УДК 161.111

В. В. Целищев

Институт философии и права СО РАН
ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail: director@philosophy.nsc.ru

НЕОЛОГИЦИЗМ И ПРОБЛЕМА ВВЕДЕНИЯ НОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ *

Статья посвящена проблеме введения в формальные системы новых выражений посредством принципов абстракции. В рамках неологицистской программы обсуждается статус новых выражений для абстрактных объектов. Описываются модификации понятия логического следования при введении в систему новых выражений.

Ключевые слова: неологицизм, принципы абстракции, консервативное расширение, дедукция, логическое следование.

Неологицизм основан на введении в оборот новых выражений, которые обозначают абстрактные объекты, посредством принципов абстракции. При этом возникает ряд вопросов технического и философского характера, касающихся вообще проблемы совместимости введения в логические системы новых знаков. Такие проблемы исследуются в случае логических констант, где получены определенные результаты, на основании которых можно судить об ограничениях и следствиях такого введения.

Как известно, основное внимание неологицистов обращено на Принцип Юма, а именно на статус утверждения:

> число F'ов = числу G'ов, если и только если имеется одно-однозначное соответствие между F'ами и G'ами.

Здесь «число F'ов» – это сингулярный термин, а F'ы – концепция. Часто вместо оборота «число F'ов» употребляется знак # F. Важность этого принципа состоит в том, что из него с помощью логики второго порядка можно вывести арифметику второго порядка, что собственно и является целью программы логицизма. Фреге пытался сделать это сведение исходя из Основного Закона V, который оказался противоречивым. Таким образом, замена этого закона Принципом Юма, по мысли неологицистов, должна реабилитировать в известной степени сам логицизм Фреге. Эта замена кажется весьма естественной, поскольку внешне оба закона очень похожи. Они являются частными случаями принципов абстракции. Такие принципы полагаются концептуальными истинами, что, в первую очередь, и позволяет им быть основой логицистских соображений. Но если Принцип Юма полагается «хорошим» принципом, то Основной Закон V, в силу противоречивости, является «плохим». Так что перед неологицистами встает проблема «плохой компании», т. е. проблема того, как отличить хорошие принципы от плохих. Привлекательность принципов абстракции состоит как раз в том, что они являются концептуальными, но, как видно, их концептуальность не является гарантией того, что они пригодны для логицистского сведения математики к логике.

Тем не менее, идея принципов абстракции для неологицизма весьма привлекательна, и по этой причине желательно найти такое свойство или характеристику принципов, которые бы отбраковали плохие принципы. Ясно, что первым требованием к

* Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 08-03-00567).

принципам абстракции должна быть непротиворечивость: это требование делает «плохим» Основной Закон V. Вопрос состоит в том, является ли требование непротиворечивости достаточным?

Ситуация тут усугубляется тем, что в «хорошей» с этой точки зрения компании принципов абстракции могут оказаться такие принципы, которые, с одной стороны, непротиворечивы, а с другой – несовместимы друг с другом. В этом случае трудно предположить, что такие принципы, как бы они ни были приемлемы в качестве представителей принципов абстракции, могут служить для оснований математики. Сам по себе поиск подходящих принципов абстракции является трудным с технической точки зрения, поскольку те принципы, которые известны со времени Фреге, ограничены натуральными числами. Между тем интерес представляют как раз принципы абстракции для действительных чисел и для теории множеств вообще. Но гораздо более интересно, в какой степени мы можем найти философские критерии удовлетворительных принципов абстракции. В конечном счете, сама программа неологицизма является философской и непременно включает в себя базисные характеристики логических и математических истин.

Принципы абстракции рассматриваются как неявные определения. Если имеется некоторое понятие g, которое желательно определить с помощью принципа, обозначим такое определение через #g. Но простое определение не может гарантировать истинность утверждений с введенным понятием.

Рассмотрим, как вводятся логические константы в исчислении секвенций в версии Я. Хакинга. Пусть имеется некоторый язык, в рамках которого определен класс формул. Конечное число таких формул обозначим через Γ, а отдельные формулы через A, B и т. д. В метаязыке вводится понятие дедуцируемости. Факт дедукции из множества Γ формулы A обозначается через $\Gamma \vdash A$. Знак $\vdash$ есть символ метаязыка, а не объект-языка. Понятие дедуцируемости в исчислении секвенций несколько расширено по сравнению с пропозициональным исчислением за счет того, что отношение дедуцируемости распространяется на случай $\Gamma \vdash \Phi$, где Φ есть множество формул. При намеренном прочтении это будет значимо только в том случае, если некоторый член Φ получает истинностное значение «истина» всякий раз, когда каждый из членов Γ будет истинным.

Введение такого отношения дедуцируемости имеет смысл только в том случае, когда $\Gamma \vdash A$ будет справедливым, если A есть следствие Γ. Но такой желательный результат следует получить независимо через некоторое ограничение на синтаксическое отношение выводимости. Характер этих ограничений отражает важные особенности логики как таковой. Дело в том, что дедуцируемость в логической системе должна быть синтаксическим понятием, но мы стремимся получить семантическую концепцию значения логической константы. Здесь, как и в ряде случаев, происходит слияние синтаксических и семантических характеристик. Такое слияние, например, продемонстрировано Р. Смаллианом в его «схеме перевода» семантических утверждений в пропозициональные формулы [Smullyan, 1987].

Смаллиан называет это «устройством перевода», посредством которого семантические проблемы переводятся в пропозициональные проблемы. Пусть *k* есть предложение, что некоторое другое предложение р истинно. Предложение р может быть на самом деле истинным или ложным. Если предложение *p* является истинным, тогда предложение *k* также истинно, а если предложение р ложно, ложным является и предложение *k*. Ясно, что предложение *k* есть метаутверждение о предложении р, и тем не менее, ввиду совпадения их истинностных значений мы делаем утверждение об их эквивалентности «$k \equiv p$». Таким образом, если в формальной системе утверждается некоторое предложение *q*, тогда в этой системе предложение «$k \equiv p$» истинно.

Правила логической системы, в которой такая эквивалентность имеет место, позволяют заключить о доказуемости этой эквивалентности. То обстоятельство, что эта эквивалентность истинна в формальной системе, называется обоснованностью системы. Больше того, в формальной системе эта эквивалентность доказуема, и это обстоятельство говорит о полноте системы. Правда, нельзя говорить напрямую об обоснованности и полноте соответствующей формальной системы, потому что ситуация более сложна с учетом предложенной схемы перевода. Переменная *k* есть часть метаязыка, а *q* есть часть объект-языка, и установление их связи и есть результат действия устройства перевода. В какой степени два упомянутых свойства совместимы, зависит от формальной системы, точнее, от ее логической силы. Для успешного «взаимодействия» синтаксических и семантических характеристик логической системы следует более подробно рассмотреть свойства отношения дедуцируемости.

Во-первых, очевидным свойством является то, что из формулы А должна дедуцироваться сама эта формула. Таким образом, мы имеем свойство рефлексивности тождества А├А. Следующее свойство отношения дедуцируемости не имеет прямого аналога с отношением логического следования. Скорее, оно является результатом формальной структуры дедуктивной системы. Если к множеству формул Г мы добавим утверждение, которое не имеет отношения к дедукции, оно не изменит отношения к дедукции, и «просочится» в множество выводимых формул. Более точно, если Г├Ф, тогда Г, А ├Ф и Г├ А,Ф. Это свойство называется ослаблением. Г. Генцен вводит свойство, обратное ослаблению, и оно имеет важное значение в исчислении секвенций. Это свойство называется сечением и имеет следующий вид: если Г├А и Г,А ├ Ф, тогда Г ├Ф. Наконец, имеется еще одно свойство, которое довольно очевидно – это транзитивность отношения дедуцируемости: если А ├ В и В ├ С, тогда А ├ С.

Исчисление секвенций представляет для данного исследования интерес прежде всего потому, что в нем сформулированы точные правила введения логических констант. Структурные правила включают уже упомянутые свойства ослабления и сечения.

Операциональные правила характеризуют конкретные логические константы, позволяя строить сложные формулы из более простых (см.: [Целищев, 2004]). В случае пропозициональных связок компоненты буквально являются подформулами главной формулы. Обобщение этого свойства на кванторы (с некоторыми квалификациями) называется свойством подформульности. Все операциональные правила исчисления секвенций Генцена являются правилами построения: они показывают, как от менее сложных формул совершается переход к более сложным.

Исчисление секвенций позволяет взглянуть на то, как в логический дискурс вводятся новые объекты, а именно, логические константы. У нас имеются дотеоретические представления о том, какие аргументы являются правильными, а какие – неправильными. Форма этих аргументов определяется логическими константами, в частности, пропозициональными связками. Для их выделения требуется искусственная процедура, которая состоит в том, что мы начинаем с искусственного языка, в котором нет логических констант. Отношение дедуцируемости в этом случае может быть только метаязыковым. После определения такого отношения вводятся операциональные правила для определения логических констант, которые должны соответствовать тем же пропозициональным связкам дотеоретического языка. При определении логической константы мы должны требовать, чтобы значение ее определялось нетривиальными правилами. Ясно, что значение логических констант должно быть задано некоторым набором правил построения предложений, в которых встречаются логические константы.

Но даже при условии, что значение логической константы задано подобного рода правилами, мы можем получить странные результаты, потому что получаемая логическая константа может оказаться неестественной. Это было подмечено А. Прайором, который ввел «неестественную» частицу «tonk», значение ее, тем не менее, полностью определено правилами, в частности, следующими: (1) из любого утверждения Р мы можем вывести некоторое утверждение, образованное соединением через частицу «tonk» утверждений Р и Ф; (2) из любого утверждения Р – tonk – Ф мы можем вывести Ф.

Как видно, правила, которые задают значение «tonk», позволяют нам вывести любое предложение из любого другого предложения (при условии, что отношение вывода транзитивно). Ясно, что этот результат является в высшей степени неудовлетворительным. Дело в том, что логическая связка определена правилами, которые ведут к абсурду. Таким образом, идея определения логических связок через правила вывода становится подозрительной. Вообще, попытка прояснить природу логических констант через правила вывода, которые должны быть правильными, ведет к порочному кругу, потому что сами правила вывода определяются логическими константами. Но как бы то ни было, важность соответствия определений логических констант дотеоретическим представлениям особенно выпукло показывает именно «tonk». Пусть определено, как ранее, отношение дедуцируемости $\vdash$. Если последующее определение логических связок будет произвольным, тогда это отношение не будет на самом деле отношением дедуцируемости. Действительно, можно построить исчисление секвенций для «tonk», вывести А $\vdash$ А – tonk – В и А – tonk – В $\vdash$ В и тем не менее получить А$\vdash$ В. Иначе говоря, отношение $\vdash$ больше не являлось бы отношением дедуцируемости. Значит, требуется, чтобы правила введения и устранения логических связок, рассматриваемые в качестве их определений, оставляли $\vdash$ обозначающим отношение дедуцируемости.

Еще более общий пример произвольного определения, не согласующегося с уже имеющимися фактами, можно привести для системы первого порядка с тождеством и операцией * с аксиомой ассоциативности $x*(y*z) = (x*y)*z$. Попытаемся определить термин «e» через формулу $x*e = x$. Теперь мы можем доказать утверждение.y x $(x*y = x)$. Если это последнее утверждение добавить утверждению с определением «e», тогда мы должны были бы иметь полное понимание того, что значит «e». Но тогда получается новая теория с операцией «e», которая существенно отличается от старой. Она не имеет определенного элемента «e» для исходной системы с ассоциативным законом для «*».

Таким образом, определения, вводимые операциональными правилами, не должны входить в противоречия со старыми дотеоретическими представлениями. Это означает, что определения логических констант должны быть некреативными, т. е. определения должны давать консервативное расширение системы.

Ситуация с логическими константами, которые вводятся определениями, показывает, что такие определения должны удовлетворять некоторым условиям, например быть консервативными. Но ситуация с принципами абстракции точно такая же. Эти принципы вводят новые термины, которые могут приводить к изменению онтологии системы. Консервативность определения обеспечивается доказательством так называемой теоремы Генцена об устранении сечения, носящей в литературе название Hauptsatz.

Почти все операционные правила являются удлиняющими, т. е. применение правил к некоторой формуле дает более сложную формулу. С одной стороны, это благо, потому что синтаксическое выведение теорем является конструктивным процессом. С другой стороны, формальные системы с только удлиняющими правилами не представляют интереса; именно переплетение удлиняющих и укорачивающих правил делает систему интересной. Одно из правил – сечение – является укорачивающим. Hauptsatz показывает, что вывод в логике первого порядка всегда имеет свойство конструктивного выведения теорем, потому что любое утверждение, выведенное с использованием правила сечения, может быть получено без него. Если имеются выводы Г, А $\vdash$ Ф и Г $\vdash$ А,Ф, тогда может быть показано, что они могут быть перестроены и скомбинированы так, чтобы дать вывод Г$\vdash$Ф без сечения. По этой причине Hauptsatz называется часто теоремой об устранении сечения. Доказательство об устранении сечения есть составляющая часть демонстрации того, что операционные правила являются консервативными определениями.

Коль скоро логические константы определяют круг логических истин, тем самым они определяют сферу соответствующей логики. различных логик может быть столько, сколько может быть выбрано наборов логических констант. Это обстоятельство самым сильным образом расширяет возможность логицистского тезиса и может служить обоснованию новой ветви неологицизма. Точно так же, как Л. Кронекер полагал, что в основании математики может быть положена одна лишь концепция натурального числа, интуитивная ясность которого не вызывает сомнений, точно так же интуитивная ясность понятия логической константы не может быть оспорена никаким образом. Другими словами, набор логических констант не может быть произвольным, поскольку эти константы реализуют наши интуитивные представления об использовании языка и символических систем. Я. Хакинг предлагает считать определения логических констант формальными характеристиками того, что уже имелось в неформальном дискурсе.

«Операциональные правила характеризуют логические константы определенным образом для человека, который уже имеет некоторые логические идеи. На самом деле, имеется вполне допустимый смысл "определения", в котором определение характеризует то, что уже понято. Во избежание недоразумения следует говорить о правилах не как определяющих логические константы, а как характеризующих. Это никоим образом не ослабляет требования консервативности, Если бы консервативность не соблюдалась, тогда операционные правила не смогли бы характеризовать логические константы» [Hacking, 1979].

В этом пассаже содержится очень важная идея. Дело в том, что если мы имеем до введения операциональных правил некоторые знания в области логики, скажем, знание логических констант, тогда у нас имеется понимание, как эти константы употребляются. Другими словами, мы уже знаем смысл констант. Это означает, что мы задаем семантику констант, и тем самым основания логики можно рассматривать, по аналогии с кронекеровским афоризмом, как подлинные основания символических систем, в том числе математики.

Если логические константы вводятся операциональными правилами исчислений секвенций Генцена, тогда адекватность отношения дедуцируемости удовлетворяет ряду требований, в частности требованию консервативности. Логические правила, которые удовлетворяют таким требованиям, «дают "правильный" логицистский класс логических констант и теорем. То есть они должны включать традиционную основу того, что логики понимают под "логикой", и исключать то, что они не считают логикой… Должна быть экспликация того, почему логика важна для аналитической программы… Демаркация логики, которая оставляет аналитическую программу непостижимой, не представляет философского интереса» [Ibid. P. 304].

Если иметь в виду, что логицизм апеллирует к аналитичности математических истин, аналитичность логики имеет первостепенное значение.

Как известно, Фреге пытался показать, что арифметика является аналитической. Но перед тем как показать, что математика аналитична, нужно показать, что аналитична логика, из которой выводится математика. Выражение «логическая константа» впервые было введено Б. Расселом в работе «Принципы математики», который связал это понятие с априорным характером математических и логических истин [Russell, 1903]. Именно это обстоятельство напрямую связано с логицистским тезисом. Логика содержит лишь такие понятия, которые известны не эмпирически, а очевидным эпистемологическим механизмом познания логических истин являются расселовские знания-знакомства. Таким образом, имеется специальное логическое знание, специфика которого связана с понятиями априорного знания и аналитического утверждения. При анализе понятия логических констант Рассел признает незавершенность этой проблемы, говоря, что «на этом этапе мы сталкиваемся с проблемой, которую проще установить, чем решить. Проблема такова: Что является конституентами логического суждения? Я не знаю ответа». В попытке ответить на этот вопрос он апеллирует к понятию логической формы, утверждая, что «логика и математика имеют дело только с формами. В каждом языке имеется несколько слов, чья единственная функция состоит в указании на форму».

Упор на понятие формы важен для логициста Рассела, потому что именно это понятие позволяет охарактеризовать логику и математику вместе. «Перед нами тогда стоит вопрос: что это за предмет, в отношении которого безразлично, называть ли его математикой или логикой? Есть ли какой-либо способ его определения?» [Рассел, 1996. С. 178].

«В каждом символизме, до сих пор изобретенном для математической логики, имеются символы, имеющие постоянное формальное значение…такие слова и символы могут входить в логику. Тогда встает вопрос: как мы можем определить их? Такие слова или символы выражают то, что называется "логическими константами". Логические константы могут быть определены точно так же, как мы определили формы; в сущности, они являются одной и той же вещью. Фундаментальной логической константой будет то, что является наиболее общим для большого числа суждений, каждое из которых получается из другого путем подстановки одного термина вместо другого. В этом смысле все “константы”, которые встречаются в “чистой” математике, являются логическими константами» [Рассел, 1996. С. 177].

В основе понимания природы дедуктивных истин, в свете вышесказанного, может быть положен нормативный характер логических истин [Целищев, 2004]. Выбор выражений в качестве логических констант определяется целями исследований. Такого рода цели могут в значительной степени определяться философскими программами. Успех неологицистской программы зависит от того, в какой степени выбранные логические константы ограничивают интерпретацию дедуктивных выражений. Создатель логической системы, которая кладется в основание математики, может выбирать, какие именно выражения полагать константами. В определенном смысле этот создатель сам задает нормы, которым обязан следовать в дальнейшем. Неологицизм как философская программа может быть реализован в качестве нормативного требования к выбору логических констант с тем условием, чтобы математические истины трактовались как лологические истины.

Список литературы

Рассел Б. Введение в математическую философию. М.: Гнозис, 1996.

Целищев В. В. Нормативность дедуктивного дискурса: феноменология логических констант. Новосибирск: Нонпарель, 2004.

Hacking I. What Is Logic // Journal of Philosophy. 1979. Vol. 76. No. 6. P. 285–319.

Russell B. The Principles of Mathematics. Cambridge University Press, 1903.

Smullyan R. Forever Undecided. Oxford Univ. Press, 1987.

Материал поступил в редколлегию 22.06.2010

V. V. Tselischev

NEOLOGICISM AND INTRODUCTION OF NEW EXPRESSIONS

The paper discusses the problem of introduction of new expressions into formal systems by way of abstraction principles. The status of new expressions for abstract objects in the neologicist program is considered. The author also analyses modifications of the notion of entailment when new expressions are introduced into the system.

Keywords: neologicism, principles of abstraction, conservative extension, deduction, entailment.