УДК 54.6.7

Е. С. Бондаренко, Е. А. Королько

Муниципальное бюджетное общеобразовательное
учреждение «Экономический лицей»
ул. Крылова, 44, Новосибирск, 630007, Россия
E-mail: eclic95@online.sinor.ru

РАБОЧИЕ ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССОВ, 10–11-Й КЛАССЫ

Представлены программы элективных курсов для 10–11-х специализированного математического класса, составленные и реализуемые учителями математики высшей квалификационной категории «Экономического лицея» в рамках проекта Министерства образования, науки и инновационной политики Новосибирской области «Специализированные классы для наиболее способных и одаренных школьников естественнонаучной и математической направленности».

Ключевые слова: специализированные классы, программы элективных курсов по математике для специализированных классов.

«Планиметрия 10–11-й класс. Систематизация знаний, практикум по решению задач»

Пояснительная записка

Настоящий элективный курс рассчитан на 72 часа (2 ч в неделю) в 10-м классе и 34 часа (1 ч в неделю) в 11-м классе и предназначен для учащихся экономического лицея, изучающих математику на профильном уровне. Предметом курса является решение задач достаточно сложного раздела школьной программы – планиметрии, которая, как показывает практика, представляет собой наибольшую трудность на итоговой аттестации.

Главной целью курса является создание условий для формирования и развития у обучающихся:

- интеллектуальных и практических умений в решении планиметрических задач;
- интереса к изучению геометрии и решению задач;
- умения самостоятельно приобретать и применять знания;
- творческих способностей, умения работать в группе, вести дискуссию отстаивать свою точку зрения.

Предполагается, что в процессе освоения курса учащиеся приобретут умения:

- выдвигать гипотезы, участвовать в дискуссиях;
- выделять общие методы и приемы решения геометрических задач;
- демонстрировать технику решения ключевых задач;
- делать обобщения и выводы;
- интерпретировать результаты обобщений и выводов в решения.

Перечисленные умения формируются на основе систематизации знаний, полученных учащимися в основной школе, выделении общих методов и приемов решения задач с указанием в них стандартных элементов, демонстрирующих технику как простых, так и относительно сложных. Закрепление приобретенных навыков осуществляется на достаточном количестве задачного материала.

Для этого из всего многообразия геометрических задач выделяются классы, объединенные общей идеей и стандартной техникой решения. Объясняется, в чем именно состоит идея задач того или иного класса и какова методика их решения. Такой подход определил как расположение материала, так и подборку задач для самостоятельных упражнений.

В курсе предполагается определенная последовательность изучения материала, что важно для оптимального применения необходимых знаний и умений, приобретенных в предыдущих темах. Методика такова, что на занятиях показывается, как во многих случаях решение весьма сложных экзаменационных задач как бы «расщепляется» на более простые элементы, анализ которых осуществляется по стандартной схеме. Решается большое число однотипных задач, решение которых должно закрепить полученные знания.

На практических занятиях немало времени отводится задачам с параметрическими данными, при решении которых необходимо отыскивать множества допустимых значений параметров. Особое внимание уделяется задачам, решаемым методом геометрических преобразований, векторным и координатным методами.

Курс 11-го класса содержит более трудные задачи, при решении которых учащиеся уже сами должны выбрать метод решения. Немалое количество задач допускает решения разными способами. Рассматривается множество примеров из экзаменационной практики, основанной, главным образом, на письменных работах по математике, предлагавшихся в НГУЭУ, НГУ, Московском государственном университете, демонстрируется разнообразие идей, лежащих в основе геометрических задач, и вместе с тем стандартность методов и приемов их решения.

Обучение решению геометрических задач – важная составная часть изучения школьного курса геометрии. При решении задач закрепляются теоретические знания, вырабатываются навыки применения этих знаний в практической деятельности, развивается творческая активность.

Эффективное обучение решению геометрических задач основано на использовании при отыскании плана решения задачи некоторых выводов, полученных в решениях, так называемых *ключевых задач*. Такой алгоритмический подход к отысканию плана решения той или иной конкретной задачи помогает быстрее найти этот план и успешно реализовать его.

Ключевыми принято называть задачи на доказательство или вывод зависимостей (соотношений), эффективно используемых при решении многих других геометрических задач.

Разумеется, нет и не может быть полного перечня ключевых задач, которые должен знать учащийся. В каждом конкретном случае объем алгоритмических сведений может быть больше или меньше. Но какой-то минимум этих сведений решающему задачу должен быть известен, так как без знания такого минимума вряд ли можно продвинуться дальше решения легких задач. Для лучшего запоминания алгоритмических сведений учащиеся записывают их в отдельную общую тетрадь, в которую обычно записывают и другие важные сведения из школьного курса математики. Эта тетрадь может служить личным справочником по математике, позволяющим легко найти и вспомнить забытую формулу или алгоритм. Ведение такой тетради способствует быстрейшему запоминанию содержащихся в ней сведений.

Занятия курса условно можно разделить на три этапа. Сначала в форме фронтальной беседы рассматриваются основные сведения из курса планиметрии основной школы, затем решаются базисные (ключевые) задачи планиметрии, раскрывается смысл используемого в ней алгоритмического приема, далее приводятся решения таких задач, в которых данный прием может быть успешно применен, и, наконец, даются упражнения для самостоятельной работы.

Содержание программы

Треугольники. Основные теоремы и формулы. Отмечены теоремы и формулы планиметрии, наиболее часто используемые при решении геометрических задач. Список теорем и формул дополняется некоторыми полезными утверждениями и соотношениями (с доказательством или выводом). Свойство биссектрисы угла треугольника. Решение треугольников. Вычисление биссектрис, медиан, высот, радиусов вписанной и описанной окружностей. Формулы площади треугольника: формула Герона, выражение площади треугольника, через радиус вписанной и описанной окружностей.

Решение треугольников. Рассмотрен простой, но важный для приобретения практических навыков, метод решения задач, объединяемый общим названием «решение треугольников». Речь идет о расчете одних, неизвестных элементов треугольника через другие, известные.

Расчет элементов треугольника методом составления уравнений. Предлагаемые задачи позволяют проиллюстрировать стандартный метод решения задач более широкого класса, также связанных с расчетом элементов треугольника, а именно «метод составления уравнений». Как ясно уже из названия, этот метод основан на введении одного или нескольких неизвестных, которыми являются те или иные элементы треугольника, и последующем составлении для них необходимых уравнений.

Взаимное расположение углов, *треугольников и окружностей*. Решаются различные задачи, связанные с расположением окружностей относительно друг друга, а также окружностей, углов и треугольников. Задачи подобраны таким образом, чтобы их решения демонстрировали основные приемы и элементы решения других задач, более сложных. Вычисление углов с вершиной внутри и вне круга, угла между хордой и касательной.

Теорема о произведении отрезков хорд. Теорема о касательной и секущей.

Пропорциональные отрезки в треугольнике.

Теорема Менелая и Чевы, *окружность девяти точек*. *Прямая Эйлера*. Решение задач, связанных с пропорциональным делением отрезков в треугольнике.

Четырехугольники. *Основные теоремы и формулы*. *Трапеции*, *параллелограммы*, *произвольные четырехугольники*. *Взаимное расположение четырехугольников и окружностей*. Отмечены теоремы и формулы планиметрии, наиболее часто используемые при решении геометрических задач. Список теорем и формул дополняется некоторыми полезными утверждениями и соотношениями (с доказательством), относящимися к трапеции, параллелограммам и произвольному четырехугольнику. Вписанные и описанные многоугольники. Свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников. Теорема о сумме квадратов сторон и диагоналей параллелограмма.

Задачи на отыскание фигур с экстремальными элементами. Рассматриваются задачи, в которых требуется найти фигуру или ее элементы с оптимальными значениями тех или иных параметров. В задачах этого класса, как правило, идет речь о том, чтобы среди всех фигур, обладающих определенными свойствами, найти фигуру, у которой тот или иной параметр принимает наибольшее или наименьшее значение.

Геометрические места точек и метод координат. *Элементы аналитической геометрии*. Рассматриваются задачи на нахождение геометрических мест точек и задачи на применение элементов аналитической геометрии. *Эллипс*, *гипербола*, *парабола как геометрические места точек*.

Метод геометрических преобразований в решении планиметрических задач. Рассматриваются задачи на доказательство, построение и вычисление с широким применением преобразования движения (осевая симметрия, параллельный перенос, поворот) и подобия.

Метод вспомогательных фигур. Рассматриваются задачи, для решения которых характерным является применение вспомогательных построений: вспомогательная окружность, спрямление, дополнительные треугольники. С их помощью решаемую задачу обычно удается свести к элементарной.

Разные методы. Векторный метод. Метод координат. Метод пропорциональных отрезков (теоремы Стюарта, Менелая, Чевы). Метод площадей.

Формы контроля и оценивания

При определении форм контроля учитывается продолжительность курса. Так как курс продолжительный (72 ч в 10-м классе и 34 ч в 11-м классе), то он оценивается с помощью письменных самостоятельных и контрольных работ, диктантов по вопросам теории, тестов, направленных на проверку усвоения основных практических умений и навыков, долговременных домашних практикумов, творческих отчетов, семестровых экзаменов. Форма оценивания: традиционная пятибалльная система оценок.

Список литературы

Белоносов В. С., *Фокин М. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.

Гусев В. А. и др. Геометрия. Полный справочник. М., 2006.

Звавич Л. И., *Рязановский А. Р.* Геометрия в таблицах. 7–11 кл.: Справочное пособие. М., 2002.

Таблица 1

Тематическое планирование

№ п/п	Тема	Всего часов	В том числе* Л	П	С	Форма контроля
	10-й класс					
	Треугольники					
	Признаки равенства и подобия треугольников. Заме-		2			
	чательные линии в треугольнике. Свойство биссек-			2		
	трисы угла треугольника. Вычисление биссектрис,					
	медиан, высот, радиусов вписанной и описанной ок-			2		
	ружностей					
	Формулы площади треугольника: формула Герона,			2		
1	выражение площади треугольника, через радиус впи-	20				Контрольная ра-
	санной и описанной окружностей			2		бота
	– Основные теоремы и формулы					(К.р.) 1 – 1 ч
	– Решение треугольников			2		
	– Расчет элементов треугольника методом составле-		1			
	ния уравнений			2		
	– Пропорциональные отрезки в треугольнике		1			
	– Взаимное расположение углов, треугольников и ок-		1	2		
	ружностей					
	Избранные задачи и теоремы планиметрии					Дом.
	Теорема Карно		1	2		Самостоятельная
	Теоремы Чевы и Менелая		1	4		работа
	Метод ГМТ	14	1	2		(С.р.)
	Теорема Птолемея					
	Прямая Эйлера и окружность девяти точек		1	2		
	Четырехугольники		1			
2	– Основные теоремы и формулы			1		
	– Применение основных теорем и формул					С.р.
	– Трапеции, параллелограммы, произвольные четы-			2		
	рехугольники	10				
	– Взаимное расположение четырехугольников и ок-			2		Участие
	ружностей					в семинаре
	– Задачи на отыскание фигур с экстремальными эле-		2	1	1	К.р. 2
	ментами					
3	Векторный метод. Метод координат	10	3	6	1	
4	Задачи на построение. Неразрешимость задач на построение	3	1	2		
5	Геометрические места точек и метод координат	10	3	6	1	Участие в семинаре
6	Элементы аналитической геометрии	4	1	2		К.р. 3
	11-й класс					
1	Метод геометрических преобразований в решении планиметрических задач		1	5		С.р.
2	Метод вспомогательных фигур		1	5		С.р.
3	Алгебраический метод	34	1	5		С.р.
4	Разные методы		2	12	2	Участие в семинаре С.р. К.р. 4

* В табл. 1 и 2: Л – лекция, П – практика, С – семинар.

Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Сканави. М.: Высш. шк., 2002.

Сборник задач по математике для подготовительных курсов / А. Я. Колодко, Л. С. Колодко. Новосибирск: НГУЭУ, 2003.

Потоскуев Е. В., *Звавич Л. И.* Геометрия 10: Задачник для ОУ с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2009.

Готман Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. М., 1996.

Брюхова О. Н., *Иванов С. О.* и др. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010. Тематические тесты: геометрия, текстовые задачи. Ростов н/Д: Легион-М, 2009.

Жафяров А. Ж. Профильное обучение математике старшеклассников. Новосибирск, 2003.

Материалы дистанционной математической школы. URL: http://www.schoolplus.ru/dms/mschool.

Контрольные работы к элективному курсу «Планиметрия»

Контрольные работы составлены для проведения итогового тематического контроля знаний и умений учащихся специализированных или профильных классов, изучающих элективный курс «Планиметрия». Для успешного решения предложенных задач необходимо иметь прочные базовые знания, применять знания и умения в несколько измененной ситуации, более сложной, чем в курсе планиметрии 7–9-х классов.

В каждой работе 4 задачи, первые три из которых имеют примерно одинаковый уровень сложности и расчетное время решения – 45 минут. Четвертая задача имеет повышенный уровень сложности и предлагается в качестве дополнительной задачи (при наличии времени у учащегося) или домашнего задания.

Работы представлены в двух вариантах. Окончательные критерии оценивания определяются учителем и учитывают степень продвижения ученика в решении задач, но отметку «5» рекомендуется выставлять при полном решении 3 задач, «4» – при полном решении не менее двух задач. Если ученик решил все 4 задачи, рекомендуется за работу поставить две отметки.

Треугольники

Вариант 1

1. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна $2\sqrt{3}$ и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите больший катет.

2. Высота CH треугольника ABC равна 8, основание высоты H лежит на отрезке AB. HN – высота треугольника BCH, а HM – высота треугольника ACH. Найдите длину отрезка MN, если $AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $BN = 12$.

3. Дан треугольник ABC. Известно, что $AC = 10$, $BC = 12$ и угол CAB в два раза больше угла CBA. Найдите длину стороны AB.

4. Отрезки KP и MH имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что $KH \perp MP$, $OH = 4$, $OM = 5$. Найдите отношение периметров треугольников OKM и OHP.

Вариант 2

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120°. Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника, до основания треугольника равно $1/\sqrt{3}$, а до боковых сторон равно 3. Найти AC.

2. На гипотенузе прямоугольного треугольника взята точка, равноудаленная от катетов, которая разбивает гипотенузу на отрезки длиной 1 и 3. Найдите высоту этого треугольника, проведенную из вершины прямого угла.

3. В треугольнике ABC сторона AB равна $\sqrt{84}$, и она больше половины AC. Найдите сторону BC, если медиана BM равна 5, а площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$.

4. В треугольнике ABC точка D делит сторону AC на отрезки $AD = 3$ и $DC = 13$; угол BAC равен 60°; углы ABD и ACB равны. Найдите площадь треугольника ABC.

Четырехугольники

Вариант 1

1. Равнобедренная трапеция описана около окружности радиусов 2. Найдите

площадь трапеции, если косинус угла при большем основании трапеции равен 0,6.

2. Через середину диагонали AC трапеции $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная AC. Эта прямая пересекает основания AD и BC в точках K и M соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник $AMCK$, если $AM = 10$, $AC = 16$.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом при вершине B. Синус угла BAD равен $2\sqrt{2}/3$, а длина стороны AB равна 6. Найдите периметр треугольника ABC, если площадь параллелограмма равна $20\sqrt{2}$.

4. В ромб вписана окружность радиусом $\sqrt{3}$. Найдите сторону ромба, зная, что она выражается целым числом и $BK = 2\sqrt{7}$, где K – середина отрезка CD.

Вариант 2

1. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке L, лежащей на стороне AD. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если известно, что $CL = 12$, а площадь треугольника ABL равна 15.

2. Найдите длину средней линии трапеции, в которой диагонали перпендикулярны, а их длины равны 10 и 24.

3. Площадь ромба $ABCD$ равна 4. Найдите его сторону, зная, что она выражается целым числом и $AF = \sqrt{5}$, где F – середина отрезка BC.

4. В выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке O, причем $AO = OC$, $BC = 5$, $CD = 12$, а угол DAB – прямой. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Векторы и координаты

Вариант 1

1. Дан вектор $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$. Найдите множество таких точек C, что: а) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, б) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

2. В треугольнике ABC точка K делит сторону BC в отношении 1 : 2, считая от точки B; точка H делит сторону AC в отношении 2 : 3, считая от точки A; отрезки BH и AK пересекаются в точке M. Найдите отношения $BM : MH$ и $AM : MK$.

3. Даны точки A (3; 4), B (4; 3), C (–2; –2). Докажите, что эти точки являются вершинами треугольника, определите его вид, задайте этот треугольник системой неравенств, найдите точку пересечения медиан.

4. Найдите условие, которому удовлетворяют координаты вершины прямого угла треугольника с гипотенузой AB, если A (3; 5), B(7; –11).

Вариант 2

1. Дан вектор $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$. Найдите множество таких точек C, что: а) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, б) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.

2. В треугольнике ABC точка K делит сторону BA в отношении 3 : 5, считая от точки B; точка H делит сторону BC в отношении 1 : 2, считая от точки B; медиана BM пересекает отрезок KH в точке O. Найдите отношение $BO : OM$.

3. Даны точки A (–3; –4), В (–4; –3), C (2; 2). Докажите, что эти точки являются вершинами треугольника, определите его вид, задайте этот треугольник системой неравенств, найдите точку пересечения высот.

4. Найдите условие, которому удовлетворяют координаты середины гипотенузы AB прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла C (3; 5) и длинами катетов 2 и 8.

Окружность

Вариант 1

1. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найдите диаметр этой окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5.

2. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной, равной 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACE.

3. Центры двух окружностей находятся на расстоянии $\sqrt{80}$. Радиусы окружностей равны 4 и 8. Найти длину их общей касательной.

4. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r проведена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найдите длины этих отрезков.

Вариант 2

1. К окружности проведена касательная AB (B – точка касания). Прямая AC пересекает окружность в точках C и D. Найдите AD, если $AC=1,\ AB=\sqrt{3}$.

2. Из точки, данной на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Отрезок, соединяющий их середины, равен 6. Найдите радиус окружности.

3. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.

4. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r проведена внешняя касательная. Найти радиусы всех окружностей, касающихся двух данных окружностей и проведенной общей касательной.

Рабочая программа элективного курса для 10–11-х специализированного математического класса «Параметры в алгебраических уравнениях и неравенствах»

(учитель Е. С. Бондаренко)

Пояснительная записка

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры учащихся. Решение уравнений и неравенств с параметрами можно считать деятельностью, близкой по своему характеру к исследовательской. Это обусловлено тем, что выбор метода решения, процесс решения, запись ответа предполагают определенный уровень сформированности умений наблюдать, сравнивать, анализировать, выдвигать и проверять гипотезу, обобщать полученные результаты.

Элективный курс «Параметры в алгебраических уравнениях и неравенствах» в 10–11-м классе рассчитан на 104 часа (36 ч в 10-м классе, 68 ч в 11-м классе). Основная цель курса – расширение и укрепление предметных компетенций учащихся; подготовка к ЕГЭ, формирование умений решать конкурсные задания, применять различные способы решения, проявлять интуицию и находчивость в нетривиальных ситуациях при решении сложных задач (см. табл. 2).

При их решении используются не только типовые алгоритмы, но и нестандартные методы, упрощающие решение. В связи с этим на первых порах при работе над этой темой ученика предлагаются простые решаемые по алгоритму задачи, с последующим усложнением задач.

Курс построен как углубленное изучение вопроса и является развитием системы ранее приобретенных знаний. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач, требующих применения высокой логической и операционной культуры, развивающей научно-теоретическое и алгоритмическое мышление, и направлено на развитие самостоятельной исследовательской деятельности.

В процессе обучения учащиеся формируют умения решать различные уравнения и неравенства, системы, анализировать и делать выводы, обсуждать результаты, выбирать оптимальный способ решения.

Учитывая особенности контингента и уровень подготовки по данному разделу, обучение ведется с самых простых математических моделей.

Основные формы обучения: лекционно-практическая с элементами контроля; домашняя самоподготовка.

Основное содержание курса

Параметр в алгебраических уравнениях и неравенствах:

- линейные уравнения и неравенства с параметром;
- системы линейных уравнений с параметром;
- нелинейные уравнения и неравенства с параметром;
- модуль и параметр;
- параметр в тригонометрии;
- иррациональность и параметр;
- показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром.

Графические приемы, свойства функций в заданиях с параметром.

Применение производной в заданиях с параметром.

Литература

Материалы ЕГЭ 2007–2011 гг.

Варианты вступительных экзаменов в НГУЭУ, НГТУ.

Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. М.: Экзамен, 2009. 286 с.

Данкова И. Н. Уравнение второй степени с параметром / Предпрофильная подготовка учащихся 9-х классов по математике. М., 2006.

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебраический тренажер, М.: Илекса, 2001.

Балаян Э. Н. Практикум по решению задач. Рациональные уравнения, неравенства, системы. Ростов н/Д: Феникс, 2006. 125 с.

Балаян Э. Н. Практикум по решению задач. Иррациональные уравнения, неравенства, системы. Ростов на/Д: Феникс, 2006. 120 с.

Рыжик В. И., Черкасова Т. Х. Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу: Учеб. пособие для профильной школы. СПб.: СМИО Пресс, 2008.

Дидактические материалы к элективному курсу «Параметры»

Контрольные и проверочные работы составлены для проведения итогового тематического контроля знаний и умений учащихся специализированных или профильных классов, изучающих элективный курс «Параметры».

Работы содержат 4 задания, уровень сложности которых немного возрастает с порядковым номером задачи, среднее время выполнения – 45 мин (последняя работа – 2 ч). Работы представлены в двух вариантах. Окончательные критерии оценивания определяются учителем и учитывают степень продвижения ученика в решении задач, но отметку «5» рекомендуется выставлять при полном решении 4 задач, отметку «3» – при полном решении двух задач.

Уравнения и неравенства первой степени

Вариант 1

1. Решите уравнение: $a = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a(x-1)}$.

2. Отрезок соединяет две точки на боковых сторонах равнобедренного треугольника и параллелен его основанию. Боковые стороны равны 1, а основание равно a. Чему равна длина этого отрезка, если в полученную трапецию можно вписать окружность?

3. Решите неравенство:

$$\frac{2y+1}{(a-1)y} - \frac{a+5}{a-1} > \frac{3}{y} \quad \text{при } a > 1.$$

4. Решите неравенство: $|x+5| < ax$ при $a \geq 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

$$\frac{a+3}{a+2} = \frac{2}{x} - \frac{5}{(a+2)x}.$$

2. Отрезок соединяет две точки на боковых сторонах равнобедренного треугольника и параллелен его основанию. Боковые стороны равны а, основание равно 1. Чему равна длина этого отрезка, если в полученную трапецию можно вписать окружность?

3. Решите неравенство:

$$\frac{2y-1}{(a-1)(y-1)} - \frac{a+5}{a-1} > \frac{3}{y-1} \quad \text{при } a > 1.$$

4. Решите неравенство: $|-x+5| > ax$ при $a \leq 0$.

Системы линейных уравнений и неравенств

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - y = 2, \\ x + 4y = a. \end{cases}$

2. Прямые заданы уравнениями

$$3x + 2ay = 1 \text{ и } 3(a-1)x - ay = 1.$$

При каких значениях a они: а) пересекаются; б) совпадают; в) параллельны?

3. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} |x| + y = a, \\ x - ay = -a? \end{cases}$$

4. Найдите все a, при которых имеет решение система

$$\begin{cases} y + a \geq 2|x-a|, \\ x + |y-a| = a+1. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + ay = a^3, \\ ax + y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ x-y=-2, \\ 4x+y=a. \end{cases}$

2. Прямые заданы уравнениями
$2ax+3y=1$ и $3(1-a)y+ax=1$.

Таблица 2

Тематический план к программе элективного курса

№ п/п	Тема	Всего часов	В том числе: Л	П	С	Форма контроля
	10-й класс					
1.	Знакомство с параметром. Линейные уравнения с параметром	9	1	3		
	Линейные неравенства с параметром			2		Проверочная работа
	Системы линейных уравнений и неравенств с параметром		1	2		Проверочная работа
2.	Нелинейные уравнения и неравенства с параметром:	10	1			
	• знаки корней квадратного уравнения;					
	• расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от значений параметра;			2		Проверочная работа
	• набольшее и наименьшее значения квадратичной функции		1 1	1 1	1 1	
3.	Модуль и параметр	10	2	8		Проверочная работа
4.	Параметр в тригонометрии	7	1	5		
	11-й класс					
1.	Аналитические методы решения основных типов задач:	16				Контрольная работа
	• иррациональные уравнения и неравенства;		1	2		
	• показательные уравнения и неравенства;			2		
	• логарифмические уравнения и неравенства;					
	• параметр как равноправная переменная;		1	2		
	• введение новой переменной, использование свойств функции ;		1	2		
	• и другие приемы решения уравнений и неравенств с параметрами		1	4		
2.	Графические приемы	17				
	Вспомогательные сведения. Метод областей		1	2		
	Геометрическая интерпретация основных задач с параметром		1	6 6	1	
3.	Свойства функций в задачах с параметром	10	2	8		Контрольная работа
4.	Применение производной в задачах с параметром	8	1	5	2	
5.	Решение задач ЕГЭ 2007–2011	17	1	15	1	Контрольная работа (2 ч)

При каких значениях a они: а) пересекаются; б) совпадают; в) параллельны?

3. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} |x|+y=a, \\ x+ay=a? \end{cases}$$

4. Найдите все a, при которых имеет решение система

$$\begin{cases} x-a \geq 3|y+a|, \\ y+|x+a| = 2-a. \end{cases}$$

Квадратные уравнения с параметром

Вариант 1

1. Чему равна сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$? Нарисуйте график этой суммы.

2. При каких целых значениях a имеет единственное решение уравнение

$$ax^2 - (a+1)x + a^2 + a = 0\,?$$

3. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - (3a+2)x + 2(a+1) = 0$ имеет решение, большее 1?

4. Решите уравнение $\dfrac{ax+1}{x(x+a)} = -1$.

Вариант 2

1. Чему равна сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$? Нарисуйте график этой суммы.

2. При каких целых значениях a имеет единственное решение уравнение

$$ax^2 + (a+1)x + a^2 + a = 0\,?$$

3. При каких значениях параметра a уравнение $(1-a)x^2 + 3ax + 4a - 1 = 0$ имеет решение, меньшее –3?

4. Решите уравнение $\dfrac{ax-1}{x(a-x)} = -1$.

Квадратные неравенства с параметром

Вариант 1

1. При каких значениях a неравенство $(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2 > 0$ верно для всех значений x?

2. Решите неравенство $ax^2 + x + 1 \geq 0$.

3. При каких значениях a решения неравенства $|x^2 - a| > x^2$ образуют один промежуток?

4. При каких значениях a неравенство $3 - |x-a| > x^2$ имеет только отрицательные решения?

Вариант 2

1. При каких значениях a неравенство $(a^2-1)x^2 - 2(a-1)x + 2 > 0$ верно для всех значений x?

2. Решите неравенство $ax^2 - x + 1 \geq 0$.

3. При каких значениях a решения неравенства $|x^2 - a| > -x$ образуют один промежуток?

4. При каких значениях a неравенство $3 - |x+a| > x^2$ имеет только положительные решения?

Уравнения и неравенства с модулями

Вариант 1

1. Какое число является решением уравнения $(|x+3|) - (a|x-1|) = 4$ при всех значениях a?

2. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $|1-ax| = x$?

3. Решите неравенство: $|t| < a/t$.

4. Решите неравенство:

$$|x-a| + |x-1| \geq |1-a|.$$

Вариант 2

1. Какое число является решением уравнения $(|x-2|) + (a|x+3|) = 5$ при всех значениях a?

2. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $|1+ax| = -x$?

3. Решите неравенство: $|t| > a/t$.

4. Решите неравенство:

$$|x+a| + |x+1| \geq |a-1|.$$

Иррациональные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-a} = a$; б) $\sqrt{1-x^2} = x + a$.

2. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $\sqrt{ax} = x+1$ $(a \geq 0)$?

3. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2+a^2} > x + a.$$

4. При каких значениях a не имеет решения неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} > x + 1$?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+a} = -a$, б) $\sqrt{1-x^2} = x - a$.

2. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение $\sqrt{ax} = -x + 1$ ($a \le 0$)?

3. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2 + a^2} > x - a.$$

4. При каких значениях a не имеет решения неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} > -x + 1$?

Нелинейные системы уравнений и неравенства

Вариант 1

1. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = a? \end{cases}$$

2. Верно ли, что при любом значении a имеет положительные решения система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a - 1, \\ y^2 - 2xy = a^2? \end{cases}$$

3. При каких значениях a для любого x верно неравенство

$$\frac{ax^2 + ax - 1}{\left(a^2 + 1\right)x^2 + x + 1} < 0?$$

Вариант 2

1. При каких значениях a имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x - y = a? \end{cases}$$

2. Верно ли, что при любом значении a имеет положительные решения система уравнений

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 = a + 1, \\ x^2 - 2xy = a^2? \end{cases}$$

3. При каких значениях a для любого x верно неравенство

$$\frac{ax^2 - ax - 1}{\left(a^2 + 1\right)x^2 - x + 1} < 0?$$

Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$4 \cdot 2^{\frac{2a}{x}} + 12 \cdot 6^{\frac{a}{x}} = 27 \cdot 3^{\frac{2a}{x}}$$

имеет своим корнем число -7?

2. Найдите все значения параметра a, при которых число 3 является корнем уравнения $\log_3\left(7a - 11\right) - \log_3 \frac{39}{x} = \log_3\left(x + 1\right)$.

3. При каком значении параметра решением уравнения $\cos ax = \frac{\sqrt{3}}{2}$ является множество $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 10\pi n,\quad n \in Z$?

4. Найдите все целые значения параметра n, при которых $\sin^n a = \frac{1}{4}$, если $\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$5^{3a+x} - a \cdot 5^{3a} + x = 2$$

имеет своим корнем число 2?

2. Найдите все значения параметра a, при которых число 5 является корнем уравнения $\lg\left(3a + x - 2\right) + \lg\left(x + 1\right) = \lg 72$.

3. При каком значении параметра решением уравнения $\cos ax = -\sqrt{2}/2$ является множество $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3},\quad n \in Z$?

4. Найдите все целые значения параметра n, при которых $\sin^n a = 1/4$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Графики и функции

Вариант 1

1. Найдите все положительные значения a, при которых уравнение

$$a\left(x - 5\right)^2 - a\left|x - 5\right| + 5 = 0$$

имеет ровно 2 корня. Если таких значений a более одного, то в ответ запишите их произведение.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\left|x^2 - 6\right| - a + 8\right| = 3$ имеет ровно 5 корней. Если таких значений более одного, то в ответе укажите наибольшее значение a.

3. При каких значениях параметра множеством значений функции $y = 2a - a\sin x$ является промежуток [0,5; 1,5]?

4. Найдите все значения параметра a, при которых наибольшим значением функции $f(x) = 18\cos^2 x - 3\sin^4 x - 8\cos^4 x - a$ является число 1.

Вариант 2

1. Найдите все положительные значения a, при которых уравнение

$$(x+2)^2 - 2a|x+2| + 4a = 0$$

имеет ровно 2 корня. Если таких значений a более одного, то в ответ запишите их произведение.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left||4 - x^2| - a + 7\right| = 2$ имеет ровно 5 корней. Если таких значений более одного, то в ответе укажите наибольшее значение a.

3. Найдите множество значений функции $y = a + a\cos x$ при отрицательных значениях параметра.

4. Найдите все значения параметра a, при которых наименьшим значением функции $f(x) = 3\sin^4 2x - 3\sin^3 2x - 12\sin^2 2x + a$ является число 5.

Итоговая контрольная работа (2 часа)

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4a + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

2. Найдите все такие значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 16x^3 + 2(a-1)y^3 = a^2, \\ 8x^3 - 4ax^2y + 4x^2y + 2xy^2 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и всякое ее решение удовлетворяет условию $2x = y$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x-a| - 3x$ на отрезке [–6; 6] принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \le 11, \\ (x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 2 \ge 0, \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 1 \ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2. Найдите все такие значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 16x^3 + 2(a-1)y^3 = a^2, \\ 8x^3 - 4ax^2y + 4x^2y + 2xy^2 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и всякое ее решение удовлетворяет условию $2x = y$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x-a| - x$ на отрезке [–6; 7] принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \le 12, \\ (x-3a)^2 + (y+a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Материал поступил в редколлегию 02.05.2012

E. S. Bondarenko, E. A. Korol'ko

ELECTIVE COURSES WORK PROGRAMS ON MATHEMATICS FOR 10–11TH CLASSES SPECIALIZED IN MATHEMATICS

Elective courses programs for 10–11th classes specialized in mathematics at «Economic lyceum» as a part of Novosibirsk region Ministry of Education, Science and Innovations project «Specialized classes for capable schoolchildren gifted in natural-science and mathematics» are presented. The programs are written and worked in practice by teachers of mathematics of high qualification at «Economic lyceum».

Keywords: specialized classes, elective courses programs on mathematics for specialized classes.