

А. М. Федотов, С. Б. Медведев, А. И. Пестунов, И. А. Пестунов

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: fedotov@nsc.ru

О НЕСТАНДАРТНОМ ПОВЕДЕНИИ МИНИМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ УГЛЕРОДНОГО ЦИКЛА

Рассматривается глобальная минимальная модель многолетней динамики углерода в биосфере при условии, что антропогенные выбросы углерода в атмосферу отсутствуют. На основе качественного анализа модели показывается, что существует набор параметров модели из диапазонов их оценок для текущего состояния биосферы такой, что система становится неустойчивой. Таким образом, наблюдаемые изменения содержания углерода в атмосфере, биомассе растений и гумусе, а также глобальной температуры можно связывать не только с деятельностью человека, но и с естественными изменениями в биосфере.

Ключевые слова: минимальная модель, устойчивость по Ляпунову, биосфера, круговорот углерода, парниковый эффект.

Введение

В последние десятилетия внимание многих исследователей приковано к изучению процесса глобального круговорота углерода¹ [1]. Углерод, как известно, является основным строительным материалом для всех живых организмов. Однако в данном случае особый интерес к этому процессу вызван существующей гипотезой о парниковом эффекте.

Идея механизма парникового эффекта впервые была изложена в 1827 г. Ж. Фурье в статье «Записка о температурах земного шара и других планет». Этот механизм предполагает наличие связи между температурой атмосферы и содержанием в ней «парниковых» газов (диоксид углерода, метан, пары воды, окислы азота, фреоны и др.), которое обусловлено различием в проводимости этими газами коротковолнового и длинноволнового излучения. Считается, что среди парниковых газов диоксид углерода оказывает наиболее существенное влияние на климат [2].

Анализ литературы показывает, что в настоящее время среди ученых нет единого мнения относительно наличия или отсутствия парникового эффекта. Тем не менее, если предположить, что эта гипотеза верна, то наблюдаемое с 1958 г. возрастание процентного содержания диоксида углерода в атмосфере² способствует возникновению риска увеличения глобальной температуры и связанных с этим катастрофических явлений глобального масштаба [3].

Являются ли уровни CO₂ беспрецедентно высокими – предмет дискуссии [4–7], да и сам рост температуры последние полвека может быть вызван иными закономерностями или стохастическими факторами [8; 9].

В частности, график реконструированной температуры для Субарктики Евразии по годовым кольцам деревьев [10], представленный на рис. 1, показывает наличие колебаний температуры на протяжении последнего тысячелетия, что не могло быть обусловлено деятельностью человека.

¹ См. подробнее: United States Carbon Cycle Science Program – <http://www.carboncyclescience.gov/links.php>.

² См. подробнее: данные измерительных станций углекислого газа – <http://cdiac.esd.ornl.gov/trends/co2/sio-keel.html>.

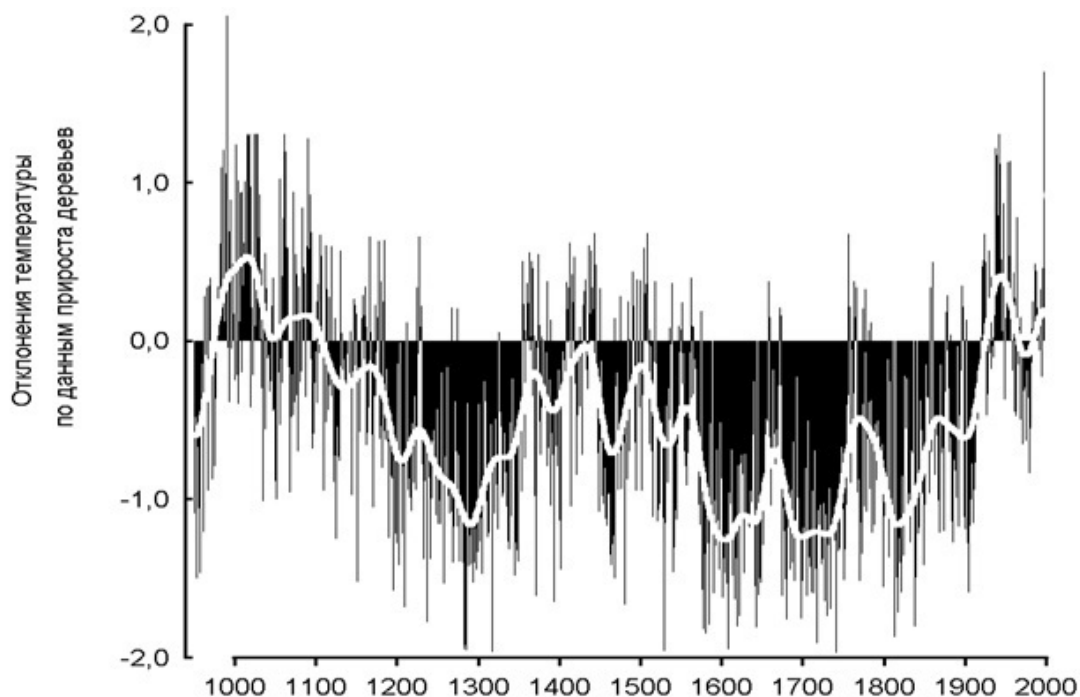


Рис. 1. Реконструкция температуры (°C в отклонениях от средней) для Субарктики Евразии [10]. Толстой линией выделена кривая 51-летней НЧ фильтрации ряда

Кроме того, рост концентрации CO₂ может быть следствием изменения температуры (рис. 2), особенно с учетом того, что океан является резервуаром этого газа и выделяет его при нагреве [11].



Рис. 2. Реконструированная температура и концентрация углекислого газа по данным ледовых кернов (антарктическая станция «Восток») [4]

Так или иначе, крайняя важность вопроса и принцип предосторожности [2] позволяют включать предположение о глобальном потеплении в математические модели [12–15].

К настоящему времени известно несколько десятков различных моделей глобальной динамики углерода, постоянно происходит их модификация в двух основных направлениях [16]: 1) усложнение моделей за счет ввода дополнительных параметров (это должно повышать адекватность моделей, но делает их менее устойчивыми и трудно контролируемыми); 2) упрощение моделей, т. е. построение так называемых минимальных моделей [17], основанных на использовании небольшого числа хорошо определяемых и контролируемых интегральных характеристик.

С помощью минимальных моделей нельзя, конечно, описать наиболее вероятную динамику развития биосферы, соответствующую совокупному действию множества известных климатических и биосферных процессов. Однако исследование таких моделей позволяет понять качественные механизмы основных процессов, происходящих в биосфере. Как отмечал А. А. Ляпунов [18], первоочередная цель работы, связанной с применением методов математического моделирования, является понимание того или иного явления, а не получение каких-либо чисел или картинок.

Следует отметить, что большинство известных минимальных моделей исследовались путем проведения численных экспериментов [12; 14; 15]. Такой метод, как правило, не позволяет получить полную картину поведения решений. В настоящей работе приводятся результаты качественного анализа глобальной минимальной модели многолетней динамики углерода в биосфере, представленной в [12].

Ввиду того, что существовали естественные изменения в биосфере, целью данного исследования было рассмотрение этой модели при условии отсутствия сжигания ископаемых топлив.

Математическая модель

Исследуемая широко известная минимальная модель [12] записывается в виде системы из трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x \cdot x \cdot (x_{\max} - x) \cdot V(A) \cdot f_{\text{MaxGrowth}}(T(A)) - V_d \cdot x; \\ \frac{dy}{dt} = V_d \cdot x - V_s \cdot y \cdot f_{\text{MaxGrowth}}(T(A)); \\ A = C - x - y. \end{cases}$$

Первое уравнение описывает динамику углерода в биомассе растений, второе – динамику углерода органических остатков, и третье – закон сохранения массы углерода.

Здесь $f_{\text{MaxGrowth}}(T(A)) = T^d \cdot (T_{\text{MaxGrowth}} - T) \cdot \Theta(T) \cdot \Theta(T_{\text{MaxGrowth}} - T)$ – зависимость прироста биомассы растений от среднегодовой глобальной температуры, где Θ – ступенчатая функция равная 1 при положительных значениях аргумента и нулю в остальных случаях;

$f_{\text{MaxDecay}}(T(A)) = T^b \cdot (T_{\text{MaxDecay}} - T) \cdot \Theta(T) \cdot \Theta(T_{\text{MaxDecay}} - T)$. – зависимость почвенного дыхания от температуры;

$T(A) = T_0 - T_{\text{del}} \cdot \log_2 \frac{A}{A_0}$ – зависимость глобальной температуры от углерода атмосферы;

$V(A) = \frac{A}{V_0 + A}$ – зависимость вида Моно для прироста биомассы от углерода атмосферы.

Данные о параметрах системы представлены в таблице.

Параметры системы

Параметр	Минимально возможное значение	Максимально возможное значение	Содержательное значение
A_0	600	760	Количество углерода в атмосфере в 1958 г., Гт
x_0	500	850	Количество углерода в биомассе в 1958 г., Гт
y_0	1080	2011	Количество углерода гумуса в 1958 г., Гт
x_{\max}	891	1296	Максимально возможное количество углерода в биомассе, Гт
d, b	1,5	1,5	Степень
$T_{MaxGrowth}$	30	45	Максимальная температура, при которой происходит рост биомассы, °C
$T_{MaxDecay}$	30	45	Максимальная температура распада органики, °C
T_0	15	15	Глобальная среднегодовая температура поверхности в настоящее время, °C
T_{del}	2	6	Прирост температуры при удвоении концентрации CO ₂ в атмосфере
V_0	900	930	Определяется экспериментально
P_0	50	60	Стационарные скорости прироста ЧПП, отмирания биомассы и интенсивности дыхания почв в 1958 г., Гт/год
V_x	Вычисляются из условия равенства потоков		Масштабируемые множители
V_d			
V_s			

Масштабируемые множители V_x, V_d, V_s выбирались таким образом [12], чтобы обеспечить стационарные (без антропогенной эмиссии углерода в атмосферу) скорости прироста чистой первичной продукции (ЧПП), отмирания биомассы и интенсивности почвенного дыхания равные $P_0 = 55$ Гт углерода в год, т. е. вычисляются из условий

$$V_x \cdot x_0 \cdot (x_{\max} - x_0) \cdot V(A_0) \cdot f_{MaxGrowth}(T(A_0)) = V_d \cdot x_0 = V_s \cdot y_0 \cdot f_{MaxDecay}(T(A_0)) = P_0.$$

Кроме того, будем предполагать, что начальное значение параметра T_0 удовлетворяет условию $0 < T_0 < \min(T_{MaxGrowth}, T_{MaxDecay})$. В этом случае

$$\Theta(T_0) = \Theta(T_{MaxGrowth} - T_0) = \Theta(T_{MaxDecay} - T_0) = 1.$$

В первоначальной постановке [12] в модели присутствовало еще одно уравнение: $\frac{dC}{dt} = fuel(t)$, описывающее динамику общего количества углерода вследствие антропогенного выброса. В таком виде авторы использовали модель для определения степени влияния сжигания ископаемых топлив на круговорот углерода и исследования условий, приводящих к наихудшим сценариям биосферной динамики. В данной работе эта модель рассматривается при условии, что антропогенные выбросы отсутствуют, т. е. $fuel(t) = 0$, а целью исследования является выявление естественных (не зависящих от человека) изменений биосферных параметров. Отметим, что предположение о парниковом эффекте сохранено, только речь идет уже о «естественном» парниковом эффекте. Старт системы в 1958 г. обусловлен началом измерений концентрации углекислого газа в атмосфере на станции Мауна-Лоа (Гавайи).

Исследование устойчивости исходного стационарного состояния

Ввиду того, что изначально учитывались антропогенные выбросы, модель рассматривалась как система трех дифференциальных уравнений, а не двух. Продифференцируем обе части уравнения закона сохранения массы углерода и подставим в него значения производных x и y , тогда с учетом сделанных предположений систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = V_s \cdot y \cdot T(A)^b \cdot (T_{MaxDecay} - T(A)) - V_x \cdot x \cdot (x_{max} - x) \cdot V(A) \cdot T(A)^d \cdot (T_{MaxGrowth} - T(A)); \\ \frac{dx}{dt} = V_x \cdot x \cdot (x_{max} - x) \cdot V(A) \cdot T(A)^d \cdot (T_{MaxGrowth} - T(A)) - V_d \cdot x; \\ \frac{dy}{dt} = V_d \cdot x - V_s \cdot y \cdot T(A)^b \cdot (T_{MaxDecay} - T(A)). \end{cases}$$

Для сокращения записей используем обозначения:

$$\frac{dA}{dt} = f(A, x, y); \quad \frac{dx}{dt} = h(A, x); \quad \frac{dy}{dt} = k(A, x, y).$$

Напомним, что параметры V_x , V_d , V_s модели выбирались так, чтобы скорости прироста ЧПП, отмирания биомассы и интенсивности почвенного дыхания в начальный момент в 1958 году были равны потоку P_0 , ледовательно, такой выбор параметров обеспечивает условие стационарности $\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ для точки (A_0, x_0, y_0) .

Линеаризуем систему в окрестности стационарной точки

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ x \\ y \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} A \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{где } S = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial A} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial A} & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial k}{\partial A} & \frac{\partial k}{\partial x} & \frac{\partial k}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ — матрица частных производных в стационарной}$$

точке (A_0, x_0, y_0) .

$$\text{Произведем замену } \begin{pmatrix} A \\ x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } T \text{ — матрица собственных векторов матрицы } S.$$

Тогда, домножив систему слева на обратную матрицу T^{-1} получим

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot S \cdot T \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Lambda \text{ — диагональная матрица с собственными числами}$$

на диагонали. По теореме Ляпунова для неустойчивости системы в стационарной точке достаточно наличия собственного значения матрицы Λ с положительной вещественной частью.

Для стационарной точки (A_0, x_0, y_0) $\lambda_1 = 0$, а два других собственных значения находятся из уравнения

$$\lambda^2 + \lambda \cdot (h_A + k_A + f_y - h_x) - h_A \cdot h_x + h_A \cdot f_y - h_x \cdot k_A - h_x \cdot f_y - f_x \cdot h_A = 0, \quad \text{где}$$

$$h_A = \frac{P_0 \cdot \left(T_{MaxGrowth} \cdot d \cdot \frac{T_{del}}{\ln 2} + T_{MaxGrowth} \cdot T_0 \cdot \frac{V_0}{V_0 + A_0} - (d+1) \cdot T_0 \cdot \frac{T_{del}}{\ln 2} - T_0^2 \cdot \frac{V_0}{V_0 + A_0} \right)}{A_0 \cdot T_0 (T_{MaxGrowth} - T_0)},$$

$$k_A = \frac{P_0 \cdot T_{del} \left((b+1) \cdot T_0 - T_{MaxDecay} \cdot b \right)}{A_0 \cdot T_0 \cdot \ln 2 \cdot (T_{MaxDecay} - T_0)}; \quad f_y = \frac{P_0}{y_0}; \quad h_x = -\frac{P_0}{x_{max} - x_0}; \quad f_x = \frac{P_0 \cdot (2 \cdot x_0 - x_{max})}{x_0 \cdot (x_{max} - x_0)}.$$

Индекс в обозначениях h_A, k_A, f_y, h_x, f_x означает соответствующую производную в точке (A_0, x_0, y_0) . Численно были найдены значения параметров, для которых один из корней уравнения является положительным.

Утверждение. *Существуют наборы начальных параметров модели из допустимых областей такие, что стационарная точка (A_0, x_0, y_0) неустойчива.*

Например, набор $\{P_0 = 55, A_0 = 600, y_0 = 2011, x_{max} = 891, d = b = 1,5, T_{MaxGrowth} = 35, T_{MaxDecay} = 45, T_0 = 15, T_{del} = 6, V_0 = 930, x_0 = 810\}$.

Следует отметить, что область значений параметров, для которой вещественная часть собственного значения положительна, относительно небольшая.

Заключение

При определенных параметрах, попадающих в диапазоны своих оценок для текущего состояния биосферы, предположение авторов [12] о стационарности состояния системы до 1958 г. невыполнимо из-за неустойчивости этого состояния. Система приходит в движение (переходит из одного фазового состояния в другое) без антропогенных воздействий при малейшем возмущении. Таким образом, в биосфере возможны естественные изменения, не связанные с деятельностью человека. Отметим, что важной особенностью рассматриваемой минимальной модели является то, что она основана только на балансовых отношениях динамики углерода, т. е. найденная неустойчивость является следствием только законов сохранения.

Список литературы

1. Моисеев Н. Н., Александров В. В., Тарко А. М. Человек и биосфера. М.: Наука, 1985. 277 с.
2. Тарко А. М. Можем ли мы затормозить глобальное потепление? // Россия в окружающем мире – 2008. Устойчивое развитие: экология, политика, экономика: Аналитический ежегодник / Отв. ред. Н. Н. Марфенин; под общ. ред. Н. Н. Марфенина, С. А. Степанова. М.: Изд-во МНЭПУ. 2008. 328 с.
3. IPCC. Climate Change: The Physical Science Basis. Summary for Policymakers. Fourth Assessment report, Intergovernmental Panel on Climatic Change. Geneva, Switzerland, 2007.
4. Petit J. R., Jouzel J., Barkov N. I., Kotlyakov V. M. et al. Climate and atmospheric history of the past 420.000 years from the Vostok ice core, Antarctica // Nature. 1999. Vol. 399. P. 429–436.
5. Siegenthaler Urs et al. Stable carbon cycle-climate relationship during the late Pleistocene // Science. 2005. Vol. 310. P. 1313–1317.
6. Beck Ernst-Georg 180 years of atmospheric CO₂ gas analysis by chemical methods // Energy and Environment. 2007. Vol. 18, № 2. P. 259–282.
7. Jaworowski Z., Segalstad T. V., Ono N. Do glaciers tell a true atmospheric CO₂ story? // The Science of the Total Environment. 1992. Vol. 114. P. 227–284.
8. Крученицкий Г. М. Глобальная температура: потенциальная точность измерения, стохастические возмущения и долговременные изменения // Оптика атмосферы и океана. 2007. Т. 20, № 12. С. 1064–1070.
9. Глобальные изменения природной среды (климат и водный режим). М.: Научный мир, 2000. 304 с.
10. Наурузбаев М. М., Ваганов Е. А., Сидорова О. В. Изменчивость приземной температуры воздуха на севере Евразии по данным тысячелетних древесно-кольцевых хронологий // Криосфера Земли, атмосферные явления и климат. 2003. Т. 7, № 2. С. 84–91.
11. Абдусаматов Х. И. Солнце определяет климат // Наука и жизнь. 2009. № 1. С. 40.

12. Барцев С. И., Дегерменджи А. Г., Ерохин Д. В. Глобальная минимальная модель многолетней динамики углерода в биосфере // ДАН. Геофизика. 2005. Т. 401, № 2. С. 233–237.
13. Тарко А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. М.: Физматлит, 2005. С. 57.
14. Дубровина Е. С., Моничев А. Я. Модельный анализ динамических особенностей развития парникового эффекта // Вестн. Нижегород. гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2008. № 4. С. 97–101.
15. Борисенков Е. П., Пичугин Ю. А. Возможные негативные сценарии динамики биосферы как результат антропогенной деятельности // ДАН. География. 2001. Т. 378, № 6. С. 812–814.
16. Кондратьев К. Я., Крапивин В. Ф. Моделирование глобального круговорота углерода. М.: Физматлит, 2004. 336 с.
17. Svirzhev Y. M., Bloh W. von. A minimal model of interaction between climate and vegetation: qualitative approach // Ecol. Mod. 1996. Vol. 92. P. 89–99.
18. Ляпунов А. А. О соотношении понятий материя, энергия и информация // А. А. Ляпунов Проблемы теоретической и прикладной кибернетики. Новосибирск: Наука, 1980. С. 320–323.

Материал поступил в редколлегию 14.02.2011

A. M. Fedotov, S. B. Medvedev, A. I. Pestunov, I. A. Pestunov

A NON-STANDARD BEHAVIOR OF THE MINIMAL MODEL OF CARBON CYCLE

The global minimal model of long-term dynamics of carbon in biosphere is considered given the absence anthropogenic carbon emissions in atmosphere. Qualitative analysis of the model shows that a set of model parameters from ranges of their estimations for current biosphere conditions exists, such that the system becomes unstable. Thus the changes observed in the carbon content in atmosphere, plant biomass and humus, and also the global temperature change, could be connected not only with human activity but also with natural changes in biosphere.

Keywords: the minimal model, Lyapunov stability, biosphere, carbon circulation, greenhouse effect.