

УДК 532.5:519.6

Ю. Н. Захаров¹, В. П. Потапов², Е. Л. Счастливец², А. В. Чирюкина¹

¹ Кемеровский государственный университет
ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail: zyn@kemsu.ru

² Институт угля и углехимии СО РАН
ул. Рукавишниковая, 21, Кемерово, 650099, Россия
E-mail: zavlab@kemsc.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ЗАТОПЛЕННЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ

В статье рассмотрены три модели течения жидкости – идеальной стратифицированной, идеальной нестратифицированной и вязкой несжимаемой жидкости. Построена картина распространения примеси в шахте для всех трех моделей течения жидкости.

Ключевые слова: математические модели, угольные шахты, течение жидкости, распространение загрязнения.

Введение

В Кемеровской области запущен проект по использованию затопленных шахт для утилизации отходов углеперерабатывающих предприятий. Предполагается, что шламовые воды, до этого хранившиеся в шламоотстойниках, закачанные в затопленную шахту, будут разбавляться фильтрующимися грунтовыми водами, со временем могут отстаиваться, в результате чего произойдет естественная очистка.

Процесс организуется следующим образом: сначала шахта заполняется жидкостью с примесью, далее оставляется для оседания, после чего возобновляется процесс подачи загрязненных вод.

Затопленная шахта представляет собой объект, получить доступ внутрь которого для изучения параметров течения достаточно сложно. Единственным способом прогнозирования протекающих процессов является математическое моделирование.

В данной работе для описания движения жидкости в затопленной шахте мы рассмотрели три модели: течение идеальной стратифицированной и нестратифицированной и вязкой несжимаемой жидкости.

Выбор моделей обусловлен следующими факторами. Отклонение плотности от некоторого среднего значения мало – это позволяет использовать приближение Буссинеска. Внутренняя структура примеси такова, что загрязнение не оказывает влияния на характер течения, но взвесь частиц может вызвать устойчивую стратификацию – это обуславливает выбор модели стратифицированной жидкости. Физические размеры реальной шахты (глубина порядка 600 м при протяженности 6500 м) таковы, что высота выработки (порядка 3 м) является небольшой величиной в соотношении с остальными размерами, поэтому можно предположить и отсутствие стратификации плотности по высоте и рассмотреть также модель нестратифицированной жидкости. Имеющиеся данные натурных измерений позволяют сделать вывод о том, что в затопленной шахте возможны нетривиальные течения, для моделирования которых использована также модель вязкой несжимаемой жидкости.

Скорости движения жидкости малы, поэтому возможно считать течение установившимся и рассмотреть стационарную модель течения совместно с нестационарной моделью распро-

странения примесей. Кроме того, фактор физического размера оказывает влияние на выбор методов для решения численной задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим движение жидкости и распространение примесей в области Ω (рис. 1), которая является характерной для затопленной шахты.

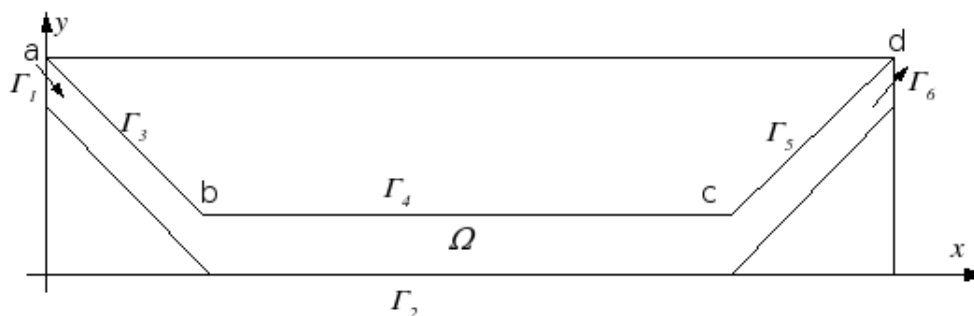


Рис. 1. Вид области решения

В водоеме (см. рис. 1) через отверстие Γ_1 жидкость втекает с заданными скоростью и концентрацией примеси, через участок Γ_4 происходит поступление грунтовых вод, через отверстие Γ_6 жидкость вытекает с неизвестной концентрацией примеси.

Течение идеальной жидкости в приближении Буссинеска относительно функции тока может быть описано одним уравнением Гельмгольца

$$\Delta\psi + k\psi = ky \quad (1)$$

где ψ – функция тока, связанная с вектором скорости (u, v) соотношениями $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$;

$k = \frac{a}{Fr^2}$, $a = \frac{\partial\rho}{\partial y}$; $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gL\Delta\rho/\rho_0}}$ – плотностное число Фруда; g – ускорение свободного падения; u_0 – характерная скорость; L – характерная длина; c – характерная плотность; $\Delta\rho$ – отклонение плотности от среднего значения c_0 .

Если $a = \frac{\partial\rho}{\partial y} = 0$, и тем самым $k = 0$, то жидкость является нестратифицированной.

Течение такой жидкости является безвихревым.

Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье – Стокса, которую мы запишем в переменных «скорость» – «давление»:

$$\begin{aligned} v\Delta u - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial x}, \\ v\Delta v - \frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $(x, y) \in \Omega$, Ω – двумерная область с границей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^6 \Gamma_i$; ν – коэффициент кинематической вязкости.

Граничные условия для уравнения (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 : \psi &= 0; \\
\Gamma_1 : \psi &= m_1(y - y_0), \quad y \in [y_0, y_1]; \\
\Gamma_3 : \psi &= \psi(a); \\
\Gamma_4 : p_{\text{внешн}} &= p_{\text{внутр}} + c_1(p_{\text{внешн}} - p_{\text{внутр}})(x - x_1), \quad x \in [x_1, x_2]; \\
\Gamma_5 : \psi &= \psi(c); \\
\Gamma_6 : \psi(y) &= -m_2(y - y_0), \quad y \in [y_0, y_1];
\end{aligned} \tag{3}$$

где $m_1 = \text{const}$ – скорость жидкости во входном отверстии; $m_2 = \text{const}$ – скорость в выходном отверстии. Постоянные m_1 и m_2 подобраны так, что $\int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$; x_1 соответствует точке b ; x_2 – точке c ; y_0 – высота нижнего края отверстий; y_1 – верхнего края; $c_1 > 0$ – константа, отражающая проницаемость верхней стенки для фильтрации, $p_{\text{внешн}} = p_{\text{внешн}}(x, y)$ – заданное внешнее давление; $p_{\text{внутр}}$ – определяется из уравнения

$$\Delta p_{\text{внутр}} = -2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2, \tag{4}$$

которое является следствием системы уравнений Навье – Стокса (2).

Для уравнений (2) граничные условия поставим в виде:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 : u &= m_1, v = 0; \\
\Gamma_{2,3,5} : u &= 0, v = 0; \\
\Gamma_4 : u_{\text{внешн}} &= 0, v_{\text{внутр}} = -c_1(p_{\text{внешн}} - p_{\text{внутр}})(x - x_1); \\
\Gamma_6 : u &= m_2, v = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение, описывающее распространение примесей с учетом оседания, имеет вид [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + (v - v_s) \frac{\partial C}{\partial y} = D \Delta C, \tag{6}$$

где $C = C(x, y)$ – концентрация примеси; u, v – компоненты вектора скорости $w = (u, v)$; v_s – скорость оседания примеси; D – коэффициент диффузии; Δ – двумерный оператор Лапласа.

Для уравнения (6) поставим следующие граничные:

$$C(t, x, y)|_{\Gamma_1} = C_0, \quad \frac{\partial C}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0 \tag{7}$$

и начальные условия:

$$C(0, x, y)|_{\Gamma_1} = C_0, \quad C(0, x, y)|_{\text{int } \Omega} = 0, \tag{8}$$

где $\Gamma = \bigcup_{i=2}^6 \Gamma_i$, $\text{int } \Omega$ – внутренность области решения Ω .

Методы решения

Для решения задачи (1), (2), (6) введем в области решения Ω прямоугольную сетку Ω_h , согласованную с границей. Аппроксимируем исходные дифференциальные уравнения (1), (2) на сетке Ω_h разностными схемами, имеющими второй порядок на равномерной сетке [2].

Граничные и начальные условия (3) и (5) заменим при аппроксимации их разностными аналогами.

В итоге мы получим систему уравнений

$$A(u)u = f, \tag{9}$$

где u – вектор размерности m ; f – известная правая часть; $A(u) = A_1(u) + A_2$, $A_1(u)$; A_2 – матрицы размерности m , $A_1(u)$ – линейно зависит от элементов вектора u ; A_2 – матрица констант. Если система (9) получена путем аппроксимации уравнения (1), то $A_1(u) = 0$, и

система является линейной. Если же система (9) является следствием системы уравнений Навье – Стокса, то $A_1(u) \neq 0$ и (9) является билинейной.

Для решения (9) мы использовали метод неполной аппроксимации минимальных невязок:

$$u^{n+1/2} \tau = A_1 u^n - f^n, \\ u^{n+1} \alpha_n = u^{n+1/2} \tau,$$

где τ_n – итерационный параметр, α_n выбирается константой или в виде диагональной матрицы, $z_n = \{z_i\}$ – некоторый набор векторов. В [3] показано, что в линейном случае итерационный метод является сходящимся, а в нелинейном – выбор матрицы параметров α_n из условия минимума последовательности квадратичных функционалов, характеризующих ошибку метода, обеспечивает монотонное убывание нормы невязки $r^n = A(u^n)u^n - f$.

Для решения задачи (6), (7), (8) использовали противопоточную схему переменных направлений.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм решения задачи (1), (4), (3) (или (2), (4), (6) – для вязкой несжимаемой жидкости).

1. Задав начальное приближение к ψ , решаем уравнение (4) (или решаем систему (2) относительно u, v, p) в области Ω .
2. Находим давление p на границе Γ и решаем уравнение (1) с граничными условиями (3) (или систему (2) с граничными условиями (5) соответственно).
3. Вычисляем ψ (или u, v, p) в области Ω и на тех границах, где происходит фильтрация (Γ_4), заново находим давление на границе из уравнения (4) (решаем систему (2) для вязкой несжимаемой жидкости), включая границу, и возвращаемся к шагу 2. Повторяем шаги 2 и 3, пока найденное поле ψ (или значения u, v, p) не устанавливается с некоторым заданным значением нормы невязки.
4. Решаем уравнение (6) с начальными условиями (7), граничными условиями (8), находя картину распространения примеси.

Численное моделирование течения и распространения примесей

Приведем некоторые результаты проведенных численных расчетов. Оказалось, что полученные стационарные течения для рассматриваемых моделей существенно различаются.

На рис. 2 представлены линии уровня функции тока в случае нестратифицированной и стратифицированной жидкости (а и б) и треки частиц в вязкой несжимаемой жидкости (в). В случае нестратифицированной жидкости течение распространяется на всю глубину водоема, реализуя безвихревое течение. В случае стратифицированной жидкости имеет место вихревое течение с ячеистой структурой, при этом вихри прижимают поток фильтрующей через верхнюю стенку жидкости вверх. Течение вязкой несжимаемой жидкости также имеет вихревую структуру, при этом вихри локализованы вблизи входа в прямой горизонтальный участок области решения.

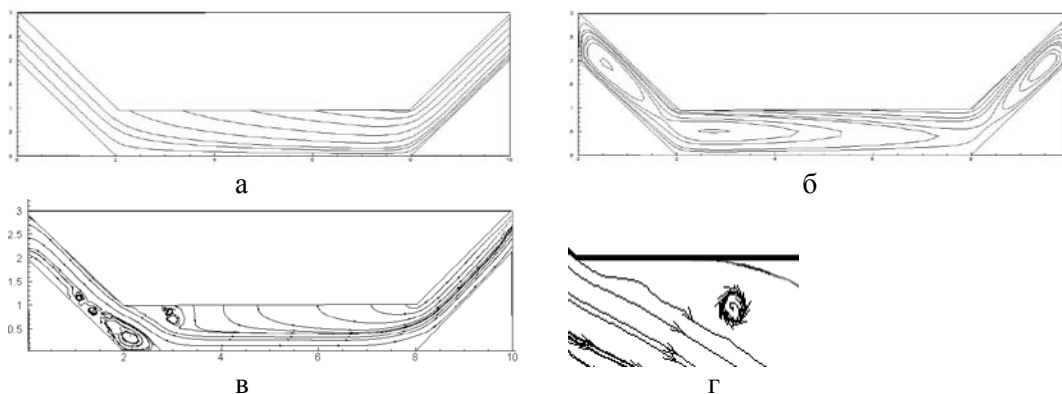
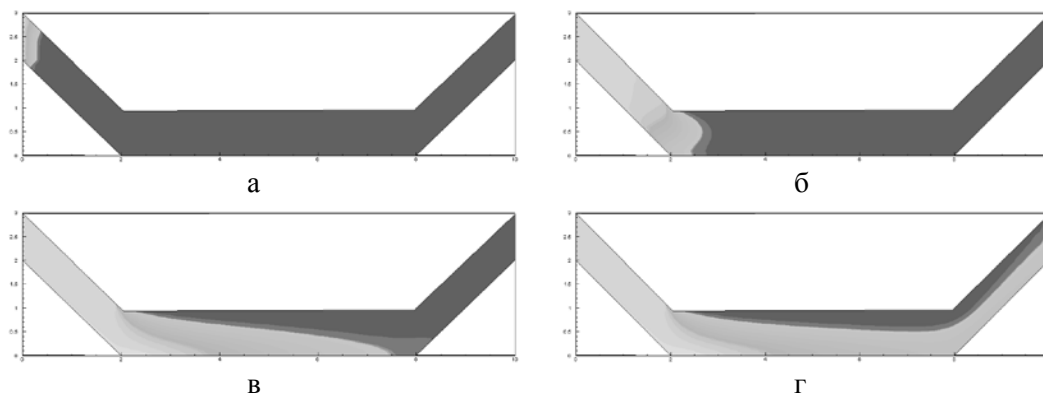
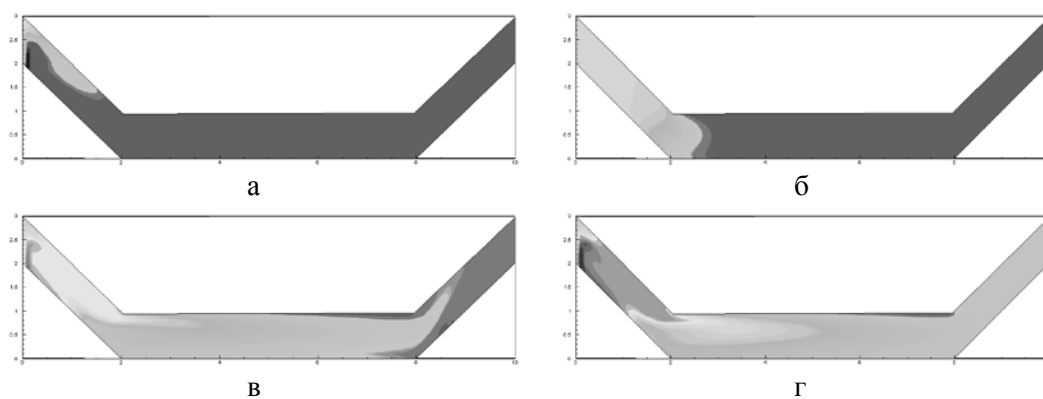


Рис. 2. Линии тока в водоеме с фильтрацией сверху: а – нестратифицированная жидкость; б – стратифицированная жидкость; в – вязкая несжимаемая жидкость; г – крупный вид вихря у верхней границы в вязкой несжимаемой жидкости

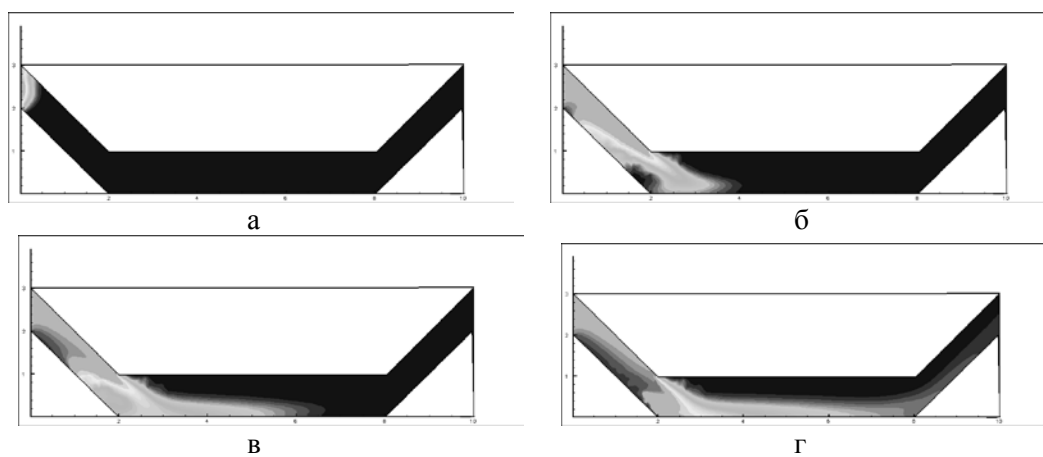
Нестратифицированная жидкость



Стратифицированная жидкость



Вязкая несжимаемая жидкость



Шкала значений



Рис. 3. Распространение примеси в шахте. Шаг по времени $\tau = 0,01$, коэффициент диффузии $D = 0,01$, показаны шаги по времени: а - $t = 0,3$; б - $t = 0,6$; в - $t = 0,9$; г - $t = 1,2$. Концентрация примеси на входе в водоем задана 0,2

На рис. 3 показана динамика распространения примеси, изображены мгновенные снимки процесса. В нестратифицированной жидкости за счет фильтрации и оседания концентрация у верхней стенки ниже. Загрязнение распространяется на всю длину водоема и достигает выходного отверстия. В стратифицированной жидкости поток, содержащий загрязняющие частицы, следует вдоль вихревых структур, проникая в них за счет диффузии, первые признаки достижения примесью выходного отверстия появляются раньше, чем в случае нестратифицированной жидкости.

Для случая вязкой несжимаемой жидкости примесь проникает в вихри за счет диффузии и фильтрации, но вихри, образуемые на начальном участке, задерживают проникновение примеси далее по потоку, снижая ее концентрацию на выходе из Ω (см. рис. 3). Во всех рассмотренных случаях наблюдается рост концентрации загрязнения вблизи входа в водоем и на дне под входной трубой.

Как было отмечено во введении, процесс очистки сточных вод организуется следующим образом: на начальном этапе затопленная шахта заполняется шламовыми водами, содержащими загрязняющие вещества, далее шахта остается для отстаивания, в процессе которого происходит оседание примеси и разбавление жидкости фильтрующимися грунтовыми водами. После завершения процесса отстаивания возобновляется процесс подачи загрязненных вод.

На рис. 4 показана динамика среднеинтегрального (по сечению трубы) значения концентрации загрязняющих частиц на выходе из шахты. Рассмотрена динамика концентрации при организации циклов (с периодами заполнения шахты и отстаивания) разной протяженностью – длинные циклы, когда период заполнения таков, что происходит стабилизация значения концентрации на выходе из шахты, и короткие циклы, когда время подачи загрязненной жидкости и время отстаивания значительно меньше, чем время стабилизации значения концентрации на выходе из шахты.

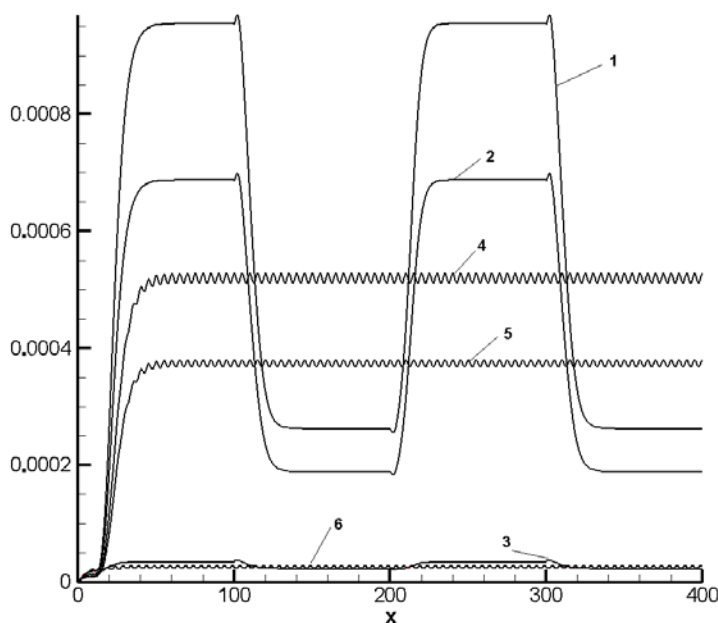


Рис. 4. Массовая доля примеси на выходе из шахты: 1, 2, 3 – цикл до установления концентрации на выходе (длиной 100); 4, 5, 6 – короткий цикл (длиной 5); 1, 4 – нестратифицированная жидкость; 2, 5 – вязкая несжимаемая жидкость; 3, 6 – стратифицированная жидкость

Оказалось, что при организации длинных циклов для всех рассмотренных моделей жидкости наблюдается кратковременное повышение значения концентрации на выходе из шахты в момент прекращения подачи загрязненных вод. При организации коротких циклов

для всех трех моделей жидкости концентрация примеси на выходе оказывается более стабильной (с меньшей разницей между наибольшим и наименьшим значением концентрации), чем при организации длинных циклов, и максимальное значение меньше, чем при длинных циклах.

Далее была проведена работа по приведению модели в соответствие с данными натуральных измерений. Результаты для некоторых веществ приведены в таблице:

Вещество	Концентрация, натурные измерения			Расчетные данные модели, концентрация			Степень совпадения натуральных измерений и модели	Реком. модель
	на входе	на выходе	уменьш. конц., раз	на входе	на выходе	уменьш. конц., раз		
Азот нитритный	0,15	0,003	55	0,15	0,0028	53,5	В, С – 97 %, Н – нет	В, С
Взвешен. вещества	10000–50000	20,85–29,87	333–1667	10000	28,064	356,3	С – 93 %, Н, В – нет	С
Фенолы	0,01	0,001–0,002	3,5	0,01	0,003	3,3	Н – 95 %, С – 72 %, В – нет	Н, С
Железо	0,78	0,57	1,4	0,78	0,42	1,9	В – 75 %, Н, С – нет	В

Примечание: Н – модель нестратифицированной жидкости; С – модель стратифицированной жидкости; В – модель вязкой несжимаемой жидкости.

Например, для «Азота нитритного» можно использовать две модели жидкости – вязкую несжимаемую и стратифицированную жидкость, – получая при этом высокую степень совпадения натуральных данных и результатов вычислительного эксперимента. При этом возможность выбора из двух моделей позволит сократить время расчетов.

Для других же веществ, например, «Взвешенных веществ», расчеты показывают хорошую степень соответствия модели и натуральных данных только для одной модели течения жидкости (стратифицированной) – отсюда может следовать рекомендация по использованию данной модели при моделировании процессов, протекающих с этим конкретным веществом.

В результате можно заключить, что концентрация различных веществ, растворенных и взвешенных в шламовых водах, описывается различными моделями течения жидкости.

Список литературы

1. Белолипецкий В. М., Костюк В. Ю., Шокин Ю. И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука, 1991.
2. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
3. Захаров Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004. 239 с.

Материал поступил в редколлегию 22.08.2009

Yu. N. Zakharov, V. P. Potapov, E. L. Schastlivtsev, A. V. Chiryukina

SIMULATION OF DIRT EXPANSION IN FLOODED COAL MINES

The article presents three models of flow – ideal stratified, ideal non-stratified and viscous incompressible liquid. The dynamic of dirt expansion is found.

Keywords: mathematical models, coal mines, water flow, dirt expansion.