УДК 510.67, 510.5+510.635

Е. Н. Павловский

СЛОЖНОСТЬ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЕЙ*

При исследовании вопроса о существовании вычислимой характеризации классов моделей широко используется подход, предложенный Гончаровым и Найт [1]. В рамках этого похода оценка алгоритмической сложности классов вычислимых моделей является шагом на пути к получению вычислимой характеризации соответствующих классов.

В работе для универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей нетривиальной вычислимой сигнатуры найдены точные оценки в аналитической иерархии следующих индексных множеств: модели с эренфойхтовой теорией (Π^1_1), модели с теорией, допускающей бесконечное число счетных моделей (Σ^1_1).

При исследовании структурных свойств теорий, алгебраических свойств моделей интересен ответ на вопрос, а насколько сложны те или иные определения свойств с алгоритмической точки зрения. Характеризация классов, а значит, и абстрактных свойств, моделей, в таком случае может быть получена с помощью оценки индексных множеств в универсальной нумерации вычислимых моделей [1, § 4].

Известно [4], что для вычислимой предикатной сигнатуры существует универсальная вычислимая нумерация всех вычислимых моделей этой сигнатуры. Здесь под нумерацией для бесконечной сигнатуры понимается такая нумерация, которая перечисляет все вычислимые модели сигнатуры σ и конечные вычислимые модели конечных частей сигнатуры σ (о существовании такой нумерации см.: [5, § 1.4]).

Пусть $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_n, \ldots$ — указанная нумерация вычислимых моделей сигнатуры σ. Пусть K — некоторый класс моделей сигнатуры σ, замкнутый относительно изоморфизма.

Определение 1. *Индексным множеством* $I(K)$ класса моделей K называется множество $I(K) = \{i \mid \mathcal{M}_i \in K\}$.

Задача работы заключается в определении точного уровня алгоритмической сложности в аналитической иерархии следующих индексных множеств:

$$Ehr_\sigma = \{i \mid Th(\mathcal{M}_i) \text{ эренфойхтова}\},$$
$$iMod_\sigma = \{i \mid Th(\mathcal{M}_i) \text{ допускает бесконечное число счетных моделей}\}.$$

Назовем сигнатуру *нетривиальной*, если она содержит предикатный или функциональный символ местности $\geqslant 2$.

Пусть σ — вычислимая нетривиальная сигнатура. Основные результаты работы сформулируем в виде двух теорем.

*Исследования поддержаны грантами УР.04.01.198, НШ 4413.2006.1.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 1. С. 71–76

Теорема 1. *Индексное множество Ehr_σ всех вычислимых моделей сигнатуры σ, имеющих эренфойхтову теорию, является Π^1_1-полным множеством в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей сигнатуры σ.*

Теорема 2. *Индексное множество $iMod_\sigma$ всех вычислимых моделей сигнатуры σ, теории которых допускают бесконечное число счетных моделей, является Σ^1_1-полным множеством в универсальной вычислимой нумерации всех вычислимых моделей сигнатуры σ.*

Напомним, что модель называется *вычислимой*, если ее основное множество, базисные предикаты и функции вычислимы. Модель называем *разрешимой*, если ее полная диаграмма вычислима. Теория T называется *эренфойхтовой*, если число ее счетных моделей конечно и больше единицы.

Примем далее обозначение $I(T, \omega)$ для числа попарно неизоморфных счетных моделей теории T.

§ 1. Сведение произвольной сигнатуры к сигнатуре графов

В данной главе мы рассмотрим функтор, введенный впервые Гончаровым [2] для сведения категории моделей с произвольной сигнатурой к категории сигнатуры графов. Покажем здесь, что данный функтор действует на моделях, сохраняя наличие и отсутствие следующих свойств: вычислимость модели, эренфойхтовость теории модели, бесконечность числа счетных моделей теории модели.

Назовем сигнатуру *ограниченной*, если существует число k, что для любого символа сигнатуры его местность не превосходит числа k.

Предложение 1. *Пусть σ — вычислимая ограниченная предикатная сигнатура, возможно, с константными символами. Тогда для любой модели $\mathcal{M}$ сигнатуры σ существует модель $\mathcal{M}'$ сигнатуры графов, для которой:*

(1) *$\mathcal{M}$ вычислима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}'$ вычислима;*
(2) *$I(Th(\mathcal{M}), \omega) = I(Th(\mathcal{M}'), \omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 доказан в [2]. Доказательство пункта 2 непосредственно следует из того факта, что функтор переводит изоморфизмы одной категории в изоморфизмы другой категории. Таким образом, при применении конструкции к модели $\mathcal{M}$ число попарно неизоморфных моделей теории $Th(\mathcal{M})$ сохраняется. $\square$

§ 2. Эренфойхтовы теории

Результаты данного параграфа базируются на синтаксической характеризации Судоплатова [3] для свойства эренфойхтовости теории, а также результатах Лемппа и Сламана [6] о сложности эренфойхтовых теорий. В дальнейшем, для более точного понимания изложения читателю рекомендуется ознакомиться с этими работами.

Определение 2. Теория T называется *малой*, если множество $S(T)$ всех типов теории над пустым множеством не более, чем счетно.

Теорема 3 (Судоплатов, [3]). *Для любой счетной полной теории T эквивалентно:*

(1) $I(T, \omega) < \omega$;

(2) T — *мала*, $|RK(T)| < \omega$ *и* $IL(\widetilde{M}) < \omega$ *для всех* $\widetilde{M} \in RK(T)/_{\sim RK}$

В первом пункте теоремы утверждается, что теория либо является эренфойхтовой, либо счетно-категоричной.

Во втором пункте приведена синтаксическая характеризация. Поймем, что все положения второго пункта теоремы могут быть выражены синтаксически.

Рассмотрим понятие малости теории. Это свойство вытекает из существования властного типа, который всегда присутствует в эренфойхтовых теориях [3].

Определение 3. Тип $p(\bar{x})$ теории T называется *властным*, если для любого типа $q(\bar{y})$ теории T и любой модели $\mathcal{M} \models T$ если $\mathcal{M} \models p$, то $\mathcal{M} \models q$.

Утверждение о существовании властного типа в теории может быть записано без привлечения понятия модели:

$$\forall q(\bar{y}) = \{q_0(\bar{y}), q_1(\bar{y}), \ldots\} \in S(T) \quad \forall n \in \omega \quad T \cup p(\bar{x}) \vdash \exists \bar{y} \mathop{\&}_{j=0}^{n} q_j(\bar{y}).$$

Учтем теперь такой факт, что каждый тип гиперарифметической эренфойхтовой теории гиперарифметичен [5, Теорема 4.2.4]. Таким образом, малость теории — это условие типа Π^1_1: существует гиперарифметическое множество, что для любого множества ($\forall^1$) выполняется арифметическое условие. По теореме Спектора-Ганди [7] Π^1_1-предикаты замкнуты относительно проекций по гиперарифметическим множествам, поэтому мы получаем Π^1_1-условие.

Далее обратимся к обозначениям статьи [3]. Рассмотрим условие $|RK(T)| < \omega$. Оно означает, что существует лишь конечное число типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_p$, $p \in S(T)$. Отметим, что в виду предложения 1 [3] модель $\mathcal{M}_p$ изоморфна модели $\mathcal{M}_q$ тогда и только тогда, когда существуют такие (p, q)– и (q, p)– главные формулы $\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x})$ и $\varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что множество

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p,q}(\bar{y}, \bar{x}), \varphi_{q,p}(\bar{x}, \bar{y})\}$$

совместно. Поэтому условие $|RK(T)| < \omega$ будет записываться как Π^1_1-условие: существуют гиперарифметические типы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что для любого типа q существует $i \in \{1, \ldots, n\}$, такой что существуют такие (p_i, q)– и (q, p_i)– главные формулы $\varphi_{p_i,q}(\bar{y}, \bar{x})$ и $\varphi_{q,p_i}(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что множество

$$p_i(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \cup \{\varphi_{p_i,q}(\bar{y}, \bar{x}), \varphi_{q,p_i}(\bar{x}, \bar{y})\}$$

совместно. По теореме Спектора–Ганди снова получаем Π^1_1-условие.

Теперь рассмотрим условие $IL(\widetilde{M}) < \omega$ для всех $\widetilde{M} \in RK(T)/_{\sim RK}$. Здесь $IL(\widetilde{M})$ обозначает число попарно неизоморфных моделей, предельных над типом p, для которого $\mathcal{M}_p \cong \widetilde{M}$.

Определение 4. Модель $\mathcal{M}$ называется предельной над типом p, если существует элементарная цепь $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \mathcal{M}_n \preccurlyeq \ldots$ моделей $\mathcal{M}_i \cong \mathcal{M}_p$, что $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{i \in \omega} \mathcal{M}_i$.

Докажем следующие утверждения.

Предложение 2. *$\mathcal{M}$ предельна над типом p в теории T тогда и только тогда, когда существуют такие наборы $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ что $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_{\bar{a}_i}$, где $\bar{a}_i$ — реализует p, $p_{\bar{a}_i} \models p_{\bar{a}_{i+1}}$ и тип $tp(\bar{a}_{i+1}/\bar{a}_i)$ — неглавный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}$ предельна над p. Тогда $\mathcal{M} = \cup_{i\in\omega}\mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{M}_{i+1}$ и $\mathcal{M} \ncong \mathcal{M}_p$, причем $\mathcal{M}_i \cong \mathcal{M}_p$, т. е. $\mathcal{M}_i$ содержит реализацию типа p, обозначим ее $\bar{a}_i$, тогда $\mathcal{M}_i \cong \mathcal{M}_{\bar{a}_i}$. По предложению 4 [3] существует такая реализация $\bar{b}$ типа p в модели $\mathcal{M}_{\bar{a}_i}$ и кортеж $\bar{a}_{i+1} \in \mathcal{M}_{\bar{a}_i}$, что $tp(\bar{a}_{i+1}/\bar{b})$ — неглавный тип. (Заметим, что мы можем взять в качестве $\bar{a}_i = \bar{b}$).

Пусть теперь выполнена вторая часть утверждения. Тогда заметим, что последовательность моделей $\mathcal{M}_{\bar{a}_i}$ образует необходимую нам элементарную цепь. □

Обозначим $\langle \mathcal{M}, \{\bar{a}_i\}_{i\in\omega}\rangle$ предельную модель $\mathcal{M}$ с кортежами $\bar{a}_i$ из доказанного утверждения.

Следующее утверждение показывает, что изоморфизм предельных моделей с такими наборами определяется синтаксически.

Предложение 3. *Две предельные над p модели $\langle \mathcal{M}, \{\bar{a}_i\}_{i\in\omega}\rangle$ и $\langle \mathcal{N}, \{\bar{b}_i\}_{i\in\omega}\rangle$ изоморфны тогда и только тогда, когда для всех $n \in \omega$ $tp(\bar{a}_0\hat{\ }\bar{a}_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }\bar{a}_n) = tp(\bar{b}_0\hat{\ }\bar{b}_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }\bar{b}_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия изоморфизма очевидно следует равенство типов. В обратную сторону доказательство следует из предложения 6 [3]. □

Осталось доказать, что условие $IL(\widetilde{M}) < \omega$ для всех $\widetilde{M} \in RK(T)/_{\sim RK}$ записывается формулой такой же сложности (Π^1_1), как и условие $|RK(T)| < \omega$.

Действительно, рассмотрим те типы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, которые существуют для выполнения условия $|RK(T)| < \omega$. Над каждым из этих типов должно существовать конечное число предельных попарно неизоморфных моделей. Другими словами, над каждым p_i существует конечное число k_i гиперарифметических множеств $\{\bar{a}^j_0, \bar{a}^j_1, \ldots, \bar{a}^j_n, \ldots\}^{k_i}_{j=1}$ элементов некоторой модели теории T, которые задают k_i попарно неизоморфных предельных моделей над типом p_i, и что любое другое множество элементов, удовлетворяющее второму условию предложения 2, задает предельную модель, изоморфную перечисленным.

Таким образом, мы получаем, что теория модели $\mathcal{M}_i$ нумерации всех вычислимых моделей сигнатуры σ эренфойхтова тогда и только тогда, когда она не является ω-категоричной (арифметическое условие, ввиду синтаксической характеризации через конечность типов, теорема Рылль-Нардзевского, [8]) и удовлетворяет некоторому Π^1_1-условию.

Построение нижней оценки опирается на доказательство Лемппа и Сламана Π^1_1-полноты свойства разрешимой теории быть эренфойхтовой [6].

В доказательстве пункта (2) основной теоремы [6] используется конструкция деревьев Рида построения эренфойхтовых теорий. Для каждого натурального числа e строится вычислимое дерево $Tr_e \subseteq \omega^{<\omega}$, такое что если оно имеет одну бесконечную ветвь, то имеет и континуум бесконечных ветвей. По этому дереву строится полная разрешимая теория T_e. При этом если дерево Tr_e не имеет бесконечных путей, то теория T_e

имеет всего три модели, которые являются вычислимыми. А в случае когда дерево Tr_e имеет континуум бесконечных путей, то T_e имеет континуум счетных моделей.

Найдем эффективно по каждому числу e такую модель $\mathcal{M}_e$, которая является разрешимой моделью теории T_e.

Воспользуемся далее тем фактом, что индексное множество $NoPath$ свойства вычислимого дерева не иметь бесконечных путей является m-полным Π^1_1-множеством, а дополнение этого множества может быть эффективно сведено к индексному множеству $InfPath$ свойства иметь континуум бесконечных путей (это сведение делается путем добавления вместе с каждой новой вершиной $\bar{a}\hat{}\langle n\rangle$ дерева бесконечного числа соседних вершин $\bar{a}\hat{}\langle m\rangle$ для $m \in \omega$). Получим, что если $e \in NoPath$, то модель $\mathcal{M}_e$ разрешима и имеет эренфойхтову теорию. А если $e \in InfPath$, то разрешимая модель $\mathcal{M}_e$ имеет теорию, которая допускает континуум счетных моделей.

В соответствии с замечанием 3 [6] ясно, что при конструировании теории T_e по вычислимому дереву Tr_e сигнатура не фиксирована и зависит от этого дерева. Зафиксировать сигнатуру можно, добавив в нее константные символы c_η и предикатные символы для E^η_ξ (для всех η и $\xi \in \omega^{<\omega} \setminus Tr_e$) и определив их в теории T_e фиксированным элементом и пустыми предикатами соответственно.

Заметим теперь, что сигнатура ограничена, что позволяет применить предложение 1. Таким образом, получаем нижнюю оценку в сигнатуре с одним бинарным предикатом. Это завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2 является элементарным следствием доказанной, ввиду того, что рассматриваемое в ней свойство является отрицанием свойства эренфойхтовости.

Следствие 1. *Индексное множество вычислимых моделей нетривиальной сигнатуры, теория которых допускает бесконечное число счетных моделей, является m-полным Σ^1_1-множеством.*

Список литературы

1. *Гончаров С. С., Найт Дж.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С 639–681.

2. *Гончаров С. С.* Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 6. С. 621–639.

3. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. I // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 1. С. 110–124.

4. *Нуртазин А. Т.* Вычислимые классы и алгебраические критерии автоустойчивости: Дис. … канд. физ.-мат. наук. АН Казахской ССР, Ин-т математики и механики. Лаб. алгебры и логики. Алма-Ата. 1974.

5. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

6. *Lempp S., Slaman Th. A.* The Complexity of the Index Sets of $\aleph_0$-Categorical Theories and of Ehrenfeucht Theories // Proc. of the North Texas Logic Conference. October 8–10, 2004.

7. *Sacks G. E.* Higher Recursion Theory // Perspectives in Mathematical Logic. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

8. *Ryll-Nardzewski C.* On the Categoricity in Power $\leqslant \aleph_0$ // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math., Astron., Phys. 1959. Vol. 7. P. 545–548.

Материал поступил в редколлегию 13.02.2008

Адрес автора

ПАВЛОВСКИЙ Евгений Николаевич

РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск

Ул. Пирогова, 2

Новосибирский государственный университет

e-mail: eugene.pavlovsky@gmail.com