УДК 519, 213, 512.64

А. В. Софронов

Верхневилюйская республиканская гимназия им. М. А. Алексеева
ул. Ленина, 69, с. Верхневилюйск, 678230, Республика Саха (Якутия)
E-mail: lgvvrg@list.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В данной работе описывается один метод обучения оптимальному выбору способа решения трудных задач. Автор показывает пример использования этого метода при решении одной конкретной задачи с параметрами: определение расположения корней квадратного уравнения относительно одной фиксированной точки. При этом решении, кроме известных двух способов (аналитического и графического), приводится еще один оригинальный способ решения с помощью теоремы Виета.

Ключевые слова: квадратное уравнение, теорема Виета, способ решения задачи.

Оптимальным выбором способа решения трудных задач математики можно считать такой выбор, который наиболее приемлем для конкретного ученика, с учетом его уровня подготовки, индивидуальных особенностей мышления и его желания. И для обучения этому выбору автор использует следующий метод. В первой части обучения (часто это спаренный урок) рассматривается три совершенно разных способа решения некоторой задачи с теоретическими обоснованиями и приведением примеров. Во второй части проводится своего рода лабораторная работа. Учащиеся делятся на равносильные группы по три ученика и решают по три задачи в каждой группе: сначала первую задачу первый ученик решает первым способом, второй – вторым, третий – третьим способами. После этого они сравнивают ответы и обсуждают ошибки. После этого они приступают ко второй задаче, при этом меняются способами решения задачи; а затем и к третьей. Таким образом, каждый ученик получает возможность использовать все три метода решения конкретной задачи. После решения и обсуждения ответов всех задач учащиеся заполняют индивидуальную таблицу с оценкой всех методов по пятибалльной системе. В конце урока суммируются все баллы по всем ячейкам таблицы и оцениваются все методы решения данной задачи:

	1 задача	2 задача	3 задача
1 способ			
2 способ			
3 способ			

Приведем один пример проведенного занятия:

Тема: «Расположение корней квадратного уравнения относительно фиксированной точки».

Задача 1. При каких значениях параметра t корни уравнения $a\ t\ x^2+b\ t\ x+c\ t\ =0$ лежат по разные стороны от числа m? (*Для упрощения записей обозначим*

$$a\ t\ =a, b\ t\ =b, c\ t\ =c.)$$

Способ 1 (аналитический). Наша задача сводится к решению совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} a>0 \\ D=b^2-4ac>0 \\ x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}<m \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}>m \end{cases} \qquad \begin{cases} a<0 \\ D=b^2-4ac>0 \\ x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}<m \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}>m. \end{cases}$$

Пример 1. При каких значениях параметра t уравнение $x^2-\ 2t+1\ x+3t-4=0$ имеет два корня, один из которых меньше 2, а другой больше 2?

Решение. Так как $a=1$, то задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} D=\ 2t+1\ ^2-4\ 3t-4\ =4t^2-8t+17>0 \\ x_1=\dfrac{\ 2t+1\ -\sqrt{4t^2-8t+17}}{2}<2 \\ x_2=\dfrac{\ 2t+1\ -\sqrt{4t^2-8t+17}}{2}>2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow t\in\ -2;+\infty\ .$

Решение систем неравенств, содержащих иррациональные выражения, является достаточно трудным, и более рациональным способом является другой способ, использующий графическое представление квадратного трехчлена, и поэтому его условно можно назвать графическим.

Способ 2 (*графический*)

1 случай. Если $a>0$, то

$f(m)=am^2+bm+c<0$ (рис. 1):

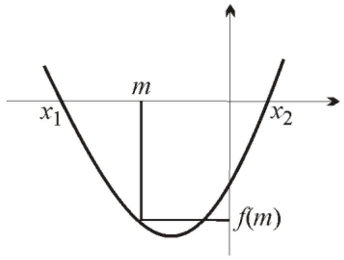

Рис. 1

2 случай. Если $a<0$, то

$f(m)=am^2+bm+c>0$ (рис. 2):

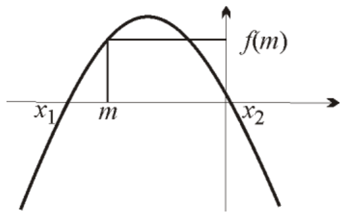

Рис. 2

Утверждение. Корни квадратного уравнения $f\ \ x\ =ax^2+bx+c=0$ лежат по разные стороны от числа *m*, тогда и только тогда, когда $a\cdot f\ \ m\ <0$. (*Заметим, что существование корней включается в вышесказанное условие.*)

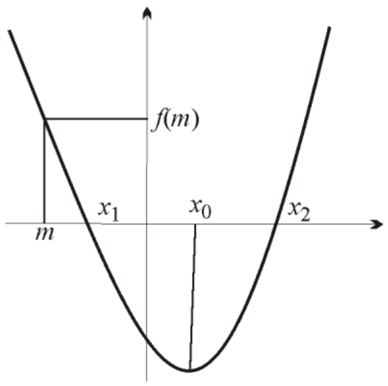

Рис. 3

Пример 2. При каких значениях параметра *t* уравнение

$t-1\ \ x^2+\ \ 2t+3\ \ x+\ \ t^2-4t-2\ \ =0$ имеет два корня, один из которых меньше –2, а другой больше –2?

Решение. На основании вышесказанного утверждения имеем:

$t-1\ \ f\ \ -2\ \ =\ \ t-1\ \times$

$\times\ \ t-1\ \ -2\ ^2+\ \ 2t+3\ \ -2\ \ +\ \ t^2-4t-2\ \ <0$

$\Leftrightarrow t\in\ \ -\infty;-2\ \cup\ 1;6\ $. (*Заметим, что условие* $a\neq 0$ *включается в знак строгого неравенства.*)

Задача 2. При каких значениях параметра *t* квадратное уравнение

$a\ \ t\ \ x^2+b\ \ t\ \ x+c\ \ t\ \ =0$

имеет корни большие (меньшие) числа *m*?

Способ 1 (*аналитический*). Условие задачи предполагает решение систем неравенств:

$$\begin{cases} a>0 \\ D=b^2-4ac\geq 0 \\ x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}>m \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}<m \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a<0 \\ D=b^2-4ac\geq 0 \\ x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}>m \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}<m. \end{cases}$$

Пример 3. При каких *t* все корни уравнения $x^2+\ \ 3t-5\ \ x+\ \ 2t^2-8t-6\ \ =0$ больше –1?

Решение. Так как $a=1$, то

$$\begin{cases} D=\ \ 3t-5\ ^2-4\ \ 2t^2-4t-6\ \ = \\ =t^2-14t+49\geq 0 \\ x_1=\dfrac{3t-5-\sqrt{t^2-14t+49}}{2}>-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3t-3>\left|t-7\right|\Leftrightarrow t\in\ \ 1;+\infty\ $.

Способ 2 (графический). Рассмотрим задачу в случае, когда корни больше числа *m*.

1 случай. Если $a>0$, то имеем рис. 3.

2 случай. Если $a<0$, то имеем рис. 4 и решение задачи сводится к системе неравенств:

$$\begin{cases} D=b^2-4ac\geq 0 \\ a\cdot f(m)>0 \\ x_0=-\dfrac{b}{2a}>m. \end{cases}$$

Пример 4. При каких значениях параметра t корни уравнения

$$(t-1)x^2-2(t+2)x+t+13=0$$

больше 2?

Решение.

$$\begin{cases} D=4(t+2)^2-4(t-1)(t+13)\geq 0 \\ (t-1)f(2)>0 \\ x_0=\dfrac{2(t+2)}{2(t-2)}>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32t+68\geq 0 \\ (t-1)(t+1)>0 \\ \dfrac{-t+5}{t-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow t\in\left(1;2\frac{1}{8}\right].$$

Теперь рассмотрим пример, решение которого приводит к еще одному, оригинальному способу решения задач типа 1 и 2.

Способ 3 (использование теоремы Виета)

Пример 5. При каких значениях параметра t уравнение

$$tx^2+(2t-1)x+t^2-6t+8=0$$

имеет корни разных знаков?

Решение. По теореме Виета, приведенное квадратное уравнение

$$x^2+\frac{2t-1}{t}x+\frac{t^2-6t+8}{t}=0$$

имеет корни разных знаков, если свободный член $\dfrac{t^2-6t+8}{t}<0 \Leftrightarrow t\in(-\infty;0)\cup(2;4)$. (*Заметим, что отрицательный знак свободного члена автоматически предполагает положительность дискриминанта, т. е. существование двух различных корней.*)

Пример 6. При каких значениях параметра t уравнение

$$tx^2-(2t+1)x+(3t-1)=0$$

имеет два корня больших, чем 1?

Решение. Сначала сделаем параллельный перенос оси ординат по формуле $x=u+1$, и условие задачи принимает следующий вид: при каких значениях параметра t уравнение

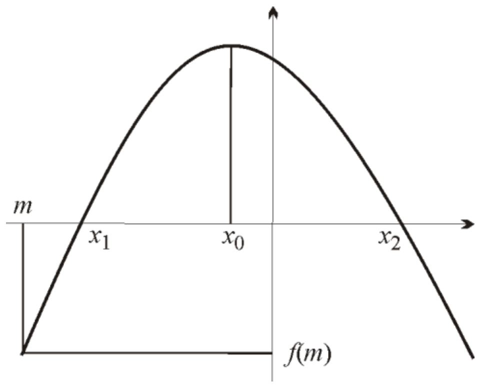

Рис. 4

$$t(u+1)^2-(2t+1)(u+1)+(3t-1)=$$

$$=tu^2-u+(2t-2)=0$$

имеет два положительных корня?

Эта задача легко решается при помощи теоремы Виета:

$$\begin{cases} D=1-4t(2t-2)>0 \\ u_1+u_2=\dfrac{1}{t}>0 \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{2t-2}{t}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8t^2+8t+1>0 \\ \dfrac{1}{t}>0 \\ \dfrac{2t-2}{t}>0 \end{cases} \Leftrightarrow t\in\left(1;\frac{2+\sqrt{6}}{4}\right).$$

Задачи для лабораторной работы

1. При каких значениях t корни уравнения $tx^2-2(t-1)+3t-2=0$ отрицательны?

2. При каких значениях t один из корней уравнения $(t+2)x^2+(t-1)x-t=0$ меньше чем 3, а второй больше 3?

3. При каких значениях t оба корня уравнения $tx^2-(3t+2)x+2(t+1)=0$ меньше чем 1?

Такой метод обучения рациональному выбору способа решения задач можно также использовать при решении систем линейных уравнений (способом подстановки, способом последовательного исключения неизвестных и методом определителей); геометрических задач (метод дополнительного построения, введение системы координат и т. д.).

Материал поступил в редколлегию 20.03.2009

A. Sofronov

PROBLEM SOLUTION OPTIMUM CHOICE

One method of optimum choice training of difficult problems solution is described. The author exemplifies the method to solve a specific problem with the parameters: arrangement definition of quadratic equation roots relative to one fixed point. Along with the solution where the two well-known ways (analytic and graphic) are used, an original way of solution with the help of Vieta theorem is given as an example.

Keywords: quadratic equation, Vieta theorem, problem solution.