

УДК 519.6

А. С. Астракова¹, В. Н. Лапин¹, С. Г. Черный¹, О. П. Алексеенко²

¹ Институт вычислительных технологий СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия

² Новосибирский технологический центр компании «Шлюмберже»
ул. Зеленая Горка, 1/10, Новосибирск, 630090, Россия

Email: anna.astrakova@gmail.com

МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЫ *

Построена модель фильтрации бурового раствора в трещиновато-пористую среду с вытеснением поровой жидкости. Для ее решения предложен оригинальный численный алгоритм, основанный на неявной конечно-разностной схеме. Обратная задача нахождения параметров трещиновато-пористой среды сформулирована в виде оптимизационной задачи. Реализованы два метода ее решения: метод золотого сечения и метод, базирующийся на генетическом алгоритме. Представлены результаты решения обратной задачи для различных групп варьируемых параметров.

Ключевые слова: модель радиальной фильтрации, вязкопластическая жидкость, трещиновато-пористая среда, вытеснение, обратная задача.

Введение

Процесс бурения скважины в породе может сопровождаться фильтрационными потерями бурового раствора. Одним из методов их устранения является технология закупоривания системы трещин в породе, находящейся в окрестности скважины, специально разработанными материалами (тампонаж). Успех применения такой технологии определяется правильным подбором тампонажного материала и режима его закачки и может быть повышен в случае, если известны параметры тампонируемой породы, такие как проницаемость, пористость, сжимаемость и др.

Целью настоящей работы является разработка методики определения фильтрационных параметров породы. Предполагается, что она имеет структуру специального вида – трещиновато-пористую. Трещиновато-пористая среда представляет собой совокупность пористых блоков, отделенных друг от друга трещинами [1]. Жидкость насыщает и проницаемые блоки и трещины. При этом размеры трещин значительно превосходят характерные размеры пор, так что проницаемость системы трещин k_T значительно больше, чем проницаемость системы пор в блоках $k_{П}$. В то же время трещины занимают гораздо меньший объем, чем поры, поэтому коэффициент трещиноватости m_T – отношение объема, занятого трещинами, к общему объему

* Работа выполнена при финансовой поддержке Новосибирского технологического центра компании «Шлюмберже» и Интеграционного проекта СО РАН № 130.

породы – существенно меньше пористости отдельных блоков $m_{пн}$. К трещиновато-пористым породам относятся некоторые виды известняков, песчаников, алевролитов, доломитов.

В основу предлагаемой методики положена модель плоскорадиальной фильтрации бурового раствора в трещиновато-пористую среду с вытеснением поровой жидкости. При этом буровой раствор представляется вязкопластической жидкостью, а поровая жидкость – ньютоновской. Уравнение пьезопроводности и закон Дарси, описывающие фильтрацию обеих жидкостей, имеют одинаковую структуру и отличаются только значениями входящих в них коэффициентов проницаемости и пористости. Поэтому процесс вытеснения буровым раствором поровой жидкости моделируется сквозным решением уравнений во всей области от скважины до удаленной на достаточное расстояние в область поровой жидкости границы с переключением значений коэффициентов уравнений на границе раздела жидкостей. Движение границы раздела жидкостей описывается отдельным уравнением. Заметим, что в постановке, когда буровой раствор и поровая жидкость предполагаются ньютоновскими жидкостями, задача была решена ранее (см., например, [2]). В случае фильтрации двух ньютоновских жидкостей значительно упрощаются вывод уравнений фильтрации и их численная реализация, а сама задача является частным случаем рассматриваемой в настоящей работе.

К конечно-разностной схеме решения уравнений пьезопроводности из-за разрывности их коэффициентов предъявляются особые требования, главными из которых являются обладание свойством консервативности и повышенным запасом устойчивости. В работе с целью создания численного алгоритма, обладающего указанными свойствами, строится оригинальная неявная конечно-разностная схема на основе дивергентной формы уравнения пьезопроводности. Краевые условия для уравнений пьезопроводности – давление в скважине и в удаленной точке поровой жидкости. Решением этой задачи являются скорости фильтрации бурового раствора по трещиноватым и пористым блокам, по которым находится величина потерь бурового раствора.

Если из проводимых при бурении замеров известны временные зависимости давления в скважине и расхода потерь бурового раствора, то это позволяет поставить обратную задачу определения параметров трещиновато-пористой среды, сформулировав ее в виде оптимизационной задачи. В ней на наборе параметров трещиновато-пористой среды решается задача фильтрации (прямая задача) и минимизируется функционал отклонения между измеренной временной зависимостью потерь бурового раствора и зависимостью, предсказанной на основе разработанной модели фильтрации бурового раствора. Измеренная временная зависимость давления в скважине используется в качестве краевых условий для уравнений пьезопроводности модели фильтрации. Другими словами, суть методики заключается в подборе параметров трещиновато-пористой среды, которые обеспечат при решении прямой задачи фильтрации максимальное совпадение рассчитанной и замеренной временных зависимостей потерь бурового раствора. Подобранные параметры и являются решением обратной задачи фильтрации.

Модель радиальной фильтрации бурового раствора в трещиновато-пористую среду с вытеснением поровой жидкости

Общие допущения. Фильтрация жидкости в трещиновато-пористой среде описывается в рамках модели плоскорадиальной фильтрации [1]. Жидкость фильтруется в радиальном направлении от скважины. Все параметры процесса зависят только от одной координаты – расстояния до скважины.

Предполагается, что проницаемости пористой среды и системы трещин по отдельности постоянны и равны $k_{пн}$ и $k_{тр}$ соответственно. Порода считается слабосжимаемой, т. е. пористости породы $m_{пн}$ и системы трещин $m_{тр}$ линейно зависят от давления насыщающей жидкости p [1]:

$$m_{пн} = m_{0пн} (1 + \beta_{пн} (p - p_{нор})),$$

$$m_{тр} = m_{0тр} (1 + \beta_{тр} (p - p_{нор})),$$

где $m_{0пн}$ и $m_{0тр}$ – пористости породы и системы трещин до начала бурения; $\beta_{пн}$ и $\beta_{тр}$ – коэффициенты сжимаемости пористой среды и системы трещин.

Буровой раствор полагается вязкопластической жидкостью, в которой касательное напряжение τ представляется в виде

$$\tau = \tau_0 + K \left(\frac{dw}{dy} \right)^n, \quad (1)$$

где τ_0 – предел пластической деформации жидкости; $\frac{dw}{dy}$ – градиент скорости, перпендикулярный направлению течения; K – коэффициент динамической вязкости, а n – степенной показатель в жидкости, подчиняющейся степенному закону.

Пористая среда пропитана поровой жидкостью. Поровая жидкость полагается ньютоновской жидкостью, в которой выражение для касательного напряжения τ является частным случаем выражения для напряжения в вязкопластической жидкости (1):

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy}.$$

Считается, что раствор вытесняет поровую жидкость, не смешиваясь с ней. Поэтому существует граница раздела жидкостей $r = R_b(t)$.

Далее будут выписаны уравнения фильтрации вязкопластической жидкости в каждой из двух составляющих трещиновато-пористой среды, а также уравнение движения границы раздела жидкостей. Давление и скорость жидкости в пористой части обозначим через p_n и w_n , а в трещиноватой части – p_T и w_T . Из-за разницы давлений в трещинах и пористой части возникает переток жидкости из одной среды в другую. Величина перетока определяется коэффициентом перетока a_0 .

Уравнения пьезопроводности и законы Дарси модели фильтрации вязкопластической жидкости в трещиновато-пористую среду. Для вывода модели фильтрации вязкопластической жидкости в пористую среду рассмотрим установившееся плоскорадиальное течение вязкопластической жидкости между двумя параллельными пластинами, отстоящими на расстоянии W друг от друга. В этом случае уравнение количества движения превращается в следующее равенство [3]:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -2K \left(\frac{4n+2}{n} \right)^n \frac{u^n}{W^{n+1}} - \left(\frac{4n+2}{n+1} \right) \frac{\tau_0}{W}. \quad (2)$$

Определим связь между действительной скоростью движения жидкости u и скоростью фильтрации w :

$$w = tu, \quad (3)$$

где t – пористость, равная отношению объема пустот (пор) ко всему объему пористой среды. Пусть H – высота слоя породы, в котором расположено N каналов ширины W . Тогда пористость данного пласта будет равна

$$m = \frac{NW}{H}. \quad (4)$$

Из (2) имеем

$$u = -\frac{1}{(2K)^{1/n}} W^{1+1/n} \left(\frac{n}{4n+2} \right) \left[\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{4n+2}{n+1} \right) \frac{\tau_0}{W} \right]^{1/n}$$

или, учитывая (3) и (4), получаем выражение для скорости фильтрации

$$w = -\frac{1}{K} \left(\frac{N}{H} \frac{nW^{2+1/n}}{(4n+2)2^{1/n}K^{1/n-1}} \right) \left[\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{4n+2}{n+1} \right) \frac{\tau_0}{W} \right]^{1/n},$$

которое будем трактовать как обобщенный закон Дарси:

$$w = -\frac{k}{K} \left[\frac{\partial p}{\partial r} + \tau \right]^{1/n}. \quad (5)$$

В (7) введены обозначения для проницаемости k

$$k = \frac{N}{H} \cdot \frac{n W^{2+1/n}}{(4n+2) 2^{1/n} K^{1/n-1}} \quad (6)$$

и предельного касательного напряжения τ

$$\tau = \left(\frac{4n+2}{n+1} \right) \frac{\tau_0}{W}. \quad (7)$$

Из (6) с учетом (4) выражаем ширину канала W через проницаемость k и пористость m :

$$W = K^{\frac{1-n}{1+n}} 2^{\frac{1}{1+n}} \left(\frac{4n+2}{n} \frac{k}{m} \right)^{\frac{n}{1+n}}. \quad (8)$$

В свою очередь (8) используется в (7) для получения выражения τ от пористости m и проницаемости k пористой среды:

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(4n+2)^{\frac{1}{1+n}} n^{\frac{n}{1+n}}}{n+1} \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{n}{1+n}}. \quad (9)$$

Таким образом, закон Дарси (5) с соотношением для τ (9) дают замкнутую систему для определения скорости фильтрации по давлению и параметрам пористой среды.

Уравнение неразрывности в пористой среде [1] есть

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \frac{\partial(r \rho w)}{\partial r} = 0. \quad (10)$$

Считая породу и вязкопластическую жидкость слабосжимаемыми,

$$m = m_0 (1 + \beta_{\text{породы}} (p - p_0)),$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta_{\text{жидкости}} (p - p_0)),$$

где ρ_{0p} – плотность раствора при давлении p_{0p} , β_p – коэффициент сжимаемости раствора, а скорость фильтрации подчиняющейся закону Дарси (5), (9), из уравнения неразрывности (10) получим уравнение пьезопроводности для давления

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\beta^* r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \tau \right)^{1/n} \right) = 0,$$

где

$$\beta^* = m_0 (\beta_{\text{породы}} + \beta_{\text{жидкости}}).$$

Теперь мы можем выписать систему уравнений модели фильтрации вязкопластической жидкости в трещиновато-пористую среду.

Распространение давления в каждой из составляющих среды описывается своим уравнением пьезопроводности, при этом каждое из них учитывает фильтрацию как поровой жидкости, так и бурового раствора, отличаясь только значениями коэффициентов:

$$\frac{\partial p_{\text{п}}}{\partial t} - \frac{1}{\beta_{\text{п}}^* r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_{\text{п}} \left(\frac{\partial p_{\text{п}}}{\partial r} + \tau_{\text{п}} \right)^{1/n} \right) + \frac{a_0}{K \beta_{\text{п}}^*} (p_{\text{п}} - p_{\text{т}}) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial p_{\text{т}}}{\partial t} - \frac{1}{\beta_{\text{т}}^* r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_{\text{т}} \left(\frac{\partial p_{\text{т}}}{\partial r} + \tau_{\text{т}} \right)^{1/n} \right) - \frac{a_0}{K \beta_{\text{т}}^*} (p_{\text{п}} - p_{\text{т}}) = 0, \quad (12)$$

где

$$\beta_{\text{т}}^* = m_{0\text{т}} (\beta_{\text{т}} + \beta_p), \quad \beta_{\text{п}}^* = m_{0\text{п}} (\beta_{\text{п}} + \beta_p),$$

$$\tau_i = \tau_0 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(4n+2)^{\frac{1}{1+n}} n^{\frac{n}{1+n}}}{n+1} \cdot \left(\frac{m_i}{k_i} \right)^{\frac{n}{1+n}}, \quad i = \text{п, т.}$$

Законы Дарси для скоростей фильтрации имеют вид

$$w_i = -\frac{k_i}{K} \left[\frac{\partial p_i}{\partial r} + \tau_i \right]^{1/n}. \quad (13)$$

Входящее во все уравнения (11)–(13) выражение вида $\left(\frac{\partial p}{\partial r} + \tau \right)^{1/n}$ вычисляется по следующему правилу, отвечающему корректной передаче реологии неньютоновской жидкости,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} + \tau \right)^{1/n} = \begin{cases} -\left| \frac{\partial p}{\partial r} + \tau \right|^{1/n}, & \frac{\partial p}{\partial r} < 0 \text{ и } \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| > \tau, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \tau \right)^{1/n}, & \frac{\partial p}{\partial r} > 0 \text{ и } \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| > \tau, \\ 0, & \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \leq \tau. \end{cases} \quad (17)$$

Моделирование вытеснения поровой жидкости буровым раствором. Модель учитывает различия в реологических параметрах бурового раствора и поровой жидкости. Считается, что раствор вытесняет поровую жидкость, не смешиваясь с ней (рис. 1). Поэтому существует граница раздела сред $r = R_b(t)$. В области между скважиной и границей находится буровой раствор, за границей – поровая жидкость. Фильтрация обеих жидкостей описывается одними и теми же уравнениями. Учет среды производится путем переключения параметров K , n , τ_0 в (11)–(13):

$$K, n, \tau_0 = \begin{cases} K_p, n_p, \tau_{0p}, & R_w \leq r \leq R_b, \\ K_{пор}, n_{пор}, \tau_{0пор}, & R_b < r. \end{cases}$$

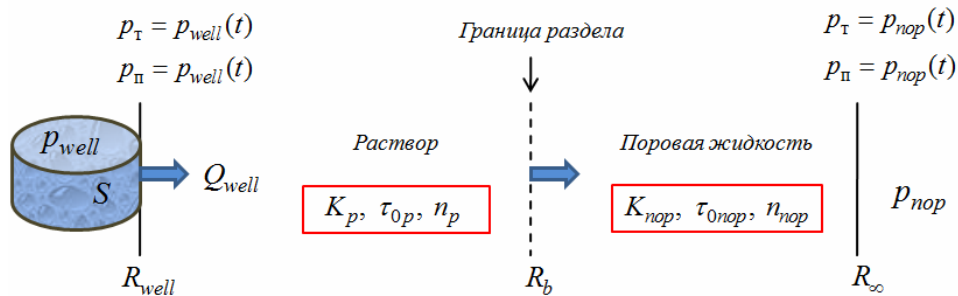


Рис. 1. Схема вытеснения поровой жидкости буровым раствором и краевые условия для уравнений пьезопроводности

Положение границы описывается задачей Коши

$$\frac{dR_b}{dt} = u(R_b, t), \quad u = w_T / m_{0T}, \quad R_b|_{t=0} = R_{well}.$$

Величина потерь бурового раствора из скважины Q_{well} вычисляется по формуле

$$Q_{well} = (w_{\Pi} + w_T) S,$$

где $S = 2\pi R_{well}$ – площадь кольца единичной высоты на поверхности скважины.

Результаты определения параметров среды и реологии жидкости как для модели с вытеснением поровой жидкости буровым раствором, так и для модели без вытеснения, т. е. когда предполагается, что поровая жидкость имеет ту же реологию, что и буровой раствор, приводятся ниже.

Численный метод решения прямой задачи фильтрации бурового раствора в трещиновато-пористую среду с вытеснением поровой жидкости

Обобщенная запись уравнений пьезопроводности. Каждое из уравнений (11)–(13) может быть записано в следующем общем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - D \frac{\partial}{\partial r} \left[Z \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \tau \right)^{1/n} \right] + bp - bp^* = 0, \quad (14)$$

значения p , D , Z , τ , b и p^* приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов уравнения (14)

Уравнение	p	D	Z	τ	b	p^*
(11)	p_{Π}	$\frac{1}{\beta_{\Pi}^* r}$	$\frac{rk_{\Pi}}{K}$	τ_{Π}	$\frac{a_0}{K \beta_{\Pi}^*}$	p_{Γ}
(12)	p_{Γ}	$\frac{1}{\beta_{\Gamma}^* r}$	$\frac{rk_{\Gamma}}{K}$	τ_{Γ}	$\frac{a_0}{K \beta_{\Gamma}^*}$	p_{Π}

Неявная консервативная конечно-разностная схема для уравнения пьезопроводности. Уравнение (14) аппроксимируется неявной консервативной схемой с весами

$$\frac{p_j^{m+1} - p_j^m}{\Delta t} - \frac{\sigma D_j}{\Delta} (W_{j+1/2}^{m+1} - W_{j-1/2}^{m+1}) + \sigma b (p_j^{m+1} - p_j^{*m+1}) - \frac{(1-\sigma) D_j}{\Delta} (W_{j+1/2}^m - W_{j-1/2}^m) + (1-\sigma) b (p_j^m - p_j^{*m}) = 0, \quad (15)$$

где

$$W_{j+1/2}^{m+1} = Z_{j+1/2} \left(\frac{p_{j+1}^{m+1} - p_j^{m+1}}{\Delta_{j+1/2} r} + \tau_{j+1/2} \right)^{1/n_{j+1/2}},$$

$$Z_{j+1/2} = \frac{r_{j+1/2} k}{K_{j+1/2}}, \quad \Delta = (\Delta_{j+1/2} r + \Delta_{j-1/2} r) / 2, \quad \Delta_{j+1/2} r = r_{j+1} - r_j.$$

Верхний индекс m обозначает номер слоя по времени; нижний – j – номер узла по радиальной координате; σ – параметр схемы. В схеме участвуют функции как из целочисленных узлов j , так и из дробных $j + 1/2$, расположенных ровно посередине между узлами j и $j + 1$.

При $n \neq 1$ схема нелинейна и необходима ее линеаризация. Для этого на неявном $m + 1$ слое вводится итерационный процесс, текущая итерация которого обозначается индексом s :

$$(p^{m+1})^s = p^s.$$

Итерационная схема записывается как

$$\begin{aligned} & \frac{p_j^{s+1} - p_j^s}{\Delta t} - \frac{\sigma D_j}{\Delta} (W_{j+1/2}^{s+1} - W_{j-1/2}^{s+1}) + \sigma b (p_j^{s+1} - p_j^{*s}) = \\ & = - \left[\frac{p_j^s - p_j^m}{\Delta t} - \frac{(1-\sigma) D_j}{\Delta} (W_{j+1/2}^m - W_{j-1/2}^m) + (1-\sigma) b (p_j^m - p_j^{*m}) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Представим

$$W_{j+1/2}^{s+1} = Z_{j+1/2} (\vartheta^{s+1} + \tau_{j+1/2})^{1/n_{j+1/2}},$$

$$W_{j-1/2}^{s+1} = Z_{j-1/2} (\eta^{s+1} + \tau_{j-1/2})^{1/n_{j-1/2}},$$

где

$$\vartheta^{s+1} = \frac{p_{j+1} - p_j}{\Delta_{j+1/2} r}, \quad \eta^{s+1} = \frac{p_j - p_{j-1}}{\Delta_{j-1/2} r}.$$

Тогда линеаризация по Ньютону потоков $W_{j\pm 1/2}^{s+1}$ даст

$$\begin{aligned} W_{j+1/2}^{s+1} &= W_{j+1/2}^s + Z_{j+1/2} \frac{1}{n_{j+1/2}} (\vartheta^s + \tau_{j+1/2})^{1/n_{j+1/2}-1} (\vartheta^{s+1} - \vartheta^s), \\ W_{j-1/2}^{s+1} &= W_{j-1/2}^s + Z_{j-1/2} \frac{1}{n_{j-1/2}} (\eta^s + \tau_{j-1/2})^{1/n_{j-1/2}-1} (\eta^{s+1} - \eta^s). \end{aligned} \quad (17)$$

Введем обозначение

$$\xi_j = p_j^{s+1} - p_j^s$$

и перепишем выражения для потоков (17):

$$\begin{aligned} W_{j+1/2}^{s+1} &= W_{j+1/2}^s + \frac{Z_{j+1/2}}{n_{j+1/2} \Delta_{j+1/2} r} T_{j+1/2} (\xi_{j+1} - \xi_j), \\ W_{j-1/2}^{s+1} &= W_{j-1/2}^s + \frac{Z_{j-1/2}}{n_{j-1/2} \Delta_{j-1/2} r} T_{j-1/2} (\xi_j - \xi_{j-1}), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} T_{j+1/2} &= (\vartheta^s + \tau_{j+1/2})^{1/n_{j+1/2}-1}, \\ T_{j-1/2} &= (\eta^s + \tau_{j-1/2})^{1/n_{j-1/2}-1}. \end{aligned}$$

Подставляя формулы (18) в (16), получим следующий вид линеаризованной схемы:

$$G_\eta \xi_{j-1} - \left(\frac{1}{\Delta t} + \sigma b + F_\vartheta + G_\eta \right) \xi_j + F_\vartheta \xi_{j+1} = \Omega_j,$$

где

$$\begin{aligned} F_\vartheta &= \frac{\sigma \cdot D_j Z_{j+1/2}}{n_{j+1/2} \Delta \cdot \Delta_{j+1/2} r} T_{j+1/2}, \quad G_\eta = \frac{\sigma \cdot D_j Z_{j-1/2}}{n_{j-1/2} \Delta \cdot \Delta_{j-1/2} r} T_{j-1/2}, \quad Z_{j+1/2} = \frac{k}{2} \left(\frac{r_j}{K_j} + \frac{r_{j+1}}{K_{j+1}} \right), \\ \Omega_j &= \frac{p_j^s - p_j^m}{\Delta t} - \frac{D_j}{\Delta} (\tilde{W}_{j+1/2} - \tilde{W}_{j-1/2}) + b\tilde{p}_j - b\tilde{p}_j^*, \\ \tilde{W}_{j\pm 1/2} &= \sigma W_{j\pm 1/2}^s + (1 - \sigma) W_{j\pm 1/2}^m, \\ \tilde{p}_j &= \sigma p_j^s + (1 - \sigma) p_j^m, \quad \tilde{p}_j^* = \sigma p_j^{*s} + (1 - \sigma) p_j^{*m}. \end{aligned}$$

Для правильной передачи реологии неньютоновской жидкости величину $T_{j+1/2}$ в формулах (18) следует вычислять по правилу

$$T_{j+1/2} = \begin{cases} a) \frac{\Delta_{j+1/2} P}{\Delta_{j+1/2} r} < 0, \quad \left| \frac{\Delta_{j+1/2} P}{\Delta_{j+1/2} r} \right| > \tau_{j+1/2}, \quad \text{то} \quad \left| \frac{\Delta_{j+1/2} P}{\Delta_{j+1/2} r} + \tau_{j+1/2} \right|^{\frac{1}{n_{j+1/2}}-1}, \\ b) \frac{\Delta_{j+1/2} P}{\Delta_{j+1/2} r} > 0, \quad \left| \frac{\Delta_{j+1/2} P}{\Delta_{j+1/2} r} \right| > \tau_{j+1/2}, \quad \text{то} \quad \left| \frac{\Delta_{j+1/2} P}{\Delta_{j+1/2} r} - \tau_{j+1/2} \right|^{\frac{1}{n_{j+1/2}}-1}, \\ в) \quad \left| \frac{\Delta_{j+1/2} P}{\Delta_{j+1/2} r} \right| < \tau_{j+1/2}, \quad \text{то} \quad 0, \end{cases}$$

а поток $W_{j+1/2}$ в правой части Ω – по правилу

$$W_{j+1/2} = \begin{cases} a) \frac{\Delta_{j+1/2}P}{\Delta_{j+1/2}r} < 0, \left| \frac{\Delta_{j+1/2}P}{\Delta_{j+1/2}r} \right| > \tau_{j+1/2}, \text{ то } -Z_{j+1/2} \left| \frac{\Delta_{j+1/2}P}{\Delta_{j+1/2}r} + \tau_{j+1/2} \right|^{\frac{1}{n_{j+1/2}}}, \\ б) \frac{\Delta_{j+1/2}P}{\Delta_{j+1/2}r} > 0, \left| \frac{\Delta_{j+1/2}P}{\Delta_{j+1/2}r} \right| > \tau_{j+1/2}, \text{ то } Z_{j+1/2} \left(\frac{\Delta_{j+1/2}P}{\Delta_{j+1/2}r} - \tau_{j+1/2} \right)^{\frac{1}{n_{j+1/2}}}, \\ в) \left| \frac{\Delta_{j+1/2}P}{\Delta_{j+1/2}r} \right| < \tau_{j+1/2}, \text{ то } 0. \end{cases}$$

Построенная схема при $\sigma \geq 1/2$ является абсолютно устойчивой и при $\sigma = 1/2$ аппроксимирует уравнение преезопроводности с порядком аппроксимации $O(\Delta t^2 + \Delta r^2)$, где $\Delta r = \max_j \Delta_{j+1/2}r$.

Скорость фильтрации рассчитывается из уравнения Дарси по известному распределению давления

$$w_{j+1/2}^{m+1} = -\frac{1}{r_{j+1/2}} W_{j+1/2}^{m+1}. \quad (19)$$

Решение уравнения для границы раздела бурового раствора и поровой жидкости $R_b(t)$. Задача Коши (15) для границы раздела $R_b(t)$ решается методом Эйлера 1-го порядка точности:

$$\begin{aligned} R_b^{m+1} &= R_b^m + \Delta t \cdot u(R_b^m, t^m), \quad m = 0, 1, \dots \\ R_b^0 &= R_{well}, \quad t^0 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку скорость u в (20) определяется по скорости фильтрации бурового раствора в трещиноватой части породы, а та, в свою очередь, рассчитывается в дробных узлах (19), то на каждом шаге метода (20) необходимо определять $u(R_b^m, t^m)$ в двигающейся точке $r = R_b^m$. Для этого сначала находится отрезок разбиения радиального направления, содержащий точку $r = R_b^m$:

$$R_b^m \in [r_{j-1/2}, r_{j+1/2}).$$

Затем посредством линейной интерполяции по значениям скорости на концах этого отрезка вычисляется скорость в искомой точке $r = R_b^m$:

$$u(R_b^m, t^m) = (R_b^m - r_{j-1/2})(u_{j+1/2}^m - u_{j-1/2}^m)/(r_{j+1/2} - r_{j-1/2}) + u_{j-1/2}^m.$$

Верификация численного метода решения прямой задачи и анализ чувствительности решения

Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости. Для верификации численного алгоритма использовалось аналитическое решение следующей задачи о неустановившейся плоскорадиальной фильтрации упругой жидкости, приведенное в [1]. В неограниченном горизонтальном пласте постоянной единичной толщины имеется добывающая скважина нулевого радиуса (точечный сток). Начальное пластовое давление во всем пласте одинаково и равно p_k . В момент $t = 0$ скважина пущена в эксплуатацию с постоянным расходом Q_0 . В пласте образуется неустановившаяся плоскорадиальная фильтрация упругой

жидкости. Распределение давления в пласте (в любой его точке и в любой момент времени) $p(r, t)$ определяется уравнением пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (21)$$

Начальные и граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad 0 \leq r \leq \infty: \quad p(r, t) &= p_k; \\ t > 0, \quad r = \infty: \quad p(r, t) &= p_k; \\ t > 0, \quad r = 0: \quad \frac{2\pi k}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} &= Q_0. \end{aligned}$$

Решением этой задачи является так называемая основная формула теории упругого режима фильтрации:

$$p(r, t) = P(r, t) \equiv p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k} \left[-Ei \left(-\frac{r^2}{4\chi t} \right) \right], \quad (22)$$

в которой введено обозначение для интегральной показательной функции

$$-Ei \left(-\frac{r^2}{4\chi t} \right) = \int_{\frac{r^2}{4\chi t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Для значений $r^2 / (4\chi t) \leq 1$ с достаточной точностью выполняется

$$-Ei \left(-\frac{r^2}{4\chi t} \right) \approx \ln \frac{4\chi t}{r^2} - 0.5772 \quad (23)$$

и в этом случае можно вместо (22) использовать формулу

$$p(r, t) = \tilde{P}(r, t) \equiv p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k} \left(\ln \frac{4\chi t}{r^2} - 0.5772 \right). \quad (24)$$

Из (22) может быть найден расход жидкости через цилиндрическую поверхность единичной высоты, радиусом r

$$Q(r, t) = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r = Q_0 e^{-r^2/4\chi t} \quad (25)$$

и скорость фильтрации

$$w = \frac{Q_0}{2\pi r} e^{-r^2/4\chi t}. \quad (26)$$

Поскольку для верификации алгоритма используется приближенная формула, оценим ее погрешность. Так, в [1] доказано, что при $\frac{r^2}{4\chi t} \in [10^{-4}, 10^{-2}]$ погрешность (23) не превосходит 5 %. Коэффициент пьезопроводности χ в нашем случае имеет вид

$$\chi = \frac{k}{\beta^* K}. \quad (27)$$

Беря значения входящих в него параметров равными:

$$k = 10^{-12} \text{ м}^2, \quad m_0 = 0.3, \quad \beta_{\text{породы}} = 0, \quad \beta_{\text{жидкости}} = 4.58 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad K = \mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

получим $\chi = 7.3 \text{ м}^2 / \text{с}$.

В силу большого значения коэффициента пьезопроводности из (25), (27) следует, что стационарный процесс фильтрации достигается очень быстро на небольших расстояниях от

скважины. Кроме того, условие $r^2 / (4\chi t) \leq 1$, при котором справедлива формула (24), выполняется в достаточно широких диапазонах изменения переменных t и r . Так, если время варьировать в пределах $60 \text{ с} < t < 3000 \text{ с}$, а радиус – $1 \text{ м} \leq r \leq 10 \text{ м}$, то значение величины $r^2 / (4\chi t)$ меняется в диапазоне $[10^{-4}, 10^{-2}]$. Поэтому погрешность задания начальных и граничных условий для (21) посредством формулы (24) составляет не больше 5% [1].

Для верификации предложенного в работе численного метода решения уравнения пьезопроводности он был применен к решению уравнения (21) при указанных выше значениях параметров в прямоугольнике $[r_n \leq r \leq r_l] \times [t_n \leq t \leq t_k]$. На левой $r_l = 1 \text{ м}$ и правой $r_n = 10 \text{ м}$ границах задавались краевые условия, полученные из (24),

$$p(r_l, t) = \tilde{P}(r_l, t), p(r_n, t) = \tilde{P}(r_n, t),$$

где $\tilde{P}(r, t)$ получено при значениях

$$p_k = 37 \text{ МПа}, Q_0 = 4.416 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{с}.$$

Начальное условие ставилось при $t_n = 60 \text{ с}$

$$p(r, t_n) = \tilde{P}(r, t_n), r_l \leq r \leq r_n.$$

Полученные при этих начальных и краевых условиях численные значения расхода и скорости фильтрации сравнивались с точными значениями, найденными из (25) и (26), вплоть до момента времени $t = 3000 \text{ с}$. Максимальная погрешность при этом не превышала 1 %.

Анализ чувствительности решения уравнений пьезопроводности. Если до этого мы решали линейное ($n = 1$) уравнение пьезопроводности для ньютоновской жидкости, то сейчас проиллюстрируем работу итерационной схемы и поведения решений уравнений пьезопроводности в общем случае фильтрации вязкопластической жидкости в трещиновато-пористую среду с вытеснением поровой жидкости. Задавались следующие значения параметров модели (11)–(13):

- для трещиновато-пористой среды

$$k_{\Pi} = 1 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, m_{0\Pi} = 0.3, \beta_{\Pi} = 0 \text{ Па}^{-1},$$

$$k_{\Gamma} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, m_{0\Gamma} = 0.001, \beta_{\Gamma} = 0 \text{ Па}^{-1};$$

- для вязкопластической жидкости (буровой раствор)

$$K_p = 3.83 \cdot 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}, n_p = 0.94, \tau_{0p} = 4 \text{ Па} / \text{м}, \beta_p = 4.58 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

- для ньютоновской жидкости (поровая жидкость)

$$K_{\text{пор}} = 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}, n_{\text{пор}} = 1, \tau_{0\text{пор}} = 0 \text{ Па} / \text{м}, \beta_{\text{пор}} = 4.58 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

- коэффициент a_0 перетока вязкопластической жидкости из одной упругой среды в другую и высота H слоя породы

$$a_0 = 10^{-14}, H = 10 \text{ м}.$$

Были выбраны следующие параметры схемы:

$$\Delta t = 0.5 \text{ с}, \min_j \Delta r_j = 0.025 \text{ м}, \max_j \Delta r_j = 0.858 \text{ м}.$$

Начальные и граничные условия задачи:

$$t = 0, p_{\Pi}(R_w, 0) = p_{\text{well}}(0), p_{\Gamma}(R_w, 0) = p_{\text{well}}(0), R_w < r \leq R_{\infty} : R_w = 0.1 \text{ м}, R_{\infty} = 300 \text{ м},$$

$$p_{\Pi}(r, 0) = p_{\text{поровое}}, p_{\Gamma}(r, 0) = p_{\text{поровое}}, p_{\text{поровое}} = 37 \text{ МПа},$$

$$t > 0, r = R_w : p_{\Pi}(R_w, t) = p_{\text{well}}(t), p_{\Gamma}(R_w, t) = p_{\text{well}}(t);$$

$$t > 0, r = R_{\infty} : p_{\Pi}(R_{\infty}, t) = p_{\text{поровое}}, p_{\Gamma}(R_{\infty}, t) = p_{\text{поровое}}.$$

Измеренная зависимость $p_{well}(t)$ представлена на рис. 2.

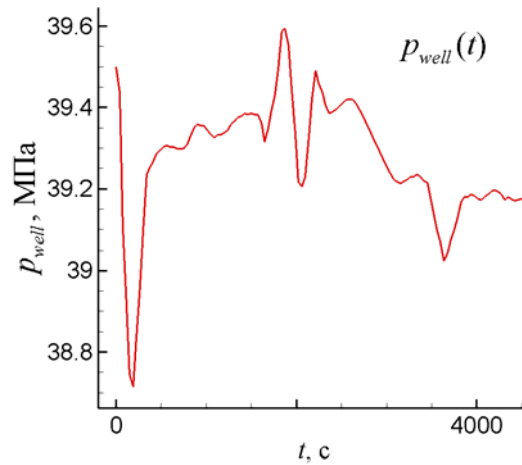


Рис. 2. Измеренная зависимость давления в скважине от времени

Характерные зависимости величин

$$\xi_1 = \max_j \left| \frac{p_{п,j}^{s+1} - p_{п,j}^s}{p_{п,j}^{s+1}} \right|, \quad \xi_2 = \max_j \left| \frac{p_{т,j}^{s+1} - p_{т,j}^s}{p_{т,j}^{s+1}} \right|$$

от итераций по s для первого и десятого шагов по времени приведены на рис. 3. Итерации для рис. 3 велись до тех пор, пока значения Err не достигали уровня точности представления чисел в компьютере. Во время решения практических задач точность сходимости итераций для $\max\{\xi_1, \xi_2\}$ ограничивалась величиной 10^{-5} .

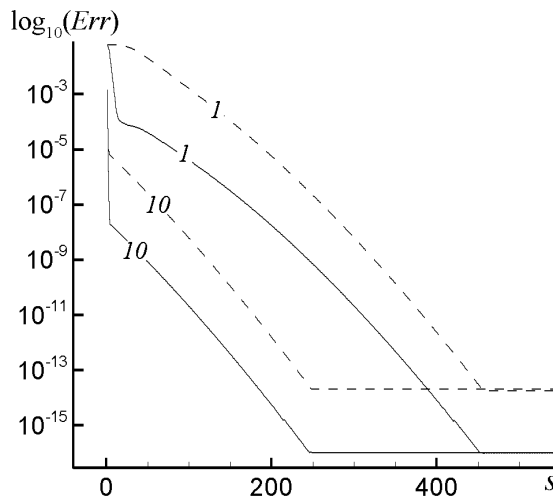


Рис. 3. Кривые сходимости внутренних итераций на первом (кривые 1) и десятом (кривые 10) шагах по времени: сплошной линией отмечены профили ξ_1 ; штриховой — ξ_2

Для иллюстрации поведения решений обоих уравнений пьезопроводности полной модели фильтрации с вытеснением поровой жидкости на рис. 4 показаны распределения давлений в пористой (сплошная линия) и трещиноватой (штриховая линия) средах в различные моменты времени с нулевым значением коэффициента перетока (сверху)

$$a_0 = 0$$

и ненулевым (снизу)

$$a_0 = 10^{-14}.$$

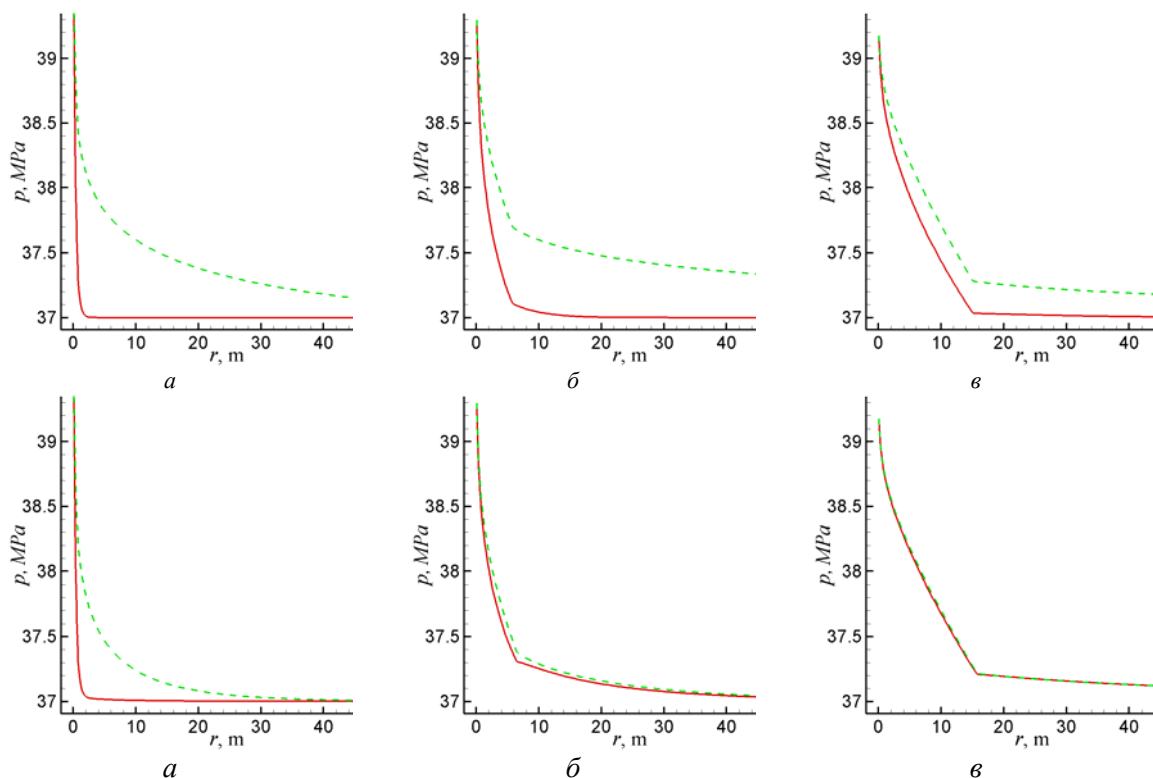


Рис. 4. Радиальные распределения давлений p_{Π} (сплошная линия) и p_{Γ} (штриховая линия) в моменты времени $t = 5 \text{ c}$ (а), $t = 500 \text{ c}$ (б) и $t = 4500 \text{ c}$ (в) при $a_0 = 0$ (сверху) и $a_0 = 10^{-14}$ (снизу)

Постановка обратной задачи определения параметров трещиновато-пористой среды и методы ее решения

Данные экспериментальных замеров. Имеются экспериментальные замеры давления $\tilde{p}_{well}(t)$ в скважине и потерь бурового раствора $\tilde{Q}_{well}^{exp}(t)$ в зависимости от времени. Для уменьшения шума на этих кривых проведено осреднение значений по пяти соседним точкам

$$Q_{well}^{exp}(t_i) = \frac{1}{5} \sum_{k=-2}^2 \tilde{Q}_{well}^{exp}(t_{i+k}), \quad p_{well}(t_i) = \frac{1}{5} \sum_{k=-2}^2 \tilde{p}_{well}(t_{i+k}).$$

Зависимости до и после сглаживания показаны на рис. 5.

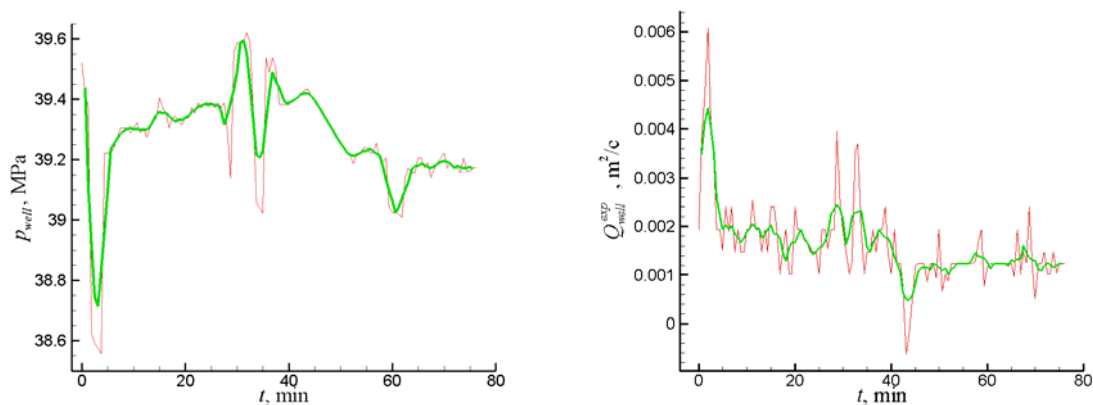


Рис. 5. Временные зависимости давления в скважине (слева) и потерь бурового раствора (справа), полученные из экспериментальных данных: тонкая линия – до сглаживания; толстая – после сглаживания

Зависимость $p_{well}(t)$ используется для задания краевых условий для p_{Π} и p_T

$$p_{\Pi}(R_w, t) = p_{well}(t), p_T(R_w, t) = p_{well}(t)$$

при решении уравнений пьезопроводности в прямой задаче фильтрации. Зависимость $Q_{well}^{exp}(t)$ является эталоном, к которому подгоняется расчетная зависимость потерь $Q_{well}^{comp}(t, x)$ путем подбора набора параметров трещиновато-пористой среды и вязкопластической жидкости

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{16}) = (k_{\Pi}, m_{0\Pi}, \beta_{\Pi}, k_T, m_{0T}, \beta_T, K_p, n_p, \tau_{0p}, \beta_p, K_{nop}, n_{nop}, \tau_{0nop}, \beta_{nop}, a_0, H) \quad (28)$$

в модели фильтрации.

Оптимизационная постановка обратной задачи. Обратная задача определения параметров трещиновато-пористой среды формулируется в виде следующей оптимизационной задачи.

Найти значения параметров \mathbf{x} , обеспечивающие минимум функционалу

$$F(\mathbf{x}) = \left[\int_0^T (Q_{well}^{exp}(t) - Q_{well}^{comp}(t, \mathbf{x}))^2 dt \right]^{1/2} : \quad (29)$$

$$\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x})$$

при фазовых ограничениях

$$X = \{ \mathbf{x} : x'_i \leq x_i \leq x''_i \}.$$

Методы решения оптимизационной задачи. В ряде случаев бывает достаточно подобрать только один параметр среды, так как остальные слабо влияют на величину потерь бурового раствора. Как правило, таким параметром является проницаемость трещиноватой среды k_T . Поэтому в работе в таких случаях использовался метод решения оптимизационной задачи по одному параметру, а именно метод золотого сечения [4]. По сравнению с методами оптимизации по многим параметрам он обладает намного большим быстродействием.

Метод золотого сечения заключается в расчете значений функционала $F(x)$ в нескольких точках на отрезке, выборе его наименьшего значения и сужении отрезка. Выбор точек производится таким образом, чтобы на следующем шаге можно было использовать значения функции в уже посчитанных точках. Метод состоит из следующих шагов.

1. Задаются границы интервала $x_0 = a$, $x_3 = b$ и необходимая точность δ .
2. Задаются точки на отрезке

$$x_1 = x_3 - \frac{x_3 - x_0}{\phi}, x_2 = x_0 + \frac{x_3 - x_0}{\phi}, \text{ где } \phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

3. Рассчитываются значения функционала в серединных точках

$$y_1 = F(x_1), y_2 = F(x_2).$$

4. Из точек x_1, x_2 выбирается та, в которой значение функционала минимальное. На следующий шаг переносится она и ее соседи:

$$\text{в случае } y_1 \geq y_2 \text{ берутся } x_0 = x_1, x_1 = x_2, y_1 = y_2, x_2 = x_0 + \frac{x_3 - x_0}{\phi};$$

$$\text{в случае } y_1 < y_2 \text{ берутся } x_3 = x_2, x_2 = x_1, y_2 = y_1, x_1 = x_3 - \frac{x_3 - x_0}{\phi}.$$

5. Рассчитывается значение функционала в изменившейся точке x_1 или x_2 .
6. Шаги 4–5 повторяются до выполнения условия

$$\frac{|x_2 - x_1|}{\max(|x_1|, |x_2|)} < 10^{-3},$$

что обеспечивает поиск точки, в которой достигается минимум функционала с точностью до 0,1 %.

Можно заметить, что никогда не рассчитываются значения функции в границах интервала a , b . Но в этом нет необходимости, так как считается, что минимум функционала находится внутри отрезка.

Генетический алгоритм решения оптимизационной задачи по нескольким параметрам. В основу генетического алгоритма (ГА) положена теория биологической эволюции Дарвина, согласно которой популяция индивидуумов меняется в течение нескольких поколений путем селекции, рекомбинации и мутации, подчиняясь при этом законам естественного или искусственного отбора относительно предписанного критерия. Применительно к задаче определения параметров трещиновато-пористой среды при вытеснении поровой жидкости буровым раствором индивидуумом будет являться набор параметров \mathbf{x} (28).

По сравнению с методом золотого сечения ГА позволяет эффективно находить решение задачи в случае варьирования нескольких параметров. Подробно об используемой версии алгоритма можно прочитать в монографии [5]. Схема алгоритма приведена на рис. 6 и характеризуется следующими шагами.

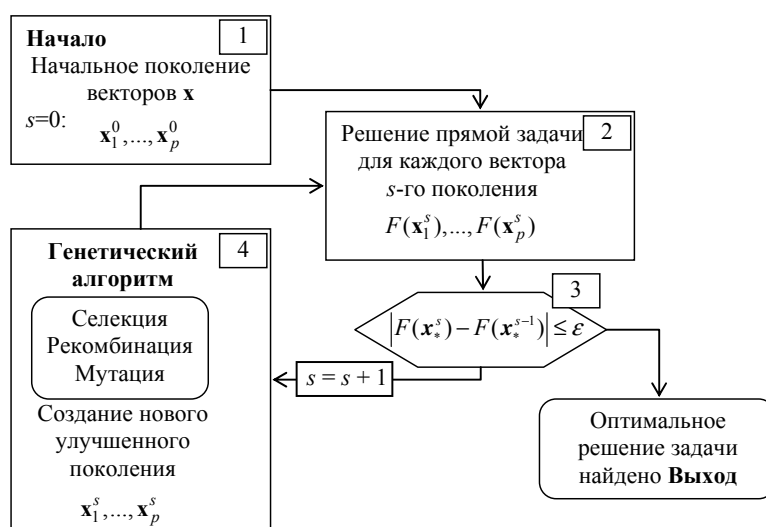


Рис. 6. Схема генетического алгоритма

1. Создание случайным образом начального приближения (поколения), состоящего из p различных конфигураций $\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_k^0, \dots, \mathbf{x}_p^0$ – возможных решений задачи. Причем для каждого индивидуума $\mathbf{x}_k^0 = (x_1, \dots, x_{16})_k^0$ выполняется $x_i \in [x_{L,i}, x_{R,i}]$.

2. Вычисление значения функционала $F(\mathbf{x}_k^s)$ для каждого \mathbf{x}_k^s . Определение лучших найденных решений $\mathbf{x}_{best,1}^s, \dots, \mathbf{x}_{best,p_s,best}^s$.

3. Если достигнута сходимость, то **Выход**, иначе переход на шаг 4.

4. Генерация нового поколения на основе $\mathbf{x}_{best,1}^s, \dots, \mathbf{x}_{best,p_s,best}^s$ посредством операций ГА и переход на шаг 2.

Для построения новой популяции отбираются $[Tr \cdot p]$ лучших индивидуумов предыдущего поколения (этап селекции). Из них p раз случайным образом выбираются два индивидуума-родителя $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{16})$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{16})$, по которым конструируется индивидуум нового поколения $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{16})$, где $w_i = x_i + \alpha_i (y_i - x_i)$, $\alpha_i = rand[-d, 1 + d]$ (этап рекомбинации). Каждый из p индивидуумов нового поколения слегка мутируется: $w_i^{new} = w_i \pm \mu (w_{L,i} - w_{R,i}) \cdot 2^{-16 \cdot rand[0,1]}$ (этап мутации). Здесь Tr , d , μ – параметры селекции, рекомбинации и мутации соответственно. Число поколений, необходимых для сходимости, обозначается N_{gen} . Значения параметров ГА, рассматриваемых в оптимизационных запусках, приведены ниже.

Результаты решения обратной задачи

Подбор параметра k_T . Рассматривалась вариация параметра проницаемости системы трещин k_T . Остальные параметры были зафиксированы на значениях, приведенных в анализе чувствительности уравнений пьезопроводности. На рис. 7 представлена история поиска минимума функционала F (29). Минимум функционала $F = 760,37$ достигается при $k_T = 1,61 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ и соответствует расходу $Q_{well}^{comp}(t)$, приведенному на рис. 8 штриховой линией.

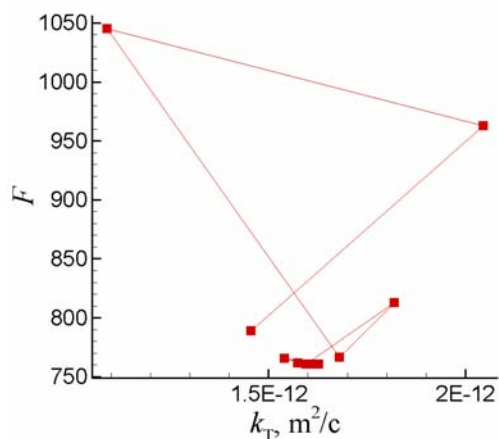


Рис. 7. Поиск минимума F методом золотого сечения

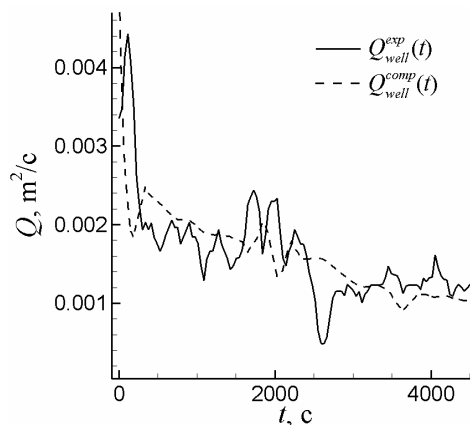


Рис. 8. Сравнение экспериментальной $Q_{well}^{exp}(t)$ и рассчитанной $Q_{well}^{comp}(t)$ при оптимальном значении k_T зависимостей

Подбор параметров k_T , m_{0T} , K_{nop} . Рассматривалась вариация параметров k_T , m_{0T} , K_{nop} в диапазонах:

$$10^{-13} \text{ м}^2 \leq k_T \leq 3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$0.001 \leq m_{0T} \leq 0.3,$$

$$0 \text{ Па} \cdot \text{с}^n \leq K_{nop} \leq 0.0383 \text{ Па} \cdot \text{с}^n.$$

Остальные тринадцать параметров были зафиксированы на значениях, приведенных в анализе чувствительности решения уравнений пьезопроводности.

Размер поколения N_{gen} составлял 200 индивидуумов, параметр селекции $Tr = 0.1$, параметр рекомбинации $d = 0.7$, параметр мутации $\mu = 0.1$.

История сходимости функционала F (29) приведена на рис. 9.

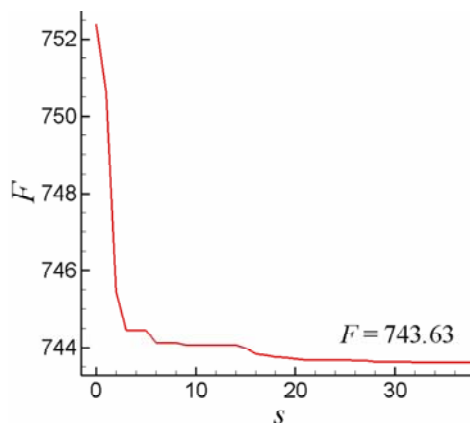


Рис. 9. История сходимости функционала

Достигнутое минимальное значение функционала $F = 743.63$ соответствует параметрам $k_T = 1.084 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, $m_{0T} = 0.0129$, $K_{nop} = 0.00249 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$. Зависимости значений каждого параметра на лучшем индивидууме поколения от номера поколения приведены на рис. 8. Сравнение экспериментальной $Q_{well}^{exp}(t)$ и расчетной $Q_{well}^{comp}(t)$ при оптимальных значениях k_T, m_{0T}, K_{nop} зависимостей представлено на рис. 10. Следует отметить, что при варьировании трех параметров k_T, m_{0T}, K_{nop} удалось достигнуть минимального значения $F = 743.63$, меньшего, чем $F = 760.37$, полученного при варьировании одного параметра k_T , что, однако, слабо сказалось на зависимости величины потерь от времени.

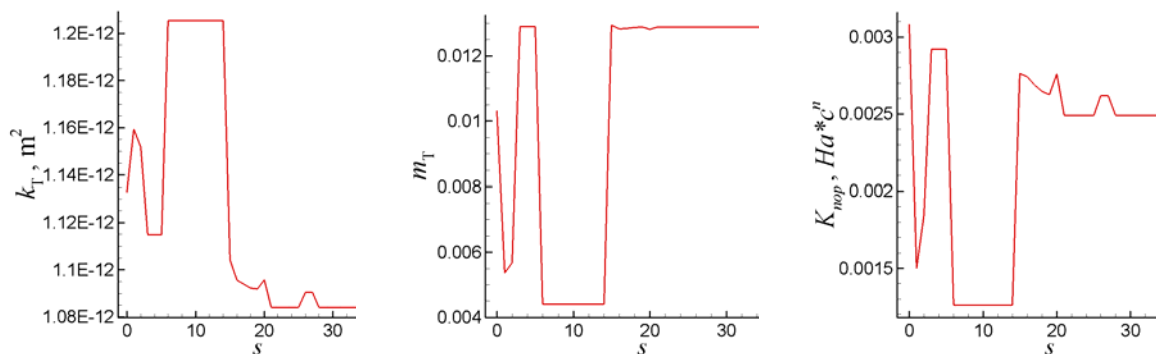


Рис. 10. Значения параметров k_T, m_{0T}, K_{nop} на лучшем индивидууме поколения

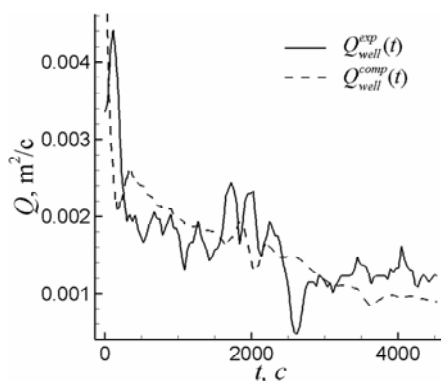


Рис. 11. Сравнение экспериментальной $Q_{well}^{exp}(t)$ и рассчитанной $Q_{well}^{comp}(t)$ при оптимальных значениях k_T, m_{0T}, K_{nop} зависимостей

Подбор параметров $k_T, m_{0п}, a_0, m_{0T}, \tau_0$. Приводятся результаты решения обратной задачи с моделью фильтрации без вытеснения поровой жидкости. В этом случае полагается

$$K_p = K_{nop} = K, n_p = n_{nop} = n, \tau_{0p} = \tau_{0nop} = \tau_0, \beta_p = \beta_{nop} = \beta.$$

Параметры варьировались в интервалах:

$$5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2 \leq k_T \leq 3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$0.01 \leq m_{0T}, m_{0п} \leq 0.3,$$

$$0 \leq a_0 \leq 10^{-12},$$

$$0 \text{ Па} / \text{м} \leq \tau_0 \leq 1 \text{ Па} / \text{м}.$$

Остальные параметры были зафиксированы на значениях:

$$k_{п} = 1 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2, \beta_{п} = 0 \text{ Па}^{-1}, \beta_T = 0 \text{ Па}^{-1};$$

$$K = 3.83 \cdot 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}, n = 0.94, \beta = 4.58 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; H = 10 \text{ м}.$$

Размер поколения N_{gen} составлял 300 индивидуумов, значения параметров ГА совпадают с приведенными в параметрах k_T , m_{0T} , K_{nop} . История сходимости функционала приведена на рис. 12. Оптимальное значение функционала $F = 764.28$ соответствует параметрам $k_{fis} = 1.760 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, $m_{0r} = 0.3$, $a_0 = 0.787 \cdot 10^{-13}$, $m_{0fis} = 0.01$, $\tau_0 = 0.185$. Сравнение экспериментальной $Q_{well}^{exp}(t)$ и расчетной $Q_{well}^{comp}(t)$ при оптимальных значениях k_m , $m_{0п}$, a_0 , m_{0T} , τ_0 зависимостей приведено на рис. 13.

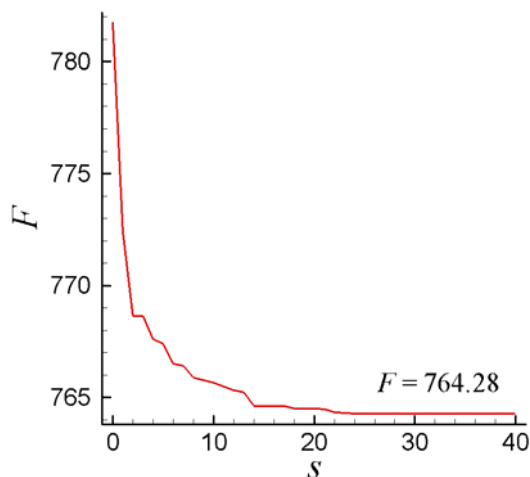


Рис. 12. История сходимости функционала

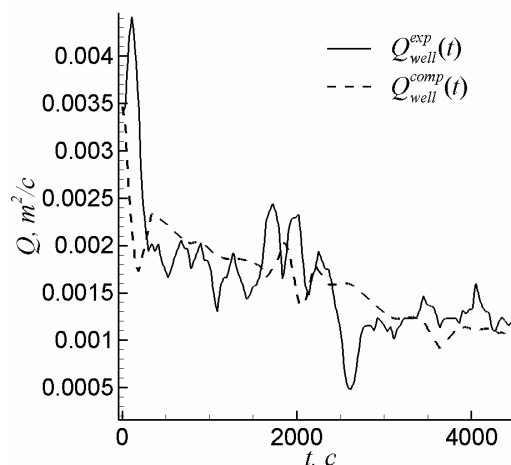


Рис. 13. Сравнение экспериментальной $Q_{well}^{exp}(t)$ и рассчитанной $Q_{well}^{comp}(t)$ при оптимальных значениях k_T , $m_{0п}$, a_0 , m_{0T} , τ_0 зависимостей

Для модели без вытеснения жидкости были также рассмотрены задачи с варьированием других групп параметров, решения которых приведены в табл. 2. Выделенные жирным шрифтом числа обозначают вариацию этих параметров в расчете.

Таблица 2

Оптимальные значения параметров и функционала

№	$k_T, \text{ м}^2$	$m_{0п}$	a_0	m_{0T}	$\tau_0, \text{ Па/м}$	F
1	1,106 · 10 ⁻¹²	0,3	0,200 · 10 ⁻¹²	0,01	0	851,71
2	1,106 · 10 ⁻¹²	0,3	0,105 · 10 ⁻¹²	0,01	0	850,67
3	1,013 · 10 ⁻¹²	0,3	0,175 · 10 ⁻¹²	0,3	0	845,21
4	1,812 · 10 ⁻¹²	0,3	0,737 · 10 ⁻¹³	0,01	0,2	764,80
5	1,580 · 10 ⁻¹²	0,3	0,200 · 10 ⁻¹²	0,256	0,047	766,98
6	1,760 · 10 ⁻¹²	0,3	0,787 · 10 ⁻¹³	0,01	0,185	764,28

Из табл. 2 видно, что при использовании модели без вытеснения не удастся снизить значение функционала до значения, полученного по модели с вытеснением (функционалы принимают значения 764,28 и 743,63 соответственно). Более того, даже оптимизация по одному параметру по модели с вытеснением дает значения 760,37 меньше, чем оптимизация по многим параметрам с моделью с единым описанием. Это позволяет сделать вывод о недостаточности модели с единым описанием бурового раствора и поровой жидкости для адекватного определения параметров среды. Судя по функционалам, модель с вытеснением поровой жидкости позволяет найти лучшее приближение к экспериментальному расходу и описать процесс фильтрации корректнее.

Заключение

В работе на основе уравнений неразрывности получены уравнения радиальной фильтрации вязкопластической жидкости в трещиновато-пористую среду, которые ранее в литературе не рассматривались. Построенная модель радиальной фильтрации в трещиновато-пористую среду также включает описание вытеснения поровой жидкости буровым раствором.

Для решения прямой задачи разработан эффективный численный алгоритм на основе неявной консервативной конечно-разностной схемы. При создании схемы учитывались требования на устойчивость и быстроту счета. При этом возникающие при построении схемы трудности были связаны со скачком значений коэффициентов сжимаемости, степенного показателя и предела пластической деформации на границе жидкостей, описанием ее движения, а также с необходимостью линеаризации уравнений.

Сформулирована обратная задача в виде оптимизационной и предложены надежные методы ее решения. Метод золотого сечения используется как наиболее быстрый, когда требуется подобрать лишь один параметр. В случае подбора нескольких параметров используется генетический алгоритм. Представлены результаты решения обратной задачи для различных групп варьируемых параметров. Исходя из оптимизационных расчетов, можно сказать, что модель с вытеснением поровой жидкости позволяет описать процесс фильтрации корректнее, чем модель без вытеснения поровой жидкости за счет нахождения лучшего приближения к зависимости измерений расхода от времени, полученной в результате эксперимента.

Список литературы

1. Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
3. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика: Учеб. пособие для вузов. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. 544 с.
4. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение: Пер. с англ. М.: Мир, 1998. 575 с.
5. Черный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006. 202 с.

Материал поступил в редколлегию 04.12.2012

A. S. Astrakova, V. N. Lapin, S. G. Cherny, O. P. Alekseenko

MODEL OF VISCO-PLASTIC LIQUID FILTRATION IN PROBLEM OF FISSURED AND POROUS MEDIUM PARAMETERS DETERMINATION

In paper model of filtration of drilling agent into fissured and porous medium with extrusion of interstitial water was developed. To solve this problem original numerical algorithm based on implicit finite-difference scheme is proposed. Inverse problem of searching of fissured and porous medium's parameters is defined as optimization problem. Two methods of problem solution are implemented – method of golden section and method based on genetic algorithm. Results of inverse problem solving for different groups of vary parameters are presented.

Keywords: model of radial filtration, visco-plastic liquid, fissured and porous medium, extrusion, inverse problem.