Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дмитрий Леонидович Ткачев

Et.nsu.ru, дата размещения 04.12.2014

Аннотация

Дисциплина входит в базовую часть профессионального цикла образовательной программы подготовки дипломированного бакалавра по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки». Изучение дисциплины опирается на курсы математического анализа, алгебры и геометрии, входящие в базовую часть математического и естественнонаучного цикла образовательной программы. Так как в процессе изучения дисциплины формируется представление о современных методах решения проблем, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, то ее успешное освоение необходимо, например, для дальнейшего изучения математических дисциплин прикладного характера, в которых изучаются различные математические модели.
Курс изучается в третьем и четвертом семестрах. В конце третьего семестра предусмотрен зачет, по окончании четвертого семестра запланирована итоговая аттестация – экзамен.

1. Цели и задачи учебной дисциплины

Обязательный курс «Обыкновенные дифференциальные уравнения» предназначен для студентов II курса механико - математического факультета. Хорошее владение материалом курса предполагает понимание студентом основных положений теории, умение применить изученные методы для решения других, возможно, более сложных чем уже рассмотренные задач.

Для достижения этой цели выделяются задачи курса.

- Усвоение принципиальных моментов теории, к которым относятся: понятие корректности и обоснование постановок задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений; уравнений с частными производными первого порядка; краевых задач; устойчивость, асимптотическая устойчивость (по Ляпунову); качественное описание поведения решения автономной системы в окрестности особой точки и т.д.
- Изучение основных методов решения задач.

Полученные теоретические знания позволяют сформировать представление об основных разделах современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, о перспективных направлениях их развития. Эти знания - обязательная часть общематематической культуры и необходимы для проведения исследований по тем направлениям современной математики, в которых активно используются дифференциальные уравнения. Теоретические знания подкрепляются практическими навыками самостоятельного решения не только типичных, но и более сложных задач.

2. Содержание учебной дисциплины

В курсе рассматриваются основные положения и методы классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Один из основных объектов этой теории – задача Коши для одного нелинейного дифференциального уравнения и нелинейной системы дифференциальных уравнений. В рамках определения корректности (по Адамару) изучаются вопросы локального существования и единственности решения этой задачи, а затем и возможность продолжения решения на полупрямую.

Эта схема исследования естественным образом приводит к понятию устойчивости по Ляпунову и очень важному в приложениях его обобщению – асимптотической устойчивости (по Ляпунову). В дальнейшем этот подход используется при изучении свойств решений автономных систем: классификации особых точек, предельных циклов и т.д.

Особое внимание в курсе уделяется теории уравнений с частными производными первого порядка, важной как с точки зрения приложений, так и в силу того, что она является составной частью общей теории уравнений с частными производными.

Тематический план курса и распределение разделов и тем по часам.

№ п/п	Раздел дисциплины	Лекции	Семинары	Лабораторные работы	Самостоятельная работа	Контрольные работы	Проверка контрольных работ	Зачет	Экзамен	Всего часов
1	Предварительные сведения	2	-	-	-	-	-	-	-	2
2	Разрешимость задачи Коши для однородных линейных систем с постоянными коэффициентами	2	2	-	-	-	-	-	-	4
3	Пространство решений системы с постоянными коэффициентами и одного уравнения произвольного порядка. Фундаментальная система решений и определитель ее матрицы	2	4	-	-	-	-	-	-	6
4	Фундаментальная матрица и матричная экспонента	4	2	-	-	-	-	-	-	6
5	Вычисление матричной экспоненты для некоторых классов матриц	2	4	-	-	-	-	-	-	6
6	Каноническое представление матричной экспоненты	2	2	-	-	-	-	-	-	4
7	Фундаментальная система решений для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами	2	2	-	-	-	-	-	-	4
8	Системы неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами	2	2	-	-	2	12	-	-	18

9	Линейная система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами	2	2	-	-	2	12	-	-	18
10	Метод ломаных Эйлера нахождения решения задачи Коши (на примере линейной системы с переменными коэффициентами)	4	-	-	-	-	-	-	-	4
11	Существование и единственность решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с достаточно гладкими правыми частями	2	4	-	-	-	-	-	-	4
12	Обсуждение утверждений локальной теоремы существования	2	2	-	-	-	-	-	-	4
13	Продолжение решений. Теорема о покидании компакта	2	2	-	-	2	12	4	-	22
14	Непрерывная и дифференцируемая зависимость решения от параметров	4	4	-	-	-	-	-	-	4
15	Автономные системы дифференциальных уравнений. Виды траекторий	4	4	-	-	-	-	-	-	8
16	Краевые задачи для линейных систем первого порядка	4	4	-	-	2	12	-	-	22

17	Ограниченные решения линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами. Краевые условия, удовлетворяющие условию Лопатинского	2	2	-	-	-	-	-	-	4
18	Линейное уравнение второго порядка. Задача Штурма- Лиувилля	4	4	-	-	-	-	-	-	8
19	Самосопряженные задачи на собственные значения	2	-	-	-	-	-	-	-	2
20	Устойчивость по Ляпунову	2	4	-	-	-	-	-	-	6
21	Матричное уравнение Ляпунова	2	2	-	-	-	-	-	-	4
22	Функции Ляпунова	4	4	-	-	-	-	-	-	8
23	Критерии устойчивости и неустойчивости	2	2	-	-	2	12	-	-	18
24	Первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Общее решение линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка	4	4	-	-	-	-	-	-	8
25	Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка	2	2	-	-	-	-	-	-	4

26	Уравнение Гамильтона-Якоби. Условия интегрируемости уравнений $u_{x_i} = A_i(t,u)$	2	4	-	-	-	-	-	-	6
	Всего	**68**	**68**	**-**	**-**	**8**	**48**	**4**	**48**	**244**

Содержание отдельных разделов и тем:

1. Предварительные сведения: Понятие об обыкновенном дифференциальном уравнении и определение его решения. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Примеры. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Различные формы записи линейной системы с постоянными коэффициентами. Сведения из теории матриц.

2. Разрешимость задачи Коши для однородных линейных систем с постоянными коэффициентами: Понятие корректности (по Адамару) (на примере задачи Коши для однородной линейной системы с постоянными коэффициентами). Априорные оценки. Теорема единственности. Нахождение решения в виде сходящегося ряда.

3. Пространство решений системы с постоянными коэффициентами и одного уравнения произвольного порядка. Фундаментальная система решений и определитель ее матрицы: Линейное пространство решений однородной системы с постоянными коэффициентами и одного уравнения высокого порядка. Сведение уравнения высокого порядка к системе первого порядка. Примеры. Формула Остроградского – Лиувилля.

4. Фундаментальная матрица и матричная экспонента : Определение фундаментальной матрицы для системы и уравнения. Представление семейства фундаментальных матриц. Матричная экспонента и ее свойства. Примеры.

5. Вычисление матричной экспоненты для некоторых классов матриц: Нахождение матричной экспоненты для некоторых классов матриц: эрмитовых, нормальных, матриц, имеющих простой спектр. Вычисление матричной экспоненты для верхне-треугольных матриц, для жордановых матриц. Примеры.

6. Каноническое представление матричной экспоненты: Отсутствие непрерывной зависимости жорданой формы от исходной матрицы. Вычисление матричной экспоненты в общем случае. Запись фундаментальной системы уравнений с помощью столбцов матричной экспоненты.

7. Фундаментальная система решений для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами: Различные формы представления фундаментальной системы решений для одного линейного уравнения. Случай комплексных коэффициентов**.**

8. Системы неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами: Теорема о непрерывной зависимости решений от параметра. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Априорные оценки. Теорема о непрерывной зависимости решений задачи Коши для линейной системы от всех данных задачи: правой части, матрицы, начальных данных, координаты начальной точки.

9. Линейная система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: Пространство решений. Априорные оценки. Матрицант.

10. Метод ломаных Эйлера нахождения решения задачи Коши (на примере линейной системы с переменными коэффициентами): Теорема Пеано существования решения задачи Коши. Единственность и неединственность решений. Теорема Осгуда. Примеры.

11. Существование и единственность решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с достаточно гладкими правыми частями: Лемма Адамара. Теорема Пикара - Линделефа. Примеры.

12. Обсуждение утверждений локальной теоремы существования: Достаточное условие существования решения задачи Коши в целом. Примеры постановок задачи Коши, для которых решение не продолжается на полуось. Функции Ляпунова. Достаточное условие существования решения в целом по времени. Асимптотическое поведение решения. Область притяжения. Примеры.

13. Продолжение решений. Терема о покидании компакта.

14. Непрерывная и дифференцируемая зависимость решения от параметров: Уравнение в вариациях Пуанкаре.

15. Автономные системы дифференциальных уравнений. Виды траекторий.

16. Краевые задачи для линейных систем первого порядка: Матрица Грина. Собственные значения.

17. Ограниченные решения линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами. Краевые условия, удовлетворяющие условию Лопатинского: Лемма Гельфанда - Шилова. Краевые задачи на полупрямой.

18. Линейное уравнение второго порядка. **Задача Штурма-Лиувилля:** Упрощение общего линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Теорема Штурма. Теорема сравнения. Теорема об осцилляции.

19. Самосопряженные задачи на собственные значения: Функция Грина. Полнота системы собственных функций.

20. Устойчивость по Ляпунову: Определение устойчивости, асимптотической устойчивости (по Ляпунову), неустойчивость. Теорема об устойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами**.**

21. Матричное уравнение Ляпунова: Теорема о разрешимости матричного уравнения Ляпунова, условие однозначной разрешимости. Критерий асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы.

22. Функции Ляпунова: Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости нулевого решения. Случай почти линейной системы.

23. Критерии устойчивости и неустойчивости.

24. Первые интегралы системы дифференциальных уравнений. Общее решение линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка: Представление общего решения линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.

25. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка.

26. Уравнение Гамильтона- Якоби. Условия интегрируемости системы уравнений $u_{x_i} = A_i(t,u)$ **.**

3. Учебно - методические материалы дисциплины

При реализации учебной работы используются активная и интерактивная формы обучения в сочетании с внеаудиторной работой.

Для лучшего понимания студентами содержания лекций предполагается предварительная раздача текста с теоретическим материалом, чтобы во время изложения доказательств они могли уточнять по тексту вещи, непонятные со слуха.

На семинарских занятиях происходит изложение материала, разбираются типичные задачи и упражнения, а также проводится контроль самостоятельной работы.

Организация семинарских занятий предполагает диалог со студентами по вопросам, связанным с изученным материалом и примерами из ранее прослушанных школьных и университетских курсов, а также самостоятельным построением доказательств студентами. Для закрепления материала предлагаются упражнения для самостоятельной работы (включая применение теоретического материала в частных случаях и проведение фрагментов доказательств), а также осуществляется контроль самостоятельной работы студентов. Во время контроля выполнения заданий, предложенных для внеаудиторной самостоятельной работы, производится выступление студентов с их вариантами решений.

Примерная структура семинарского занятия:

- контроль выполнения домашней работы и разбор заданий, вызвавших затруднения (15 минут), с обязательным участием студентов; проводится выборочный контроль выполнения домашней работы, в разборе важная роль отводится студентам, предлагающим свои решения или альтернативные варианты решений;
- изложение нового теоретического материала (25 минут); во время изложения материала осуществляется контроль понимания в форме краткого опроса по излагаемому материалу;
- самостоятельное решение практических задач студентами, обсуждение подходов к решению и предлагаемых аргументов (45 минут) с обязательным участием студентов; организуется в форме самостоятельной работы, обсуждения подходов, предложения готовых решений, обсуждения этих решений, поиска и исправления неточностей, выявление границ применимости использованных методов;
- формулировка домашнего задания и указаний по его выполнению (5 минут).

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит из двух взаимосвязанных частей. Первая представляет собой освоение теоретического материала, вторая — приобретение практических навыков решения задач. Освоение теоретического материала производится по лекциям и указанной основной и дополнительной литературе. Для контроля усвоения материала студентам предлагается значительное количество упражнений, решение которых позволяет прояснить сложные моменты доказательства теорем, примеры, приведенные в упражнениях, иллюстрируют отдельные положения теории.

Выполнение этих упражнений и заданий из используемого сборника задач позволяет студентам научиться решать типичные задачи по дифференциальным уравнениям и их приложениям в других разделах математики, лучше понимать возможности практического применения теоретического материала курса.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

(а) основная литература

Учебники

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ. 1984. 296 с.

2. Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т.I: Краевые задачи. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ. 1994. 264 с.

4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир. 1986. 248 с.

4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. 1970. 720 с.

5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд.- во иностр. Лит. 1958. 476 с.

Задачники

1.Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва - Ижевск: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”. 2000. 176 с.

2. Годунов С.К. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Новосибирск: НГУ. 1986. 80 с.

(*б*) *дополнительная литература*

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1982. 332 с.
2. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. Шк. 1991. 303 с.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.

и Интернет-ресурсы

1. http://www.kdu.nsu.ru/
2. http://www.mccme.ru/free-books/
3. http://www.math.ru/lib/

4. Контроль изучения дисциплины

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов организована в виде освоения теоретического материала и выполнения задач и упражнений по материалу, изложенному в лекциях. Задания для самостоятельной работы берутся из сборников задач [Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва - Ижевск: Научно-издательский центр " Регулярная и хаотическая динамика". 2000. 176 с.; Годунов С.К. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Новосибирск: НГУ. 1986. 80 с.].

Текущий контроль. Материал курса разбит на тематические блоки. Освоение материала каждого блока подразумевает решение типичных задач и разбор домашних работ (контроль самостоятельной работы студентов). Осуществляется выборочный контроль выполнения домашних работ. В конце каждого блока проводится контрольная работа.

Итоговый контроль. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен. На экзамене проверяется уровень усвоения теоретического материала. Типичные вопросы и задачи для подготовки к экзамену приведены ниже. На экзамене учитываются результаты выполнения контрольных работ.

Текущий и итоговый контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы, принятой в образовательной программе.

Типичные темы заданий, предлагаемых в контрольных работах:

1. Привести примеры граничных операторов $b_j\left(\frac{d}{dt}\right)$, при которых краевая задача

$$y^{(IV)}-2y''+y=0,\quad t>0,$$
$$b_j\left(\frac{d}{dt}\right)y(0)=\varphi_j,\qquad j=1,2,\dots,m,$$

где $b_j\left(\frac{d}{dt}\right)=b_{1j}+b_{2j}\frac{d}{dt}+b_{3j}\frac{d^2}{dt^2}+b_{4j}\frac{d^3}{dt^3}$, $|y(t)|<\infty,\ \ t\geq 0$,

однозначно разрешима при любых φ_j. Что можно утверждать, если $m<2$, $m>2$?

2. Показать, что для уравнения физического маятника $\ddot{x}=-\sin x$ положения равновесия $x=2k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\dots$) устойчивы по Ляпунову, а положения равновесия $x=(2k+1)\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\dots$) неустойчивы.

3. Убедиться, что $\psi_1=tx,\ \ \psi_1=ty+x^2$ являются первыми интегралами системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2x^2 - ty}{t^2}, \end{cases}$$

и выяснить, будут ли указанные интегралы независимыми.

4. При каких a каждое решение продолжается на бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$ для системы $y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}$, $z' = y(1 + z^2)^{''}$?

5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения является многочленом:

$$(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x.$$

6. Для систем уравнений

a)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+\dfrac{\varepsilon}{2} & -1 \\ 2 & -1+\varepsilon & -2 \\ -1-2\varepsilon & 1+\dfrac{3}{2}\varepsilon & 2+2\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

построить фундаментальные матрицы решений при $\dfrac{-1}{10} < \varepsilon < \dfrac{1}{10}$ и сравнить их между собой. Будут ли они непрерывно зависеть от ε? Можно ли построить фундаментальные матрицы решений, непрерывно зависящих от ε и не являющихся непрерывно зависимыми от ε?

7. Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) При $\varepsilon \in (1, 2)$ построить фундаментальную систему решений для $y' = Ay$, не являющуюся непрерывной по $\varepsilon \in [1, 2]$.

b) Построить непрерывную фундаментальную систему решений при $\varepsilon \in [1, 2]$.

8. Решить следующую задачу Коши (здесь $y(t)$ - искомая вектор-функция, a - постоянный вектор, $A = (a_{ik})$ - квадратная постоянная матрица):

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = -A^2 y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

9. Доказать тождество

$$e^{tA_1} - e^{tA_2} = \int_0^t e^{(t-s)A_1}(A_1 - A_2)e^{sA_2}\,ds.$$

10. Доказать, что справедлив матричный аналог интегральной формулы Коши:

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\tau t}(\tau I - A)^{-1}\,d\tau,$$

где Γ - замкнутый контур на комплексной плоскости, содержащий внутри себя все собственные числа постоянной матрицы A.

11. Решить уравнение

$$(y^3x - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3).$$

12. Решить задачу Коши

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$z\big|_{x=1} = \sqrt{y}.$$

13. Решить уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1 + \sqrt{z - x - y}) + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

14. Написать уравнение в частных производных, которому удовлетворяют цилиндрические поверхности с образующими, параллельными вектору (a,b,c). Найти общее решение этого уравнения.

15. Исследовать на устойчивость нулевое решение следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x). \end{cases}$$

16. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$$

17. Пользуясь критерием Гурвица исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение следующего уравнения асимптотически устойчиво

$$y^{IV}+2y'''+4y''+ay'+by=0.$$

18. Исследовать особые точки следующей системы. Начертить интегральные кривые (или траектории) на плоскости (x, y)

$$\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{(x-y)^2+3}-2,\\ \dot{y}=e^{y^2-x}-e.\end{cases}$$

19. В следующей задаче особая точка не принадлежит к рассмотренным в § 15 типам. Для её исследования можно построить несколько изоклин, а затем выяснить, с каких сторон интегральные кривые входят в особую точку

$$y'=\frac{y^2}{y+x^2}.$$

20. Для данного уравнения начертить траектории на фазовой плоскости. По чертежу сделать выводы о поведении решений при $t \to +\infty$

$$\ddot{x}+\dot{x}+arctg(x^2-2x)=0.$$

21. При каких условиях система

$$\frac{dr}{dt}=f(r), \quad \frac{d\varphi}{dt}=1,$$

где функция $f(r)$ непрерывна, имеет предельный цикл? При каких условиях этот цикл устойчив? Неустойчив? Полуустойчив?

22. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящему через данную линию

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=2z, \qquad x-y=2, \quad z+2x=1.$$

23. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2=0,$$

$$s\big|_{t=0}=-\frac{x^4}{12}, \quad x\in\Omega_0=\{x \mid |x|\le 1\}\subset R^1.$$

24. Указать область существования решения для задачи Коши

$$\frac{\partial s}{\partial t}+c\sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2}=0,\quad c>0\ -\ \textit{постоянная},$$

$$s\big|_{t=0}=s_0(r),\quad 0<a<r<b<\infty,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

25. При каких условиях на параметры r_1, r_2, l_1, l_2 краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \\ l_1y_1(0)+l_2y_2(0)=0 \\ r_1y_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+r_2y_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$$

разрешима и единственна?

26. Построить матрицу Грина для следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} \\ \|y\|<K<\infty \quad \textit{при} \quad |t|<\infty. \end{cases}$$

27. Пусть параметры $\alpha, \beta, \varepsilon$ вещественные. Указать условия на матрицу B, при которых краевая задача

$$y'=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \varepsilon & \beta \end{pmatrix}y,\qquad t>0,$$
$$By(0)=\varphi,$$
$$\|y(t)\|<K \quad \textit{при} \quad t\to\infty$$

имеет единственное решение при любом φ. Рассмотреть случаи: a) $\alpha\beta>0$, b) $\alpha\beta<0$.

28. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\frac{d^4x}{dt^4}=F(t),$$
$$x(0)=0,\qquad x'(0)=0,\qquad x''(1)=0,\qquad x'''(1)=0.$$

Привести пример граничных условий, когда функция Грина не существует.

29. Показать, что у матрицы A_n

$$A_n = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

все собственные значения вещественны, различны и больше нуля.

30. Пусть задана матрица B_n :

$$B_n = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1+\varepsilon \\ n-1 & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & n-2 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что $\| B_n - A_n \| = \varepsilon,$ и в то же время у матрицы B_n (в отличие от A_n - в матрице B_n элемент $b_{1n} = 1+\varepsilon$ заменён на $a_{1n} = 1$) могут существовать отрицательные собственные значения. Когда это будет?

Образцы вопросов и задач для подготовки к экзамену:

1. Фундаментальная матрица и матричная экспонента.
2. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений от данных.
3. Теорема Осгуда о единственности.
4. Теорема Пикара – Линделёфа.
5. Теорема об осцилляции.
6.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x + \mu y^2 \end{cases}$$
$$x(0) = 1 + \mu,$$
$$y(0) = -2.$$

Найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu = 0}$.

7. Корректно ли поставлена задача Коши:

$$y'' + 2iy' - y = 8\cos x,$$
$$y'(0) = y(0) = 5?$$

Если да, то найти её решение.

8. Пусть задана матрица

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1+a \end{pmatrix}.$$

При каких вещественных значениях параметра a разрешимо уравнение $HA+A^*H=-I$? При каких a решение H положительно определено?

9. Решить уравнение

$$(x^2y^2+1)y+(xy-1)^2xy'=0.$$

10. Свести задачу Штурма – Лиувилля к интегральному уравнению:

$$-(1+e^x)y''-e^xy'=\lambda x^2y,\quad 0<x<1,$$
$$y(0)-2y'(0)=0,\quad y'(1)=0.$$