

Д. А. Доможиров, Т. Г. Гамидов, Н. М. Ибрагимов

Институт экономики
и организации промышленного производства СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: d.domozhirov@gmail.com; tgamidov@gmail.com;
naimdjon@ieie.nsc.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РАВНОВЕСНОГО И КОАЛИЦИОННОГО АНАЛИЗА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ

Для одной из модификаций оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели рассматриваются теоретико-игровые аспекты – ядро, равновесия Вальраса и Эджворта. Разработаны и реализованы алгоритмы поиска названных состояний эквивалентного и взаимовыгодного обмена между регионами. Алгоритмы апробированы на малоразмерном модельном комплексе условной экономики. Результаты расчетов показывают непротиворечивость алгоритмов теории и дают возможность использовать их в прикладном анализе при наличии соответствующих вычислительных мощностей.

Ключевые слова: оптимизационная межрегиональная межотраслевая модель, модель взаимодействия регионов, Парето-границы, равновесия Вальраса и Нэша, k -ядер Эджворта, ядро кооперативной игры.

Введение

Для изучения теоретико-игровых аспектов оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели (ОМММ) были проанализированы и адаптированы к ОМММ понятия и результаты теории кооперативных игр и теории экономического равновесия, а именно:

- теорема существования равновесия Эджворта для модели межрегионального взаимодействия;
- теорема существования ядра модели межрегионального взаимодействия (равновесия Нэша);
- понятие Вальрасовского равновесия [1].

Объектом исследования является мультирегиональная модель, по своей структуре соответствующая модификации ОМММ с условными центрами [2]. Целью исследования выступает разработка инструментария для равновесного и коалиционного анализа межрегиональной модели, введение в схему анализа новых теоретических конструкций (k -ядра Эджворта). Применение новых, ранее не использовавшихся в практических вычислениях конструкций обуславливает новизну работы. Используемые в настоящий момент алгоритмы прикладного анализа [3] математически в полной мере не обоснованы. В работе делается попытка разработать теоретически чистые алгоритмы, но для более узкого класса межрегиональных моделей. Последнее обстоятельство обосновывает теоретическую ценность настоящей работы.

Для модели были разработаны и программно реализованы алгоритмы поиска Парето-границы, множеств равновесий Вальраса и Нэша, k -ядер Эджворта.

В настоящей работе дано описание межрегиональной модели, математические определения конструкций равновесного анализа и описание алгоритмов поиска данных конструкций, приведены результаты экспериментальных расчетов, проведенных на условном примере из трех регионов и пяти отраслей.

Описание межрегиональной модели

Рассматривается модель взаимодействия регионов вида [1]:

$$M = \left\langle \mathbf{R}, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s \in \mathbf{R}} \right\rangle,$$

где $\mathbf{R} = \{1, 2, \dots, r\}$ – множество (номеров) регионов;

$A^s - n_s \times n_s$ матрица материальных затрат региона $s \in \mathbf{R}$;

$G^s, H^s - n_s \times n$ матрицы, характеризующие способы ввоза и вывоза региона $s \in \mathbf{R}$;

n_s – количество отраслей, представленных регионом $s \in \mathbf{R}$;

n – количество транспортабельных отраслей экономики;

b^s, d^s – соответственно вектор ограничений на ресурсы, вектор затрат, связанных с целями развития региона $s \in \mathbf{R}$.

Технологические множества каждого региона $s \in \mathbf{R}$ задаются соотношением

$$X_s = \left\{ (x^s, u^s, v^s, z^s) \in \mathbb{R}_+^{n_s} \times \mathbb{R}_+^{n_s} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s \right\},$$

z^s – уровень конечного потребления региона $s \in \mathbf{R}$ (целевая переменная региона).

Множество *сбалансированных* планов произвольной коалиции регионов $T \subseteq \mathbf{R}$:

$$X_M(T) = \left\{ (x^s, u^s, v^s, z^s)_{s \in T} \in \prod_{s \in T} X_s \mid \sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s \right\}.$$

Задача линейного программирования:

$$\begin{cases} z \rightarrow \max \\ z^s - \lambda^s z \geq 0, \forall s \in \mathbf{R} \\ A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s, \forall s \in \mathbf{R} \\ \sum_{s \in \mathbf{R}} u^s \geq \sum_{s \in \mathbf{R}} v^s \end{cases}$$

где $(\lambda^s)_{s \in \mathbf{R}}, 0 \leq \lambda^s \leq 1, \sum_{s \in \mathbf{R}} \lambda^s = 1$ – вектор территориальной структуры конечного потребления,

по своей структуре совпадает с модификацией ОМММ с условными центрами [2].

В терминах подробного описания данной модификации ОМММ [2] матрицы и переменные модели M имеют следующий вид:

$$x^s = (x^s, \Delta x^s, u^s).$$

$$A^r = \begin{pmatrix} A^s & \Delta A^s & B^s \\ -h^s & -\Delta h^s & F^s \\ E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \\ -l^s & -\Delta l^s & 0 \end{pmatrix} \quad b^s = \begin{pmatrix} -q^s \\ 0 \\ -N^s \\ -\Delta N^s \\ -\tilde{u}^s \\ -L^s \end{pmatrix}.$$

$$u^s = x^{+s}, \quad v^s = x^{s+}, \quad z^s = z^s.$$

$$G^s = C^{+s} = \begin{pmatrix} -\tilde{E} \\ c_u^s \end{pmatrix}, \quad H^s = C^{s+} = \begin{pmatrix} -\tilde{E} \\ c_v^s \end{pmatrix}, \quad d^s = \alpha^s.$$

В правых частях матричных выражений (индекс региона r опущен):

x – вектор объемов производства на производственных мощностях, имевшихся к началу прогнозного периода и сохранившихся к его концу (на старых мощностях), размерность n_s ;

$\Delta x = (\Delta^i x)_i^{N^s}$ – вектор объемов производства на вновь введенных в течение прогнозного периода мощностях (на новых мощностях); i – индекс способа производства, N – их количество, размерность вектора $n_s \cdot N^s$;

u – объем инвестиций. Если n_k – количество капиталобразующих отраслей, а количество способов инвестирования (приростов в линеаризованном законе роста инвестиций) равно N_k , то размерность вектора $n_k \cdot N_k$;

E – единичная матрица соответствующей размерности;

$A, \Delta A$ – технологические матрицы для базового объема производства и прироста прироста производства, размерность $A - n_s \times n_s$, размерность $\Delta A - n_s \times (n_s \cdot N^s)$;

B – матрицы способов инвестирования для базового периода и для прироста инвестиций, размерность $n_s \times (n_k \cdot N_k)$;

h – матрица коэффициентов капиталоемкости на старых мощностях, размерность $n_k \times n_s$;

Δh – аналогичный вектор на новых мощностях (капиталоемкость ввода новых мощностей в течение прогнозного периода), размерность вектора $n_s \times (n_s \cdot N)$;

F – матрица линеаризации закона роста инвестиций, размерность $n_k \times (n_k \cdot N_k)$

l – вектор-строка коэффициентов трудоемкости на старых мощностях, размерность n_s

Δl – аналогичный вектор на новых мощностях, размерность $n_s \cdot c^s$;

q – вектор фиксированных объемов конечной продукции, включающих прирост запасов и сальдо экспорта-импорта продукции, размерность n_s ;

N – вектор старых мощностей производства, размерность n_s ;

ΔN – вектор верхних границ на всевозможные вводы новых производственных мощностей (ставятся обычно в некоторых регионах по некоторым отраслям добывающей промышленности и интерпретируются как соответствующие ограниченные природные ресурсы), размерность $n_s \cdot N^s$;

L – имеющиеся трудовые ресурсы (скаляр);

x^{s+}, x^{+s}, z^s – вектора вывоза продукции в другие регионы, ввоза продукции (размерность n) из других регионов и скаляр конечного потребления региона;

\tilde{E} – матрица, образованная из единичной матрицы размерности n_s вычеркиванием столбцов, соответствующих отраслям с нетранспортабельной продукцией, и строки, соответствующей транспортной отрасли, размерность матрицы $(n_s - 1) \times n$;

c_u, c_v – вектора коэффициентов материальных затрат на вывоз из региона и ввоз в него продукции (предложенная запись блоков предполагает, что транспорт – последняя отрасль в классификации отраслей; следует обратить внимание, что последняя строка в матрицах вида B содержит коэффициенты затрат транспорта на внутрирегиональные перевозки продукции), размерность n ;

α – отраслевая структура текущего потребления домашних хозяйств и государства, размерность n_s . $0 \leq \alpha_j \leq 1, \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j = 1$.

Парето-Граница

Рассматривается множество всевозможных достижимых нашей системой регионов наборов конечных потреблений:

$$Z_M(\mathbf{R}) := \left\{ (z^s)_{s \in \mathbf{R}} \mid \forall s \in \mathbf{R} \exists (x^s, u^s, v^s) \in \mathbb{R}_+^{n_s} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n : (z^s, x^s, u^s, v^s)_{s \in \mathbf{R}} \in X_M(\mathbf{R}) \right\}.$$

$Z_M(\mathbf{R})$ является проекцией множества сбалансированных планов большой коалиции на критериальное пространство (аналогичное определение можно дать для произвольной коалиции $T \subseteq \mathbf{R}$).

Под *Парето-границей* этого множества понимается такое его подмножество, от каждой точки которого невозможно отклонение в сторону улучшения сразу по всем компонентам:

$$\begin{aligned} P_M(\mathbf{R}) &:= \left\{ z = (z^s)_{s \in \mathbf{R}} \in Z_M(\mathbf{R}) \mid \neg \exists z_0 \in Z_M(\mathbf{R}) : z_0^s > z^s \forall s \in \mathbf{R} \right\} = \\ &= \left\{ z = (z^s)_{s \in \mathbf{R}} \in Z_M(\mathbf{R}) \mid \forall z_0 \in Z_M(\mathbf{R}) \forall s_0 \in \mathbf{R} : z^s \geq z_0^{s_0} \right\}. \end{aligned}$$

Для поиска Парето-границы предлагается следующий алгоритм.

2.1. Для первых $r-1$ регионов находятся максимумы индивидуально-рациональных конечных потреблений $\max z^1, \dots, \max z^{r-1}$. $\max z^s$ – оптимальное значение ОМММ с территориальной структурой $\lambda^s = 1$ (т. е. максимизируется конечное потребление конкретного региона).

2.2. В параллелепипеде $[0, \max z^1] \times [0, \max z^2] \times \dots \times [0, \max z^{r-1}]$ вводится сетка с некоторым шагом.

2.3. Организуется перебор узлов указанной сетки.

2.4. В ОМММ вводится критерий оптимальности z^r , (z^1, \dots, z^{r-1}) – фиксированная точка на сетке. Из модели исключаются ограничения на территориальную структуру и переменная z .

2.5. Решается задача $z^r \rightarrow \max$.

Очевидно, что каждая точка $(z^1, \dots, z^{r-1}, z^r)$, найденная таким способом, будет лежать на Парето-границе указанного множества. Если же при фиксации первых $r-1$ координат на параллелепипеде $\prod_{s=1}^{r-1} [0, \max z^s]$ r -я координата не будет оптимальным значением задачи ЛП из п. 2.4–2.5, такая точка не будет парето-оптимальной (можно найти допустимую точку, которая будет покомпонентно больше данной). С другой стороны, любая точка множества $Z_M(\mathbf{R}) \supseteq P_M(\mathbf{R})$ имеет первые $r-1$ координат $(z_0^s)_{s=1}^{r-1} : 0 \leq z_0^s \leq \max z^s$. Таким образом, параллелепипед $\prod_{s=1}^{r-1} [0, \max z^s]$ покрывает всю проекцию Парето-границы на подпространство первых $r-1$ регионов. Эти очевидные замечания доказывают корректность нашего алгоритма. А именно:

- а) все найденные алгоритмом точки Парето-оптимальны;
- б) при достаточно малом шаге сетки переберутся все Парето-оптимальные точки.

Равновесие Вальраса

Рынок по Вальрасу подразумевает, что каждый субъект рынка (в данном случае регион) определяет свой спрос и предложение (вывоз-ввоз, экспорт-импорт продукции), максимизируя свою целевую функцию (конечное потребление населения) при бюджетном ограничении в текущих ценах обмена. При этом он не задумывается о партнерах или о каких-то целях общего характера. Далее на всех рынках работает закон спроса и предложения: цена растет, если совокупный спрос (ввоз и импорт) превышает совокупное предложение (вывоз и экспорт), и наоборот. Субъекты рынка пересматривают свои планы, пока не будет достигнуто равновесие.

Таким образом, рассматривается концепция ценового равновесия, при котором конечное потребление всех регионов в рамках своих бюджетов максимально и при этом достигнут общесистемный баланс ввоза-вывоза.

Определение 1 [1]. Сбалансированный план $\bar{x} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s)_{s \in \mathbf{R}} \in X_M(\mathbf{R})$ называется *вальрасовским равновесием*, если существует ненулевой вектор цен $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что $\forall s \in \mathbf{R} \quad \bar{p} \cdot \bar{u}^s \geq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$, и при этом выполнена импликация

$$\left((x_0^s, u_0^s, v_0^s, z_0^s) \in X_s \ \& \ z_0^s > \bar{z}^s \right) \Rightarrow \bar{p} \cdot u_0^s < \bar{p} \cdot v_0^s.$$

Здесь « \cdot » – символ скалярного произведения. Множество равновесий Вальраса обозначается $W(M)$. Его проекцию на критериальное пространство будем обозначать $W^z(M)$.

Для поиска равновесных состояний мы будем пользоваться непосредственным следствием этого определения, а именно: индивидуальные планы $(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{z}^s) \in X_s$, составляющие равновесный план, доставляют максимум конечному потреблению региона s на его бюджетном множестве $B_s(\bar{p}) = \{(x^s, u^s, v^s, z^s) \in X_s \mid \bar{p} \cdot u^s \geq \bar{p} \cdot v^s\}$.

Предлагается следующий алгоритм поиска равновесных состояний:

- 3.1. Организуется перебор векторов цен p на единичной сфере в \mathbb{R}_+^n .
- 3.2. Решается r задач максимизации (для каждого региона $s \in \mathbf{R}$):

$$(*)_{s,p} \begin{cases} z^s \rightarrow \max \\ A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s \\ p \cdot u^s \geq p \cdot v^s \end{cases}$$

Положим, $(x_*^s, u_*^s, v_*^s, z_*^s)$ – оптимальное решение задачи $(*)_{s,p}$.

3.3. Если среди планов вида $x_* = (x_*^s, u_*^s, v_*^s, z_*^s)_{s \in \mathbf{R}}$ есть сбалансированные, то по определению:

- а) p – равновесный вектор цен;
- б) сбалансированный план x_* является точкой равновесия.

Проверка сбалансированности плана, составленного из индивидуальных планов регионов в п. 3.3, может быть затруднена тем обстоятельством, что оптимальное решение задачи $(*)_{s,p}$ в общем случае не единственно, а является многогранным множеством (возможно, бесконечным). В этом случае прямой перебор оптимальных решений $(*)_{s,p}$ для проверки на сбалансированность составленного из них плана невозможен. Пункт 3.3 алгоритма технически реализован с помощью следующей системы неравенств:

$$(**)_{p, (z_*^s)_{s \in \mathbf{R}}} \begin{cases} A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + z^s d^s, \forall s \in \mathbf{R} \\ p \cdot u^s \geq p \cdot v^s, \forall s \in \mathbf{R} \\ z^s \geq z_*^s, \forall s \in \mathbf{R} \\ \sum_{s \in \mathbf{R}} u^s \geq \sum_{s \in \mathbf{R}} v^s \end{cases}$$

Очевидно, что если $(**)_{p, (z_*^s)_{s \in \mathbf{R}}}$ совместна относительно переменных $(x^s, u^s, v^s, z^s)_{s \in \mathbf{R}}$, то p – вектор равновесных цен, а многогранное множество равновесных планов задается этой системой неравенств.

В наших экспериментальных расчетах мы ищем проекцию множества равновесных планов на критериальное пространство $Z_M(\mathbf{R})$. Пара $(p, (z_*^s)_{s \in \mathbf{R}})$ признается алгоритмом равновесной, если в п. 3.3 система $(**)_{p, (z_*^s)_{s \in \mathbf{R}}}$ совместна. Факт совместности системы проверяется с помощью стандартного пакета линейной оптимизации.

Ядро кооперативной игры, ассоциированной с моделью M

В отличие от концепции Вальраса, где все внимание уделяется только балансу спроса и предложения в ценах обмена, в концепции Нэша, описанной в данном разделе, основной акцент делается на возможности регионов к партнерству (кооперации). Под равновесным во взаимодействии понимается такое состояние системы, при котором никакому участнику (или группе участников) системы нет экономического стимула к обособлению.

Рассматривается кооперативная игра G_M , ассоциированная с моделью M [1]. G_M определяется множеством достижимых дележей каждой коалиции регионов $T \subseteq \mathbf{R}$:

$$G_M(T) = \{(z^s)_{s \in T} \mid \exists (z_0^s)_{s \in T} \in Z_M(T) : z^s \leq z_0^s \forall s \in T\}.$$

Определение 2 [1]. Коалиция $T \subset \mathbf{R}$ блокирует дележ $z \in G_M(\mathbf{R})$, если

$$\exists \tau \in G_M(T): \tau^s > z^s \quad \forall s \in T.$$

Определение 3 [1]. Ядром кооперативной игры G_M называется подмножество $C(G_M)$ множества $G_M(\mathbf{R})$ дележей большой коалиции, каждый элемент которого не блокируется никакой коалицией $T \subset \mathbf{R}$:

$$z \in C(G_M) \subseteq G_M(\mathbf{R}) \stackrel{\text{по опр.}}{\iff} \forall T \subset \mathbf{R} \forall \tau \in G_M(T) \exists s_0 \in T | z^{s_0} \geq \tau^{s_0}.$$

Заметим, что непосредственно из определений следует, что множество дележей коалиции T игры G_M состоит из таких $(\tau^s)_{s \in T} \in \mathbb{R}_+^T$, при которых совместна система линейных неравенств

$$(***)_T \begin{cases} A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \tau^s d^s, \forall s \in T \\ \sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s \end{cases}.$$

Таким образом, множество достижимых дележей $(\tau^s)_{s \in T}$ коалиции T , блокирующих дележ $z = (z^s)_{s \in \mathbf{R}}$, задается системой неравенств:

$$(***)_{T,z} \begin{cases} A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \tau^s d^s, \forall s \in T \\ \tau^s > z^s, \forall s \in T \\ \sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s \end{cases}.$$

Если система $(***)_{T,z}$ совместна, дележ $(z^s)_{s \in \mathbf{R}}$ блокируется коалицией T .

Технически проверка совместности системы $(***)_{T,z}$ опирается на следующее очевидное **утверждение**: система $(***)_{T,z}$ совместна тогда и только тогда, когда на оптимальном решении задачи линейного программирования

$$\begin{cases} y \rightarrow \max \\ A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \tau^s d^s, \forall s \in T \\ \tau^s \geq z^s + y, \forall s \in T \\ \sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s \\ y \geq 0 \end{cases}$$

выполнено неравенство $y^* > 0$.

Согласно теории кооперативных игр каждая точка ядра Парето-оптимальна. Таким образом, изначальное допустимое множество для поиска ядра – Парето-граница множества $Z_M(\mathbf{R})$. Разработан и реализован алгоритм нахождения ядра кооперативной игры G_M , т. е. множества $C(G_M)$, который заключается в геометрически модифицированном переборе точек Парето-границы с проверкой каждого узла на неблокируемость ни одной из коалиций с помощью системы $(***)_{T,z}$.

Геометрическая модификация заключается в возможности итерационного увеличения точности алгоритма, а именно: пусть $C^{(k)} = \{z_i^{(k)} \in Z_M(\mathbf{R})\}_{i=1}^{m_k}$ – конечное множество точек пространства конечного потребления системы регионов (приближение ядра на k -й итерации алгоритма). Первые $r-1$ координат любой точки $z_i^{(k)}$ – точки сетки в пространстве первых $r-1$ регионов. В свою очередь, r -я координата однозначно восстанавливается по первым $r-1$ с помощью задачи оптимизации, описанной в п. 2.4–2.5 алгоритма поиска Па-

рето-оптимальных точек. $\epsilon^{(k)} = (\epsilon^{s,(k)})_{s=1}^{r-1}$ – вектор шага сетки k -итерации. Если $k = 0$, $C^{(k)}$ – дискретное приближение Парето-границы, даваемое алгоритмом в предыдущих разделах.

Строится проекция множества $C^{(k)}$ на пространство первых $r-1$ регионов:

$$\bar{C}^{(k)} = \left\{ \bar{z}_i^{(k)} = (z_i^{s,(k)})_{s=1}^{r-1} \mid \exists z_i^{r,(k)} : (\bar{z}_i^{(k)}, z_i^{r,(k)}) \in C^{(k)} \right\} \subset \mathbb{R}^{r-1}.$$

4.1. Строится $\epsilon^{(k)}$ – окрестность множества $\bar{C}^{(k)}$ в текущей сетке:

$$\bar{C}_\epsilon^{(k)} = \left\{ \bar{z}_{i,\epsilon}^{(k)} = (\bar{z}_{i,\epsilon}^{s,(k)})_{s=1}^{r-1} \mid \bar{z}_{i,\epsilon}^{s,(k)} = \bar{z}_i^{s,(k)} : \bar{z}_i^{(k)} \in \bar{C}^{(k)} \right\} \cup \bar{C}^{(k)}$$

4.2. Новая сетка строится на параллелепипеде, описанном вокруг $\bar{C}_\epsilon^{(k)}$:

$$K^{(k+1)} := \bigtimes_{s=1}^{r-1} \left[\min z^s(\bar{C}_\epsilon^{(k)}), \max z^s(\bar{C}_\epsilon^{(k)}) \right],$$

где $z^s(\cdot)$ – оператор проекции на пространство региона s

Новый шаг сетки

$$\epsilon^{(k+1)} = \left(\frac{\max z^s(K^{(k+1)}) - \min z^s(K^{(k+1)})}{N^{(k+1)} - 1} \right)_{s=1}^{r-1},$$

где $N^{(k+1)}$ – задаваемое наперед количество узлов по одной координате, $N^{(k+1)} > N^{(k)}$.

Множество узлов новой сетки:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^{(k+1)} &= \left\{ \bar{z}^{(k+1)} \mid \forall s = \overline{1, r-1} \exists 0 \leq j^s \leq N^{(k+1)} - 1 : \bar{z}^{s,(k+1)} = \min z^s(K^{(k+1)}) + j^s \epsilon^{s,(k+1)} \right\} = \\ &= \left\{ \bar{z}_i^{(k+1)} \right\}_{i=1}^{N^{(k+1)}-1}. \end{aligned}$$

перенумеруем

4.3. Множество точек для проверки на блокируемость на $(k+1)$ -й итерации:

$$\Omega^{(k+1)} = \left\{ z_i^{(k+1)} = (\bar{z}_i^{(k+1)}, z_i^{r,(k+1)}) \mid \bar{z}_i^{(k+1)} \in \bar{\Omega}^{(k+1)}, z_i^{r,(k+1)} \text{ – по п. 4-5 алгоритма для } P_M(\mathbf{R}) \right\}.$$

Равновесие Эджворта в модели М

В данном разделе рассматривается концепция равновесия по Эджворту. Содержательный смысл равновесности по Эджворту – устойчивость в смысле коалиционного блокирования при всевозможном дроблении экономики.

Определение 4 [1]. Модель $M_{[k]} = \left\langle \mathbf{R}_{[k]}, \{A^{(s,m)}, G^{(s,m)}, H^{(s,m)}, b^{(s,m)}, d^{(s,m)}\}_{(s,m) \in \mathbf{R}_{[k]}} \right\rangle$ называется k -дроблением системы регионов, если

$$\mathbf{R}_{[k]} = \{(s, m) \mid s \in \mathbf{R}, m = 1, 2, \dots, k\},$$

$$A^{(s,m)} = A^s, G^{(s,m)} = G^s, H^{(s,m)} = H^s, b^{(s,m)} = \frac{1}{k} b^s, d^{(s,m)} = d^s \quad \forall (s, m) \in \mathbf{R}_k.$$

Определение 5 [1]. k -дроблением плана $x \in X_M(\mathbf{R})$ называется план $x_{[k]} \in X_{M_{[k]}}(\mathbf{R}_{[k]})$ такой, что

$$x_{[k]}^{(s,m)} = \frac{1}{k} x^s \quad \forall (s, m) \in \mathbf{R}_{[k]}.$$

Определение 6 [1]. k -ядром модели M называется множество $C_k(M)$ – k -стабильных планов, т. е. таких, чье k -дробление не блокируется никакой коалицией дробления $M_{[k]}$:

$$\begin{aligned} x = (x^s, u^s, v^s, z^s)_{s \in \mathbf{R}} \in C_k(M) &\Leftrightarrow x_{[k]} = (x^{(s,m)}, u^{(s,m)}, v^{(s,m)}, z^{(s,m)})_{(s,m) \in \mathbf{R}_{[k]}} \in C(M_{[k]}) \stackrel{\text{по опр.}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow z_{[k]} = (z^{(s,m)})_{(s,m) \in \mathbf{R}_{[k]}} \in C(G_{M_{[k]}}) \end{aligned}$$

Очевидное свойство k -ядер [1]: $C_{k+1}(M) \subseteq C_k(M) \quad \forall k \geq 1$.

Определение 7 [1]. План $x \in X_M(\mathbf{R})$ называется *равновесным по Эджворту*, если он является k -стабильным для всех $k \geq 1$, т. е. если $x \in \bigcap_{k \geq 1} C_k(M)$.

$E(M) := \bigcap_{k \geq 1} C_k(M)$ – множество равновесий Эджворта.

Для достаточно высокой степени дробления k k -ядро является приближением множества $E(M)$ (в силу свойства вложенности k -ядер друг в друга).

В своих расчетах мы ищем проекции k -ядер на критериальное пространство:

$$C_k^z(M) = \left\{ z = (z^s)_{s \in \mathbf{R}} \in Z_M(\mathbf{R}) \mid z_{[k]} = (z^{(s,m)})_{s \in \mathbf{R}_{[k]}} \in C(G_{M_{[k]}}) \right\}.$$

Алгоритм поиска представляет собой итерационный процесс (итерация k соответствует индексу дробления), на каждой итерации которого по уже построенному приближению множества $C_k^z(M)$ строится допустимое множество. После перебора элементов этого допустимого множества получается дискретное приближение множества $C_{k+1}^z(M)$. Геометрически переход к следующей итерации аналогичен разделу о ядре игры G_M . За C_k обозначается дискретное приближение множества $C_k^z(M)$, даваемая k -й итерацией дробления. Каждая итерация дробления экономики может сопровождаться несколькими итерациями повышения точности, аналогичными описанной в разделе о ядре игры G_M . В описании алгоритма мы опустим описание уточняющих итераций, а заострим внимание только на итерации дробления экономики.

5.1. Если $k=1$, то C_k – дискретное приближение ядра кооперативной игры, ассоциированной с моделью M , даваемое алгоритмом предыдущего раздела, $\varepsilon^{(k)} \in \mathbb{R}^{r-1}$ – вектор шага сетки на последней итерации алгоритма предыдущего раздела.

5.2. Пусть $k > 1$ и $C_{k-1} = \left\{ z_i = (z_i^s)_{s \in \mathbf{R}} \right\}_{i=1}^{m_k}$ уже найдено.

5.3. Строится проекция множества C_{k-1} на пространство первых $r-1$ регионов:

$$\bar{C}_{k-1} = \left\{ \bar{z}_i = (z_i^s)_{s=1}^{r-1} \mid \exists z_i^r : (\bar{z}_i, z_i^r) \in C_{k-1} \right\}_{i=1}^{m_k} \subset \mathbb{R}^{r-1}.$$

5.4. Строится $\varepsilon^{(k)}$ – окрестность множества \bar{C}_{k-1} в текущей сетке:

$$\bar{C}_{k-1}^\varepsilon = \left\{ \bar{z}_i^\varepsilon = (z_i^{s,\varepsilon})_{s=1}^{r-1} \mid \bar{z}_i^{s,\varepsilon} = \bar{z}_i^s \pm \varepsilon^{s,(k)} : \bar{z}_i \in \bar{C}_{k-1} \right\} \cup \bar{C}_{k-1}.$$

5.5. Новая сетка строится на параллелепипеде, описанном вокруг $\bar{C}_{k-1}^\varepsilon$:

$$K_k := \bigtimes_{s=1}^{r-1} \left[\min z^s(\bar{C}_{k-1}^\varepsilon), \max z^s(\bar{C}_{k-1}^\varepsilon) \right],$$

где $z^s(\cdot)$ – оператор проекции на пространство региона s .

Новый шаг сетки

$$\varepsilon^{(k)} = \left(\frac{\max z^s(K_k) - \min z^s(K_k)}{N_k - 1} \right)_{s=1}^{r-1},$$

где N_k – задаваемое наперед количество узлов по одной координате.

Множество узлов новой сетки:

$$\bar{\Omega}^{(k)} = \left\{ \bar{z} \mid \forall s = \overline{1, r-1} \exists 0 \leq j^s \leq N_k - 1 : \bar{z}^s = \min z^s(K_k) + j^s \varepsilon^{s,(k)} \right\}.$$

Или после перенумерации узлов: $\bar{\Omega}^{(k)} = \left\{ \bar{z}_i \right\}_{i=1}^{(N_k)^{r-1}}$.

5.6. Допустимое множество для перебора:

$$\Omega^{(k)} = \left\{ z_i = (\bar{z}_i, z_i^r) \mid \bar{z}_i \in \bar{\Omega}^{(k)}, z_i^r - \text{ по п. 4-5 алгоритма для } P_M(\mathbf{R}) \right\}_{i=1}^{(N_k)^{r-1}}.$$

5.7. Строятся k -дробления $z_{i,[k]}$ элементов z_i множества $\Omega^{(k)}$.

5.8. Каждое дробление $z_{i, [k]}$ проверяется на неблокируемость коалициями $T \subset \mathbf{R}_{[k]}$ модели $M_{[k]}$ с помощью адаптированной к $M_{[k]}$ системы неравенств $(***)_{T, z_{i, [k]}}$:

$$(***)_{T, z_{i, [k]}} \begin{cases} A^{(s, m)} x^{(s, m)} + G^{(s, m)} u^{(s, m)} + H^{(s, m)} v^{(s, m)} \geq b^{(s, m)} + \tau^{(s, m)} d^{(s, m)}, \forall (s, m) \in T \\ \tau^{(s, m)} > z^{(s, m)}, \forall (s, m) \in T \\ \sum_{(s, m) \in T} u^{(s, m)} \geq \sum_{(s, m) \in T} v^{(s, m)} \end{cases} .$$

5.9. $C_k = \{z_i \in \Omega^{(k)} \mid (***)_{T, z_{i, [k]}} \text{ несовместна } \forall T \subset \mathbf{R}_{[k]}\}$.

Экспериментальные расчеты

Для проведения численных расчетов был разработан программный комплекс экономики условного примера. Условная экономика разделена на 3 региона: запад с развитой обработкой и недостатком природных ресурсов, центр с большими возможностями развития добычи и относительно низким уровнем обработки, восток, характеризующийся сырьевой направленностью производства и, кроме того, суровыми природно-климатическими условиями и большой удаленностью от западных и центральных регионов. Производство в условной экономике представлено в разрезе 5 отраслей (видов деятельности): добыча, обработка, строительство, транспорт и услуги. Из них добыча и обработка производят транспортабельную продукцию (участвует в транспортно-экономическом взаимодействии регионов между собой и с внешними рынками). Строительство и услуги введены в условную экономику как представители отраслей с нетранспортабельной продукцией. В упрощенной модели, описывающей экономику условного примера, экзогенна внешняя торговля, а внутренний межрегиональный обмен представлен через некоторые условные центры: регионы вывозят в эти условные центры свою продукцию и ввозят ее из этих же условных центров. Среда разработки: пользовательский интерфейс – MS Excel; вычислительные алгоритмы – JAVA; 3D-визуализация – MATLAB. Разработанное ПО реализовано с использованием многопоточности вычислений, т. е. позволяет задействовать вычислительные мощности многопроцессорных систем. Данная особенность дает возможность проводить аналогичные расчеты на реальных данных больших размерностей и на больших многоядерных вычислительных комплексах.

Наблюдаются все предсказанные теорией эффекты взаимного расположения результирующих множеств [1]: равновесия Вальраса лежат в ядре, k -ядра Эджворта стягиваются к множеству равновесий Вальраса с ростом порядка дробления. Для одного из экспериментов множество вальрасовских равновесий получилось состоящим из трех точек. При этом для 5-го порядка дробления ядро Эджворта также разрывается на три несвязных компоненты.

Разработанный модельный комплекс позволяет изменять свойства системы с помощью набора управляющих параметров.

Подразумевается управление межрегиональной и межотраслевой дифференциацией компонент матриц A^s, G^s, H^s . Возможность управлять параметрами модели позволяет прорабатывать различные сценарии взаимодействия регионов и проследить, как в зависимости от сценария изменяются результирующие множества. Тем самым данный инструментарий дает возможность определять тенденции, способствующие кооперации регионов.

Результаты расчетов предлагаются в виде 3D-представлений Парето-границы, множеств C_k и равновесий по Вальрасу.

Сценарий 1. В данном сценарии действие управляющих параметров не подразумевается.

В результате в равновесном векторе цен одна из двух компонент (соответствующая добывающей отрасли) близка к нулю, а другая (обрабатывающая отрасль) – к единице.

В соответствующем равновесном дележе (z^1, z^2, z^3) доля третьего региона (восток) близка к нулю.

Ядро C_1 получилось вытянутым по третьей координате. Причем минимум третьей координаты близок к нулю, что свидетельствует о слабом влиянии третьего региона в распределении конечного потребления.

Множество C_2 , получающееся при двукратном дроблении экономики, также сильно смещено по третьей координате (что свидетельствует о том, что третий регион не может блокировать дележи даже со столь малой своей долей) (рис. 1–2).

В таблице приведены данные расчетов.

КП	Равновесие	Макс. по ядру	Мин. по ядру
z^1	2100,83	2039,83	1189,90
z^2	1486,70	1529,87	1444,88
z^3	17,33	1354,52	78,49

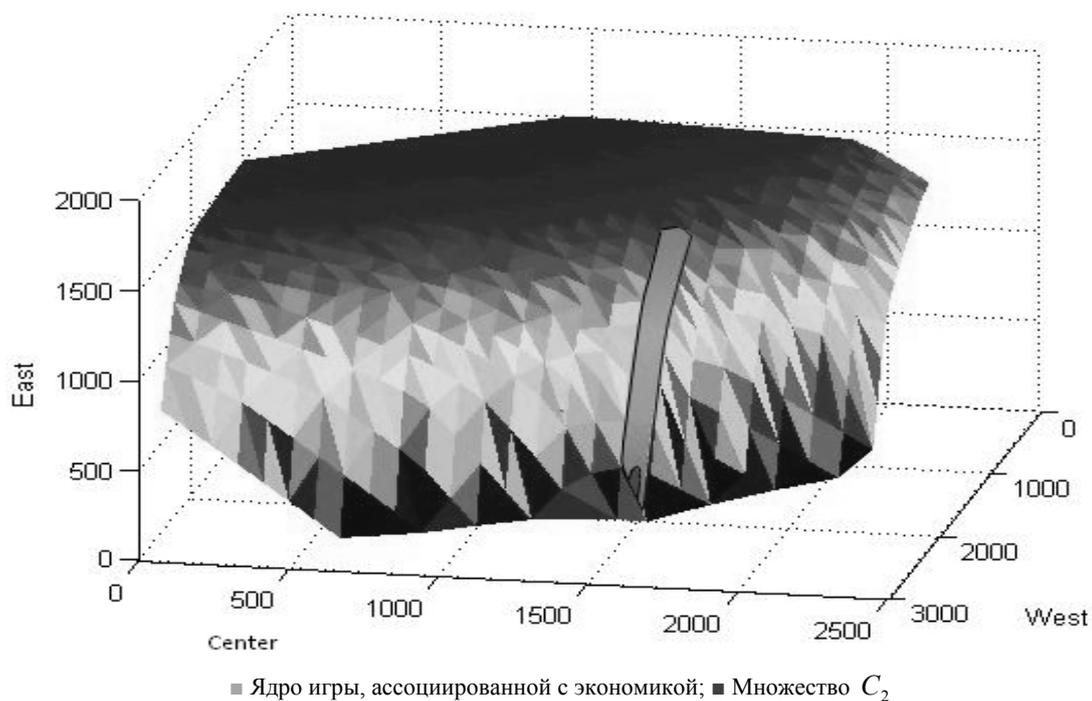


Рис. 1. Сценарий 1. Парето-граница

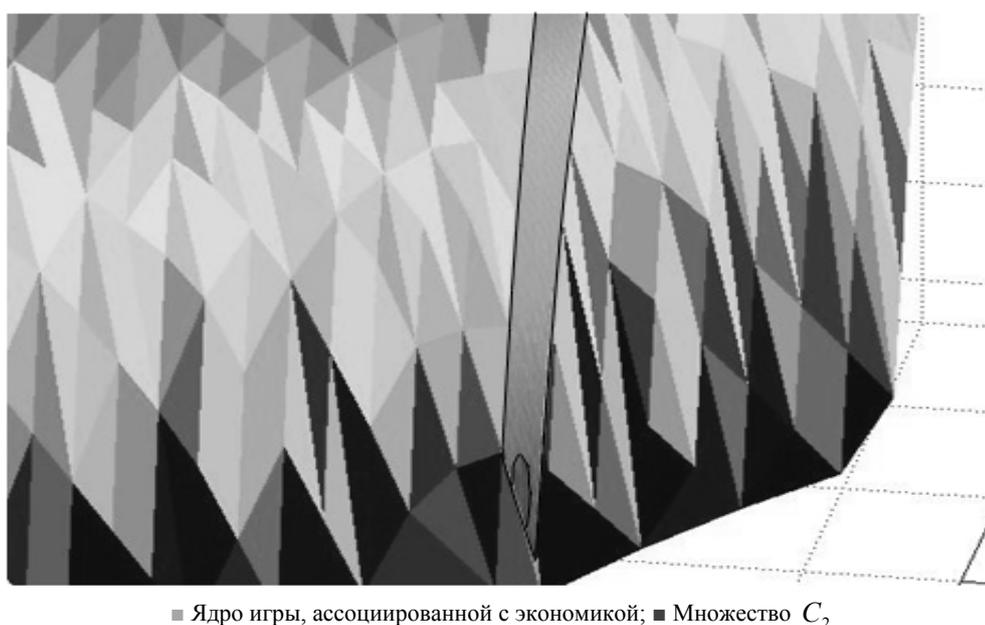


Рис. 2. Сценарий 1. ZOOM: Парето-граница

После анализа столь «однобокого» результата в данных эталонного сценария обнаружены следующие проблемы.

1. Нарушено предположение о непустоте множества индивидуально-рациональных дележей для региона 1 (запад): несовместна система неравенств

$$\begin{cases} A^1 x^1 + G^1 u^1 + H^1 v^1 \geq b^1 + z^1 d^1 \\ u^1 \geq v^1 \end{cases}.$$

По-видимому, именно из-за нарушения этого предположения вычисленный равновесный по Вальрасу дележ блокируется коалицией $T = \{1, 3\}$ – «Запад-Восток» (теоретический результат о принадлежности равновесия ядру формулируется для экономики с непустым множеством индивидуально-рациональных дележей для каждого из регионов).

2. В точке равновесия недооценена (по сравнению с обрабатывающей отраслью) продукция добывающей отрасли.

3. Остался «обиженным» третий регион. Доля его потребления в дележах из ядра и C_2 очень мала по сравнению с другими регионами.

К примеру, $\max z^3_{C_2} = 291,1$, и достигается он на точке (2007, 1482, 291,1).

Диспропорция налицо.

После анализа этой проблемы обнаружилось, что третий регион не может блокировать дележи со столь малой своей долей по той причине, что его достижимый индивидуально-рациональный дележ с максимальным значением z^3 имеет еще меньшее значение конечного потребления для востока (около 17 единиц). Таким образом, отдельно от других восток не может достичь большего для себя конечного потребления.

В рассчитанном равновесии конечное потребление третьего региона в среднем равно 18. Данное равновесие блокируется коалицией из «обделенных» первого и третьего регионов.

Принимая в расчет все вышеупомянутые обстоятельства, можно сгенерировать более сбалансированный сценарий.

Сценарий 2. Увеличим себестоимость продукции недооцененной добывающей отрасли (как показал предыдущий сценарий), чтобы сбалансировать вектор равновесных цен. Для этого с помощью управляющего параметра умножим материальные затраты этой отрасли на 1,3 во всех регионах.

Добьемся непустоты множества индивидуально-рациональных дележей первого региона (запад). Для этого увеличим его ресурсный потенциал, т. е. компоненты вектора b^1 для ограничений вида $x^1_j \leq b^1_j$. Экспериментальным путем было выяснено, что увеличение значения с 127 до 302,3 для номера j , соответствующего добывающей отрасли, дает желаемый результат. У первого региона появляются достижимые индивидуально-рациональные дележи, т. е. в такой конфигурации исходных параметров экономики запад может отдельно от других регионов добиться положительного для себя конечного потребления.

Тем же способом увеличим максимальное конечное потребление третьего региона (восток) в его множестве индивидуально-рациональных дележей. Экспериментальным путем выяснено, что увеличение ресурсного потенциала востока в обрабатывающей отрасли с 127 до 250 увеличивает его максимальное конечное потребление на индивидуально-рациональных дележах до 785.

Множество равновесных цен и дележей представляют собой облака из четырех точек, которые по размаху близки к одной точке. Равновесие, как будет проиллюстрировано в следующем пункте, попадает во все рассчитанные k -ядра, как и предсказано теорией.

По-видимому, облако точек получено вместо одной точки из-за вычислительной погрешности используемого оптимизатора. В последующем будем игнорировать эту погрешность и писать в результатах расчетов в таком случае вместо маленького облака одну точку (усреднив все облако по каждой из координат).

1. Вектор равновесных цен (первая компонента соответствует добывающей отрасли, вторая – обрабатывающей):

$$\bar{p} = (0, 785, 0,619).$$

2. Равновесный по Вальрасу дележ:

$$(z^1, z^2, z^3) = (1747,8, 1434,4, 926,4).$$

КП	Равновесие	Макс. по ядру	Мин. по ядру
z^1	1747,70	1978,81	1359,59
z^2	1434,42	1444,57	1359,59
z^3	926,50	1209,88	764,76

3. 3D-представления Парето-границы и k -ядер ($k \in \{1, 2, 3\}$) (см. рис. 3–7).

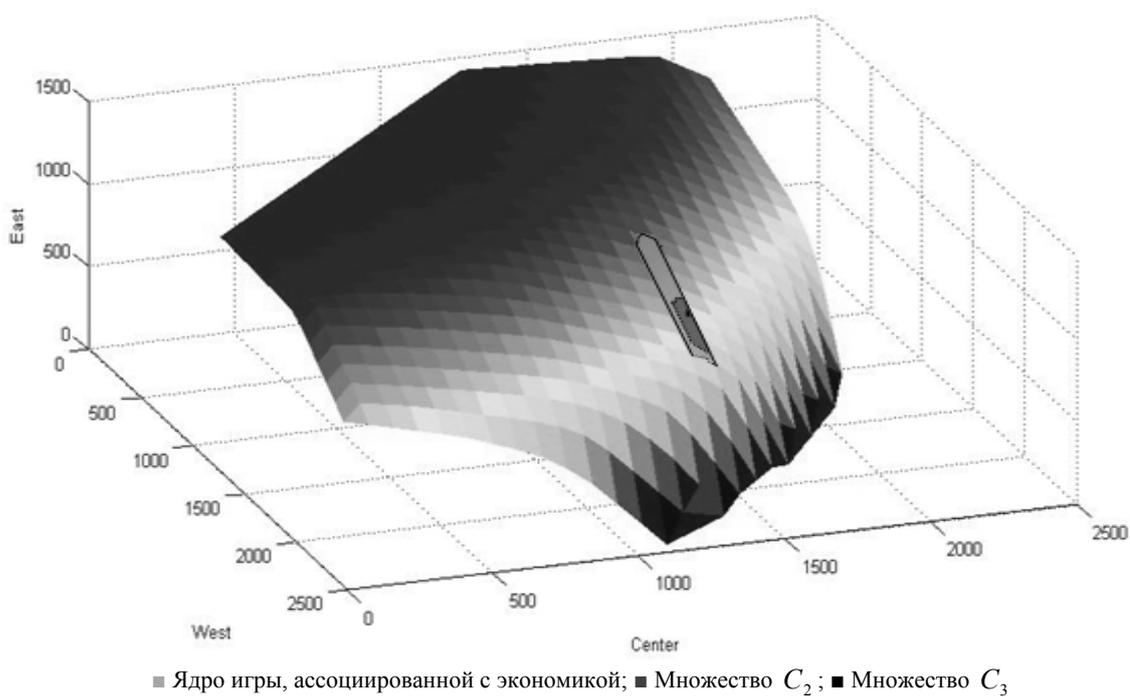


Рис. 3. Сценарий 2. Парето-граница

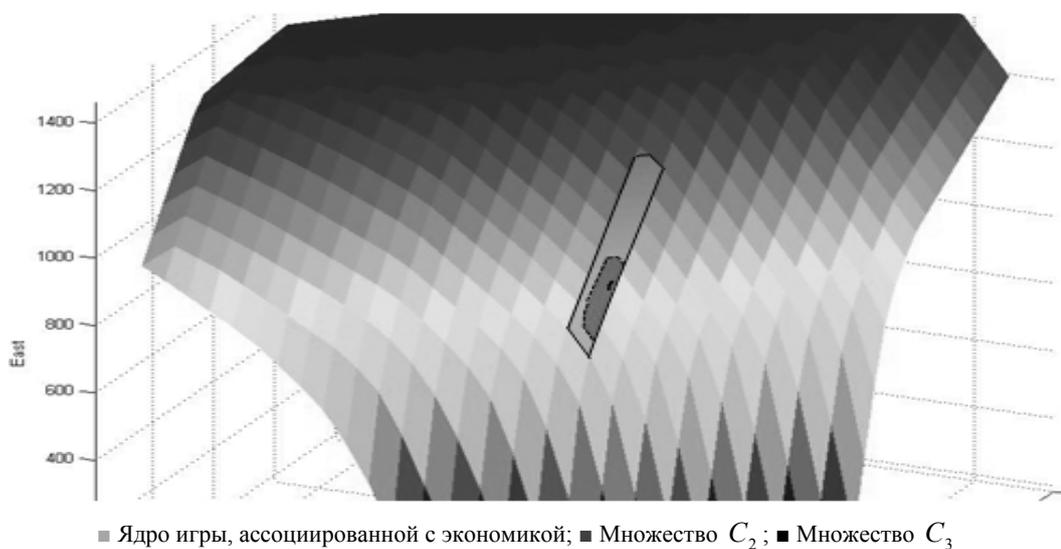
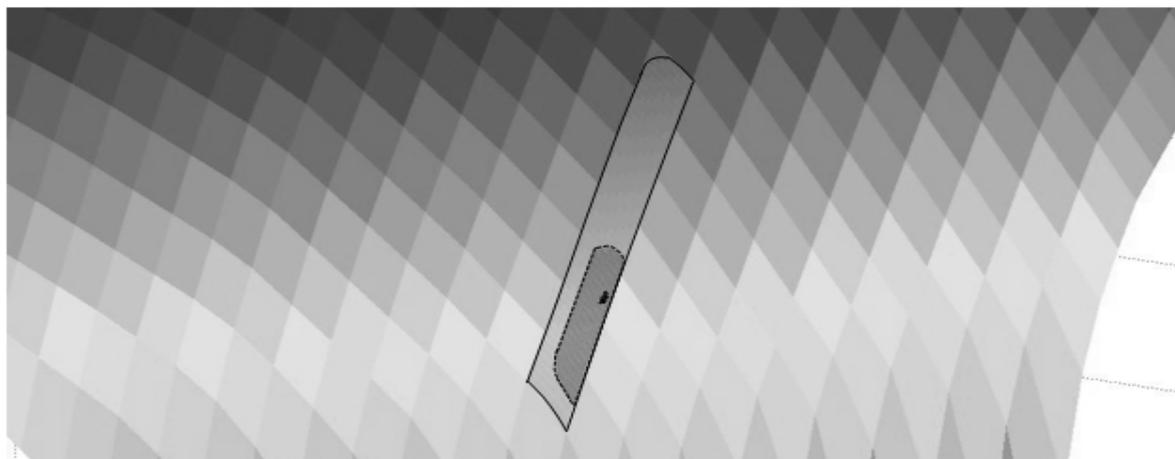
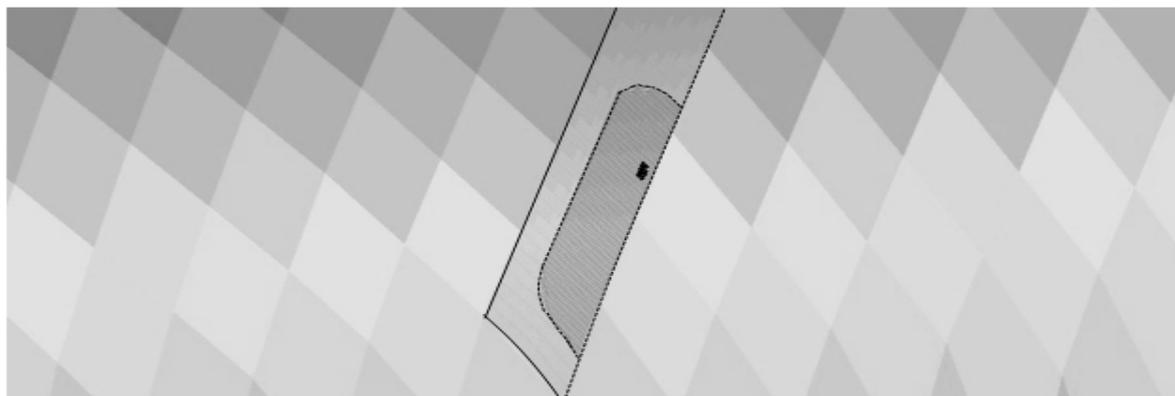


Рис. 4. Сценарий 2, фронтальная проекция. Парето-граница



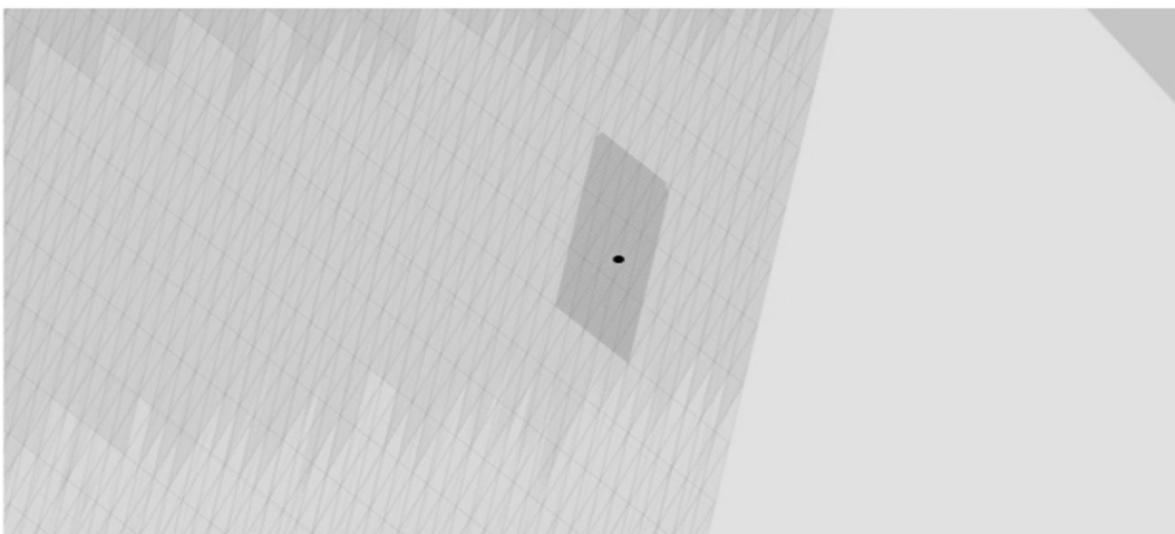
■ Ядро игры, ассоциированной с экономикой; ■ Множество C_2 ; ■ Множество C_3

Рис. 5. Сценарий 2. ZOOM: Парето-граница



■ Ядро игры, ассоциированной с экономикой; ■ Множество C_2 ; ■ Множество C_3

Рис. 6. Сценарий 2. 3x-ZOOM: Парето-граница



■ Множество C_3 ; ■ Равновесие

Рис. 7. Сценарий 2. 8x-ZOOM: Парето-граница

Сценарий 3. Сценарий аналогичен предыдущему с уточнением, что нет действия управляющих параметров на материальные затраты в добывающей отрасли. Отсутствие данного воздействия привело к тому, что равновесных цен стало три.

Результаты.

1. Равновесные цены (приводим только точки, отличающиеся в первом знаке после запятой):

$$p^{(1)} = (0,584, 0,812);$$

$$p^{(2)} = (0,671, 0,741);$$

$$p^{(3)} = (0,782, 0,623).$$

2. Равновесные дележи (также приводим только 3 существенно различные точки):

$$\bar{z}^{(1)} = (1945,3, 1487,7, 878,7);$$

$$\bar{z}^{(2)} = (1914,3, 1488,2, 907,9);$$

$$\bar{z}^{(3)} = (1851,8, 1489,3, 951,9).$$

КП	Равновесие	Макс. по ядру	Мин. по ядру
z^1	1945,22 1914,25 1851,84	2025,49	1673,24
z^2	1487,74 1488,23 1489,29	1497,11	1409,04
z^3	878,74 907,89 951,86	1135,12	779,57

Кроме того, ввиду трехсвязности множества равновесий Вальраса было решено сделать расчеты большего дробления экономики с целью проверить, разорвется ли k -ядро на несколько компонент. В результате получилось, что ядро C_6 также состоит из трех компонент связности. Иллюстрация в отдельной системе координат представлена ниже (рис. 8–11). Одно из равновесий Вальраса визуалью немного не попадает в рассчитанное C_6 . Это объясняется погрешностью вычислений.

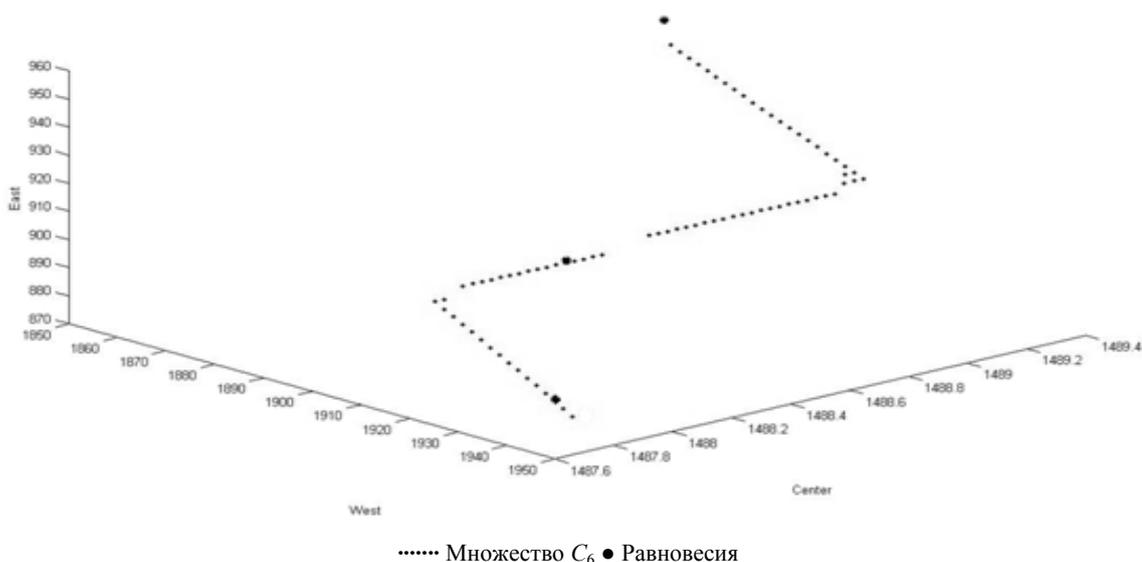


Рис. 8. Сценарий 3. Разрыв k -ядра ($k = 6$)

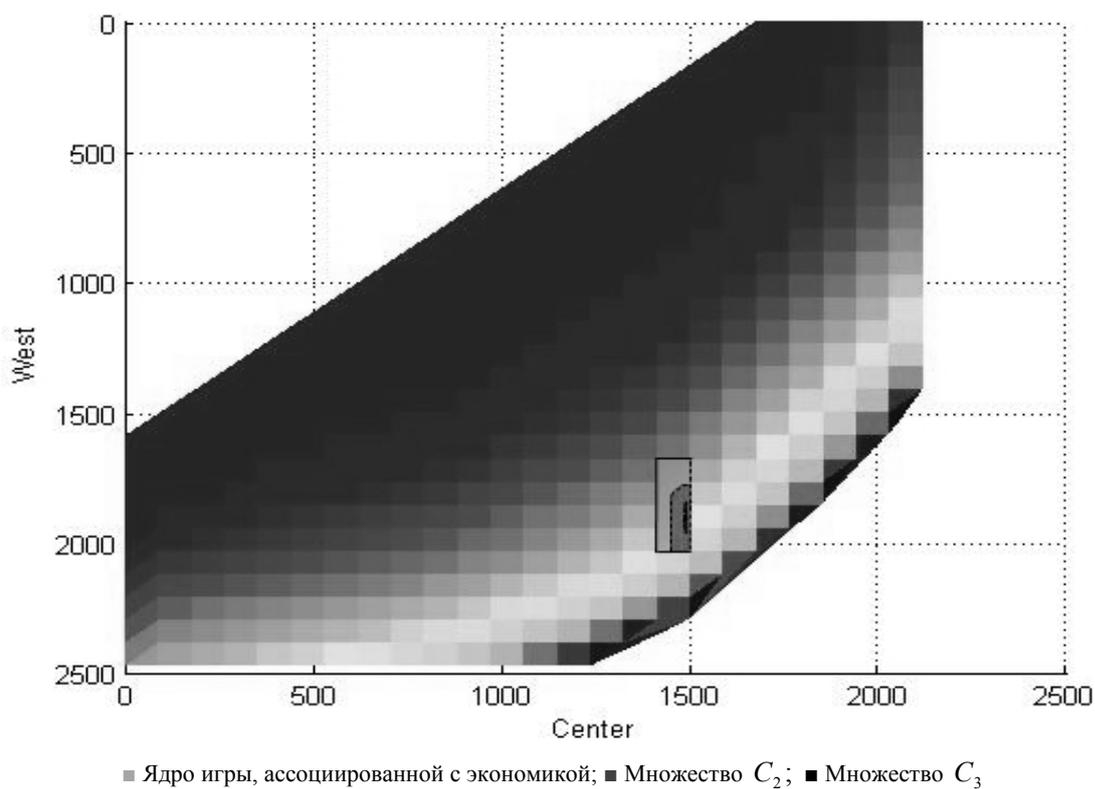


Рис. 9. Сценарий 3, проекция на плоскость 1–2. Парето-граница

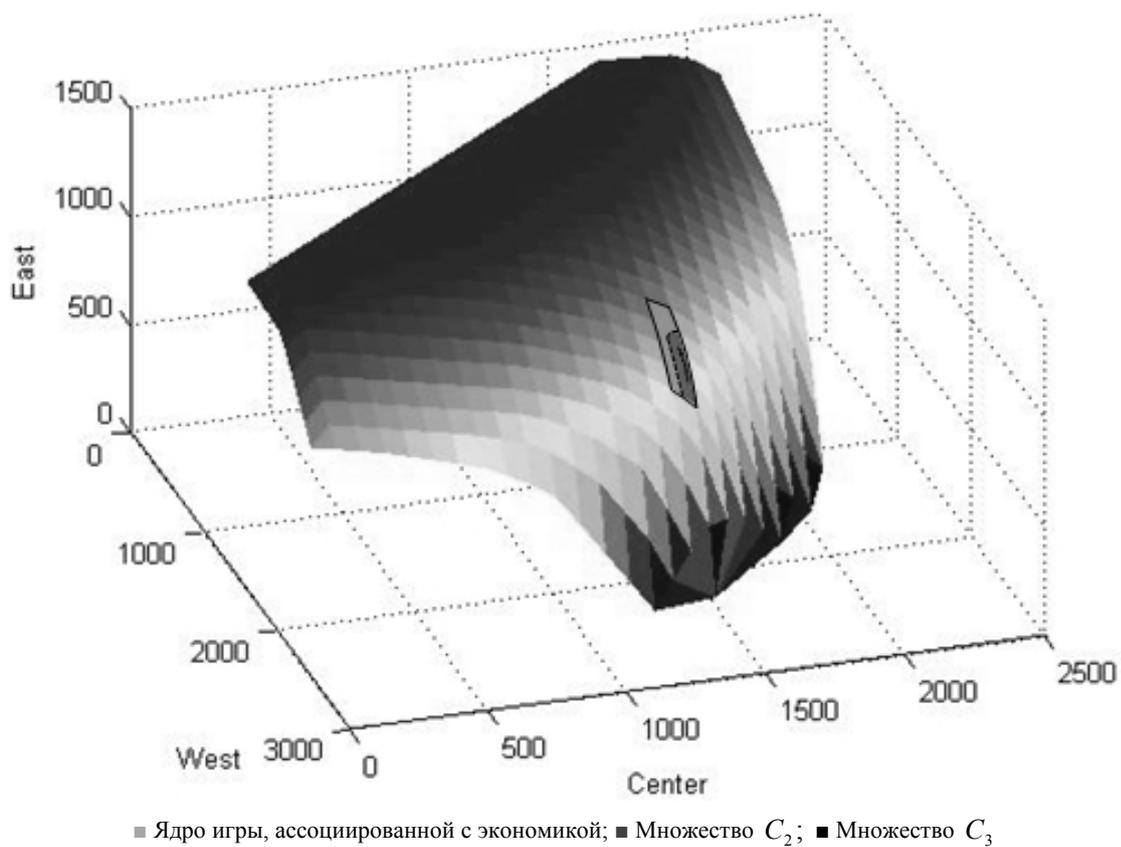


Рис. 10. Сценарий 3. Парето-граница



■ Ядро игры, ассоциированной с экономикой; ■ Множество C_2 ; ■ Множество C_3 ○ Равновесия

Рис. 11. Сценарий 3. 8-х ZOOM фронтальной проекции. Парето-граница

Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

- Взаимное расположение найденных во всех экспериментах расчетах равновесных множеств полностью согласуется с теорией:

$$P_M(\mathbf{R}) \supseteq C_k^z(M) \supseteq C_{k+1}^z(M) \supseteq W^z(M) \quad \forall k \geq 1.$$

- Алгоритмы по построению являются корректными и теоретически обоснованными, так как базируются непосредственно на определениях
- Разработанное программное обеспечение выполнено с использованием технологии многопоточности. Это позволяет при наличии многопроцессорных вычислительных мощностей использовать его в прикладных расчетах задач большой размерности.
- Недостаток разработанных алгоритмов – ресурсоемкость (по сути, каждый из них является посеточным перебором допустимых точек с проверкой на равновесность).
- Среди недостатков также можно отметить, что класс моделей, для которых работают данные алгоритмы, довольно узок. Он ограничивается моделями с условным центром, которые не учитывают никакой нетривиальной топологии транспортных связей регионов друг с другом и с внешними рынками.

С разработкой теоретически чистых алгоритмов равновесного и коалиционного анализа открывается перспектива дальнейшего исследования алгоритмов, использующихся в прикладном анализе, а именно: можно исследовать их непротиворечивость математически обоснованным алгоритмам, проведя серию экспериментальных расчетов на том же классе моделей.

Список литературы

1. Васильев В. А., Суслов В. И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 18–33.
2. Суслов В. И. Равновесие в пространственных экономических системах // Сложные системы в экстремальных условиях: Тез. докл. XV Всерос. симпозиума с междунар. участием, 16–21 авг. 2010 г. / Редкол.: Р. Г. Хлебопрос, И. И. Моргулис, О. В. Круглик. Красноярск: Краснояр. науч. центр, СО РАН, Сиб. фед. ун-т, 2010. С. 68–69.

3. Суслов В. И. Измерение эффектов межрегиональных взаимодействий: модели, методы, результаты / Отв. ред. А. Г. Гранберг; ИЭОПП СО АН СССР. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1991. 252 с.

4. Гранберг А. Г., Суслов В. И., Суспицын С. А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование / СО РАН, ИЭОПП, Гос. НИУ «Совет по изучению производит. Сил». Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2007. 370 с.

Материал поступил в редколлегию 18.02.2011

N. M. Ibragimov, D. A. Domozhurov, T. G. Gamidov

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РАВНОВЕСНОГО И КОАЛИЦИОННОГО АНАЛИЗА
ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ**

The paper deals with some game-theoretical aspects of one class of optimization multiregional input-output model, namely with the core, and Walras and Edgeworth equilibria. We present some computational algorithms for the above-named states of equivalent and mutually beneficial exchange among regions. The algorithms were tested on the low-dimensional model sample for a conventional economics. Computation results show that algorithms are consistent with the theory, which allows using them in studies of multiregional interactions algorithms (in the presence of proper computing capacities).

Keywords: optimization interregional input-output model, model of region's interaction, Pareto bounds, Nash-Walras equilibria, Edgeworth k -cores, core of a cooperative game.