

<sup>1</sup> Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН  
пр. Акад. Лаврентьева, 1, Новосибирск, 630090, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090  
E-mail: sharypov@itp.nsc.ru

## К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПЛЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Представлены результаты теоретического изучения и численного моделирования возникновения трехмерной упорядоченной структуры пленочного течения в неизотермических условиях. Показано, что при достаточно высокой интенсивности локального источника тепла двумерная структура течения пленки является неустойчивой. Получено выражение для спектра инкрементов линейных возмущений, проанализирована зависимость длины волны возмущения с максимальным инкрементом от основных физических параметров. На основе аналитических результатов выполнено численное моделирование формирования периодической структуры течения и поля температуры свободной поверхности. Проведено сопоставление теоретических результатов с данными экспериментов, выполненных на установках в лаборатории интенсификации процессов теплообмена ИТ СО РАН и в лаборатории нестандартного физического практикума кафедры общей физики физического факультета НГУ. Результаты работы могут быть использованы в учебном процессе при выполнении учебно-научных и научно-исследовательских работ студентами и аспирантами, в том числе проходящими подготовку на базе Научно-образовательного центра в области энергетики и энергосберегающих технологий, созданного НГУ, ИТ СО РАН и ЦТТ СО РАН.

### Введение

В экспериментах обнаружено, что структура течения тонкой пленки жидкости (толщина  $h \sim 0,1$  мм) при действии локального нагревателя, расположенного в подложке, имеет характерную пространственную структуру [1]. При низких значениях плотности теплового потока формируется стационарная двумерная структура течения. Выходящий на свободную поверхность жидкости тепловой пограничный слой приводит к неоднородности поля температуры ( $T$ ) поверхности пленки и, как следствие, к неоднородному распределению поверхностного натяжения ( $\sigma$ ). Термокапиллярное воздействие тормозит гравитационно стекающую жидкость и формирует локальное утолщение пленки – «валик», ориентированный вдоль линии верхней кромки нагревателя поперек потока. При высоких значениях плотности теплового потока двумерная структура течения преобразуется в трехмерную: валик распадается на периодические узкие струи, разделенные широкими областями тонкой пленки жидкости. Аналогичный эффект наблюдается при распространении волны горения по пленке горючей жидкости на тонкой теплопроводной подложке [2]. Данное явление может оказывать существенное влияние на режим и показатели ра-

боты технологических тепло- и массообменников. Оно также представляет фундаментальный научный интерес.

В основе этого явления лежит комплекс физических процессов: динамика вязкой пленки в гравитационном поле, межфазный теплообмен, термокапиллярность, массообмен. Физический механизм, приводящий к формированию упорядоченных структур, связан с неустойчивостью и нелинейностью в системе. Имеющиеся экспериментальные данные [1], как и результаты аналитического изучения и численного моделирования [3–9] свидетельствуют о сложной взаимосвязи основных физических факторов, определяющих условия переходов между различными режимами течения, а также основные параметры его структуры (такие как период трехмерной структуры, интенсивность межфазного теплообмена и др.). Кроме этого, в силу многопараметричности задачи в экспериментах, как правило, бывает затруднительно выявить роль отдельных факторов. Прямые численные расчеты также сталкиваются со значительными трудностями в задачах о термокапиллярной конвекции вследствие того, что граничные условия приходится ставить на свободной поверхности, форма которой заранее не известна. Все это обуславливает высокий научный интерес и актуальность темы исследований.

### Описание двумерной структуры

Исходными уравнениями, описывающими гидродинамику пленки, служат уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности несжимаемой жидкости. Граничные условия включают: условие прилипания на подложке ( $y = 0$ ); условие баланса сил на свободной поверхности с учетом поверхностного натяжения ( $y = h$ ) [10. § 62] и кинематическое условие

$$v = (dh/dt)|_{y=h} = (h_t + uh_x + wh_z)|_{y=h}, \quad (1)$$

которое совместно с уравнением неразрывности эквивалентно условию сохранения расхода жидкости. Здесь  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости, ось  $x$  лежит в плоскости подложки и направлена вниз по течению, ось  $z$  – перпендикулярно течению, ось  $y$  – перпендикулярно плоскости подложки.

Теоретическое изучение динамики тонких слоев жидкости существенно упрощается в длинноволновом приближении, в котором характерная длина деформации свободной поверхности ( $L$ ) считается намного превосходящей амплитуду деформации. Это приближение позволяет приводить исходные уравнения и граничные условия к упрощенной асимптотической форме, которая может представлять собой одно нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для локальной толщины пленки. Все остальные переменные (скорость, давление, температура) определяются как функции решения этого уравнения. Ряд подобных эволюционных уравнений приводится в обзоре [11], а также в работах [12; 13 и др.].

В двумерном стационарном случае уравнение для толщины пленки при локальном нагреве от движущегося источника тепла имеет вид [14; 15]

$$\left( \frac{h^3}{h_\infty^3} - 1 \right) \sin \theta + \frac{h^3}{h_\infty^3} \left\{ \frac{\sigma h_{xxx}}{\rho |\mathbf{g}|} - h_x \cos \theta \right\} + \frac{3h^2 \sigma_x}{2\rho |\mathbf{g}| h_\infty^3} = \frac{3\nu C}{|\mathbf{g}| h_\infty^2} \left( \frac{h}{h_\infty} - 1 \right), \quad (2)$$

здесь  $h_\infty$  – толщина пленки вдали от нагревателя вверх по потоку;  $\rho = \text{const}$  – плотность жидкости;  $\nu = \text{const}$  – кинематическая вязкость жидкости;  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения;  $\theta$  – угол наклона подложки к горизонту;  $C$  – скорость движения источника тепла вдоль оси  $x$ . При условии

$C = 0$  уравнение (2) совпадает с уравнением, полученным в работах [3; 16]. Это уравнение записано с точностью до членов второго порядка малости по параметру  $\mu = h_\infty/L \ll 1$ .

Давление ( $p$ ) и компоненты скорости жидкости выражаются через  $h(x)$ :

$$p = p^g + (h - y)\rho |\mathbf{g}| \cos \theta - \sigma h_{xx},$$

$$u = \frac{y(t - 2h)}{2\nu} G + \frac{y\sigma_x}{\rho\nu},$$

$$v = \frac{y^2 h_x}{2\nu} G + \frac{y^2 (h - y/3)}{2\nu} G_x - \frac{y^2 \sigma_{xx}}{2\rho\nu},$$

где  $p^g = \text{const}$  – давление в газовой фазе;  $G = h_x |\mathbf{g}| \cos \theta - |\mathbf{g}| \sin \theta - \rho^{-1} (\sigma h_{xx})_x$ .

Гидродинамическая задача связана с тепловой только через условие баланса сил на свободной поверхности (поскольку  $\rho = \text{const}$ ,  $\sigma = \sigma(T)$ ). Как следствие, в уравнение (2) входит переменное поверхностное натяжение, для определения которого следует решать уравнение переноса тепла

$$T_t = \chi (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) - uT_x - vT_y - wT_z,$$

где  $\chi$  – температуропроводность жидкости (будем считать  $\chi = \text{const}$ ) с тем или иным набором граничных условий, например: на свободной поверхности ( $y = h$ ) нормальная компонента вектора теплового потока равна нулю, т. е. не учитывается теплообмен между жидкой и газовой фазами; температура жидкости вдали от нагревателя вверх по потоку равна  $T_\infty = \text{const}$ ; вне нагревателя температура на подложке ( $y = 0$ ) равна  $T_\infty$ ; на нагревателе задан тепловой поток (или температура).

Если распределение  $\sigma(x)$  считается известным (например, через измерение температуры свободной поверхности на основе методов инфракрасной термографии [1]), то уравнение (2) позволяет рассчитать функции  $h(x)$ ,  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $p(x)$ , зная для данной жидкости зависимость поверхностного натяжения от температуры. На рис. 1 представлены решения, полученные для заданного распределения  $T(x)$ , близкого к экспериментальным данным [1]. Значения параметров выбраны для случая 25 % раствора

этилового спирта в воде:  $T_\infty = 303 \text{ K}$ ,  $h_\infty \approx 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\rho = 956 \text{ кг/м}^3$ ,  $d\sigma/dT = -1,1 \cdot 10^{-4} \text{ кг/(с}^2\text{K)}$ ,  $\sigma_\infty = 0,034 \text{ кг/с}^2$ ,  $\nu = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , координате  $x=0$  соответствует максимальное значение  $|\sigma_x|$ .

При прочих равных условиях при более высоких значениях плотности теплового потока достигаются более высокие значения градиента температуры на свободной поверхности. Усиление термокапиллярного эффекта приводит к торможению потока вплоть до режима с локальным остановом течения на поверхности пленки. Решения, приведенные на рис. 1, а также представленный ниже анализ устойчивости двумерной структуры течения относятся именно к этому («критическому») режиму.

### Неустойчивость двумерной структуры течения

Линейный анализ устойчивости предполагает представление всех переменных в исходных уравнениях и в условиях на возмущенной свободной поверхности в виде суммы стационарного решения двумерной задачи и периодических по координате  $z$  нестационарных возмущений, имеющих бесконечно малую амплитуду, что позволяет

пренебречь нелинейными слагаемыми. В работе [6] было показано, что для критического режима в окрестности  $x=0$  справедливо уравнение Орра–Зоммерфельда, записанное для возмущения  $y$ -компоненты скорости ( $v'$ ). В отличие от [6], используем предположение о том, что в рассматриваемой области  $|x| \leq \mu L$  амплитуда возмущений не зависит от координаты  $x$ . Тогда уравнение Орра–Зоммерфельда преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$v'_{yyyy} - v'_{yy} (\Omega/\nu + 2\kappa^2) + v' (\Omega/\nu + \kappa^2) \kappa^2 = 0, \quad (3)$$

где  $\Omega$  – инкремент возмущения;  $\kappa$  – волновое число возмущения, периодического в направлении оси  $z$ .

Решение уравнения (3) при условии непротекания на стенке имеет вид:

$$v' = \sum_{s=1}^2 (\delta v)_s \text{sh}(\gamma_s y),$$

где  $(\delta v)_s$  – амплитуда  $s$ -ой моды решения,  $\gamma_1 = \sqrt{\Omega/\nu + \kappa^2}$ ,  $\gamma_2 = \kappa$ .

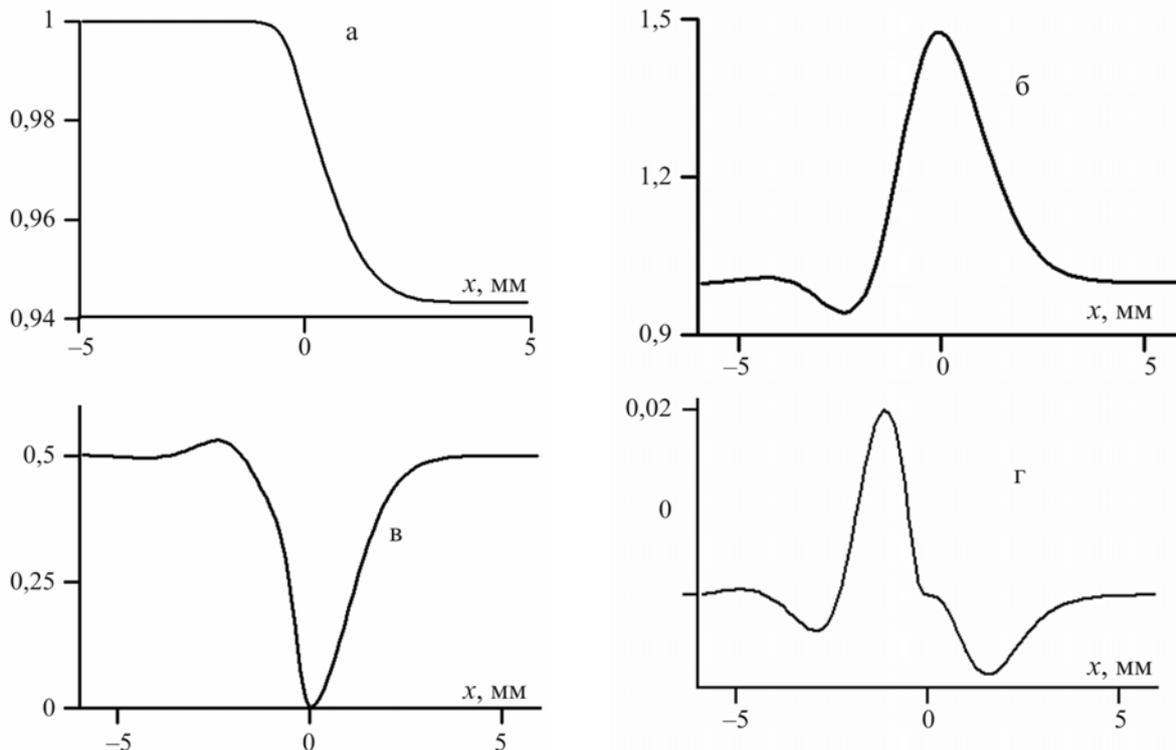


Рис. 1. Зависимости  $\sigma(x)/\sigma_\infty$  (а);  $h(x)/h_\infty$  (б);  $u(x)|_{y=h} |g|^{-1} h_\infty^{-2} \nu$  (в);  $v(x)|_{y=h} |g|^{-1} h_\infty^{-2} \nu$  (г)

Уравнения и граничные условия позволяют определить константы интегрирования и записать решения для возмущений остальных переменных, а также получить дисперсионное соотношение:

$$\bar{\Omega}^2 (\bar{\Omega}^3 - 2\bar{\gamma}_2^2 B + 4\bar{\gamma}_2^2 \bar{\Omega}^2) + A\bar{\gamma}_2^2 (\bar{\Omega}^3 + 2\bar{\gamma}_2^2 B) + 4\bar{\gamma}_2^4 B\bar{\Omega} = 0 \quad (4)$$

где  $A = \frac{h h_\infty^2 |\mathbf{g}|}{\nu^2} (l_\sigma^2 \kappa^2 + \cos \theta)$ ,  $l_\sigma = \left( \frac{\sigma}{\rho |\mathbf{g}|} \right)^{1/2}$  –

капиллярная постоянная жидкости,

$$B = \left( \frac{h_\infty^2 |\sigma_x|_{\max}}{\rho \nu^2} \right), \quad \bar{\Omega} = \Omega h_\infty^2 / \nu, \quad \bar{h} = h / h_\infty,$$

$$\bar{\gamma}_2 = \kappa h_\infty.$$

Уравнение (4) записано для предельного случая тонкого слоя жидкости  $\gamma_s h \ll 1$ . В изотермическом случае ( $B = 0$ ) уравнение (4) описывает распространение гравитационно-капиллярных волн на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости [10]:

$$\Omega^2 + 4\nu\kappa^2\Omega + \kappa^2 h |\mathbf{g}| (l_\sigma^2 \kappa^2 + \cos \theta) = 0.$$

Корни этого уравнения указывают на то, что возмущения распространяются с определенной фазовой скоростью и затухают под действием вязкости:

$$\Omega = -2\nu\kappa^2 \pm (4\nu^2\kappa^4 - \sigma h \kappa^4 / \rho - \kappa^2 h |\mathbf{g}| \cos \theta)^{1/2}.$$

При  $\sigma_x \neq 0$  будем полагать мнимую часть инкремента равной нулю, что соответствует экспериментальным данным (отсутствие у возмущений фазовой скорости) и не противоречит уравнению (4). Это позволяет делать предположения относительно величины инкремента. Пусть справедливы неравенства:

$$\bar{\Omega}^2 \gg A\bar{\gamma}_2^2, \quad |\bar{\Omega}| \gg \bar{\gamma}_2^2.$$

Тогда из (4) получим, отбрасывая тривиальное решение:

$$\bar{\Omega}_0^3 = 2\bar{\gamma}_2^2 B,$$

где  $\bar{\Omega} \equiv \bar{\Omega}_0 + \bar{\Omega}_1$ ,  $|\bar{\Omega}_1| \ll |\bar{\Omega}_0|$ ,  $\bar{\Omega}_0$  – «нулевое приближение» решения. Подставляя выражение для  $\bar{\Omega}_0$  в уравнение (4) и сохраняя только слагаемые первой степени по  $\bar{\Omega}_1$ , получим приближенное решение в виде:

$$\bar{\Omega} \approx \bar{\Omega}_0 - 2\kappa^2 h_\infty^2 - \frac{2A\kappa^2 h_\infty^2}{3\bar{\Omega}_0}. \quad (5)$$

Первое слагаемое в решении (5) связано с действием локального источника тепла и обеспечивает неустойчивость малых возмущений двумерного стационарного решения, второе слагаемое связано с эффектом диссипации энергии возмущений за счет вязкости, а третье описывает стабилизирующее воздействие капиллярности и гидростатики. Согласно (5), роль стабилизирующих эффектов нарастает с увеличением волнового числа возмущения, и зависимость  $\Omega(\kappa)$  носит немонотонный характер: при  $\kappa = \kappa_*$  инкремент максимален, при  $\kappa < \kappa_c$  инкремент положителен, при  $\kappa > \kappa_c$  – отрицателен.

С учетом полученного приближенного решения (5) очевидно, что использованные предположения справедливы в длинноволновой части спектра, т. е. при  $\kappa h_\infty \ll 1$ . Тем самым можно сделать вывод о неустойчивости базового решения по отношению к длинноволновым линейным возмущениям.

Из (5) можно определить длину волны нейтрально устойчивого ( $\Lambda_c$ ) и наиболее быстро растущего неустойчивого возмущения ( $\Lambda_*$ ). Пренебрегая эффектами вязкости и гидростатики, получим:

$$\Lambda_* = 2\pi \left( 250 (h/3)^3 \sigma^3 \nu^2 \rho \sigma_x^{-4} \right)_{y=h, x=0}^{1/8}, \quad (6)$$

$$\Lambda_c \approx 0,55 \Lambda_*.$$

Для условий эксперимента, указанных выше, оценка величины  $\Lambda_*$  дает 7,7 мм, что согласуется со значением периода структуры, наблюдаемой в эксперименте (7 мм).

На основе стационарного решения двумерной задачи и зависимости (6) можно проанализировать, как зависит значение  $\Lambda_*$  от угла наклона при одном и том же расходе жидкости (т. е. постоянном числе Рейнольдса). Аналитический результат  $\Lambda_* \sim (\sin \theta)^{-0,46}$  оказывается в хорошем соответствии с экспериментальными данными, согласно которым период структуры обратно пропорционален  $\sqrt{\sin \theta}$ .

Результаты проведенного линейного анализа устойчивости относятся к критическому режиму течения, когда за счет термокапиллярного воздействия достигается ло-

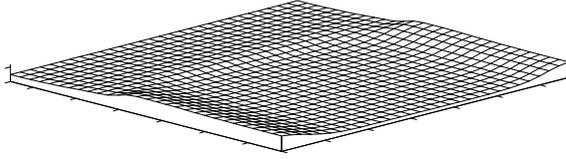


Рис. 2. Установившаяся двумерная поверхность пленки (одно деление горизонтальных осей соответствует 1 мм, вертикальной оси – 0,25 мм)

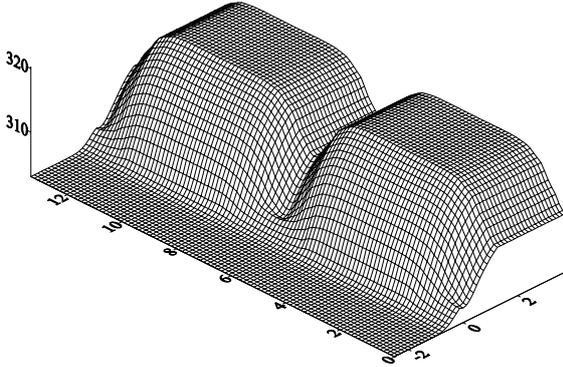


Рис. 3. Температура свободной поверхности (по горизонтальным осям отложены миллиметры, по вертикальной – градусы по шкале Кельвина)

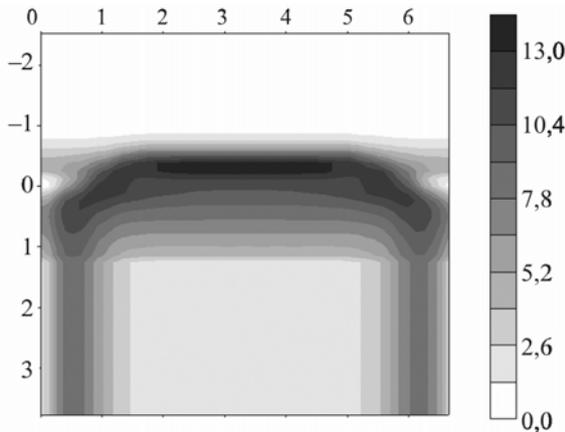


Рис. 4. Распределение модуля градиента температуры на поверхности пленки, К/мм (по осям отложены миллиметры)

кальный останов жидкости на поверхности пленки. С физической точки зрения, значение критического условия заключается в том, что в области покоящейся жидкости слабые трехмерные возмущения получают возможность увеличения своей амплитуды до уровня, сопоставимого с характеристиками основного течения. Дело в том, что неустойчивость возмущений в принципе возможна лишь в относительно узкой по координате  $x$  области ( $|x| \ll L$ ), в которой градиент температуры поверхности жидкости достаточно велик. Вне этой области диссипативные эффекты преобладают над

эффектом накачки, и возмущения затухают. Если критическое условие не выполняется (т. е. на свободной поверхности всюду  $u > 0$ ), то неустойчивые возмущения выносятся потоком жидкости из области, в которой возможно их усиление, не успевая достигнуть заметной амплитуды. Можно сделать вывод о том, что обсуждаемое критическое условие, строго говоря, следует рассматривать не как необходимое условие неустойчивости двумерного стационарного режима, а как критерий перехода к качественно новому – «струйному» – режиму течения. Критическое условие означает предел, до которого можно абстрагироваться от возможного наличия мелкомасштабной трехмерной структуры течения и приближенно описывать его с помощью двумерной модели.

### Численное моделирование периодической структуры

При моделировании структуры поверхности пленки можно выделить три характерные области. В первой ( $x < -L$ ) течение можно считать невозмущенным и описывать решением стационарной двумерной задачи (см. выше). Во второй области ( $|x| < L$ ) будем строить описание на основе решений, полученных с учетом неустойчивости слабых возмущений. Для третьей области ( $x > L$ ), где  $\sigma_x \rightarrow 0$ , неустойчивость не характерна, в ней будем учитывать только снос потоком возмущений, развившихся в окрестности  $x = 0$ .

В качестве начального условия использовалось численное решение двумерной стационарной задачи  $h_0(x)$  со слабыми случайными возмущениями, полное решение представлялось в виде суммы  $h(x, z, t) = h_0(x) + h'(x, z, t)$ . В качестве граничного условия использовалась периодичность решения по координате  $z$ .

Изменение толщины пленки во второй области рассчитывалось на основе возмущенного уравнения (1) (кинематического условия на свободной поверхности):

$$h'_t = v' - u'h_x - u_0h'_x - w'h_z.$$

Линейный анализ позволяет выразить в нем возмущения компонент скорости через  $h'$ , получив нелинейное эволюционное уравнение для координаты поверхности пленки. (При этом полученное уравнение не является асимптотически точным, поскольку учи-

тывает лишь часть квадратичных нелинейных слагаемых.)

Численное решение осуществлялось на основе сочетания спектральных и конечно-разностных методов с использованием полученной аналитической зависимости  $\Omega(\kappa)$ , количество учитываемых гармоник  $2^7$  и более.

Слабые начальные возмущения с волновыми числами  $\kappa < \kappa_c$  усиливаются в окрестности  $x = 0$ , формируя гребни и впадины. По мере увеличения их амплитуды проявляются нелинейные эффекты, гребни становятся уже, впадины расширяются, толщина пленки изменяется в пределах  $(0,3 \div 0,5)h_\infty$ . Период стационарного решения показан на рис. 2.

Полученное решение для толщины пленки позволяет построить на основе аналитических зависимостей поля скорости и температуры на свободной поверхности (рис. 3). В верхней части впадин формируются зоны с возвратным течением, аналогично тому, что наблюдалось в экспериментах [5].

Во впадинах температура жидкости приблизительно на 10 К выше, чем на поверхности струй, максимальный градиент температуры создается в верхней части впадин и достигает 13 К/мм (рис. 4). Сопоставление расчетов с данными инфракрасной термографии [3] дает хорошее соответствие, что свидетельствует о продуктивности предложенной модели.

### Список литературы

1. Kabov O. A., Marchuk I. V., Chupin V. M. Thermal imaging study of the liquid film flowing on vertical surface with local heat source // Russian Journal of Engineering Thermophysics. 1996. Vol. 6, № 2. P. 105–138.
2. Коржавин А. А., Бунев В. А., Гордиенко Д. М., Бабкин В. С. Поведение пламен, распространяющихся по пленкам жидкости на металлических подложках // Физика горения и взрыва. 1998. Т. 34, № 3. С. 15–18.
3. Marchuk I. V., Kabov O. A. Numerical modeling of thermocapillary reverse flow in thin liquid films under local heating // Russian Journal of Engineering Thermophysics. 1998. Vol. 8, № 1–4. P. 17–46.
4. Kuznetsov V. V. Dynamics of locally heated liquid films // Russian Journal of Engineering Thermophysics. 2000. Vol. 10, № 2. P. 107–120.
5. Kabov O. A., Scheid B., Sharina I. A., Legros J.-C. Heat transfer and rivulet structures

formation in a falling thin liquid film locally heated // Int. Journ. of Thermal Sciences. 2002. Vol. 41. P. 664–672.

6. Шарыпов О. В., Медведко К. А. Неустойчивость двумерного режима пленочного течения при неоднородной температуре свободной поверхности // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 13. С. 19–23.

7. Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C. Long-wave instabilities of nonuniformly heated falling films // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 453. P. 153–175.

8. Frank A. M. 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2003. Vol. 22. P. 445–471.

9. Кабова Ю. О. Термокапиллярная деформация неизоотермической стекающей пленки жидкости // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, вып. 10. С. 71–77.

10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие: В 10 т. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. Т. 6: Гидродинамика. 736 с.

11. Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G. Long-scale evolution of thin liquid films // Reviews of Modern Physics. 1997. Vol. 69, № 3. P. 931–980.

12. Joo S. W., Davis S. H., Bankoff S. G. Long-wave instabilities of heated falling films: two dimensional theory of uniform layers // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 230. P. 117–146.

13. Joo S. W., Davis S. H., Bankoff S. G. A mechanism for rivulet formation in heated falling films // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 321. P. 279–298.

14. Шарыпов О. В., Медведко К. А., Фомин А. В. Предел двумерного стационарного режима течения пленки жидкости при распространении по подложке тепловой волны // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 3. С. 453–457.

15. Шарыпов О. В., Медведко К. А., Фомин А. В. О пределах существования двумерной стационарной структуры пленки жидкости при распространении волны горения // Физика горения и взрыва. 2002. Т. 38, № 1. С. 24–29.

16. Sharypov O. V., Medvedko K. A., Pirogov E. A., et al. Evolution of surface structure of flowing liquid film at non-uniform heating // Proceedings of the Third Russian-Korean International Symposium on Science and Technology KORUS'99, June 22–25, 1999. Novosibirsk, Russia, 1999. Vol. 2. P. 581–584.

