УДК 517.53/.54

А. В. Сычев

О НАУЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПАВЛА ПЕТРОВИЧА БЕЛИНСКОГО

Доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РСФСР П. П. Белинский (23.09.1928 – 30.12.1986) — один из самых первых сотрудников Сибирского отделения РАН и первый декан механико-математического факультета НГУ. Наряду с М. А. Лаврентьевым является основоположником теории квазиконформных отображений. Им дано решение ряда классических проблем этой теории, а его идеи и результаты послужили источником новых активно развивающихся направлений геометрической теории функций. В статье дается обзор результатов П. П. Белинского к восьмидесятилетию со дня его рождения.

Павел Петрович Белинский родился 23 сентября 1928 г. в Мелитополе Украинской ССР в семье служащего Петра Ивановича Белинского. В 1946 г. с золотой медалью окончил среднюю школу в Киеве и поступил на физико-математический факультет Львовского государственного университета, который окончил в 1951 г. с отличием и был оставлен в аспирантуре. В 1954 г. он блестяще защитил кандидатскую диссертацию «Квазиконформные отображения». С 1954 по 1957 г. — доцент Львовского государственного университета.

Продолжительный период деятельности П. П. Белинского связан с Сибирским отделением АН СССР. Он был в числе самых первых сотрудников Отделения, приехавших в Сибирь в 1958 г. вместе с академиком Михаилом Алексеевичем Лаврентьевым вскоре после постановления Совета Министров СССР «О создании Сибирского отделения Академии наук СССР», и работал в Институте математики Сибирского отделения РАН со времени его основания до конца своих дней: с 1958 г. — в должности старшего научного сотрудника, а с 1967 г. — заведующим отдела теории функций. В 1959 г. он защитил докторскую диссертацию «Общие свойства квазиконформных отображений» (это была первая докторская диссертация, защищенная в Сибирском отделении), которая стала одним из важных этапов в развитии геометрической теории функций.

Основным направлением научной деятельности П. П. Белинского являлась теория квазиконформных отображений плоских и многомерных областей. Им дано решение целого ряда классических проблем этой теории, а его идеи и результаты послужили источником ряда новых активно развивающихся направлений геометрической теории функций.

Обратимся к одному из исходных определений квазиконформных отображений.

Пусть $w = f(z)$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, — гомеоморфизм плоской области D, принадлежащий классу C^1.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 113–119

Во всякой точке $z \in D$ он порождает отображение дифференциалов

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy, \end{aligned} \tag{1}$$

которое можно также записать в комплексной форме:

$$dw = f_z dz + f_{\bar z} d\bar z, \tag{2}$$

где $f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $f_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ — формальные производные f по z и $\bar z$ соответственно.

Геометрически (1) представляет собой аффинное отображение плоскости (dx, dy) на плоскость (du, dv). Оно переводит круги с центром в начале координат в эллипсы.

Из (2) имеем

$$(|f_z| - |f_{\bar z}|)|dz| \le |dw| \le (|f_z| + |f_{\bar z}|)|dz|.$$

Отсюда следует, что отношение длины большей полуоси эллипса к длине меньшей полуоси равно

$$p(z) = \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|}.$$

Отображение f называется **квазиконформным**, если величина $p(z)$ ограничена. Отображение f называется ***q*-квазиконформным**, $1 \le q < \infty$, если $p(z) \le q$. Очевидно, что 1-квазиконформное отображение является конформным.

Согласно этому определению в каждой точке $z \in D$ главная линейная часть отображения f преобразует круг с центром в z в эллипс, отношение $p(z)$ длины большей полуоси которого к длине меньшей полуоси ограничено постоянной q.

Это определение впервые было введено М. А. Лаврентьевым в его работе [1]. Там же $\theta(z)$ — угол между большей полуосью эллипса и полуосью $x \ge 0$ и $p(z)$ были названы характеристиками квазиконформного отображения.

Различные другие более поздние определения как плоских, так и пространственных квазиконформных отображений являются естественными обобщениями этого определения.

Свои первые результаты П. П. Белинский доложил на заседании Московского математического общества в 1950 г. Они были посвящены вопросам существования и единственности плоских квазиконформных отображений с измеримыми характеристиками. Содержание его основного результата выражает следующая теорема:

Теорема 1 [2; 7]. *Каковы бы ни были область D и измеримая функция $h(z)$, удовлетворяющая на произвольном компакте $K \subset D$ условию $|h(z)| \le h(K) < 1$, существует функция $w = f(z)$, осуществляющая квазиконформное отображение области D и обладающая почти всюду в D заданной характеристикой $h(z)$. Отображающая функция $f(z)$ определяется с точностью до конформного отображения в плоскости w.*

К вопросу об единственности квазиконформного отображения, определяемого своими характеристиками, тесно примыкает вопрос о стирании особенностей отображений. В классе непрерывных отображений задача о стирании особенностей формулируется следующим образом: для каких множеств E, $\mathrm{mes}\ E = 0$, функция, определенная и непрерывная в области $D \subset R^2$ и осуществляющая квазиконформное отображение $D \backslash E$, оказывается квазиконформной в D? П. П. Белинским доказано, что в классе таких отображений всякое множество конечной длины устранимо. Им построен пример кривой, не спрямляемой ни в какой своей части, но являющейся устранимой.

Важную роль в решении вопроса о замыкании класса непрерывно дифференцируемых квазиконформных отображений, а также в установлении критерия нормальности семейства плоских квазиконформных отображений и в исследовании их дифференциальных свойств сыграли две следующие теоремы П. П. Белинского:

Теорема 2 (о равностепенной непрерывности) [7]. *Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, отображает квазиконформно круг $|z \leq 1$ на круг $|w| \leq 1$ и $p(z) \leq q$. Тогда*

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{M}\right|^q < |f(z_1) - f(z_2)| < M|z_1 - z_2|^{1/q},$$

где M — абсолютная постоянная, меньшая 48.

Теорема 3 (о равномерной оценке искажения круга) [4; 7]. *Пусть функция $w = f(z)$, $f(\infty) = \infty$, отображает квазиконформно плоскость z на плоскость w и $p(z) \leq q$. Тогда произвольная окружность $\mathcal{K} : |z - z_0| = r$ преобразуется при этом так, что*

$$\frac{\max\limits_{z \in \mathcal{K}} |w(z) - w(z_0)|}{\min\limits_{z \in \mathcal{K}} |w(z) - w(z_0)|} \leq D(q),$$

где константа $D = D(q)$ зависит только от q.

Им были получены также различные точные метрические оценки искажений при плоских квазиконформных отображениях, исходной для которых послужил следующий результат.

Теорема 4 [3; 7]. *Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, квазиконформно отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$. Тогда*

$$|f(re^{i\varphi})| \leq \rho(r, q), \tag{3}$$

где $\rho = \rho(r, q)$ однозначно определяется из соотношения

$$\frac{K'(\rho)}{K(\rho)} = \frac{1}{q}\frac{K'(r)}{K(r)}.$$

Здесь $K(k)$ и $K'(k)$ соответственно обозначают полные эллиптические интегралы первого рода от модулей k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Функция, для которой в (3) достигается равенство, существенно зависит от r и q и определяется с точностью до поворотов в плоскостях z и w.

Крупным результатом исследований П. П. Белинского явился разработанный им вариационный метод решения экстремальных задач для квазиконформных отображений [5]. Указанный метод позволяет явно выписывать отображения, близкие к конформным, для различных канонических областей и с помощью этого проводить исследование экстремальных функций. Этим методом были решены наиболее общие экстремальные задачи теории плоских квазиконформных отображений, а также получены различные точные оценки отклонения квазиконформного отображения с дилатацией, близкой к единице, от конформного.

П. П. Белинскому принадлежит также идея измерять величину деформации не максимальным коэффициентом квазиконформности, а некоторым его усредненным значением по всей деформируемой области. Эта характеристика оказалась более пригодной для приложений, так как являлась математическим аналогом суммарной энергии, затраченной на выполнение той или иной деформации. Возник целый ряд новых интересных задач, а некоторые из старых проблем (например, проблема устойчивости) получили новое освещение в связи с предложенной трактовкой квазиконформности. Отображения, у которых эта усредненная характеристика ограничена, стали в дальнейшем называть **квазиконформными в среднем**. Глубокие результаты для этого класса отображений были получены самим П. П. Белинским. В частности, он решил поставленную в 1938 г. О. Тейхмюллером известную проблему о почти конформных отображениях, привлекавшую многих специалистов важностью ее приложений в теории граничных задач аналитических и мероморфных функций. Именно им был доказан следующий результат:

Теорема 5 [7]. *Пусть функция $w = f(z)$ определена, ограничена и осуществляет квазиконформное отображение области $0 < |z| \leq 1$, причем*

$$\iint\limits_{0<|z|\leq 1} \frac{p(z)-1}{|z|^2}\, d\sigma_z = A < \infty.$$

Тогда существует $\lim\limits_{z\to 0} w = w_0$ и $\lim\limits_{z\to 0} \frac{w-w_0}{z} \neq 0, \infty$.

Рубежным итогом этих фундаментальных исследований П. П. Белинского в области плоских квазиконформных отображений стала его монография «Общие свойства квазиконформных отображений», изданная в 1974 г. [7].

В конце 1930-х гг. М. А. Лаврентьев поставил ряд фундаментальных проблем теории пространственных квазиконформных отображений, определивших ее развитие на несколько десятилетий вперед. П. П. Белинский внес существенный вклад в решение этих проблем, в частности в решение проблемы устойчивости теоремы Лиувилля о конформных отображениях пространства. Суть этой проблемы состоит в следующем. Согласно теореме Лиувилля, конформные отображения пространства исчерпываются преобразованиями Мебиуса, т. е. суперпозициями инверсий относительно сфер. Отсюда следует, что конформным образом шара может быть только шар. М. А. Лаврентьев высказал гипотезу, что q — квазиконформное отображение при q, близком к единице, должно переводить шар в область, близкую к шару. Продвижения в доказательстве этой гипотезы были получены самим М. А. Лаврентьевым и Ю. Г. Решетняком. Результат, полученный П. П. Белинским, может быть сформулирован следующим образом:

Теорема 6 [6]. *q-квазиконформное отображение $y = f(x)$ шара при q, близком к единице, с помощью вспомогательного мебиусова отображения может быть пронормировано так, что отображение $f(x)$ продолжается до гомеоморфизма замкнутого шара; в замкнутом шаре отображение близко к тождественному, причем степень близости зависит только от $q-1$ и является величиной порядка $q-1$; отображение $f(x)$ и обратное к* *нему удовлетворяют в замкнутом шаре условию Гельдера с постоянной и показателями, близкими к единице и зависящими лишь от q.*

М. А. Лаврентьевым и П. П. Белинским был поставлен ряд крупных проблем теории пространственных квазиконформных отображений. Некоторые из них содержатся в их совместной публикации [8]. Часть этих проблем решена, другие еще ждут своего решения. Например, наряду с упомянутой выше проблемой устойчивости теоремы Лиувилля решена проблема Лаврентьева о том, что локально q-квазиконформное отображение пространства является глобальным гомеоморфизмом (В. А. Зорич). Частично (для квазиконформных автоморфизмов шара) решена проблема Лаврентьева–Белинского: можно ли произвольное пространственное q-квазиконформное отображение представить в виде суперпозиции отображений, сколь угодно близких к конформным, или в виде непрерывной деформации из тождественного так, чтобы близкие по параметру отображения отличались друг от друга на отображение, близкое к конформному? (В. А. Селезнев).

Остановимся на проблемах Белинского, решение которых неожиданно привело к принципиально новому направлению исследований.

В классических постановках исследовательских задач в качестве деформируемой среды рассматривалось либо все пространство, либо такая его часть, в которой каждая точка обладала пространственной окрестностью. Это позволяло применять методы, использующие дифференциальное исчисление и теоремы математического анализа. Однако во многих ситуациях, встречающихся в реальной практике, исследуемый деформируемый объект не обладает такой хорошей и удобной структурой. Строение деформируемой среды может быть настолько сложным, что описание происходящих в ней процессов на привычном языке дифференциальных уравнений становится принципиально невозможным. Наиболее естественная ситуация такого рода возникает при рассмотрении процессов, происходящих на континуумах, погруженных в пространство, но не обладающих гладкой структурой (как, например, металлическая пленка, сильно изъеденная коррозией).

П. П. Белинский обратил внимание на то, что в этих ситуациях мы можем использовать емкости конденсаторов в качестве прибора, регистрирующего и измеряющего деформацию. При этом полем конденсатора служит все пространство, а пластины его расположены на деформируемом континууме и деформируются вместе с ним, что и приводит к изменению емкости. Оригинальность этого подхода к описанию деформации сложных континуумов состоит в его простоте и естественности. До П. П. Белинского были попытки использовать конденсаторы для измерения деформации на континуумах, но при этом поле конденсатора пытались «втиснуть» в сам деформируемый объект, что заводило в тупик из-за невозможности разумного определения емкости на нерегулярных континуумах. П. П. Белинский предложил вычислять емкость поля конденсатора в обычном пространстве, но следить за ее изменением при деформации пластин на континууме. Деформации континуумов, при которых существует оценка для искажения емкостей всех таких конденсаторов, были названы **ОИМ-гомеоморфизмами.**

Существенные продвижения в изучении ОИМ-гомеоморфизмов были получены

В. В. Асеевым. Основные его усилия были направлены на решение двух фундаментальных проблем П. П. Белинского. Первая из них — это гипотеза о том, что если при деформации континуума емкости всех конденсаторов с пластинами на нем сохраняют свое значение, то такая деформация является конформным преобразованием всего пространства (т. е. мебиусовым преобразованием) — и ничем иным быть не может. В 1990 г. В. В. Асеев получил полное решение этой проблемы на плоскости, а в 2000 г. — ее решение в пространстве в том случае, когда деформируемый объект имеет хотя бы четыре «хорошие» точки. Полное решение этой проблемы в пространстве остается открытым. Вторая проблема Белинского — это гипотеза о том, что при наличии какой-нибудь оценки для искажения емкостей конденсаторов обязательно существует и линейная оценка искажения. Эта проблема пока исследована лишь в очень частных ситуациях на плоскости, и ее изучение продолжается.

Заканчивая обзор результатов П. П. Белинского, можно заключить, что работами Лаврентьева – Белинского 1930–1960-х гг. были заложены основы теории квазиконформных отображений, послужившей источником новых идей и направлений исследования в области геометрической теории функций. При этом круг изучаемых школой Лаврентьева – Белинского проблем постоянно расширяется, а методы исследования совершенствуются. Развитая ею теория представляет собой далеко продвинутый раздел теории функций, имеющий самые различные приложения как в самой математике, так и в механике.

П. П. Белинскому принадлежит также значительная роль в подготовке математических научных кадров. Работая в Институте математики Сибирского отделения РАН, он одновременно вел большую научно-педагогическую работу в Новосибирском государственном университете со времени его основания и был первым деканом его механико-математического факультета. Длительное время под его руководством постоянно работал пользовавшийся широкой известностью научно-исследовательский семинар. Многие его ученики стали докторами и кандидатами наук.

Список литературы

1. *Лаврентьев М. А.* Sur une Classe de Representation Continues // Мат. Сб. 1935. № 42. С. 407–423.

2. *Белинский П. П.* Теорема существования и единственности квазиконформных отображений // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2 (42). С. 145.

3. *Белинский П. П.* О метрических свойствах квазиконформного отображения // ДАН СССР. 1953. Т. 93, № 4. С. 589–590.

4. *Белинский П. П.* О нормальности семейств квазиконформных отображений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 4. С. 651–652.

5. *Белинский П. П.* Решение экстремальных задач теории квазиконформных отображений вариационным методом // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 3. С. 303–330.

6. *Белинский П. П.* Устойчивость в теореме Лиувилля о пространственных квазиконформных отображениях // Некоторые проблемы математики и механики. Л., 1970. С. 88–102.

7. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.

8. *Лаврентьев М. А., Белинский П. П.* Некоторые проблемы геометрической теории функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. № 128. С. 34–40.

Материал поступил в редколлегию 11.06.2008

Адрес автора

СЫЧЕВ Анатолий Викторович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, 90
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: btp@math.nsc.ru
Тел.: (383) 3333-171