_i} &= a_1 P_{n_i}(r^2) + b_1 P'_{n_i}(r^2) + c_1 P''_{n_i}(r^2),\\
\widehat{R_i} &= d_1 P_{n_i}(r^2) + e_1 P'_{n_i}(r^2),\\
\widehat{Q_i} &= f_1 P_{n_i}(r^2) + g_1 P'_{n_i}(r^2) \quad \text{для } i = 1,2,
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= -k(1-k)r^{k-2}(1-r^2)^2 - 4(2k+1)r^k(1-r^2) + 8r^{k+2},\\
b_1 &= 2(2k+1)r^k(1-r^2)^2 - 16r^{k+2}(1-r^2),\\
c_1 &= 4r^{k+2}(1-r^2)^2,\\
d_1 &= k(1-k)r^{k-2}(1-r^2)^2 - 4r^k(1-r^2),\\
e_1 &= 2r^k(1-r^2)^2,\\
f_1 &= -k(1-k)r^{k-2}(1-r^2)^2 - 4kr^k(1-r^2),\\
g_1 &= 2kr^k(1-r^2)^2.
\end{aligned}$$

Лемма 6. *Справедливы следующие соотношения:*

$$a_1^2 + d_1^2 + f_1^2 = a, \quad 2(a_1b_1 + d_1e_1 + f_1g_1) = b,$$
$$2a_1c_1 = c, \quad b_1^2 + e_1^2 + g_1^2 = d, \quad 2b_1c_1 = e, \quad c_1^2 = f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в равенствах (23) $n_1 = n_2$, тогда

$$\begin{aligned}
(S_1)^2 + (R_1)^2 + 2(Q_1)^2 &= (a_1P_{n_i}(r^2) + b_1P'_{n_i}(r^2) + c_1P''_{n_i}(r^2))^2 +\\
&+ (d_1P_{n_i}(r^2) + e_1P'_{n_i}(r^2))^2 + 2(f_1P_{n_i}(r^2) + g_1P'_{n_i}(r^2))^2 =\\
&= (a_1^2 + d_1^2 + f_1^2)P_{n_1}(r^2)P_{n_1}(r^2) + 2(a_1b_1 + d_1e_1 + f_1g_1)P_{n_1}(r^2)P'_{n_1}(r^2) +
\end{aligned}$$

$$+ 2a_1c_1 P_{n_1}(r^2)P''_{n_1}(r^2) + (b_1^2 + e_1^2 + g_1^2)P'_{n_1}(r^2)P'_{n_1}(r^2) + \\ + 2b_1c_1 P'_{n_1}(r^2)P''_{n_1}(r^2) + c_1^2 P''_{n_1}(r^2)P''_{n_1}(r^2)\,.$$

Сравнивая с (21), получим требуемое. □

Теорема 5. *Системы потенциальных* (13), (14) *и соленоидальных* (15) *тензорных полей ортогональны в* $L_2(S^2(B))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = 0.$$

Пользуясь леммой 4, имеем

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\widehat{S_1}\widehat{S_2} + \widehat{R_1}\widehat{R_2} + 2\widehat{Q_1}\widehat{Q_2}\right) dr^2. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (24) и группируя члены подынтегрального выражения необходимым образом, получим

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big((a_1^2 + d_1^2 + f_1^2)P_{n_1}(r^2)P_{n_2}(r^2) + \\ + (a_1b_1 + d_1e_1 + f_1g_1)\left(P'_{n_1}(r^2)P_{n_2}(r^2) + P_{n_1}(r^2)P'_{n_2}(r^2)\right) + \\ + a_1c_1\left(P''_{n_1}(r^2)P_{n_2}(r^2) + P_{n_1}(r^2)P''_{n_2}(r^2)\right) + \\ + (b_1^2 + e_1^2 + g_1^2)P'_{n_1}(r^2)P'_{n_2}(r^2) + \\ + b_1c_1\left(P''_{n_1}(r^2)P'_{n_2}(r^2) + P'_{n_1}(r^2)P''_{n_2}(r^2)\right) + \\ + c_1^2 P''_{n_1}(r^2)P''_{n_2}(r^2)\Big)\,dr^2\,.$$

Интегрирование по частям и преобразования подынтегрального выражения, аналогичные тем, что использовались при доказательстве теоремы 4, приводят к выражению

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big(\left(a_1^2 + d_1^2 + f_1^2 - (a_1b_1 + d_1e_1 + f_1g_1)' + (a_1c_1)''\right) \times \\ \times P_{n_1}(r^2)P_{n_2}(r^2) + \left(b_1^2 + e_1^2 + g_1^2 - 2a_1c_1 - (b_1c_1)'\right) \times \\ \times P'_{n_1}(r^2)P'_{n_2}(r^2) + c_1^2 P''_{n_1}(r^2)P''_{n_2}(r^2)\Big)\,dr^2,$$

которое, с применением соотношений из леммы 6, преобразуется к следующему:

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot}, (\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big(\left(a - \frac{1}{2}(b - c')'\right)P_{n_1}(r^2)P_{n_2}(r^2) + \\ + \left(d - c - \frac{1}{2}e'\right)P'_{n_1}(r^2)P'_{n_2}(r^2) + fP''_{n_1}(r^2)P''_{n_2}(r^2)\Big)\,dr^2 = \\ = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big(32(k_1+1)(k_1+2)r^{2k_1}(1-r^2)^2 P_{n_1}(r^2)P_{n_2}(r^2) +$$

$$+\,64(k_1+2)r^{2k_1+2}(1-r^2)^3P'_{n_1}(r^2)P'_{n_2}(r^2)\,+$$
$$+\,16r^{2k_1+4}(1-r^2)^4P''_{n_1}(r^2)P''_{n_2}(r^2)\Big)\,dr^2.$$

Использование леммы 5 приводит к требуемому утверждению:

$$\left((\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_1})^{pot},\,(\mathbb{T}^{\cos}_{k_1,n_2})^{pot}\right)=0.$$

$\square$

Таким образом, мы показали, что система потенциалов

$$\left\{\begin{matrix}\widetilde{F}^{\cos}\\ \widetilde{F}^{\sin}\end{matrix}\right\}_{k,n}(r,\varphi):=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k+2n+3}{2\pi}}\,\frac{C^k_{n+k}}{(n+1)(n+2)}\,(1-r^2)^2r^k\left\{\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix}\right\}P_n^{(k+3,k+1)}(r^2)$$

образует ортонормированную в пространстве $L_2(S^2(B))$ систему потенциальных 2-тензорных полей

$$(\mathbb{F}_{k,n})^{pot}(x,y):=\mathrm{d}^2F_{k,n}(x,y),\quad k,n=0,1,\ldots,$$

ортонормированную в том же пространстве систему потенциальных полей

$$(\widehat{\mathbb{F}}_{k,n})^{pot}(x,y):=(\mathrm{d}\mathrm{d}^{\perp})F_{k,n}(x,y),\quad k,n=0,1,\ldots,$$

и ортонормированную систему соленоидальных полей

$$(\mathbb{F}_{k,n})^{sol}(x,y):=(\mathrm{d}^{\perp})^2F_{k,n}(x,y),\quad k,n=0,1,\ldots$$

3. Ортогональный базис в пространстве образов лучевых преобразований

Ортогональность, в весовом пространстве $L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})$, системы функций, являющейся образами систем потенциальных (13), (14) и соленоидальных (15) симметричных 2-тензорных полей, проще всего устанавливается с использованием результата, полученного в [2]. Заметим, что достаточно установить лишь ортогональность образов системы потенциальных полей (13). Ортогональность образов остальных систем (14) и (15) следует из предложения 1.

Предложение 2. *Пусть $k,n\geq 0$, $-1\leq s\leq 1$, $0\leq\beta<2\pi$, и заданы функции*

$$\Psi(\beta,s)=(1-s^2)^{5/2}C^{(3)}_{k+2n}(s)Y_k(\beta),\tag{25}$$

где $C^{(3)}_{k+2n}(s)$ — полиномы Гегенбауэра и $Y_k(\beta)$ — сферические гармоники в единичном круге B. Тогда прообразы $\Phi=\mathcal{R}^{-1}\Psi$ функций $\Psi(\beta,s)$ задаются формулой

$$\Phi(\beta,r)=c(k,n)(1-r^2)^2r^kP_n^{(k+3,k+1)}(r^2)Y_k(\beta),\tag{26}$$

где $P_n^{(p,q)}$ — полиномы Якоби степени n с индексами p,q, и

$$c(k,n)=(-1)^n2^{-5}\frac{\Gamma(k+2n+6)\Gamma(n+1)(k+n)!}{\Gamma(k+2n+1)\Gamma(3)\Gamma(n+3)k!n!}.$$

Анонсируемое свойство ортогональности базируется на свойствах полиномов Гегенбауэра [20], которые мы приводим в следующей лемме.

Лемма 7. *Имеют место следующие свойства полиномов Гегенбауэра:*

$$(1-t^2)\frac{d}{dt}C_n^{(\mu)}(t) = (n+2\mu)tC_n^{(\mu)}(t) - (n+1)C_{n+1}^{(\mu)}(t), \tag{27}$$

$$(n+2\mu)C_n^{(\mu)}(t) - 2\mu\,\big[C_n^{(\mu+1)}(t) - tC_{n-1}^{(\mu+1)}(t)\big] = 0, \tag{28}$$

$$\int_{-1}^{1} C_n^{(\mu)}(t)C_m^{(\mu)}(t)(1-t^2)^{\mu-1/2}\,dt = \frac{\pi 2^{1-2\mu}\Gamma(n+2\mu)}{n!(n+\mu)\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)}\delta_{nm}. \tag{29}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 6. *Система функций*

$$\Big(\mathcal{P}^{\perp}\begin{Bmatrix}\mathbb{F}^{\cos}\\ \mathbb{F}^{\sin}\end{Bmatrix}^{\mathrm{pot}}_{k,n}(x,y)\Big)(\alpha,s) =$$
$$= a(k,n)\sqrt{1-s^2}\,C^{(1)}_{k+2n+2}(s)\begin{Bmatrix}\cos k\alpha\\ \sin k\alpha\end{Bmatrix} =: \begin{Bmatrix}\Psi^{\cos}\\ \Psi^{\sin}\end{Bmatrix}_{k,n}(\alpha,s),$$

где $a(k,n) = (-1)^n 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi(k+2n+3)}}$, *образует ортогональную систему в пространстве* $L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})$ *образов поперечного (продольного, смешанного) лучевого преобразования. При этом норма* $\Psi^{\cos,\sin}_{k,n}$ *задается формулой*

$$\|\Psi^{\cos,\sin}_{k,n}\|^2_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} = \frac{4\pi}{k+2n+3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2, устанавливающего связи между системой потенциалов (26) и ее преобразованиями Радона (25), и предложения 1, связывающего лучевые преобразования с второй производной от преобразования Радона соответствующего потенциала, следует, что достаточно установить свойство ортонормированности системы, состоящей из вторых производных по s от функций из системы (25). Для этого сначала продифференцируем $\Psi(\alpha,s)$ по s:

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\Phi(\alpha,s)\Big) = \Big(\frac{5}{2}(1-s^2)^{3/2}(-2s)C^{(3)}_{2n+k}(s) + (1-s^2)^{5/2}\big[C^{(3)}_{2n+k}(s)\big]'\Big)Y_k(\alpha).$$

Используя (27), а затем (28), получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\Phi(\alpha,s)\Big) = (1-s^2)^{3/2}(2n+k+1)\Big(sC^{(3)}_{2n+k}(s) - C^{(3)}_{2n+k+1}(s)\Big)Y_k(\alpha) =$$
$$= -(1-s^2)^{3/2}\frac{1}{4}(2n+k+1)(2n+k+5)C^{(2)}_{2n+k+1}(s)Y_k(\alpha).$$

При вычислении второй производной по s от $\Psi(\alpha,s)$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big(\Phi(\alpha,s)\Big) = -\frac{1}{4}(2n+k+1)(2n+k+5)\times$$
$$\times\,(1-s^2)^{1/2}\Big(-3sC^{(2)}_{2n+k+1}(s) + (1-s^2)\big[C^{(2)}_{2n+k+1}(s)\big]'\Big)Y_k(\alpha)$$

вновь используем сначала (27) а затем (28), и получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big(\Phi(\alpha,s)\Big) = \frac{1}{8}(2n+k+1)(2n+k+2)(2n+k+4)(2n+k+5)\times$$
$$\times\,(1-s^2)^{1/2}C^{(1)}_{2n+k+2}(s)Y_k(\alpha).$$

Введем обозначение:

$$J_{k,n} := \frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big(\Phi(\alpha, s)\Big) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big((1-s^2)^{5/2} C^{(3)}_{k+2n}(s) Y_k(\alpha)\Big).$$

Используя свойство ортогональности на $(-1,1)$ полиномов Гегенбауэра $C^{(1)}_m(s)$ с весом $(1-s^2)^{-1/2}$ (29) и тригонометрических функций $Y_k(\alpha)$ на $[0,2\pi)$, получаем, что скалярное произведение в $L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})$ функций $J_{k,n}$ и $J_{l,m}$ при $k \neq l$ или $n \neq m$ равно нулю.

Перейдем к вычислению нормы $\|\Psi^{\cos,\sin}_{k,n}\|^2_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}$ (опуская в дальнейшем значок функционального пространства):

$$\|\Psi^{\cos,\sin}_{k,n}\|^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big((-1)^n 2\sqrt{\frac{2}{\pi(k+2n+3)}}(1-s^2)^{1/2} C^{(1)}_{k+2n+2}(s) Y_k(\alpha)\Big)^2 \times$$
$$\times (1-s^2)^{-1/2}\, d\alpha\, ds =$$
$$= \frac{8}{k+2n+3} \int_0^1 \Big(C^{(1)}_{k+2n+2}(s)\Big)^2 (1-s^2)^{1/2}\, ds.$$

Используя формулу (29), окончательно получаем искомое значение нормы:

$$\|\Psi^{\cos,\sin}_{k,n}\|^2 = \frac{8}{k+2n+3}\,\frac{\pi 2^{-1}\Gamma(k+2n+2+2)}{(k+2n+2)!(k+2n+2+1)\Gamma(1)\Gamma(1)} = \frac{4\pi}{k+2n+3}. \qquad \square$$

Мы показали, что система функций

$$G^{\cos,\sin}_{k,n}(\alpha,s) := \sqrt{\frac{k+2n+3}{4\pi}}\,\Psi^{\cos,\sin}_{k,n}(\alpha,s) = (-1)^n\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{1-s^2}\,C^{(1)}_{k+2n+2}(s)\left\{\begin{matrix}\cos k\alpha\\ \sin k\alpha\end{matrix}\right\},$$

является ортонормированной в пространстве образов $L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})$ поперечного, смешанного и продольного лучевых преобразований. Таким образом, имеют место представления, $k,n = 0,1,2,\ldots$:

$$\mathcal{P}^{\perp}\big[(\mathbb{F}^{\cos,\sin}_{k,n})^{pot}(x,y)\big](\alpha,s) = \big[\mathcal{P}(\mathbb{F}^{\cos,\sin}_{k,n})^{sol}(x,y)\big](\alpha,s) =$$
$$= 2\,\big[\mathcal{P}^{\dagger}(\widehat{\mathbb{F}}^{\cos,\sin}_{k,n})^{pot}(x,y)\big](\alpha,s) = \sigma_{k,n}G^{\cos,\sin}_{k,n}(\alpha,s),$$

где величины

$$\sigma_{k,n} = 2\sqrt{\frac{\pi}{k+2n+3}}$$

суть сингулярные числа операторов $\mathcal{P}^{\perp}$, $\mathcal{P}^{\dagger}$ и $\mathcal{P}$. Следовательно, сингулярное разложение оператора $\mathcal{P}^{\perp}$ имеет вид

$$g := \mathcal{P}^{\perp}\mathbb{U} = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma_{k,n}\Big(\big(\mathbb{U},(\mathbb{F}^{\cos}_{k,n})^{pot}\big)_{L_2(S^2(B))}G^{\cos}_{k,n} + (1-\delta_{k0})\big(\mathbb{U},(\mathbb{F}^{\sin}_{k,n})^{pot}\big)_{L_2(S^2(B))}G^{\sin}_{k,n}\Big),$$

где через δ_{jk} обозначен символ Кронекера, а значение обратного оператора вычисляется по формуле

$$\mathbb{U} = (\mathcal{P}^{\perp})^{-1}g = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma^{-1}_{k,n}\Big(\big(g, G^{\cos}_{k,n}\big)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbb{F}^{\cos}_{k,n})^{pot} +$$

$$+\,(1-\delta_{k0})\,\langle g, G^{\sin}_{k,n}\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbb{F}^{\sin}_{k,n})^{pot}\Big).$$

Сингулярное разложение оператора $\mathcal{P}^{\dagger}$ имеет вид

$$g := 2\mathcal{P}^{\dagger}\mathbb{W} = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma_{k,n}\Big(\langle\mathbb{W},(\widehat{\mathbb{F}}^{\cos}_{k,n})^{pot}\rangle_{L_2(S^2(B))}G^{\cos}_{k,n} + (1-\delta_{k0})\,\langle\mathbb{U},(\widehat{\mathbb{F}}^{\sin}_{k,n})^{pot}\rangle_{L_2(S^2(B))}G^{\sin}_{k,n}\Big),$$

а значение обратного оператора вычисляется по формуле

$$2\mathbb{W} = (\mathcal{P}^{\dagger})^{-1}g = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma^{-1}_{k,n}\Big(\langle g, G^{\cos}_{k,n}\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\widehat{\mathbb{F}}^{\cos}_{k,n})^{pot} +$$

$$+\,(1-\delta_{k0})\,\langle g, G^{\sin}_{k,n}\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\widehat{\mathbb{F}}^{\sin}_{k,n})^{pot}\Big).$$

Сингулярное разложение оператора $\mathcal{P}$ имеет вид

$$g := \mathcal{P}\mathbb{V} = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma_{k,n}\Big(\langle\mathbb{V},(\mathbb{F}^{\cos}_{k,n})^{sol}\rangle_{L_2(S^2(B))}G^{\cos}_{k,n} + (1-\delta_{k0})\,\langle\mathbb{V},(\mathbb{F}^{\sin}_{k,n})^{sol}\rangle_{L_2(S^2(B))}G^{\sin}_{k,n}\Big),$$

а значение обратного оператора вычисляется по формуле

$$\mathbb{V} = \mathcal{P}^{-1}g = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sigma^{-1}_{k,n}\Big(\langle g, G^{\cos}_{k,n}\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbb{F}^{\cos}_{k,n})^{sol} +$$

$$+\,(1-\delta_{k0})\,\langle g, G^{\sin}_{k,n}\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}(\mathbb{F}^{\sin}_{k,n})^{sol}\Big).$$

Заключение

Полученные в работе сингулярные разложения операторов лучевых преобразований, действующих на симметричные 2-тензорные поля, по-существу, являются уже готовыми алгоритмами приближенного решения задачи восстановления всего тензорного поля или его частей по известным лучевым преобразованиям. При этом следует использовать усеченное сингулярное разложение, являющееся регуляризацией задачи. Возникающая при этом проблема выбора параметра регуляризации, т. е. количества членов конечной суммы, которым заменяется бесконечный ряд в формуле обращения, хорошо известна и исследована как в теоретическом аспекте, так и во многих публикациях практической направленности. В данной работе авторы не ставят себе целью рассмотрение этой проблемы, так как ее исследование естественным образом возникает в рамках численной реализации полученных сингулярных разложений для лучевых преобразований.

Список литературы

1. *Davison M. E.* A Singular Value Decomposition for the Radon Transform in n-Dimensional Euclidean space // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1981. Vol. 3. P. 321–340.

2. *Louis A. K.* Orthogonal Function Series Expansions and the Null Space of the Radon Transform // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 621–633.

3. *Quinto E. T.* Singular Value Decomposition and Inversion Methods for the Exterior Radon Transform and a Spherical Transform // J. Math. Anal. Appl. 1985. Vol. 95. P. 437–448.

4. *Maass P.* The X-Ray Transform: Singular Value Decomposition and Resolution // Inverse Problems. 1987. Vol. 3. P. 727–741.

5. *Louis A. K.* Incomplete Data Problems in X-Ray Computerized Tomography. I: Singular Value Decomposition of the Limited Angle Transform // Numer. Math. 1986. Vol. 48. P. 251–262.

6. *Derevtsov E. Yu., Kazantsev S. G., Schuster T.* Polynomial Bases for Subspaces of Vector Fields in the Unit Ball. Method of Ridge Functions // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15. No. 1. P. 1–38.

7. *Derevtsov E. Yu., Efimov A. V., Louis A. K., Schuster T.* Singular Value Decomposition and its Application to Numerical Inversion for Ray Transforms in 2D Vector Tomography // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 19. No. 4–5. P. 689–715.

8. *Kazantsev S. G., Bukhgeim A. A.* Singular Value Decomposition for the 2D Fan-Beam Radon Transform of Tensor Fields // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2004. Vol. 12. No. 4. P. 1–35.

9. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Л.; М.: ОНТИ, Гос. технико-теоретическое изд-во, 1934.

10. *Weyl H.* The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory // Duke Math. J. 1940. No. 7. P. 411–444.

11. *Derevtsov E. Yu.* An Approach to Direct Reconstruction of a Solenoidal Part in Vector and Tensor Tomography Problems // J. Inverse Ill-Posed Problems. 2005. Vol. 13. No. 3–6. P. 213–246.

12. *Деревцов Е. Ю.* Некоторые задачи нескалярной томографии // Сиб. электронные матем. известия: Труды первой международной молодежной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». 2010. Т. 7, ч. 1. С. 81–111.

13. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.

14. *Deans S.* The Radon Transform and Some of its Applications. N. Y.: Wiley, 1983.

15. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.

16. *Гохберт И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

17. *Louis A. K.* Inverse und Schlecht Gestellte Probleme. Stuttgart: Teubner, 1989.

18. *Schuster T.* The Method of Approximate Inverse: Theory and Applications. Heidelberg: Springer, 2007.

19. *Louis A. K.* Feature Reconstruction in Inverse Problems // Inverse Problems. 2011. Vol. 27. 065010 `doi: 10.1088/0266-5611/27/6/065010`.

20. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.

Материал поступил в редколлегию 18.01.2012

Адреса авторов

ДЕРЕВЦОВ Евгений Юрьевич
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: dert@math.nsc.ru

ПОЛЯКОВА Анна Петровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: anna.polyakova@ngs.ru