УДК 517.9

Ю. Е. Аниконов, М. Ямамото

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ*

В работе предлагается и обсуждается на основе формул Карлемана новый способ исследования нелинейных обратных задач для эволюционных уравнений в комплекснозначном случае.

В данной работе рассматривается нелинейная обратная задача для эволюционного уравнения 2-го порядка в комплекснозначном случае. Нашей главной целью является описание способа поиска нелинейности рассматриваемого эволюционного уравнения, предполагая наличие хотя бы одного обобщенного автомодельного решения. В вещественном случае аналогичные результаты, в том числе и значительно более общие, можно найти в работах [6, 7] и цитированной там литературе. Так как здесь рассматривается комплекснозначный вариант, то, естественно, появляются задачи аналитического продолжения информации обратной задачи. В настоящей работе аналитические продолжения данных обратной задачи осуществляются с помощью формул Карлемана.

Ради простоты изложения способа мы ограничимся здесь лишь уравнением 2-го порядка, включающим параболический, гиперболический, Шредингера случаи:

$$p\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + \lambda(x, w), \tag{1}$$

где $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $a \leq t \leq b$, p, q, $p^2 + q^2 \neq 0$ — комплекснозначные постоянные,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad w(x,t) = w_1 + \mathrm{i} w_2, \quad \mathrm{i}^2 = -1\,,$$

— комплекснозначное решение, $\lambda(x, z)$, $z = z_1 + \mathrm{i} z_2$ — искомая нелинейность, которая предполагается в дальнейшем непрерывно дифференцируемой по x и z и целой функций по комплексной переменной z:

$$\lambda(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x) z^k, \quad z \in C.$$

Разумеется, при этом вещественный вариант не исключается.

Теоретическая и практическая актуальность поиска нелинейностей уравнений обусловлена сложностью математических исследований и невозможностью априори точно указать характер взаимодействия в конкретных задачах естествознания и обществоведения. По этому поводу уместно привести высказывание А. Н. Колмогорова относительно выбора нелинейных математических моделей теории популяций.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00439), Интеграционных проектов СО РАН № 48, 66.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 4. С. 3–8
© Ю. Е. Аниконов, М. Ямамото, 2007

А. Н. Колмогоров пишет: «Все исследование ставится в зависимость от специального и неизбежным образом произвольного выбора математических выражений для закономерностей, управляющих динамикой популяций» [3]. Ввиду этого обстоятельства, А. Н. Колмогоров предлагает проводить качественные исследования, используя качественные свойства нелинейных взаимодействий. Одним из таких свойств является обращение в нуль функции $\lambda(x,z)$ в некоторых точках z_0, z_1, т. е.

$$\lambda(x,z_0)=\lambda(x,z_1)=0, \tag{2}$$

например,

$$\lambda(x,0)=\lambda(x,1)=0.$$

Как мы покажем ниже, это ограничение весьма существенно при исследовании обратной задачи. Соотношение (2) принимается здесь как условие поиска $\lambda(x,z)$. Что касается автомодельности или симметрии, как иногда говорят, то при изучении нелинейных уравнений часто ищут так называемые частные решения, которые в ряде случаев называются солитонами.

В работе [2] приведена классификация автомодельных решений уравнений газовой динамики. Авторы выделяют пять видов таких решений:

$$\begin{aligned}
w(x,t)&=F(\omega t+x),\\
w(x,t)&=At^nF\left(\frac{x}{\Theta t^m}\right),\\
w(x,t)&=Ae^{nt}F\left(\frac{x}{Be^{mt}}\right),\\
w(x,t)&=Ae^{nx}F\left(\frac{Be^{mx}}{t}\right),\\
w(x,t)&=\varphi(t)F(x),
\end{aligned}$$

где A, B, Θ, m, n, ω — постоянные, F, φ — подходящие функции. Аналогичное представление имеют солитоны для других уравнений, например уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-g\sin w,\quad g>0,$$

имеет решение

$$w(x,t)=4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{g}\,(x-at-x_0)}{\sqrt{1-a^2}},\quad 0<a<1.$$

В данной работе предполагается, что уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение $w(x,t)$, которое может быть представлено в форме корня уравнения

$$R\big(u(x)w(x,t)\big)=v(x)\varphi(t), \tag{3}$$

где $u(x)\neq 0$, $v(x)\not\equiv 0$, $\varphi(t)\not\equiv 0$, некоторые, вообще говоря, неизвестные комплекснозначные дважды дифференцируемые функции, $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, $a\le t\le b$, а функция $R(y)$ — целая, $y=y_1+\mathrm{i}y_2$, $y\in\mathbb{C}$, также подлежащая, вообще говоря, поиску. Такое представление решения $w(x,t)$ отличается от представлений в работах [6, 7] и составляет элемент новизны этой работы. Заметим, что если функция $R(y)=z$ имеет обратную $R^{-1}(z)=F(z)$ (возможно, локально), то из (3) имеем

$$w(x,t)=\frac{1}{u(x)}F\left(v(x)\varphi(t)\right).$$

Можно также рассмотреть представление для $w(x,t)$ в несколько другом виде:

$$R\left(u(x)w(x,t)\right) = v(x) + \varphi(t), \tag{4}$$

что при $R^{-1}(z) = F(z)$ дает соотношение

$$w(x,t) = \frac{1}{u(x)} F\left(v(x) + \varphi(t)\right). \tag{3'}$$

В одномерном случае (при $n = 1$) заменой при необходимости x на t и выбором функций $u(x)$, $v(x)$, $\varphi(t)$ можно из указанных здесь представлений (3), (3′) получить классификационные автомодельные решения газовой динамики. В дальнейшем мы ограничимся только случаем (3), т. е.

$$R(u(x)w(x,t)) = \varphi(t)v(x).$$

В этой связи заметим также, что исключение дифференцированием функций $\varphi(t)$, $v(x)$ из (3) или (3′) приводит к дифференциальным связям на $w(x,t)$, теория и приложения дифференциальных связей представлена в работе [5] и цитированной там литературе.

Отметим также связь представления (3) с основными результатами теории физических структур, развиваемой Ю. И. Кулаковым и его учениками [4]. Оказывается, представление (3) соответствует физической структуре ранга (2, 2). Более общее представление

$$R\big(u(x)w(x,t)\big) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\varphi_k(t)$$

соответствует физической структуре ранга (m+1, m+1).

Дополнительно к (1), (2), (3) будем предполагать также, что заданы две функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $a \le t \le b$ и постоянные u_0, u_1, v_0, v_1, такие что

$$\begin{gathered} \alpha(t) = w|_{x=x_0}, \quad \beta(t) = w|_{x=x_1}, \\ u_0 = u(x_0), \quad v_0 = v_0(x_0), \quad u_1 = u(x_1), \quad v_1 = v(x_1), \end{gathered} \tag{5}$$

где x_0, x_1 — фиксированные точки замыкание области D.

Ставится обратная задача:

Найти функции $w(x,t)$, $\lambda(x,z)$ такие, что выполнены соотношения (1), (2), (3), (5); основная задача при этом состоит в поиске четырех функций $R(y)$, $\varphi(t)$, $u(x)$, $v(x)$, а затем в вычислении $w(x,t)$, $\lambda(x,z)$. В данной работе излагается лишь способ исследования, причем на формальном уровне. Мы приводим здесь только соотношения для определения искомых функций $R(y)$, $\varphi(t)$, $u(x)$, $v(x)$, а затем для $w(x,t)$, $\lambda(x,z)$. Первое, что необходимо сделать — это аналитическое продолжение функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$. С этой целью предполагается, что указанные функции являются следами аналитических функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $z = z_1 + \mathrm{i}z_2$, в полуплоскости $z_2 > 0$, принадлежащих классу Харди. Тогда [1] имеют место формулы Карлемана:

$$\alpha(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_a^b \alpha(t) \left[\frac{(t-b)(z-a)}{(t-a)(z-b)}\right]^{\frac{m}{\pi\mathrm{i}}} \frac{dt}{t-z},$$

$$\beta(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \beta(t) \left[\frac{(t-b)(z-a)}{(t-a)(z-b)}\right]^{\frac{m}{\pi \mathrm{i}}} \frac{dt}{t-z}\,.$$

Итак, считаем функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$ определенными информацией (5), т. е. $\alpha(t)$, $\beta(t)$. Формально определим функцию $q(y)$, считая, что нижеприведенная формула имеет смысл:

$$q(y) = u_1 \beta\left(\alpha^{-1}\left(\frac{y}{u_0}\right)\right),$$

и будем предполагать, что $q(y)$ продолжается до целой функции комплексной переменной $y = y_1 + \mathrm{i}y_2$. Оказывается, первое основное соотношение состоит в том, что искомая функция $R(y)$ является решением комплексного функционального уравнения типа Шредера [8]:

$$R(y) = \mu R(q(y)), \quad \mu = \frac{v_0}{v_1} = \mathrm{const}. \tag{6}$$

При этом если $\mu = 1$ $(v_0 = v_1)$ и $q(y) = 1 - y$, то решением функционального уравнения (6) является кси-функция Римана

$$R(y) = \xi(y) = \frac{y(y-1)}{2} \pi^{-\frac{y}{2}}\, \Gamma\left(\frac{y}{2}\right) \zeta(y)\,,$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция Эйлера, $\zeta(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y}$ — дзета-функция Римана. Возможны, конечно, и другие решения. На наш взгляд, это весьма интересная связь обратной задачи с теорией дзета-функций. С точки зрения информации (5) обратной задачи условие $q(y) = 1 - y$ означает, что

$$\alpha^{-1}\left(\frac{y}{u_0}\right) = \beta^{-1}\left(\frac{1-y}{u_1}\right).$$

При этом если функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — вещественные и строго монотонные, то из последнего равенства получается соотношение непосредственно на $\alpha(t)$, $\beta(t)$:

$$\alpha^{-1}\left(\frac{t}{u_0}\right) = \beta^{-1}\left(\frac{1-t}{u_1}\right).$$

Пусть $R(y)$ — решение определяющего функционального уравнения (6). Построим искомую комплекснозначную функцию $\varphi(t)$ формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{v_0} R(u_0 \alpha(t)) = \frac{1}{v_1} R(u_1 \beta(t))\,. \tag{7}$$

Этими соотношениями определяется вторая искомая функция $\varphi(t)$. При этом для вычисления искомой функции $\lambda(x, z)$ необходимо, зная $\varphi(t)$, $a \le t \le b$, найти целую функцию $f(z)$ такую, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi(t)).$$

Фактически для этого нужно решить обратную задачу поиска правой части $f(z)$ этого дифференциального уравнения по известному решению $\varphi(t)$, $a \le t \le b$. Положим

$$\varphi(y) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \varphi(t) \left[\frac{(t-b)(y-a)}{(t-a)(y-b)}\right]^{\frac{m}{\pi \mathrm{i}}} \frac{dt}{t-y},$$

$$y = y_1 + iy_2, \quad y_2 > 0\,.$$

Тогда $f(z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z))$, $\varphi^{-1}(z)$ обратная функция к $z = \varphi(y)$. Итак, основное соотношение на $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z))\,. \tag{8}$$

Займемся теперь вычислением функции $\lambda(x,z)$ в зависимости от $u(x)$, $v(x)$, а затем, используя (2), приведем определяющие дифференциальные уравнения 2-го порядка для искомых функций $u(x)$, $v(x)$. В этой связи заметим, что так как решение $w(x,t)$ является неявной функцией, определяемой соотношением

$$R(w(x,t)u(x)) = \varphi(t)v(x)\,,$$

то ее производные по x и t любого порядка вычисляются в зависимости от w и производных R, u, φ, v. При этом производные $\varphi^{(k)}(t)$ могут быть вычислены в силу соотношения

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi(t))$$

в зависимости от φ и производных f. Поэтому формула

$$\lambda(x,z) = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q\frac{\partial w}{\partial t} - \triangle w\,\Big|_{\varphi'=f(\varphi),\varphi''=f'(\varphi)f(\varphi),\varphi(t)=\frac{R(wu)}{v},w=z}$$

действительно дает конкретное соотношение для искомой функции $\lambda(x,z)$ в зависимости от $u(x)$, $v(x)$ и их производных до 2-го порядка. Вычисления приводят к равенству

$$\begin{aligned}\lambda(x,z) \;=\; & \rho\frac{vf\,(R(uz)/v)}{uR'(uz)} + \\ & + q\frac{vf'(R(uz)/v)f(R(uz)/v)R'^2(uz) - R''(uz)v^2f^2(R(uz)/v)}{u(x)R'(uz)^3} + \\ & + \frac{R''(uz)}{R'(uz)}\frac{1}{u}\frac{|\operatorname{grad} v|^2}{v^2} + z\left(\frac{\Delta u}{u} + \frac{2|\operatorname{grad} u|^2}{u^2}\right) - \\ & - \frac{R(zu)}{R'(zu)}\left(\frac{\Delta v}{uv} - \frac{2}{vu^2}(\operatorname{grad} u,\, \operatorname{grad} v)\right)\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Определяющая система дифференциальных уравнений для $u(x)$, $v(x)$ получается из (2), (9). Полагая $\lambda(x,z_0)=0$, $\lambda(x,z_1)=0$, очевидно, имеем из (9) два нелинейных дифференциальных 2-го порядка уравнения относительно функций $u(x)$, $v(x)$. Для более конкретного определения функций $u(x)$ $v(x)$ нужна, естественно, дополнительная, скажем, краевая информация. В одномерном варианте $(n=1)$ такая информация имеется в силу условий нормировки функций $u(x)$, $v(x)$, $u_0 = u(x_0)$, $u_1 = u(x_1)$, $v_0 = v(x_0)$, $v_1 = v(x_1)$, где постоянные u_0, u_1, v_0, v_1 заданы априори.

Более общие уравнения

$$H(x,y,D^\alpha w) = \lambda(x,w)$$

и более общие представления решения $w(x,y)$:

$$R\big(u(x)w(x,y)\big) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\varphi_k(y)$$

приводят к более общим функциональным уравнениям и более общим системам дифференциальных уравнений относительно функций $u(x)$, $v_k(x)$, $k=1,2,\dots m$, естественно, при соответствующей информации о решении и нулях искомой функции $\lambda(x,z)$. В частности, функциональное уравнение относительно $R(y)$ имеет вид

$$R(y) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k R(q_k(y)),$$

где μ_k — постоянные, $q_k(y)$ определяется заданной информацией:

$$w|_{x=x_k} = \alpha_k(y), \quad w|_{x=x_0} = \beta(y), \quad k = 1, 2, \dots m.$$

В заключение отметим связи обратных задач для нелинейных уравнений с различными разделами, такими как:

1. Теория физических структур, групповой анализ.

2. Специальные функциональные уравнения в комплексной плоскости.

3. Аналитическое продолжение.

4. Прямые задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Список литературы

1. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.

2. *Змитриенко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Теория режимов с обострением в сжимающих средах // Итоги науки. 1986. Т. 28. С. 3–93.

3. *Колмогоров А. Н.* Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. 1972. Т. 25, вып. 2. С. 101–106.

4. *Кулаков Ю. И.* Теория физических структур. М.: ООО «Компания Юниверс Контракт», 2004.

5. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

6. *Anikonov Yu. E.* Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems. VSP, Utrecht. The Netherland. 1997.

7. *Anikonov Yu. E.* Inverse problems and classes of solutions of evolution equations // J. of Inverse and Ill-posed problems. 2003. Vol. 11. No. 1. P. 3–26.

8. *Kuczma M.* Functional Equations in a Single Variable. Warshawa, 1968.

Материал поступил в редколлегию 15.08.2007

Адреса авторов

АНИКОНОВ Юрий Евгеньевич
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск
Пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: anikon@math.nsc.ru

ЯМАМОТО Масахиро
JAPAN, Tokyo, Komaba, Meguro
Graduate School of Mathematical
Sciences, University of Tokyo
e-mail: myama@ms.u-tokyo.ac.jp