МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВО "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет"

Факультет естественных наук

УТВЕРЖДАЮ

Декан ФЕН НГУ, профессор

_______________ Резников В.А.

«29» августа 2014 г.

Математический анализ для химиков

Модульная программа лекционного курса, семинаров, практикума и самостоятельной работы студентов

Курсы 1, 2, I–III семестры

Учебно-методический комплекс

Новосибирск 2014

Учебно-методический комплекс «Математический анализ» предназначен для студентов I-II курса факультета естественных наук, специальность «химия». В состав пособия включены: программы курсов лекций и семинаров, программа коллоквиумов, методические указания к выполнению заданий. Кроме того, приведен набор задач для самостоятельной работы студентов с использованием учебной литературы и персонального компьютера и даны примеры вариантов контрольных работ, коллоквиумов и задач, предлагавшихся на экзаменах за прошлые годы.

Составители

проф. Чупахин А.П., доц. Нещадим М.В.,
доц. Черевко А.А., ст. преп. Данилова К.Н.

Содержание

Аннотация рабочей программы	4
1. Цели освоения дисциплины	5
2. Место дисциплины в структуре ООП	7
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины	8
4. Структура и содержание дисциплины	9
Блочная программа курса	9
Рабочий план (по неделям семестров)	11
Теория пределов и функций	14
Дифференциальное исчисление	16
Интегральное исчисление	18
Числовые ряды	19
Функции многих переменных: дифференциальное исчисление	20
Интегралы по многообразиям	21
Функциональные ряды	24
Теория дифференциальных уравнений	25
Программа практических занятий	28
Основные понятия и определения	33
Основные утверждения	36
5. Образовательные технологии	42
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.	44
Рекомендованная литература к теоретическому курсу	44
Перечень коллоквиумов	45
Пределы, производная функции	45
Дифференциальное исчисление функции многих переменных	47
Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка.	48
Учебно-методическое обеспечение дисциплины	49
Образцы билетов для подготовки к экзамену	49
Примеры контрольных работ	61
Примеры решения задач	68
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	96
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины	97

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Математический анализ» входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла ООП по направлению подготовки «020100 ХИМИЯ», квалификация (степень) «бакалавр». Дисциплина реализуется на Факультете естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет" (НГУ) кафедрой Высшей математики Механико-математического факультета.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных со свойствами функций вещественных переменных, дифференциальным, интегральным исчислением функций одной и многих переменных, элементами дифференциальных уравнений и их приложениями в рамках физики, химии. Они имеют области экспериментального и технического применения, в том числе и в смежных областях знания и приборостроения и иного промышленного производства (в химии, медицине, биологии и т. д.).

Дисциплина нацелена на формирование у выпускника общекультурных компетенций: ОК-6, ОК-13, ОК-14.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, семинарские занятия, контрольные работы, коллоквиумы, домашние задания, консультации, сдача экзаменов, самостоятельная работа студента.

Общая трудоемкость дисциплины «Математический анализ» (за три семестра) составляет 16,5 зачетных единиц. Всего 594 академических часа. Программой дисциплины «Математический анализ» предусмотрены 166 часов лекций, 166 часов семинаров, 12 часов на прием зачетов и экзаменов, а также 250 часов самостоятельной работы студентов.

По семестрам:
I: 68 л + 68 сем + 2 зач + 2 экз + 94 сам. раб. = 234 часа,
II: 64 л + 64 сем + 2 зач + 2 экз + 102 сам. раб. = 234 часа,
III: 34 л + 34 сем + 2 зач + 2 экз + 54 сам. раб. = 126 часов.

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина “Математический анализ” предназначена для изучения функций и отображений множеств произвольной природы, в том числе числовых, их свойств и приложений в математике, физике, химии. Она включает в себя элементы теории действительных чисел, теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и многих переменных, теорию рядов. Частью курса является введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и элементы теории дифференциальных уравнений с частными производными.
Основной целью освоения дисциплины студентами является как овладение конкретными понятиями и алгоритмами математического анализа для их применения в математических моделях физики, химии, так и воспитание в студентах элементов математической культуры и мышления, необходимых в любой области знания. К этим элементам относится умение логически мыслить, строить доказательную цепочку рассуждений, умение выделять в проблеме главное, имеющее принципиальное значение. Кроме того, целью курса математического анализа является сохранение преемственности со школьным курсом математики, включающее повторение на более высоком качественном и доказательном уровне принципиально важных вопросов и понятий математики, ликвидацию имеющихся пробелов.

Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:
— изучение основных понятий теории множеств, теории действительных чисел;
— изучение теоретических положений и овладение практическими навыками теории пределов, дифференциальным и интегральным исчисление функций одной и многих переменных, теории рядов;
— изучение элементов теории и овладение навыками решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
— применение полученных знаний и навыков при составлении и исследовании простейших математических моделей химических процессов.

Требования к уровню освоения содержания курса дисциплины. По окончании изучения дисциплины студент должен

— иметь представление о

1) математическом анализе как науке изучающей функции и отображения множеств и его значении в математическом моделировании естественнонаучных явлений;

2) простейших методах построения математических моделей химических явлений;

— ***знать***

основные понятия теории множеств и действительных чисел, теории пределов, теории функций одного и многих вещественных переменных, дифференциального и интегрального исчислений функций одного и многих переменных, теории рядов, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными;

— ***уметь***

1. применять основные понятия в математических рассуждениях и математическом моделировании;
2. вычислять пределы функций;
3. вычислять производные функций как одной, так и многих переменных;
4. вычислять неопределенные интегралы, пользуясь методами замены переменной, интегрирования по частям;
5. вычислять неопределенные интегралы для специальных классов функций (рациональные, рациональные от тригонометрических аргументов простейшие иррациональности, подстановки Эйлера);
6. вычислять определенные интегралы, исследовать на сходимость несобственные интегралы;
7. исследовать на сходимость ряды (числовые, степенные, функциональные), разлагать функции в степенные ряды и ряды Фурье;
8. исследовать функции методами дифференциального исчисления, вычислять особые точки и экстремумы;
9. вычислять интегралы по многообразиям (двойные, тройные, криволинейные, поверхностные), применять формулы, связывающие интеграл по области с интегралом по границе (формулы Грина, Стокса, Гаусса — Остроградского):
10. интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка: с разделенными переменными, однородные, в полных дифференциалах, линейные и сводимые к ним;
11. интегрировать обыкновенные линейные дифференциальные уравнения старшего порядка с постоянными коэффициентами, в том числе неоднородные и системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами;
12. исследовать поведение решения вблизи особых точек динамической системы второго порядка, устойчивость решения по линейному приближению;

13. исследовать простейшие математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями: модель гармонического осциллятора, модель химической кинетики;
14. решать задачу Коши и простейшие начально-краевые задачи, в частности задачу Штурма — Лиувилля;
15. интегрировать линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, решать задачу Коши методом характеристик;
16. находить решение начально-краевой задачи для уравнений с частными производными методами Фурье;
17. иметь представление о методах приближенных вычислений и компьютерной реализации основных понятий математического анализа.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Математический анализ» является частью математического и естественнонаучного цикла ООП, базовая часть (общепрофессиональные дисциплины), по направлению подготовки «020100 ХИМИЯ», уровень подготовки – «бакалавр».

Дисциплина «Математический анализ» опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- высшая алгебра;
- основы компьютерной грамотности.

Результаты освоения дисциплины «Математический анализ» используются в следующих дисциплинах данной ООП:

- основы компьютерной грамотности;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- физика;
- химическая термодинамика;
- строение вещества;
- химия твердого тела;
- компьютерное моделирование процессов и явлений физической химии (ТВС);
- химическая кинетика;
- теоретическая электрохимия и инструментальные методы анализа;
- вычислительные методы в органической химии;
- математическое моделирование экосистем;
- математическое моделирование переноса и трансформации веществ.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Математический анализ»:

а) общекультурные компетенции (ОК):

- *использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-6);*
- *настойчив в достижении цели с учетом моральных и правовых норм и служебных обязанностей (ОК-13);*
- *умеет работать в коллективе, готов к сотрудничеству с коллегами, способен к разрешению конфликтов и к социальной адаптации (ОК-14);*

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- иметь представление о фундаментальных основах математического анализа;
- знать алгоритмы решения базовых задач основанных на применении дифференциального и интегрального исчислений, теории рядов, теории дифференциальных уравнений;
- уметь применять полученные знания при моделировании процессов физики, химии;

4. Структура и содержание дисциплины

Программой дисциплины «Математический анализ» предусмотрены 166 часов лекций, 166 часов семинаров и 262 часа самостоятельной работы, т.е. всего 594 часа, 16,5 зачетных единиц.

Блочная программа курса

№ п/п	Наименование разделов и тем	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в час.)			Формы контр. и труд. (в час.)
		Лекция	Семинары	Самост. работа	Зачет, экзамен
	1 курс, I семестр				
1	Теория последовательностей	4	4	2	
2	Теория пределов функций	6	6	3	
3	Непрерывные функции	6	6	3	
4	Контрольная работа	-	-	5	
5	Производная, вычисление и свойства	6	6	3	
6	Теоремы дифференциального исчисления. Формула Тейлора	10	9	5	
7	Экстремумы функций. Исследование функций	6	6	3	
8	Контрольная работа	-	-	5	
9	Неопределенные интегралы. Способы вычисления	10	10	5	
10	Определенный интеграл Римана и его свойства. Приложения	12	12	6	
11	Несобственные интегралы	4	3	2	
12	Числовые ряды	4	6	3	
13	Контрольная работа	-	-	5	
14	Коллоквиум	-	-	5	
15	Зачет	-	-	5	2
16	Экзамен			34	2
	Всего за I семестр 234 час	**68**	**68**	**94**	**4**

1 курс, II семестр

1	Евклидово пространство. Функции многих переменных	3	3	2	
2	Частные производные. Дифференциалы	3	3	2	
3	Формула Тейлора	3	3	2	
4	Теорема о неявной функции	4	4	3	
5	Экстремумы функций многих переменных	3	3	2	
6	Контрольная работа	-	-	5	
7	Двойной интеграл Римана, приложения	9	9	6	
8	Тройной интеграл Римана, приложения	6	6	3	
9	Криволинейные интегралы	9	9	6	
10	Поверхностные интегралы	9	9	6	
11	Элементы векторного анализа	4	4	3	
12	Контрольная работа	-	-	5	
13	Функциональные ряды	4	4	3	
14	Степенные ряды, ряд Тейлора	3	3	2	
15	Тригонометрические ряды Фурье	4	4	3	
16	Контрольная работа	-	-	5	
17	Коллоквиум	-	-	5	
18	Зачет	-	-	5	2
19	Экзамен			34	2
	Всего за II семестр 234 час	**64**	**64**	**102**	**4**
	2 курс, I семестр				
1	Уравнения первого порядка. Задачи Коши, интегрируемые уравнения.	6	6	2	
2	Линейные уравнения n-го порядка	8	6	2	
3	Системы линейных уравнений	8	8	3	
4	Контрольная работа	-	-	4	
5	Устойчивость	4	4	2	
6	Уравнения с частными производными первого порядка	4	4	2	
7	Уравнения математической физики второго порядка: диффузии, Шредингера, волновое, Лапласа	4	6	2	
8	Контрольная работа	-	-	4	
9	Коллоквиум	-	-	4	
10	Зачет			4	2
11	Экзамен	-	-	25	2
	Всего за III семестр 126 час	**34**	**34**	**54**	**4**
	Итого за три семестра 594 час	**166**	**166**	**250**	**12**

Рабочий план (по неделям семестров)
Осенний семестр

Неделя	Темы занятий
СЕНТЯБРЬ 1-я неделя	**Семинар 1.** Метод математической индукции. **Семинар 2.** Понятие функции.
2-я неделя	**Семинар 3.** Предел последовательности. **Семинар 4.** Арифметические действия с пределами.
3-я неделя	**Семинар 5.** Второй замечательный предел. **Семинар 6.** Критерий Коши.
4-я неделя	**Семинар 7.** Контрольная. **Семинар 8.** Предел функции.
ОКТЯБРЬ 1-я неделя	**Семинар 9.** Предел функции. Арифметические действия **Семинар 10.** Замечательные пределы.
2-я неделя	**Семинар 11.** Предел непрерывной функции. **Семинар 12.** Предел непрерывной функции.
3-я неделя	**Семинар 13.** Равномерная непрерывность. **Семинар 14.** Производная.
4-я неделя	**Семинар 15.** Дифференциал, старшие производные. **Семинар 16.** Правило Лопиталя.
НОЯБРЬ 1-я неделя	**Семинар 17.** Исследование на экстремум. **Семинар 18.** Формула Тейлора.
2-я неделя	**Семинар 19.** Построение графиков функций. **Семинар 20.** Контрольная.
3-я неделя	**Семинар 21.** Неопределенный интеграл. **Семинар 22.** Интегрирование рациональных функций.
4-я неделя	**Семинар 23.** Интегрирование иррациональных функций. **Семинар 24.** Интегрирование тригонометрических функций.
ДЕКАБРЬ 1-я неделя	**Семинар 25.** Интегрирование по частям. **Семинар 26.** Определенный интеграл.
2-я неделя	**Семинар 27.** Геометрические приложения. **Семинар 28.** Контрольная.
3-я неделя	**Семинар 29.** Несобственный интеграл. **Семинар 30.** Несобственный интеграл. Признаки сходимости.
4-я неделя	**Семинар 31.** Знакопостоянные ряды. **Семинар 32.** Знакопеременные ряды.
5-я неделя	**Семинар 33.** Критерий Коши. **Семинар 34.** Коллоквиум.

Весенний семестр

Неделя	Темы занятий
ФЕВРАЛЬ 1 неделя	**Семинар 1.** Функции многих переменных. **Семинар 2.** Предел функции.
2-я неделя	**Семинар 3.** Частные производные. **Семинар 4.** Дифференциал.
3-я неделя	**Семинар 5.** Производная сложной функции. **Семинар 6.** Старшие производные.
МАРТ 1-я неделя	**Семинар 7.** Дифференциалы старших порядков. **Семинар 8.** Формула Тейлора.
2-я неделя	**Семинар 9.** Замена переменных в дифференциальных выражениях. **Семинар 10.** Контрольная.
3-я неделя	**Семинар 11.** Локальный экстремум. **Семинар 12.** Условный экстремум.
4-я неделя	**Семинар 13.** Наибольшее и наименьшее значения. **Семинар 14.** Касательная плоскость. Геометрические приложения.
АПРЕЛЬ 1-я неделя	**Семинар 15.** Двойной интеграл. **Семинар 16.** Площади плоских фигур.
2-я неделя	**Семинар 17.** Объемы. **Семинар 18.** Площадь поверхности.
3-я неделя	**Семинар 19.** Центр тяжести. Момент инерции. **Семинар 20.** Контрольная.
4-я неделя	**Семинар 21.** Криволинейный интеграл второго рода. **Семинар 22.** Формула Грина.
МАЙ 1-я неделя	**Семинар 23.** Уравнения в полных дифференциалах. **Семинар 24.** Поверхностный интеграл первого рода.
2-я неделя	**Семинар 25.** Поверхностный интеграл второго рода. **Семинар 26.** Формулы Гаусса-Остроградского, Стокса.
3-я неделя	**Семинар 27.** Интегралы, зависящие от параметра. **Семинар 28.** Несобственные интегралы.
4-я неделя	**Семинар 29.** Функциональные ряды. **Семинар 30.** Степенные ряды.
5-я неделя	**Семинар 31.** Ряды Фурье. **Семинар 32.** Коллоквиум.

Осенний семестр*

Неделя	Темы занятий
СЕНТЯБРЬ 1-я неделя	**Семинар 1.** Изоклины. Составление дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными.
2-я неделя	**Семинар 2.** Физические задачи на составление дифференциальных уравнений. Однородные уравнения.
3-я неделя	**Семинар 3.** Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Риккати и Бернулли.
4-я неделя	**Семинар 4.** Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
ОКТЯБРЬ 1-я неделя	**Семинар 5.** Уравнения, не разрешенные относительно производной. Контрольная работа.
2-я неделя	**Семинар 6.** Существование и единственность решения.
3-я неделя	**Семинар 7.** Уравнения, допускающие понижение порядка.
4-я неделя	**Семинар 8.** Линейные уравнения.
НОЯБРЬ 1-я неделя	**Семинар 9.** Неоднородные линейные уравнения. Метод вариации постоянной.
2-я неделя	**Семинар 10.** Линейная зависимость. Уравнение Эйлера.
3-я неделя	**Семинар 11.** Системы линейных уравнений.
4-я неделя	**Семинар 12.** Системы неоднородных линейных уравнений. Устойчивость.
ДЕКАБРЬ 1-я неделя	**Семинар 13.** Устойчивость. Функция Ляпунова. Контрольная работа.
2-я неделя	**Семинар 14.** Уравнения в частных производных первого порядка.
3-я неделя	**Семинар 15.** Особые точки. Классификация уравнений второго порядка.
4-я неделя	**Семинар 16.** Задача Коши для волнового уравнения. Метод Фурье.
5-я неделя	**Семинар 17.** Коллоквиум.

*Рабочий план и описание практических занятий приводятся на с.28-32.

Программа курса лекций

Краткое содержание лекций

1 курс, I семестр

<u>Теория пределов и функций</u>

Лекция 1

Введение. Множества, операции над множествами. Кванторы существования и всеобщности. Множество вещественных чисел, его подмножества. Мощность множества. Счетные и несчетные множества. Рациональные, иррациональные, трансцендентные числа. Ограниченные и неограниченные множества. Точные верхние и нижние грани. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани ограниченного сверху (снизу) числового множества.

Лекция 2

Метод математической индукции. Бином Ньютона. Геометрическая прогрессия. Неравенство Бернулли. Функции одной вещественной переменной. Область определения и область значения. График функции. Элементарные функции и их графики. Преобразование графиков.

Лекция 3

Монотонные функции, обратная функция, суперпозиция функций.
Числовая последовательность. Способы задания последовательностей. Предел последовательности. Расходящиеся последовательности. Эквивалентные формулировки предела последовательности. Теорема о единственности предела.

Лекция 4

Свойства сходящихся последовательностей. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема о наследовании знака предела. Предельный переход в равенстве и неравенстве. Лемма о двух милиционерах. Примеры.

Лекция 5

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Простейшие теоремы о пределах (предел суммы, разности, произведения). Раскрытие неопределенных выражений. Монотонные последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число e.

Лекция 6

Теорема о вложенных отрезках. Полнота множества вещественных чисел. Частичные последовательности и их пределы. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Понятие верхнего и нижнего пределов.

Лекция 7

Фундаментальная последовательность. Критерий Коши сходимости последовательности. Критерий расходимости Коши. Предел функции. Эквивалентные определения предела функции. Предел при $x \to \infty$, бесконечные и односторонние пределы. Предел функции по множеству.

Лекция 8

Вычисление первого и второго замечательных пределов. Арифметические действия с пределами: предел суммы, произведения, частного. Теоремы об ограниченности, о сохранении неравенства. Лемма о двух милиционерах. Примеры вычислений пределов функций.

Лекция 9

Предел монотонной, ограниченной функции. Критерий Коши существования предела функции в точке. Критерий Коши несуществования предела функции в точке.

Лекция 10

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их классификация. О – символика. Понятие непрерывности функции. Эквивалентные определения непрерывности. Точки сгущения. Односторонняя непрерывность.

Лекция 11

Разрывы функции в точке и их классификация. Устранимые и неустранимые особенности. Арифметические действия над непрерывными функциями.

Лекция 12

Непрерывность сложной функции. Точки разрыва монотонной функции. Критерий непрерывности монотонной функции.

Лекция 13

Непрерывность элементарных функций. Свойства непрерывных функций: Теоремы Больцано-Коши (об обращении в нуль, о промежуточном значении), теоремы Вейерштрасса об ограниченности и о достижимости точных верхней и нижней граней.

Лекция 14

Теорема о существовании и непрерывности обратной функции. Понятие равномерной непрерывности. Примеры. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Непрерывные функции на компакте.

Дифференциальное исчисление

Лекция 15

Приращение функции. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Связь между существованием производной и непрерывностью. Уравнения касательной и нормали к графику функции.

Лекция 16

Односторонние, бесконечные производные. Производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций. Производные элементарных функций.

Лекция 17

Логарифмическая производная. Дифференцируемость функции, ее дифференциал. Геометрический смысл дифференциала. Связь между дифференцируемостью и существованием производной.

Лекция 18

Свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Производная функции, заданной параметрически.

Лекция 19

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Нарушение инвариантности формы для высших дифференциалов. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

Лекция 20

Следствия из теоремы Лагранжа. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора. Различные формы остаточного члена (Пеано, Шлемилха-Роша, Лагранжа, Коши).

Лекция 21

Условие монотонности функции. Стационарные точки. Максимумы и минимумы. Наибольшее и наименьшее значения. Необходимое условие экстремума.

Лекция 22

Достаточные условия экстремума в разных формах (через производные первого, второго и старшего порядков). Выпуклость функции. Достаточное условие, точка перегиба, необходимое и достаточное условие существования точки перегиба. Геометрическая характеризация точек перегиба. Неравенства для выпуклых функций.

Лекция 23

Асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные). Исследование функции с помощью производных, построение графиков функций. Порядок полного исследования функции и построения её графика. Задача интерполирования. Формулы Лагранжа, Ньютона.

<u>Интегральное исчисление</u>

Лекция 24

Понятие первообразной, неопределенные интегралы. Правила интегрирования. Замена переменной, интегрирование по частям. Таблицы неопределенных интегралов.

Лекция 25

Интегрирование рациональных функций. Рекуррентные формулы. Циклические интегралы. Интегрирование рациональных выражений от тригонометрических функций. Интегрирование выражений содержащих радикалы.

Лекция 26

Подстановки Эйлера. Теорема Чебышева. Примеры неинтегрируемых функций. Площадь подграфика функции. Определенный интеграл Римана. Разбиения отрезка (отмеченное и неотмеченное). Понятие предела по разбиению. Ограниченность интегрируемой функции на отрезке.

Лекция 27

Верхние и нижние суммы Дарбу. Критерий существования определенного интеграла. Пример неинтегрируемой функции: Функция Дирихле. Интегрируемость непрерывных и монотонных ограниченных функций.

Лекция 28

Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Дифференцируемость интеграла по переменному верхнему пределу.

Лекция 29

Связь между определенным интегралом и первообразной. Формула Ньютона — Лейбница. Вычисление определенных интегралов: замена переменной, интегрирование по частям. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Лекция 30

Вычисление площади плоской фигуры. Мера множества. Приложения определенных интегралов: вычисление длины дуги, работы силы, координат центра тяжести, моментов инерции. Неравенства содержащие интеграл: неравенства Гельдера, Минковского.

Лекция 31

Понятие несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимости. Интегралы по неограниченному промежутку. Признаки сходимости. Интегралы от неограниченных функций, признаки сходимости несобственных интегралов. Интеграл в смысле главного значения Коши.

Числовые ряды

Лекция 32

Числовые ряды. Частичная сумма ряда. Сумма ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Ряды с неотрицательными членами. Геометрическая прогрессия. Теоремы сравнения.

Лекция 33

Гармонический ряд. Признаки сходимости Коши, Даламбера. Интегральный признак сходимости.

Лекция 34

Абсолютная и условная сходимость. Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница. Признаки Абеля, Дирихле. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Двойные, повторные ряды. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

1 курс, II семестр

<u>Функции многих переменных: дифференциальное исчисление</u>

Лекция 1

Линейное и метрическое пространство. Сходимость последовательности точек. Последовательность Коши. Открытые, замкнутые множества. Граница. Ограниченные, неограниченные множества. Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$: точка, расстояние между точками, окрестность. Отрезок, связное множество, область.

Лекция 2

Функции многих переменных. Предел функции и непрерывность.Эквивалентные формулировки. Предел по направлению. Примеры.

Непрерывные отображения общих метрических пространств.Сжимающее отображение метрических пространств. Существование неподвижных точек. Компакт.

Лекция 3

Алгебраические свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Свойства непрерывных функций на компакте. Приращение функции. Частные производные. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная сложной функции.

Лекция 4

Достаточные условия дифференцируемости функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Производная функции по направлению. Градиент функции. Геометрические приложения (максимальное и минимальное значение производной по направлению).

Лекция 5

Производные, дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных второго порядка. Неинвариантность старших дифференциалов. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

Лекция 6

Локальный экстремум функции многих переменных. Стационарные точки. Необходимое условие экстремума. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерии знакоопределенности. Достаточное условие экстремума.

Лекция 7

Неявные функции. Теорема о неявной функции. Система неявных функций. Теорема о системе неявных функций. Теорема об обратном отображении.

Лекция 8

Теорема об обратном отображении. Функциональная зависимость системы функций. Матрица Якоби. Якобиан, его геометрический смысл. Понятие многообразия.

Лекция 9

Задача нахождения наибольшего и наименьшего значения функции. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.

Лекция 10

Касательная к пространственной кривой, касательная плоскость к поверхности. Простейшие понятия дифференциальной геометрии (параметризация поверхности, подвижный репер, нормаль, кривизна).

Интегралы по многообразиям

Лекция 11

Задача нахождения площади плоской области. Двойной интеграл Римана. Суммы Дарбу, верхние и нижние суммы Дарбу. Предел по разбиению. Критерий интегрируемости функции. Ограниченность интегрируемой функции. Интегрируемость непрерывной функции.

Лекция 12

Основные свойства двойного интеграла (линейность, аддитивность, интегрирование неравенств, теорема о среднем). Повторный интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному. Изменение порядка интегрирования.

Лекция 13

Криволинейные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Элемент площади в криволинейных координатах. Полярная система координат. Геометрический смысл якобиана отображения плоскости. Формула преобразования двойного интеграла при замене переменных.

Лекция 14

Приложения двойных интегралов: вычисление площадей плоских фигур, объемов тел, координат центра тяжести, моментов инерции. Примеры физических задач связанных с вычислением двойных интегралов.

Лекция 15

Тройной интеграл. Свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла сведением его к повторному. Криволинейные координаты в пространстве. Цилиндрическая и сферическая системы координат. Элемент объема в криволинейных координатах. Замена переменных в тройном интеграле.

Лекция 16

Приложения тройных интегралов: вычисление объемов, массы тел, координат центра тяжести, моментов инерции. Примеры физических задач связанных с вычислением тройных интегралов.

Лекция 17

Криволинейные интегралы первого и второго рода. Их свойства, связь между собой. Сведение к определенному интегралу.

Лекция 18

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой. Формула Грина. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл второго рода.

Лекция 19

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования, связь с вопросом о полном дифференциале. Связь с дифференциальными уравнениями.

Лекция 20

Приложения криволинейных интегралов: длины кривых, вычисление работы силы. Поверхностные интегралы первого рода, их свойства. Площадь поверхности и ее вычисление.

Лекция 21

Поверхностные интегралы второго рода, их свойства, сведение к двойному интегралу. Двусторонние (ориентируемые) поверхности. Пример неориентируемой поверхности: Лист Мебиуса.

Лекция 22

Связь поверхностных интегралов первого и второго рода друг с другом. Формулы Гаусса — Остроградского, Стокса. Выражение объёма тела через поверхностный интеграл.

Лекция 23

Элементы векторного анализа: дивергенция, ротор, поток, циркуляция вектора. Векторные поля. Потенциальное, соленоидальное векторные поля, потенциал. Интегральные формулы в векторной формулировке. Понятие ориентированного многообразия.

Лекция 24

Интегральная формула Грина. Гармонические функции. Интегралы, зависящие от параметра. Дифференцирование по параметру под знаком интеграла. Приложения.

Лекция 25

Несобственные кратные интегралы. Основные свойства. Понятие мажоранты. Признак сходимости. Примеры.

<u>Функциональные ряды</u>

Лекция 26

Функциональные последовательности и ряды. Условная и абсолютная сходимости числовых рядов. Равномерная сходимость. Примеры.

Лекция 27

Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов.

Лекция 28

Степенные ряды. Радиус сходимости. Теорема Абеля. Формулы для вычисления радиуса сходимости.

Лекция 29

Свойства степенных рядов. Аналитические функции. Произведение степенных рядов.

Лекция 30

Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Интеграл Пуассона. Логарифмический синус. Интеграл Френеля.

Лекция 31

Тригонометрические ряды Фурье. Скалярное произведение на пространстве функций. Ортогональные системы функций (классические примеры). Коэффициенты Фурье.

Лекция 32

Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодических функций. Признак Дирихле. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

2 курс, I семестр

Дифференциальные уравнения

Лекция 1

Введение. Общее и частное решение ДУ. Интеграл ДУ. Геометрическая интерпретация ДУ, поле направлений. Изоклины и интегральные кривые. Уравнения с разделяющимися переменными.

Лекция 2

Однородные ДУ. Линейное ДУ. Уравнение Бернулли. Уравнение Рикатти. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Лекция 3

Уравнения не разрешенные относительно производной. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Простейшие случаи понижения порядка ДУ.

Лекция 4

Задача Коши. Теорема существования и единственности решения ДУ (теорема Пикара).

Лекция 5

Теоремы существования и единственности для систем ДУ, для ДУ высоких порядков, для ДУ не разрешенных относительно производной.

Лекция 6

Теорема о продолжении решения. Теорема о покидании компакта. Теорема о непрерывной зависимости от параметров. Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных. Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши.

Лекция 7

Система двух автономных уравнений первого порядка. Сведение к одному не автономному уравнению и наоборот. Геометрическая интерпретация. Фазовая плоскость. Векторное поле на плоскости. Особые точки. Двумерные линейные системы.

Линейное уравнение n-ого порядка. Однородное и неоднородное. Линейно независимые системы функций. Определитель Вронского и его свойства.

Лекция 8

Фундаментальная система решений однородного линейного уравнения n-ого порядка. Существование ФСР. Нахождение ДУ по ФСР. Формула Остроградского-Лиувилля. Понижение порядка ДУ с помощью элементов ФСР.

Лекция 9

Неоднородное линейное уравнение n-ого порядка. Принцип суперпозиции. Выражение общего решения неоднородного уравнения через общее решения однородного и частное решение неоднородного. Поиск общего решения неоднородного уравнения методом вариации постоянных (методом Лагранжа).

Поиск ФСР однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Лекция 10

Поиск частного решения неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами для правых частей специального вида.

Лекция 11

Неоднородное уравнение 2-ого порядка описывающее колебания груза на пружине. Фазовая плоскость. Зависимость фазового портрета

от величины трения и жесткости пружины. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс.
Системы линейных уравнений. Фазовое пространство. Однородные системы. Определитель Вронского. Существование ФСР.

Лекция 12

Неоднородные линейные системы. Представление общего решения. Поиск решения методом вариации произвольных постоянных.
Линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод поиска ФСР однородной системы.

Лекция 13

Устойчивость решений по Ляпунову. Теорема об устойчивости состояния равновесия для линейной системы. Критерий Гурвица.
Теорема об устойчивости по линейному приближению.
Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Лекция 14

Уравнения в частных производных. Линейные уравнения в частных производных (ЛУЧП). Система ДУ для характеристик. Вид общего решения ЛУЧП. Задача Коши для ЛУЧП.
Квазилинейные уравнения в частных производных. Поиск решения в неявном виде. Система для характеристик. Задача Коши.

Лекция 15

Уравнения в частных производных второго порядка: волновое, теплопроводности, Лапласа. Начально-краевые задачи и корректность их постановки. Метод Фурье. Применение метода Фурье: струна с закрепленными концами, стержень с термостатированными концами, задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Программа практических занятий по математическому анализу
1 курс, I семестр

Раздел I. Теория пределов и непрерывность функции

1. Метод математической индукции: 1-4, 6-8.

2. Понятие функции: 166, 167, 178-181, 203, 206-209, 299, 302, 304, 331, 333, 338, 369, 371.

3. Теория последовательностей: 41-43, 45-47, 49, 58, 60, 63, 65, 67, 79, 81-83, 116, 127-130.

4. Предел функции: 386, 387, 390, 401-404, 412, 414-416, 420, 424, 425, 441-444, 448, 455, 461; 471, 473, 474, 477, 480, 482, 495, 503, 505; 511, 512, 514, 518, 520, 523, 531, 533, 547, 561; 595-598, 613-615, 620; 650, 653.

5. Непрерывность функции: 666, 668, 669, 674, 679, 680, 684, 694, 702, 703, 731, 740, 743, 746, 749, 751, 788.

Контрольная работа.

Раздел II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

1. Дифференцирование: 838, 857, 862, 870, 883, 890, 895, 914, 925, 935, 1014, 1015, 1023, 1027, 1028.

2. Геометрический смысл производной, дифференциал: 1055, 1061, 1079, 1081, 1099, 1100, 1104.

3. Производные и дифференциалы высших порядков: 1158, 1169, 1173, 1211.

4. Свойства дифференцируемых функций: 1237, 1254, 1268, 1272, 1289, 1290.

5. Правило Лопиталя: 1318, 1320, 1342, 1363.

6. Формула Тейлора: 1376, 1377, 1394, 1395, 1398, 1400.

7. Исследование на экстремум: 1414, 1420, 1425, 1445-1449, 1451, 1462.

8. Исследование поведения функции: 1471, 1477, 1500, 1501, 1512, 1516, 1532.

Контрольная работа.

Раздел III. Интегральное исчисление

1. Неопределенный интеграл: 1628, 1632, 1634, 1638, 1640, 1643, 1650, 1661-1664, 1670, 1680, 1681, 1682, 1689, 1691, 1693, 1697; 1727, 1732, 1738, 1741, 1767-1769; 1791, 1792, 1794-1799, 1804; 1867, 1868, 1872, 1882, 1883; 1991, 1992, 1995, 2000, 2013, 1025, 1027.

2. Определенный интеграл: 2182, 2189, 2206, 2208, 2211, 2212, 2239, 2240, 2244, 2245, 2246, 2268, 2272, 2316, 2317; 2398, 2399, 2413, 2414, 2426, 2427, 2432, 2435; 2462, 2464, 2473, 2477; 2501, 2503; 2517, 2528, 2529.

3. Несобственные интегралы: 2336, 2338, 2346, 2347, 2359, 2363, 2364, 2366, 2372.

Контрольная работа.

1 курс, II семестр

Раздел I. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Функции, пределы: 3166, 3167, 3168, 3181, 3182, 3183, 3185, 3186, 3187, 3191.

2. Производные: 3212, 3214, 3221, 3223, 3238, 3241, 3245; 3342, 3346, 3347.

3. Производная сложной и неявной функции: 3295, 3299, 3309, 3318, 3389, 3396, 3399.

4. Формула Тейлора: 3582, 3586, 3587, 3588.

5. Замена переменных: 3431, 3434, 3442, 3461.

6. Вычисление экстремумов: 3624, 3625, 3627, 3629, 3632, 3639.

7. Вычисление условных экстремумов: 3654, 3657, 3661, 3676, 3679, 3681, 3682, 3684, 3688, 3690, 3692, 3696, 3701, 3702.

8. Геометрические приложения: 3528, 3530, 3540, 3541, 3551.

Контрольная работа.

Раздел II. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

1. Двойные интегралы: 3925, 3929, 3927, 3945, 3946, 3948.

2. Вычисление площадей и объемов: 3984, 3987, 3991, 4007, 4009, 4012, 4015, 4016, 4020, 4036, 4043, 4039, 4052, 4059, 4060.

3. Тройные интегралы и их приложения: 4087, 4088, 4101, 4104, 4106, 4133, 4135, 4140, 4145.

4. Криволинейные интегралы: 4224, 4231, 4237, 4242, 4243, 4250, 4251, 4263, 4266, 4280, 4298, 4299, 4302, 4307, 4308, 4310.

5. Поверхностные интегралы: 4343, 4345, 4352, 4355, 4362, 4364, 4367, 4371, 4372, 4376, 4382, 4390, 4388.

6. Интегралы, зависящие от параметра и несобственные интегралы: 3713, 3715, 3732, 3734, 3737, 3741, 3742, 4161, 4163, 4175, 4176, 4177, 4187, 4197.

Контрольная работа.

Раздел III. Ряды

1. Числовые ряды: 2561, 2568, 2570, 2574, 2575.1, 2577, 2578, 2579, 2580, 2669, 2675, 2677, 2679, 2685, 2686, 2699.

2. Функциональные ряды: 2716, 2726, 2746- 2751, 2774, 2764, 2783.

3. Степенные ряды: 2812, 2816, 2824, 2825, 2852, 2854, 2856, 2857, 2870, 2871, 2885, 2901, 2903, 2904, 2905.

4. Ряды Фурье: 2940, 2942, 2944, 2961.

Контрольная работа.

Литература к практическому курсу

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990 г.

Программа практических занятий по дифференциальным уравнениям 2 курс, III семестр

1. Изоклины. Составление дифференциальных уравнений.
Уравнения с разделяющимися переменными.
Задачи: 1, 5, 15, 16, 51, 52, 53, 55, 58, 59, 60, 64, 65.

2. Физические задачи на составление
дифференциальных уравнений. Однородные уравнения.
Задачи: 74, 75, 77, 78, 79, 80, 84, 102, 103, 105, 108, 113, 114, 117.

3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Риккати и Бернулли.
Задачи: 136, 137, 140, 141, 144, 147, 149, 155, 157, 167, 169, 177.

4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
Задачи: 186, 188, 189, 191, 193, 195--210, 219, 220.

5. Уравнения не разрешенные относительно производной.
Задачи: 241--244, 247, 267, 268, 270, 271, 278, 281, 287, 290, 293, 294, 289.

6. Существование и единственность решения.
Задачи: 221, 223, 227, 229, 230, 231.
Контрольная работа.

7. Уравнения допускающие понижение порядка.
Задачи: 421, 422, 423, 425, 426, 427, 430, 435, 437, 439, 446, 448, 449, 463, 465, 466, 501.

8. Линейные уравнения.
Задачи: 511--516, 519--522, 521, 522, 528, 533, 534, 537, 538.

9. Неоднородные линейные уравнения. Метод вариации постоянной.
Задачи: 533, 535, 537, 540, 541, 543, 544, 548, 550, 558, 562, 575--578.

10. Линейная зависимость. Уравнение Эйлера.
Задачи: 589, 599, 600, 641--645, 663--666, 681--684, 786.

11. Системы линейных уравнений.
Задачи: 786--792, 796, 797, 801--804.

12. Системы неоднородных линейных уравнений. Устойчивость.
Задачи: 826--828, 827, 833, 846, 847, 881--885, 899--903, 907.

13. Устойчивость. Функция Ляпунова.
Задачи: 923--926. Контрольная работа.

14. Уравнения в частных производных первого порядка.
Задачи: 1194--1200.

15. Особые точки. Классификация уравнений второго порядка.
Задачи: 961--972.

16. Задача Коши для волнового уравнения. Метод Фурье.
Коллоквиум.

Литература к практическому курсу

1. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Либроком, 2009~г.

Основные понятия и определения
1-й курс, I семестр

1. Элементы теории множеств. Точные верхние и нижние грани. Вещественные функции одной переменной.
2. Числовая последовательность. Предел последовательности.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Неопределенные выражения. Раскрытие неопределенностей.
4. Монотонные последовательности.
5. Подпоследовательность и частичные пределы.
6. Фундаментальные последовательности.
7. Предел функции: различные формулировки определения.
8. Бесконечный предел. Односторонние пределы.
9. Бесконечно малые различных порядков малости. Эквивалентные величины. Символика «О» и «о».
10. Непрерывные функции. Точки разрыва. Эквивалентные определения непрерывности.
11. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва.
12. Равномерная непрерывность.
13. Производная функции, ее геометрический и механический смысл.
14. Односторонние производные. Бесконечные производные.
15. Касательная и нормаль к кривой.
16. Производные элементарных и параметрически заданных функций. Логарифмическая производная.
17. Дифференцируемые функции. Дифференциал функции.
18. Производные и дифференциалы высших порядков.
19. Возрастание и убывание функции в точке.
20. Формула Тейлора для элементарных функций.
21. Экстремум функции. Стационарные точки.
22. Выпуклость функции. Точка перегиба.
23. Асимптоты графика функции.
24. Исследование функции с помощью производной.
25. Первообразная функции. Неопределенный интеграл.
26. Табличные интегралы.
27. Определенный интеграл Римана: разбиения, суммы Дарбу.
28. Определенный интеграл и площадь, объем тела вращения, длина дуги плоской кривой.
29. Несобственные интегралы первого и второго рода.
30. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
31. Задача интерполяции.
32. Формулы приближенного вычисления определенных интегралов.

1-й курс, I I семестр

1. Линейные и метрические пространства.
2. Последовательность в метрическом пространстве. Предел последовательности. Полные пространства.
3. Множества в метрическом пространстве: открытые, шары, кубы и пр.
4. Предел функции многих переменных.
5. Непрерывные отображения метрических пространств.
6. Непрерывные функции многих переменных.
7. Частные производные функции многих переменных.
8. Дифференцируемые функции.
9. Дифференциал функции многих переменных.
10. Производная функции по направлению. Градиент функции.
11. Нормаль к поверхности. Касательная плоскость.
12. Частные производные высших порядков.
13. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность их формы относительно замены независимых переменных.
14. Экстремумы функций многих переменных.
15. Квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.
16. Неявные функции. Системы функций, заданных неявно.
17. Матрица Якоби отображения. Якобиан отображения.
18. Дифференциал отображения.
19. Условные экстремумы. Множители Лагранжа, функция Лагранжа.
20. Двойной интеграл Римана.
21. Суммы Дарбу.
22. Формулы вычисления двойного интеграла.
23. Криволинейные координаты на плоскости. Элемент площади в криволинейных координатах.
24. Полярные координаты.
25. Приложения двойных интегралов: площадь, объем цилиндра, моменты k-го порядка.
26. Тройной интеграл Римана. Конструкция и свойства.
27. Формулы вычисления тройного интеграла.
28. Цилиндрические и сферические координаты в $\mathbb{R}^3$.
29. Криволинейные координаты в пространстве. Элемент объема в криволинейных координатах.
30. Приложения тройных интегралов.
31. Криволинейные интегралы первого рода.
32. Криволинейные интегралы второго рода.
33. Потенциал.

34. Приложения криволинейных интегралов
35. Площадь поверхности в $\mathbb{R}^3$: описание конструкции.
36. Поверхностный интеграл первого рода.
37. Поверхностный интеграл второго рода.
38. Понятия векторного анализа: ротор, дивергенция, циркуляция. Компактная запись формул Стокса, Грина, Гаусса – Остроградского.
39. Интеграл, зависящий от параметра.
40. Кратные несобственные интегралы.
41. Числовые ряды: частичные суммы, сумма ряда, сходимость ряда. Геометрическая прогрессия.
42. Ряды с неотрицательными членами. Мажорантный, минорантный ряд.
43. Гармонические ряды.
44. Абсолютная и условная сходимость ряда.
45. Знакочередующиеся ряды. Ряд Лейбница.
46. Специфика условной сходимости ряда.
47. Функциональные последовательности и ряда: поточечная сходимость, предел, сумма ряда, область сходимости.
48. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.
49. Сравнение равномерной и абсолютной сходимости.
50. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости.
51. Ряд Тейлора. Аналитическая функция. Разложение в ряд Тейлора элементарных функций.
52. Арифметические действия над сходящимися рядами.
53. Ряды Фурье.

2-й курс, I семестр

1. Дифференциальное уравнение, решения, интегралы — общие и частные.
2. Поле направлений, изоклины, интегральные кривые.
3. Задача Коши, задача Штурма - Лиувилля, начально-краевая задача.
4. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, Риккати, в полных дифференциалах.
5. Особые точки дифференциальных уравнений. Особые решения.
6. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа, Клеро.

7. Системы ОДУ первого порядка. Постановка задачи Коши.
8. ОДУ n-ого порядка, постановка для него задачи Коши, сведение к системе первого порядка.
9. Линейные ОДУ n-ого порядка: пространство решений.
10. Линейная зависимость и независимость функций.
11. Определитель Вронского, его связь с решениями линейного ОДУ– n.
12. Фундаментальная система решений линейного ОДУ– n.
13. Линейные ОДУ–n с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен.
14. Уравнение гармонического осциллятора.
15. Системы линейных ОДУ первого порядка: свойства, пространство решений.
16. Линейно независимые векторные функции.
17. Определитель Вронского векторных функций.
18. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.
19. Функция Ляпунова.
20. Особые точки системы линейных уравнений на плоскости: седло, узел, фокус, центр.
21. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики.

Основные утверждения
1-й курс, I семестр

1. Бином Ньютона.
2. Теоремы о пределах: единственность, ограниченность сходящейся последовательности, переход к пределу в неравенстве, лемма о двух милиционерах.
3. Арифметические действия с пределами.
4. Свойства бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей.
5. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.
6. Существование предела, определяющего число "e".
7. Теорема о вложенных отрезках.
8. Теорема о существовании частичного предела ограниченной последовательности.
9. Критерий Коши сходимости последовательности.
10. Равносильность определения предела функции на языке "$\varepsilon-\delta$" и в терминах последовательности.

11. Замечательные пределы $\frac{\sin x}{x}$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и др.
12. Теорема о пределах функций.
13. Критерий Коши существования предела функции.
14. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной функции.
15. Теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.
16. Равносильность определения непрерывности функции на языке "$\varepsilon-\delta$" и в терминах последовательности.
17. Арифметические операции над непрерывными функциями.
18. Теорема о точках разрыва монотонной функции. Критерий непрерывности монотонной функции.
19. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.
20. Теоремы о непрерывных функциях: об обращении в нуль, о промежуточном значении, о существовании и непрерывности обратной функции, об ограниченности, о достижении наибольшего и наименьшего значений.
21. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
22. Вычисление производных элементарных функций на основании определения.
23. Производные арифметических выражений, обратной и сложной функций, параметрически заданной функции.
24. Условие дифференцируемости функции.
25. Инвариантность первого и неинвариантность старших дифференциалов при замене независимой переменной.
26. Формула Лейбница для производных старшего порядка.
27. Условие монотонности функции в точке в терминах производной.
28. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Роля, Лагранжа, Коши.
29. Условие постоянства функции.
30. Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $0/0$ (∞/∞ - формулировка).
31. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (локальная ФТ).
32. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха - Роха (глобальная ФТ).
33. Условие монотонности функции на промежутке. Достаточный признак строгой монотонности.
34. Необходимый признак экстремума. Отыскание экстремумов функции.

35. Три достаточных условия экстремума функции.
36. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
37. Условие выпуклости функции в терминах второй производной. Необходимое условие точки перегиба.
38. Достаточное условие точки перегиба.
39. Условие существование асимптоты.
40. Теорема о первообразной.
41. Интегрирование с помощью замены переменной, интегрирование по частям.
42. Свойства неопределенного интеграла.
43. Интегрирование рациональной функции.
44. Интегрирование $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$, где R – рациональная функция.
45. Подстановки Эйлера.
46. Интегрирование $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция.
47. Свойства сумм Дарбу.
48. Критерий существования интеграла Римана.
49. Классы интегрируемых функций: непрерывные, монотонные и ограниченные, ограниченные с конечным числом точек разрыва.
50. Свойства определенного интеграла.
51. Определенный интеграл как функция верхнего предела: непрерывность и дифференцируемость.
52. Формула Ньютона – Лейбница.
53. Вычисление определенных интегралов: замена переменной, интегрирование по частям.
54. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых и полярных координатах.
55. Вычисление объема тела вращения.
56. Вычисление длины дуги плоской кривой.
57. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого рода.
58. Признак сравнения сходимости несобственных интегралов первого рода.
59. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов первого рода.
60. Несобственные интегралы второго рода: критерий Коши сходимости, признак сравнения.

61. Формула Ньютона – Лейбница для несобственных интегралов.
62. Интерполяционная формула Лагранжа. Кубики Безье.
63. Методы хорд и касательных приближенного нахождения корней уравнения.
64. Приближенное вычисление определенных интегралов: формулы прямоугольников, трапеций. Оценка погрешности формулы прямоугольников.
65. Формула Симпсона приближенного вычисления определенных интегралов. Ее точность для многочленов третьей степени.

1-й курс, I I семестр

1. Теорема о непрерывности суперпозиции отображений.
2. Теорема о связи дифференцируемости функции в целом и дифференцируемости по отдельным переменным.
3. Теорема о связи дифференцируемости функции с существованием частных производных.
4. Теорема о дифференцируемости сложной функции.
5. Инвариантность формы первого дифференциала при замене независимых переменных.
6. Производная. Свойства производных функции по направлению. Свойства градиента.
7. Теорема о геометрическом смысле первого дифференциала.
8. Теорема Шварца о равенстве смешанных производных.
9. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
10. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
11. Необходимое условие экстремума.
12. Достаточное условие регулярной точки экстремума.
13. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.
14. Теорема о наибольшем и наименьшем значении непрерывной функции, заданной в замкнутой ограниченной области.
15. Теорема о неявной функции одной переменной: существование, непрерывность и дифференцируемость.
16. Теорема о неявной функции многих переменных (формулировка).
17. Теорема о системе неявных функций многих переменных (формулировка).
18. Описание отображений плоскости, имеющих матрицу Якоби с постоянными собственными значениями.
19. Теорема о дифференциале отображения.
20. Отыскание условных экстремумов с помощью множителей Лагранжа.

21. Замена координат. Пересчет производных в новых переменных. Вычисление $|\nabla u|$ и Δu в полярных координатах.
22. Суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости функции (двойной интеграл).
23. Свойства двойного интеграла.
24. Вычисление двойного интеграла сведением его к повторному (от прямоугольника к произвольной области).
25. Теорема о геометрическом смысле якобиана отображения плоскости.
26. Формула преобразования двойного интеграла при замене переменных.
27. Вычисление тройного интеграла сведением его к повторному (от бруса к области общего вида).
28. Формула преобразования тройного интеграла при замене переменных.
29. Свойства и вычисление криволинейных интегралов первого рода (КИ-1).
30. Свойства и вычисление криволинейных интегралов второго рода (КИ-2), их связь с КИ-1.
31. Выражение площади плоской фигуры через КИ-2.
32. Формула Грина.
33. Криволинейные интегралы не зависящие от пути интегрирования.
34. Теорема о потенциальности подынтегральной функции для п. 33.
35. Свойства и вычисление поверхностных интегралов первого и второго родов, их связь.
36. Формула Гаусса – Остроградского.
37. Формула Стокса.
38. Непрерывность и дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра.
39. Кратные несобственные интегралы: исследование сходимости интегралов $\int\limits_{|x|\le 1} |x|^{-\alpha}\, dx$ и $\int\limits_{|x|\ge 1} |x|^{-\beta}\, dx,\ x\in\mathbb{R}^3$ для различных $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$.
40. Основные свойства сходящихся рядов.
41. Критерий Коши сходимости и расходимости рядов.
42. Исследование сходимости обобщенного гармонического ряда.
43. Признаки сходимости для рядов с неотрицательными членами.
44. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов.
45. Интегральный признак сходимости.
46. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

47. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
48. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда.
49. Теорема о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходящегося ряда.
50. Теорема Абеля о сходимости степенного ряда.
51. Теорема о вычислении радиуса сходимости степенного ряда по его коэффициентам.
52. Свойства степенных рядов.
53. Степенные ряды – расширение класса элементарных функций.
54. Теорема Коши об абсолютной сходимости произведения рядов.
55. Система функций $\{\sin kx, \cos lx\}, k, l \in \mathbb{Z}$ – ортогональная система.
56. Вычисление коэффициентов ряда Фурье.
57. Теорема о представлении периодических функций рядом Фурье. Условие Дирихле (без доказательств).
58. Специфика рядов Фурье для четных и нечетных функций.
59. Разложение в ряды Фурье некоторых функций: а) $y = x$, $y = x^2$, «ступенька» на $[-\pi, \pi]$; б) $y = x$ на $[0, \pi]$.

2-й курс, I семестр

1. Интегрирование простейших дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли, Риккати, в полных дифференциалах.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Теорема о зависимости гладкости решения от гладкости правой части уравнения.
4. Теорема о зависимости решения от параметров задачи и начальных данных.
5. Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной: параметрическое представление решения, постановка для них задачи Коши.
6. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для неявных уравнений.
7. Методы понижения порядка ОДУ–n.
8. Свойства линейных ОДУ–n.
9. Примеры систем линейно независимых функций.
10. Свойства определителя Вронского.
11. Структура общего решения линейного ОДУ–n.
12. Структура общего решения неоднородного линейного ОДУ–n.

13. Метод вариации постоянных для интегрирования неоднородных линейных ОДУ–n.
14. Методы построения частного решения линейных неоднородных уравнений.
15. ОДУ–n со специальной правой частью.
16. Формула Лиувилля — Остроградского, ее приложение.
17. Построение ФСР для линейного ОДУ–n с постоянными коэффициентами.
18. Описание различных режимов гармонического осциллятора: собственные и вынужденные колебания, затухающие колебания, резонанс.
19. Системы линейных ОДУ первого порядка: свойства, пространство решений, фундаментальная система решений.
20. Структура общего решения системы линейных ОДУ первого порядка.
21. Метод вариации постоянных интегрирования систем неоднородных линейных ОДУ первого порядка.
22. Построение общего решения систем линейных ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами.
23. Теорема об устойчивости решения при наличии функции Ляпунова.
24. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
25. Теорема о классификации особых точек системы линейных уравнений на плоскости.
26. Построение общего решения линейного и квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.
27. Опрокидывание решения для уравнения Хопфа.
28. Метод Фурье разделения переменных: начально-краевая задача для волнового уравнения, задача Дирихле для круга, начально-краевая задача для уравнения теплопроводности.

5. Образовательные технологии

<u>Формы контроля</u>

- Экзамены — три, в конце каждого семестра, проводит лектор и преподаватели, ведущие практические занятия.
- Зачеты — три, в конце каждого семестра 1 курса, проводят преподаватели, ведущие практические занятия.
- Контрольные работы — 6 – 9, от двух до трех в каждом семестре,

проводят преподаватели, ведущие практические занятия.

- Коллоквиумы — 2 – 3, проводит лектор и преподаватели, ведущие практические занятия.
- Опрос студентов, демонстрационное решение задач, проверка выполнения домашних заданий, самостоятельные работы — в течение всего времени обучения.

Создание фонда оценочных средств, включающего типовые задания, контрольные работы, позволяющие оценить знания, умения и уровень приобретенных компетенций.

Наличие обязательных для итоговой аттестации студента контрольных точек стимулирует студента к активной работе в течении всего семестра. Для того чтобы заинтересовать студента в подготовке к каждому семинарскому занятию, каждое семинарское занятия часто начинается с экспресс – миниконтрольной работы, результат которой влияет на зачет в конце семестра. Семинарские занятия происходят в форме дискуссии преподавателя со студентами (аналог «круглого стола», преподавателю в котором отводится роль ведущего), в ходе которых каждый из участников – студенты или преподаватель имеют право задавать вопросы и участвовать в выработке альтернативных решений разбираемых задач. Таким образом, на семинарских занятиях реализуется интерактивная форма обучения.

Важной формой обучения являются коллоквиумы, проводимые в форме беседы преподавателя со студентом, в которую при желании может вмешиваться любой студент семинарской группы. На коллоквиуме, а не только на семинарских занятиях, студент может получить ответы на интересующие его вопросы по предмету.

Все преподаватели, участвующие в ведении курса «Математический анализ» являются профессиональными исследователями в области математики и механики.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Рекомендованная литература к теоретическому курсу

а) основная литература:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* Ростов-на-Дону: изд-во «Феникс», 1997 г.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов.* Ростов-на-Дону: изд-во «Феникс», 1998 г., 4-е изд.

3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. *Лекции по математическому анализу.* М.: Высшая школа, 1999 г.

4. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* ЛКИ, 2008 г.

5. Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* Едиториал УРСС, 2007 г.

6. Филлипов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* Либроком, 2009 г.

7. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения.* ЛКИ, 2008 г.

б) дополнительная литература:

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями.* Либроком, 2009 г.

2. Пантелеев А.В. и др. *Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах.* Высшая школа, 2001 г.

3. Самойленко А.М. *Дифференциальные уравнения. Практический курс.* Омега-Л, 2006 г.

4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. *Дифференциальные уравнения. Курс высшей математики и математической физики. Выпуск 6*, 2002 г.

5. Мир математических уравнений: http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm

6. Математические этюды: http://www.etudes.ru/

Перечень коллоквиумов

Примерные контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы (в объеме часов, предусмотренных образовательным стандартом и рабочим учебным планом данной дисциплины).

Коллоквиум 1-й курс, I семестр

Пределы, производная функции

Вопросы к коллоквиуму.

1. Теоремы о пределах.
2. Арифметические действия с пределами.
3. Свойства бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей.
4. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.
5. Существование предела, определяющего число $"e"$.
6. Теорема о вложенных отрезках.
7. Теорема о существовании частичного предела ограниченной последовательности.
8. Критерий Коши сходимости последовательности.
9. Равносильность определения предела функции на языке $"\varepsilon-\delta"$ и в терминах последовательности.
10. Замечательные пределы.
11. Теорема о пределах функций.

12. Критерий Коши существования предела функции.
13. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной функции.
14. Теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.
15. Равносильность определения непрерывности функции на языке "$\varepsilon-\delta$" и в терминах последовательности.
16. Арифметические операции над непрерывными функциями.
17. Теорема о точках разрыва монотонной функции. Критерий непрерывности монотонной функции.
18. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.
19. Теоремы о непрерывных функциях.
20. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
21. Вычисление производных элементарных функций на основании определения.
22. Производные арифметических выражений, обратной и сложной функций, параметрически заданной функции.
23. Условие дифференцируемости функции.
24. Инвариантность первого и неинвариантность старших дифференциалов при замене независимой переменной.
25. Формула Лейбница для производных старшего порядка.
26. Условие монотонности функции в точке в терминах производной.
27. Основные теоремы дифференциального исчисления.
28. Условие постоянства функции.
29. Правило Лопиталя раскрытия неопределенности.
30. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Шлемильха - Роха.
31. Условие монотонности функции на промежутке. Достаточный признак строгой монотонности.
32. Необходимый признак экстремума. Отыскание экстремумов функции.
33. Три достаточных условия экстремума функции.
34. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
35. Условие выпуклости функции в терминах второй производной. Необходимое условие точки перегиба.
36. Достаточное условие точки перегиба.

Коллоквиум 1-й курс, II семестр

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Вопросы к коллоквиуму.

1. Теорема о непрерывности суперпозиции отображений.
2. Теорема о связи дифференцируемости функции в целом и дифференцируемости по отдельным переменным.
3. Теорема о связи дифференцируемости функции с существованием частных производных.
4. Теорема о дифференцируемости сложной функции.
5. Инвариантность формы первого дифференциала при замене независимых переменных.
6. Производная. Свойства производных функции по направлению. Свойства градиента.
7. Теорема о геометрическом смысле первого дифференциала.
8. Теорема Шварца о равенстве смешанных производных.
9. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано.
10. Необходимое условие экстремума.
11. Достаточное условие регулярной точки экстремума.
12. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.
13. Теорема о наибольшем и наименьшем значении непрерывной функции, заданной в замкнутой ограниченной области.
14. Теорема о неявной функции одной переменной: существование, непрерывность и дифференцируемость.
15. Теорема о неявной функции многих переменных.
16. Теорема о системе неявных функций многих переменных.
17. Описание отображений плоскости, имеющих матрицу Якоби с постоянными собственными значениями.
18. Теорема о дифференциале отображения.
19. Отыскание условных экстремумов с помощью множителей Лагранжа.
20. Замена координат. Пересчет производных в новых переменных. Вычисление $|\nabla u|$ и Δu в полярных координатах.

Коллоквиум 2-й курс, I семестр

Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка.

1. Интегрирование простейших дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородных, линейных, Бернулли, Риккати, в полных дифференциалах.
2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
3. Теорема о зависимости гладкости решения от гладкости правой части уравнения.
4. Теорема о зависимости решения от параметров задачи и начальных данных.
5. Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной: параметрическое представление решения, постановка для них задачи Коши.
6. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для неявных уравнений.
7. Методы понижения порядка ОДУ–n.
8. Свойства линейных ОДУ–n.
9. Примеры систем линейно независимых функций.
10. Свойства определителя Вронского.
11. Структура общего решения линейного ОДУ–n.
12. Структура общего решения неоднородного линейного ОДУ–n.
13. Метод вариации постоянных для интегрирования неоднородных линейных ОДУ–n.
14. Методы построения частного решения линейных неоднородных уравнений.
15. ОДУ–n со специальной правой частью.
16. Формула Лиувилля — Остроградского, ее приложение.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Образцы билетов для подготовки к экзамену

1-й курс, I семестр

Билет № 1

1. Теоремы о пределах: единственность, ограниченность сходящейся последовательности.
2. Второе достаточное условие экстремума.

Билет № 2

1. Теоремы о пределах: переход к пределу в неравенстве, лемма о двух милиционерах.
2. Третье достаточное условие экстремума.

Билет № 3

1. Арифметические действия с пределами.
2. Условие выпуклости функции в терминах второй производной.

Билет № 4

1. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Предел, определяющий число `` e ''.
2. Необходимое и достаточное условие точки перегиба.

Билет № 5

1. Теорема о вложенных отрезках.
2. Интегрирование $\int R\left(x, \sqrt[m]{\alpha x+\beta},\ \gamma x+\delta\right) dx$, где R - рациональная функция.

Билет № 6

1. Теорема о существовании частичного предела ограниченной последовательности.
2. Интегрирование рациональных функций.

Билет № 7

1. Замечательный предел $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$.
2. Свойства сумм Дарбу.

Билет № 8

1. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
2. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Билет № 9

1. Равносильные определения понятия предела функции. Предел монотонной ограниченной функции.
2. Свойства определенного интеграла.

Билет № 10

1. Точки разрыва монотонной функции. Критерий непрерывности монотонной функции.
2. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона – Лейбница.

Билет № 11

1. Теоремы об обращении в нуль непрерывной функции и о промежуточном значении.
2. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых и полярных координатах.

Билет № 12

1. Теоремы о существовании и непрерывности обратной функции.

2. Вычисление объема тела вращения.

Билет № 13

1. Теоремы об ограниченности непрерывной функции и о достижении ею наибольшего и наименьшего значений.
2. Вычисление длины дуги плоской кривой.

Билет № 14

1. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
2. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода.

Билет № 15

1. Формула Лейбница для производных n-го порядка.
2. Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов первого рода.

Билет № 16

1. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма и Ролля.
2. Интерполяционная формула Лагранжа. Кубики Безье.

Билет № 17

1. Основные теоремы дифференциального исчисления: Лагранжа и Коши.
2. Критерий Коши сходимости последовательности.

Билет № 18

1. Условия дифференцируемости функции. Инвариантность первого дифференциала.
2. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов первого рода.

Билет № 19

1. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей ``0/0''.

2. Свойства сумм Дарбу.

Билет № 20

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
2. Критерий существования интеграла Римана.

Билет № 21

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха – Роха.
2. Теоремы о пределах: ограниченность сходящейся последовательности, переход к пределу в неравенстве.

Билет № 22

1. Условия монотонности функции в точке и на промежутке.
2. Приближенное вычисление определенных интегралов. Оценка погрешности формулы прямоугольников.

Билет № 23

1. Необходимый признак экстремума. Отыскание экстремумов, наибольших и наименьших значений функций.
2. Теоремы о непрерывных функциях: об ограниченности и достижении наибольшего и наименьшего значений.

Билет № 24

1. Первое достаточное условие экстремума.
2. Теорема о существовании частичного предела ограниченной последовательности.

1-й курс, II семестр

Билет № 1

1. Достаточные условия дифференцируемости функции многих переменных.
2. Разложение в ряды Фурье периодических функций.

Билет № 2

1. Инвариантность формы первого дифференциала при замене переменных.
2. Основные свойства двойного интеграла.

Билет № 3

1. Свойства градиента функции.
2. Сведение двойного интеграла к повторному. Изменение порядка интегрирования.

Билет № 4

1. Теорема о равенстве смешанных производных второго порядка.
2. Замена переменных в двойном интеграле.

Билет № 5

1. Теорема Тейлора для функции многих переменных.
2. Вычисление тройного интеграла, сведение его к повторному. Изменение порядка интегрирования.

Билет № 6

1. Формула Тейлора для функции многих переменных.
2. Приложения двойных интегралов (вычисление площадей, моментов различных порядков).

Билет № 7

1. Необходимые условия экстремума функции многих переменных.
2. Приложения тройных интегралов (вычисление объемом, массы тел, координат центра тяжести, моментов различных порядков).

Билет № 8

1. Достаточное условие экстремума функции многих переменных.
2. Степенные ряды – расширение класса функций.

Билет № 9

1. Теорема о неявной функции одной переменной.

2. Разложение элементарных функций в степенной ряд.

Билет № 10

1. Теорема о системе двух неявных функций. Вычисление производных двух функций, заданных неявно.
2. Свойства двойного интеграла.

Билет № 11

1. Отображения плоскости, задающие матрицу Якоби с постоянными собственными значениями.
2. Кратные несобственные интегралы.

Билет № 12

1. Замена переменных. Вычисление дифференциальных выражений в новых переменных. Выражения $|\nabla u|$ и $|\Delta u|$ в полярных координатах.
2. Теорема Абеля для степенных рядов, вычисление радиуса сходимости.

Билет № 13

1. Геометрический смысл якобиана.
2. Криволинейные интегралы первого и второго рода, их связь, вычисление и приложения.

Билет № 14

1. Отыскание условного экстремума функции многих переменных. Метод множителей Лагранжа.
2. Формула Грина. Выражение площади через криволинейный интеграл.

Билет № 15

1. Свойства сумм Дарбу. Критерий интегрируемости функций (случай двойного интеграла Римана).
2. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность и дифференцируемость суммы.

Билет № 16

1. Достаточное условие экстремума функции многих переменных.
2. Свойства равномерно сходящихся рядов: дифференцируемость и интегрируемость.

Билет № 17

1. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Необходимое и достаточное условие.
2. Вычисление коэффициентов ряда Фурье.

Билет № 18

1. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования: существование потенциала, вычисление интеграла.
2. Дифференцируемость сложной функции.

Билет № 19

1. Поверхностные интегралы первого рода: определение, вычисление, свойства, приложения.
2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Билет № 20

1. Поверхностные интегралы второго рода: определение, вычисление, свойства, приложения.
2. Ортогональная система функций, вычисление коэффициентов ряда Фурье.

Билет № 21

1. Формула Гаусса-Остроградского.
2. Критерий Коши и признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Билет № 22

1. Формула Стокса.
2. Свойства степенных рядов.

Билет № 23

1. Интегральные формулы в векторной формулировке.
2. Теорема Шварца о равенстве смешанных производных.

Билет № 24

1. Непрерывность и дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра.
2. Свойства степенных рядов. Ряды Тейлора.

Билет № 25

1. Признаки сходимости несобственных кратных интегралов.
2. Теорема о равенстве смешанных производных второго порядка.

2-й курс, I семестр

Билет №1

1. Интегрирование ОДУ-1: с разделяющимися переменными, однородные.
2. Системы ЛУ. Линейная зависимость векторных функций. Пространство решений.

Билет №2

1. Интегрирование ОДУ-1: линейные, Бернулли.
2. Определитель Вронского для систем ЛУ, его свойства.

Билет №3

1. Интегрирование ОДУ-1: в полных дифференциалах, Риккати.
2. Системы ЛУ (переменные коэффициенты), фундаментальная система решений. Структура общего решения.

Билет №4

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ-1.

2. Связь между ОДУ n-го порядка и системы уравнений первого порядка.

Билет №5

1. Зависимость решения ОДУ-1 от параметров задачи и начальных данных.
2. Линейные ОДУ n—ого порядка. Линейная зависимость функций.

Билет №6

1. Зависимость решений ОДУ-1 от параметров задачи и начальных данных.
2. Линейные ОДУ n—ого порядка. Определитель Вронского, его свойства.

Билет №7

3. ОДУ не разрешенные относительно производной: параметрическое представление решения.
4. Линейные ОДУ n—ого порядка. Фундаментальные система решений. Структура общего решения.

Билет №8

1. ОДУ не разрешенные относительно производной: уравнения Лагранжа и Клеро.
2. Линейные неоднородные ОДУ n—ого порядка: метод вариации постоянных.

Билет №9

1. Понижение порядка ОДУ.
2. Система ЛУ с постоянными коэффициентами: построение общего решения.

Билет №10

1. Неоднородные системы ЛУ: метод вариации постоянных.
2. Интегрирование ОДУ-1: линейные, Бернулли.

Билет №11

1. Уравнение гармонического осциллятора. Различные режимы движения.
2. Интегрирование ОДУ-1: однородные, Риккати.

Билет №12

1. Линейные уравнения с частными производными 1-го порядка. Характеристики. Общее решение.
2. Понижение порядка ОДУ.

Билет №13

1. Особые точки системы двух линейных уравнений.
2. Формула Остроградского-Лиувилля.

Билет №14

1. Лин. неоднородные ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициен-тами со специальной правой частью: построение общего решения.
2. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-ого порядка. Характеристики. Общее решение.

Билет №15

1. Метод Фурье разделения переменных для уравнения теплопроводности.
2. Системы ЛУ с постоянными коэффициентами: построение общего решения в случае различных вещественных корней.

Билет №16

1. Интегрирование ОДУ-1: линейные, Бернулли..
2. Системы ЛУ с постоянными коэффициентами: построение общего решения в случае комплексно-сопряженных корней.

Билет №17

1. Метод Фурье разделения переменных для волнового уравнения.
2. Неоднородные системы ЛУ: метод вариации постоянных.

Билет №18

1. ОДУ не разрешенные относительно производной: уравнения Лагранжа и Клеро.
2. Метод Фурье (разделения переменных) решения начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Билет №19

1. Теория существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ-1.
2. Понижение порядка ОДУ.

Билет №20

1. Определитель Вронского. Формула Остроградского-Лиувилля.
2. Линейные неоднородные ОДУ n-ого порядка: метод вариации постоянных.

Билет №21

1. Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши.
2. Гармонический осциллятор: различные режимы движения.

Билет №22

1. Особые точки системы двух линейных уравнений.
2. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Билет №23

1. Понятие устойчивости и асимптотической устойчивости.
2. Метод Фурье разделения переменных для волнового уравнения.

Билет №24

1. Метод Фурье разделения переменных для уравнения Лапласа в круге.
2. Системы ЛУ с постоянными коэффициентами: построение общего решения в случае различных вещественных корней.

Билет №25

1. Понятие устойчивости, функция Ляпунова, теорема об устойчивости решения.
2. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Билет №26

1. Гармонический осциллятор: различные режимы движения.
2. Системы ЛУ с постоянными коэффициентами: построение общего решения в случае кратных корней.

Билет №27

1. Теорема об устойчивости нулевого положения равновесия системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами.
2. Интегрирование ОДУ-1: линейные, Бернулли.

Билет №28

1. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-ого порядка. Задача Коши и ее связь с характеристиками.
2. Теорема об устойчивости по линейному приближению.

Билет №29

1. Продолжение решений ОДУ.
2. Интегрирование ОДУ-1: в полных дифференциалах, Риккати.

Билет №30

1. Теорема существования и единственности для ОДУ не разрешенных относительно производной.
2. Теорема об устойчивости по линейному приближению.

Примеры задач на контрольных работах

1-й курс, I семестр

Первая контрольная работа

1. Используя логические символы, записать утверждение:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

$$x_n = \frac{n2^{-(n+1)}}{n+3} - \frac{3-n}{1-n}.$$

3. Найти пределы:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^4-3x^3-x^2+8x-15},$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 9\pi x}{\sin 7\pi x},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^x.$$

4. Установить, какие из следующих утверждений верны:

а) $x = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, при $x \to 0$,

б) $\dfrac{1}{x} = o(x)$, при $x \to 0$.

5. С помощью "$\varepsilon - \delta$" рассуждений доказать непрерывность следующей функции:

$$y = \cos x + 1$$

Вторая контрольная работа

1. Найти производную функции:

$$y = 4^{\sin^3 x}.$$

2. Найти $y^{(5)}$, если:

$$y = \sqrt[3]{x}\ln x.$$

3. Раскрыть неопределенность:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}.$$

4. Найти предел, используя формулу Тейлора:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}.$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$$y = \frac{x^2+2}{x^4+2}.$$

6. Построить график функции:

$$y = \frac{(x+2)^3}{(x-3)^2}.$$

Третья контрольная работа

1. Найти интегралы:

$$\int \frac{x+1}{x(x^2-4)}\,dx.$$

$$\int x^2\sqrt[3]{2-x}\,dx.$$

$$\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx.$$

2. Найти определенный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx.$$

3. Исследовать сходимость интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

4. Найти объем тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезками следующих линий:

$$y = \cos x, y = 0(0 \le x \le \pi / 2)$$

а) вокруг оси Ох,
б) вокруг оси Оу.

1-й курс, II семестр

Первая контрольная работа

1. Проверить равенство:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

если $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$.

2. Для функции $z = z(x, y)$, заданной неявно, найти первый и второй дифференциал $dz, d^2 z$, если

$$z^3 - 3xyz = a^3.$$

3. Функцию разложить по формуле Маклорена до членов четвертого порядка включительно:

$$u(x, y) = e^y \sin x.$$

4. Вводя новые независимые переменные ξ и η, преобразовать уравнение:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0, \xi=x, \eta=x^2+y^2.$$

5. Исследовать на экстремум:

$$z=x^2+xy+y^2-4\ln y-10\ln x.$$

6. Найти точки условного экстремума:

$$z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},$$

если $x^2+y^2=1.$

Вторая контрольная работа

1. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{z^2}{25}(z>0).$$

2. Найти площадь части поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

3. Вычислить следующий криволинейный интеграл 1-рода:

$$\int_C y^2 ds,$$

где C-арка циклоиды $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t), (0\le t\le 2\pi).$

4. Вычислить следующий криволинейный интеграл:

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)}(x+y)dx+(x-y)dy.$$

5. Исследовать на сходимость тройной интеграл:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\geq 9} \frac{\phi(x,y,z)dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{p+2}},$$

$0 < m \leq |\phi(x,y,z)| \leq M.$

Третья контрольная работа

1. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, |x| < \pi.$$

2. Производя соответствующие действия, получить разложение в степенной ряд функции:

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

3. Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

4. Исследовать последовательность на равномерную сходимость в указанном промежутке:

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, 0 \leq x \leq 1.$$

5. Исследовать сходимость ряда:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \ldots + \frac{1}{1000n+1} + \ldots$$

2-й курс, I семестр

Первая контрольная работа

1. Найдя путем подбора частное решение, привести данное уравнение Рикатти к уравнению Бернулли и решить его:

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$$

2. Решить уравнение:

$$(2-9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

3. Построить по два последовательных приближения (не считая исходного) к решению следующего уравнения:

$$y' = 2x + y, \quad y(1) = 1.$$

4. Решить уравнение методом введения параметра:

$$y = (y')^2 + 2(y')^3.$$

5. Понизить порядок данного уравнения, пользуясь его однородностью, и решить его:

$$(x^2+1)((y')^2 - yy'') = xyy'.$$

Вторая контрольная работа

1. Решить уравнение:

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x.$$

2. Решить уравнение Эйлера:

$$x^3y''' + xy' - y = 0.$$

3. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми на отрезке $[0,1]$: $1, \sin^2 x, \cos 2x$.
4. Решить линейную неоднородную систему:

$$\dot{x} = 2x - 4y.$$
$$\dot{y} = x - 3y + 3e^t.$$

5. Решить систему:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} x$$

Третья контрольная работа

1. Найти общее решение уравнения:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0.$$

2. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию:

$$ctgx\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ctgx, x = y^2, z = 2y^2.$$

3. Решить уравнение при данных начальных и краевых условиях:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x, 0 \le x \le c, \\ \dfrac{h(x-l)}{c-l}, c \le x \le l, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Примеры решения задач
Метод математической индукции

Пример 1. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x > -1$ справедливо неравенство (*неравенство Бернулли*)

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \qquad (1)$$

Решение. Докажем неравенство (1) методом математической индукции. Если $n=1$, то неравенство (1) справедливо, поскольку обращается в верное равенство. Предположим, что соотношение (1) справедливо для натурального числа k и $\forall x > -1$:

$$(1+x)^k \geq 1+kx. \qquad (2)$$

Так как $x > -1$, то $x+1>0$. Умножим неравенство (2) на положительное число $x+1>0$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+kx^2.$$

Отбрасывая неотрицательное слагаемое kx^2 в правой части, получаем неравенство

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Мы доказали, что неравенство (1) справедливо для натурального числа $k+1$ и $x > -1$. Тем самым доказано, что соотношение (1) справедливо $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x > -1$.

Пример 2. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение. При $n=1$ неравенство справедливо. Предполагая справедливость равенства при n, покажем справедливость его и при $n+1$. Действительно,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

что и требовалось доказать.

Пределы функции одной переменной

Пример 1. Покажем, что $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9.$

Решение. Необходимо оценить разность $|x^2-9|$. Имеем $|x^2-9|=|x-3|\cdot|x+3|$. Так как на всей числовой прямой множитель $|x-3|$ не ограничен, то оценку произведения сделать проще, если выделить некоторую, например, 1-окрестность точки $a=-3$ интервал - $(-4,-2)$. Для всех $x\in(-4,-2)$ имеем $|x-3|<7$ следовательно $|x^2-9|<7|x+3|$, Так как δ – окрестность точки $a=-3:(-3-\delta,-3+\delta)$ не должна выходить за пределы 1-окрестности, то берем $\delta=\min(1,\varepsilon/7)$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $0<|x+3|<\delta$ следует неравенство $|x^2-9|<\varepsilon.$ Таким образом, $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9.$

Пример 2. Покажем, что функция $f(x)=\sin(1/x)$ не имеет предела при $x\to 0$.

Решение. Запишем с использованием символов утверждение «число A не является пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ (a --- собственная точка числовой прямой)»:

$$\exists\varepsilon_0>0:\forall\delta>0\exists x_\delta=x(\delta):0<|x_\delta-a|<\delta, x_\delta\in E,|f(x_\delta)-A|\geq\varepsilon_0.$$

Если $A=0$, то возьмем $\varepsilon_0=1/2$ и $x_k=1/(2\pi k+\pi/2)$, тогда $\forall\delta\ \exists k\in\mathbb{N}:0<x_k<\delta$ и $|f(x_k)-0|=|f(x_k)|=1>\varepsilon_0$, таким образом, нуль не есть предел $f(x)=\sin(1/x)$ при $x\to 0$. Если же $A\neq 0$, то возьмем $\varepsilon_0=|A|/2$ и $x_k=1/2\pi k$. Тогда $\forall\delta\ \exists k\in\mathbb{N}:0<x_k<\delta$ и $|f(x_k)-A|=|A|>\varepsilon_0$, таким образом, и любое отличное от нуля число не есть предел функции $f(x)=\sin(1/x)$ при $x\to 0$.

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

Решение. Этот предел является неопределенностью типа «0/0». Преобразуем функцию, умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{3+x}+2$ - выражение, сопряженное числителю. Получим

$$\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}.$$

Так как при рассмотрении данного предела аргумент x не принимает значения $x=1$, то, сокращая на $x-1$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x\to\infty}f(x)$, где $f(x)=\dfrac{100x^2+1}{x^2+100}$.

Решение. Этот предел является неопределенностью типа « ∞/∞ », так как числитель и знаменатель - бесконечно большие функции при $x\to\infty$. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{100+1/x^2}{1+100/x^2}\quad (x\neq 0).$$

Так как $\lim_{x\to\infty}1/x^2=0$, то, используя теорему об арифметике пределов (для $x\to\infty$), получаем

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(100+1/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+100/x^2)}=\frac{100}{1}=100.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

Решение. Так как

$$\frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 2\frac{\sin 5x}{x}\frac{\sin 2x}{x}$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = 5, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2,$$

то по теореме о пределе произведения находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 20.$$

Пример 6. Найти предел $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$.

Решение. Используя равенство

$$\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2} = \left(\frac{1+\frac{3}{2x^2}}{1-\frac{1}{2x^2}}\right)^{x^2} = \frac{\left(1+\frac{3}{2}t\right)^{1/t}}{\left(1-\frac{1}{2}t\right)^{1/t}},$$

где $t = 1/x^2 \to 0$ при $x \to \infty$, находим, что искомый предел равен $e^{3/2}/e^{-1/2} = e^2$.

Пример 7. Вычислить: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2\arctan 3x + 3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x) + xe^x}$.

Решение. При $x \to 0$ имеем

$$\sin 2x \sim 2x, \quad \arctan 3x \sim 3x, \quad xe^x \sim x.$$

Так как $\ln(1+u) \sim u$ при $u \to 0$, то

$$\ln(1+3x+\sin^2 x) \sim 3x + \sin^2 x \sim 3x, \textit{ при } x \to 0.$$

Следовательно,

$$\sin 2x = 2x + o(2x), \quad \arctan 3x = 3x + o(3x),$$

$$\ln(1+3x+\sin^2 x) = 3x + o(3x), \quad xe^x = x + o(x),$$

и поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\arctan 3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+o(2x)+6x+2\cdot o(3x)+3x^2}{3x+o(3x)+x+o(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{4x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{8+o(x)/x}{4+o(x)/x}=\frac{8+\lim\limits_{x\to 0}o(x)/x}{4+\lim\limits_{x\to 0}o(x)/x}=2.$$

Производная функции одной переменной

Пример 1. Найти производную функции: $y=2^{ctg^2 x}$, $x\neq \pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Применив дважды правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y'=2^{ctg^2 x}\ln 2(ctg^2 x)'=2^{ctg^2 x}\ln 2\cdot 2ctgx(ctgx)'.$$

Следовательно,

$$y'=-2\ln 2\cdot 2^{ctg^2 x}\frac{ctg\, x}{\sin^2 x},\quad x\neq \pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Пример 2. Найти производную функции, обратной к функции $y=x+x^3,\quad x\in\mathbb{R}$.

Решение. Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $\dfrac{dy}{dx}=1+3x^2$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+3x^2}.$$

Пример 3. Функция задана параметрически формулами $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t, t\in(0;\pi/2)$. Найти y'_x.

Решение. Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы при всех t, и $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t\neq 0.$ на интервале $t\in(0;\pi/2)$. По формуле производной функции, заданной параметрически, находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}\tan t, t \in (0;\pi/2).$$

Пример 4. Найти дифференциал функции $y = x - 3x^2$ в точке $x = 2$.

Решение. 1-й способ. Найдем приращение функции в точке $x = 2$:

$$\Delta y = y(2+\Delta x) - y(2) = 2 + \Delta x - 3(2+\Delta x)^2 - 2 + 12 = -11\Delta x - 3\Delta x^2.$$

Приращение функции представлено в виде линейной части $-11\Delta x$ и нелинейной части $-3\Delta x^2$ причем $\frac{-3\Delta x^2}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

$$dy|_{x=2} = -11dx.$$

2-й способ. Вычислим производную функции в точке $x = 2$:

$$y'(x) = 1 - 6x, \quad y'(2) = -11.$$

По формуле $dy = y'dx$ находим

$$dy(2) = y'(2)dx = -11dx.$$

Пример 5. Найти $y^{(n)}$, если $y = x^2 e^{3x}$.

Решение. Данная функция является произведением двух функций x^2 и e^{3x}. Применяя формулу Лейбница получаем

$$(x^2e^{3x})^{(10)} = x^2(e^{3x})^{(10)} + C_{10}^1(x^2)'(e^{3x})^{(9)} + C_{10}^2(x^2)^{(2)}(e^{3x})^{(8)} + \ldots$$
$$+(x^2)^{(10)}e^{3x}.$$

Так как $(x^2)^{(n)} = 0$ при $n \ge 3$, $(e^{3x})^{(k)} = (e^{3x})3^k$, то

$$(x^2e^{3x})^{(10)} = x^2e^{3x}3^{10} + 10\cdot 2xe^{3x}3^9 + 45\cdot 2e^{3x}3^8 =$$
$$= 3^9e^{3x}(3x^2 + 20x + 30).$$

Рассмотренный пример показывает, что формулу Лейбница наиболее удобно применять в тех случаях, когда один из сомножителей является многочленом невысокой степени p. В этом случае все члены формулы Лейбница начиная с $(p+2)$ -го равны нулю.

Пример 6. Найти вторую производную функции, обратной к функции

$$y = x + x^5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, ее производная $y = 1 + 5x^4$ не обращается в нуль ни в одной точке, поэтому

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+5x^4}.$$

Дифференцируя это тождество по y, получим

$$x''_{yy} = \left(\frac{1}{1+5x^4}\right)'_x \cdot x'_y = \frac{-20x^3}{(1+5x^4)^3}.$$

Пример 7. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически формулами

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (a;b),$$

и пусть $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$ при $t \in (a;b)$. Найти y''_{xx}.

Решение. По формуле $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$ находим первую производную $f'(x)$:

$$y'_x = y'_t / x'_t.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, получаем

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{1}{x'_t},$$

т.е.

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Пример 8. Найти $\lim_{x\to 1}\frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$.

Решение. Применяя правило Лопиталя, снова получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}.$$

Пользуясь еще раз правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}=2\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^4-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{9x^8}{4x^3}=\frac{9}{2}.$$

Следовательно, искомый предел равен $\frac{9}{2}$.

Пример 9. Найти $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}$.

Решение. Так как $(\sin x)^{tgx}=e^{tgx\ln\sin x}=e^{(\ln\sin x)/ctgx}$, то, применяя, правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{ctg}x}{-1/\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)=0,$$

а, следовательно, $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}=e^0=1.$

Пример 10. Разложить функцию tgx по формуле Маклорена до членов с x^3 включительно.

Решение. Найдем производные функции $f(x)=tgx$ до третьего порядка включительно:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x;$$

$$f''(x)=2\cos^{-3}x\sin x;$$

$$f'''(x)=6\cos^{-4}x\sin^2 x+2\cos^{-2}x.$$

Отсюда получаем $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(x)=2$. По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеем

$$tgx=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Заметим, что вычисление $f^{(4)}(x)$ дает $f^{(4)}(0)=0$. Поэтому остаточный член можно записать в виде $o(x^4)$.

Пример 11. Используя основные разложения, найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx+2\sin x-3x}{x^4}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx+2\sin x-3x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)+2\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-3x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=0.$$

Интегралы

Пример 1. Найти интеграл: $\int(x-2e^x)dx.$

Решение. Используя свойства неопределенного интеграла, а также таблицу интегралов, получаем

$$\int(x-2e^x)dx=\int xdx-2\int e^x dx=\frac{x^2}{2}-2e^x+C,\ x\in\mathbb{R}.$$

Пример 2. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$

Решение: Положим $e^x=t^2, t>0$; тогда

$$e^x dx=2tdt,\quad dx=\frac{2tdt}{t^2-1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл: $I=\int x^2e^{-x}dx.$

Решение. Положим $u=x^2,\ dv=e^{-x}dx$. Тогда $du=\frac{1}{2}xdx,\ v=-e^{-x}$.

Значит,

$$I = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) =$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

Пример 4. Найти с помощью формулы Ньютона-Лейбница интеграл

$$\int_a^b x^\alpha dx, \quad \alpha \neq -1, \quad 0 < 1 < b.$$

Решение. Имеем

$$\int_a^b x^\alpha dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int_{-1}^{2} x(3x^4 - 4x^2 + 1)dx.$

Решение.

$$\int_{-1}^{2} x(3x^4 - 4x^2 + 1)dx = \int_{-1}^{2} (x^3 - x)(3x^2 - 1)dx = \int_0^6 zdz = 18.$$

Обратите внимание, что замена произведена в интеграле $\int\limits_0^6 zdz = 18$ и функция $z = x^3 - x$ непрерывно дифференцируема, но не монотонна на $[-1, 2]$.

Пример 6. Вычислить $I = \int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx.$

Решение. Разбивая интеграл I на сумму интегралов по сегментам $[1/e, 1]$ и $[1, e]$ (чтобы "освободиться от модуля") и применяя в каждом интеграле формулу интегрирования по частям, получим

$$I = -\int\limits_{1/e}^{1} \ln xdx + \int\limits_{1}^{e} \ln xdx =$$

$$= -x\ln x\,|_{1/e}^{1} + \int\limits_{1/e}^{1} dx + x\ln x\,|_1^e - \int\limits_1^e dx =$$

$$= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + e - (e-1) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Числовые ряды

Пример 1. Пусть $|q|<1$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится, и найти его сумму.

Решение. Используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

так как $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q|<1$. Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}, |q|<1.$$

Пример 2. Применим признак Коши к следующему ряду: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

Решение. $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\ln n}, C_n \to 0$: *ряд сходится.*

Пример 3. Доказать с помощью критерия Коши, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Решение. Для любого $k \in \mathbb{N}$ возьмем $n = k, p = k$. Тогда

$$z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2},$$

т.е. условие обращение критерия Коши выполняется при $\varepsilon = 1/2$. Следовательно, гармонический ряд расходится.

Пример 4. Применим признак Даламбера к следующему ряду:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)}, \quad (x > 0)$$

Решение. $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1}, D_n \to 0$: ряд сходится

Пример 5. Приведем пример применения признака Раабе.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Решение. Признак Даламбера к этому ряду неприложим, ибо

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \to 1$$

(и притом $D_n < 1$). Применим признак Раабе:

$$R_n = n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1\right) = \frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2}.$$

Так как $\lim R_n = \frac{3}{2} > 1$, то ряд сходится.

Пример 6. Доказать сходимость знакочередующегося ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\frac{1}{\sqrt{n}};$$

Решение. Последовательность a_n, где $a_n = 1/\sqrt{n}$, монотонно стремится к нулю и ряд знакопеременный. По признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\frac{1}{\sqrt{n}}$ сходится.

Пример 7. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Решение. Поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right| = \left(sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

последовательность $(n^{-1}ln^{100}n)$, начиная с достаточно большого n, монотонно стремится к нулю (это вытекает из того, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{100}x = 100\lim_{x\to+\infty} x^{-1}\ln^{99}x = 0, \quad (x^{-1}\ln^{100}x)' < 0\forall x > e^{100},$$

то, согласно признаку Дирихле, данный ряд сходится.

Пример 8. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

Решение. Имеем

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1} - n\pi\right) = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Так как ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$, по признаку Дирихле, сходится, а последовательность $\left(\cos\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ монотонна и ограничена, то исследуемый ряд, по признаку Абеля, также сходится.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Пример 1. Найти частные производные функции

$$f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2).$$

Решение. Функция определена в области $y^2 > -x$. Фиксируя переменную y, находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x + y^2}, \quad y^2 > -x.$$

Фиксируя переменную x, получаем.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{2y}{x + y^2}, \quad y^2 > -x.$$

Пример 2. Доказать, что функция

$$f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2)$$

дифференцируема в точке $(0,1)$, и найти $df(0,1)$.

Решение. В примере 1 найдены частные производные данной функции. В точке $(0;1)$ обе частные производные непрерывны. Следовательно, функция f дифференцируема в точке $(0;1)$. Так как

$$\frac{\partial f(0,1)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial y} = 4,$$

то

$$df(0,1) = 2dx + 4dy.$$

Пример 3. Найти частные производные функции $u = f(x, xy, xyz)$ по аргументам x, y и z.

Решение. Данная функция является сложной функцией переменных x, y и z: $u = f(x_1, x_2, x_3)$, где $x_1 = x, x_2 = xy, x_3 = xyz$. Обозначим частную производную функции $u = f(x_1, x_2, x_3)$ по аргументу x_i через $f_i'(i = 1, 2, 3)$ (функции f_i' зависят от тех же аргументов, что и функция f, т.е. $f_i' = f_i'(x, xy, xyz)$). Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot y + f_3' \cdot yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_2' \cdot x + f_3' \cdot xz \quad \frac{\partial u}{\partial z} = f_3' \cdot xy.$$

Пример 4. Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^5), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f = \sin x \operatorname{sh} 2y$.

Решение. Воспользуемся известными разложениями функций $\sin x$ и $\operatorname{sh} x$ по формуле Маклорена. Тогда получим

$$f = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)\left(2y + \frac{8y^3}{6} + o(y^4) \right) =$$

$$= 2xy - \frac{1}{3}x^3 y + \frac{4}{3}xy^3 + o(\rho^5).$$

Пример 5. Найти второй дифференциал функции $u = xe^y$, если
а) x и y - функции каких-либо независимых переменных и их вторые дифференциалы d^2x и d^2y известны;
б) x и y - независимые переменные.
Решение.
а) Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^y, \quad \frac{\partial^u}{\partial y^2} = xe^y,$$

находим

$$d^2u = 2e^y dxdy + xe^y dy^2 + e^y d^2x + xe6yd^2y.$$

б) В этом случае $d^2x = 0$ и $d^2y = 0$, следовательно,

$$d^2u = 2e^y dxdy + xe^y dy^2.$$

Интегралы по многообразиям

Пример 1. Вычислить

$$\iint\limits_X y^2 \; dxdy$$

где множество *X* ограничено линиями $x = y^2, y = x - 2$
Решение. Множество *X* элементарно относительно оси Ох:

$$X = \left\{-1 \le y \le 2, \;\; y^2 \le x \le y+2\right\}.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} y^2 dx = \int\limits_{-1}^{2} y^2 \left(x\Big|_{y^2}^{y+2} \right) dy = \int\limits_{-1}^{2} y^2 \left(y + 2 - y^2 \right) dy = \frac{63}{20}$$

Пример 2. Перемена порядка в повторном интеграле иногда существенно упрощает его вычисление:

Вычислить $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}\, dy$.

Решение. Пределы интегрирования в повторном интеграле определяют треугольник, задающийся следующими неравенствами: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y$.

Следовательно

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt[4]{1-y^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt[4]{1-y^2}\,y\,dy = \frac{2}{5}$$

Пример 3. Преобразовать к полярным координатам и затем вычислить:

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

где D – круговое кольцо: $1 \le x^2 + y^2 \le 4$

Решение. Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$

$$I = \iint_{1\le\rho\le2} \frac{\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \iint_{1\le\rho\le2} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 \mathrm{d}\rho = 2\pi$$

Пример 4. Вычислить интеграл:

$$I = \iiint_K \left(x^2+y^2\right) \Big/ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

где множество K – круговой конус: $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le a$

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$.

Множество К в этих координатах задается неравенствами
$K_C = \left\{0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le z \le a\right\}$. Вычисляем интеграл:

$$I = \iiint_{K_C} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}} r\,dr\,d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dz \int_0^z \frac{r^3 dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{2-\sqrt{2}}{3} z^3 dz = \frac{\pi}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)a^4$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$$

где область S ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$

Решение. Область S представляет собой шар ограниченный сферой, уравнение которой удобно записать в виде $x^2 + y^2 + \left(z - 1/2\right)^2 = 1/4$, т.е. эта сфера имеет радиус $1/2$ и ее центр лежит на оси Oz в точке с координатами $\left(0, 0, 1/2\right)$. Сфера проходит через начало координат.

Перейдем к сферическим координатам $\left(r, \theta, \varphi\right)$:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

причем можно считать что:

$0 \le \varphi \le 2\pi$ (поскольку S – фигура вращения с осью z)

$0 \le \theta \le \pi/2$ (поскольку S лежит выше плоскости z=0).

Уравнение нашей сферы в новых координатах запишется в виде $r^2 = r\cos\theta$, откуда $r = 0$ или $r = \cos\theta$. Якобиан замены координат равен $r^2 \sin\theta$, а подинтегральная функция в новых координатах равна r. Следовательно

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta\, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\cos^4\theta \sin\theta d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Пример 6. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_\gamma e^x((1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy),$$

где γ -пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x\}$.

Решение. По формуле Грина имеем

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x(\sin y-y)\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x(1-\cos y)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_D ye^x dxdy=-\int\limits_0^{\pi}e^x dx\int\limits_0^{\sin x}dy=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sin x}e^x\sin^2 xdx=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}e^x(1-\cos 2x)dx=-\frac{1}{4}e^x\left(1-\frac{1}{5}(\cos 2x+2\sin 2x)\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{5}(e^{\pi}-1).$$

Пример 7. Вычислить поток векторного поля $a=x^2i+y^2j+z^2k$ через замкнутую поверхность $x^2+y^2+z^2=R^2, z=0\ (z>0)$.

Решение.

$$\Pi=\iiint\limits_V(2x+2y+2z)dv.$$

Этот интеграл удобно вычислять в сферических координатах. Имеем

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\varphi$$

и элемент объема

$$dv=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi,$$

так что

$$\Pi=2\iiint\limits_V(r\sin\theta\cos\varphi+r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta)d\theta\int\limits_0^R r^3dr=$$

$$=\frac{2R^4}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Пример 8. Найти $I=\oint\limits_{\gamma}ydx+zdy+xdz,$, где γ - окружность, полученная в результате пересечения сферы $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=a^2\}$ с плоскостью S_1, заданной

уравнением $x+y+z=0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.
Решение. Применим формулу Стокса, взяв в ней в качестве поверхности круг S_2 радиуса a, лежащий в плоскости S_1. Получим

$$I=-\iint_{S_2} dydz+dzdx+dxdy=-\iint_{S_2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS,$$

где $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали n к плоскости S_1. Так как вектор n и орт k оси Oz образуют острый угол, то в каждой из формул для вычисления $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак "+". Приняв во внимание, что $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, имеем

$$I=-\sqrt{3}\iint_{S_2} dS=-\sqrt{3}\pi a^2,$$

так как площадь круга S_2 равна πa^2.

Дифференциальные уравнения

Уравнения с разделяющимися переменными:
Пример 1. Решим уравнение

$$x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0. \qquad (1)$$

Делим это уравнение на $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0. \qquad (2)$$

При переходе от уравнения (1) к (2) мы потеряли решения

$$y=1,\quad y=-1,\quad x=1,\quad x=-1.$$

Интегрируя уравнение (2), получаем общее решение

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C,$$

где C - произвольная постоянная.

Однородные уравнения:

Пример 2. Уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\frac{tx+x^2e^{-t/x}}{t^2}$$

является однородным ОДУ. Замена $x=ty$ приводит его к виду

$$y+t\frac{dy}{dt}=y+y^2e^{-1/y},$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{e^{1/y}dy}{y^2}-\frac{dt}{t}.$$

После интегрирования и возврата к исходным переменным получим $e^{t/x}+\ln|t|=C$. При разделении переменных было потеряно решение $y\equiv 0$, которому соответствует решение исходного уравнения $x\equiv 0$.

Линейные неоднородные уравнения первого порядка:

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y'-\frac{2}{x}y=x. \qquad (1)$$

Найдем его общее решение методом вариации произвольной постоянной. Соответствующее однородное уравнение

$$z'-\frac{2}{x}z=0$$

имеет общее решение

$$z=C\,x^2.$$

Ищем общее решение данного неоднородного уравнения (1) в виде

$$y=C(x)x^2. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), имеем:

$$C'(x)x^2+C(x)\cdot 2x-\frac{2}{x}C(x)x^2=x$$

или

$$C'(x)=\frac{1}{x},$$

откуда

$$C(x)=\ln|x|+C.$$

Подставляя это значение в формулу (2), получим:

$$y = x^2 (C + \ln|x|).$$

Это и есть общее решение уравнения (1).

Уравнение Бернулли:

Пример 4. Решим уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \frac{x^2}{t} \ln t.$$

Выполнив подстановку $y = 1/x \ \ (x \neq 0)$, получим

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{yt} = \frac{1}{y^2 t} \ln t,$$

или

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = -\frac{1}{t} \ln t,$$

т.е. линейное неоднородное ОДУ. Соответствующее ему однородное ОДУ имеет решение $y(t) = Ct$. Решая неоднородное уравнение, получаем ОДУ

$$t\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{1}{t} \ln t,$$

после интегрирования которого находим

$$C(t) = \frac{1 + \ln t}{t} + C_1, \quad y(t) = C(t)t = 1 + C_1 t + \ln t.$$

Возвращаясь к исходному переменному, в итоге запишем

$$x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{1 + C_1 t + \ln t}.$$

При выполнении подстановки могло быть потеряно решение $x = 0$. Проверка показывает, что $x(t) \equiv 0$ действительно является решением исходного ОДУ.

Уравнение Рикатти:

Пример 5. Рассмотрим уравнение Рикатти

$$y' = xy^2 + x^2 y - 2x^3 + 1.$$

Здесь $y_1 = x$ - частное решение. Сделаем подстановку

$$y = x + \frac{1}{u},$$

тогда получим:

$$u' + 3x^2 u = -x,$$

откуда:

$$u = e^{-x^3}(C - \int e^{x^3} x dx).$$

Следовательно,

$$y = x + \frac{e^{x^3}}{(C - \int e^{x^3} x dx)}.$$

Уравнения в полных дифференциалах:

Пример 6. Решим уравнение

$$(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Раскроем скобки и сгруппируем члены так, чтобы каждая группа представляла собою полный дифференциал:

$$x^3 dx + (ydx + xdy) - ydy = 0$$

или

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(xy\right) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0.$$

Заменяя сумму дифференциалов на дифференциал суммы, получаем:

$$d\left(\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}\right) = 0, \quad U = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Следовательно, исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, а равенство

$$\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C$$

есть его общий интеграл.

Пример 7. Уравнение

$$(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

не является уравнением в полных дифференциалах поскольку $\frac{\partial}{\partial y}(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)$. Умножаем обе части уравнения на e^x и получаем уравнение в полных дифференциалах

$$e^x(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0,$$

в котором

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^x(x^2 + y^2).$$

Первое из этих равенств дает

$$U(x, y) = \int e^x(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3})dx + \varphi(y) = ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) + \varphi(y).$$

Отсюда находим, что $\frac{\partial U}{\partial y} = e^x(x^2 + y^2) + \frac{d\varphi}{dy}$, и с учетом второго равенства получаем уравнение относительно неизвестной пока функции $\varphi(y)$: $\frac{d\varphi}{dy} = 0$. Следовательно, общий интеграл исходного уравнения можно представить в виде $ye^x(x^2 + y^2/3) = C$, где C - произвольная постоянная.

Уравнения не разрешенные относительно производной:

Пример 8. Проинтегрируем уравнение

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0.$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно y', будем иметь: $y' = x$ и $y' = y$. Интегрируя каждое из полученных уравнений, находим: $y = \frac{x^2}{2} + C$ и $y = Ce^x$. Оба семейства решений удовлетворяют исходному уравнению.

Пример 9.

$x = (y')^3 - y' - 1$. Положим $y' = p$, тогда $x = p^3 - p - 1$, (1)

$$dy = y'dx = p(3p^2 - 1)dp, \quad y = \frac{3p^4}{4} - \frac{p^2}{2} + C_1. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) определяют в параметрической форме семейство искомых интегральных кривых.

Пример 10. Рассмотрим уравнение

$$y = p^2 x + p - 1, \quad \frac{dy}{dx} = p. \quad (1)$$

Дифференцируя уравнение, получаем

$$p = p^2 + (2px + 1)\frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

Сначала предположим, что

$$p^2 - p \neq 0. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{1-p} + \frac{1}{p(1-p)}.$$

его общее решение можно записать в виде $x = (c + \ln p - p)/(p-1)^2$.

Условие (3) не выполняется при $p = 0$ и $p = 1$. Этим двум значениям p соответствуют два решения $y = -1$ и $y = x$ исходного уравнения (1).

Существование и единственность решения ДУ:

Пример 11. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy),$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y = 0 \textit{ при } x = 0.$$

Так как правая часть уравнения вместе с ее частной производной по y, $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$, непрерывна при всех x и y, то через каждую точку плоскости (x, y) проходит единственная интегральная кривая. Это же будет иметь место и в начале координат. Но легко заметить, что $y = 0$ (ось Ox) есть решение уравнения и это решение проходит через начало координат, так что оно и будет искомым решением. В силу только что установленного единства решения исходное уравнение не имеет других решений, проходящих через начало координат.

Линейные неоднородные уравнения высоких порядков:

Пример 12. Рассмотрим уравнение $xy'' - y' = x^2$. Соответствующее однородное уравнение $xy'' - y' = 0$ легко интегрируется: $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{1}{x}$, $y' = Ax$, $y = \dfrac{A}{2}x^2 + B$; его фундаментальная система есть $1, x^2$.

Полагаем теперь в неоднородном уравнении $y = C_1 + C_2x^2$; для определения имеем два уравнения:

$$1 \cdot \frac{dC_1}{dx} + x^2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \quad 0 \cdot \frac{dC_1}{dx} + 2x \frac{dC_2}{dx} = x.$$

Последовательно получаем:

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{x}{2} + \gamma_2, \quad \frac{dC_1}{dx} = -\frac{x^2}{2}, \quad C_1 = -\frac{x^3}{6} + \gamma_1.$$

Подставляя в выражение для y, находим общее решение:

$$y = \gamma_1 + \gamma_2 x^2 + \frac{x^3}{3} \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \text{ - произвольные постоянные}).$$

Устойчивость решений ДУ:

Пример 13. Исследуем устойчивость *тривиального решения* $x_1(t) = x_2(t) \equiv 0$ системы уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_1}{dt} = 4\sin x_1 + \ln(1 + x_2); \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 + x_1^2 x_2.$$

Составим уравнения первого приближения

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

и соответствующее им характерестическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{èëè} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{12} > 0$. На основании теоремы об устойчивости по линейному приближению невозмущенное движение $x_1(t) = x_2(t) \equiv 0$ неустойчиво.

Пример 14. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = xy^4,$$
$$\dot{y} = -x^2 y.$$

Составим функцию Ляпунова $V(x, y) = x^2 + y^4$, тогда $V(x, y) \geq 0$ и обращается в нуль только при $x = y = 0$. Кроме того,

$$\frac{\partial V}{\partial x} xy^4 - \frac{\partial V}{\partial y} x^2 y = -2x^2 y^4 \leq 0.$$

В силу леммы Ляпунова, положение равновесия $(0, 0)$ рассматриваемой системы устойчиво по Ляпунову.

Уравнения в частных производных:

Пример 15. Определить зависящий от произвольной функции интеграл уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Составляем вспомогательную систему уравнений

$$dx = dy = dz.$$

Ее первые интегралы имеют вид $x - y = c_1, z - x = c_2$. Интеграл исходного уравнения $\Phi(x - y, z - x) = 0$, где Φ - произвольная функция, или в разрешенном относительно z виде $z = x + \varphi(x - y)$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.

Пример 16. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через кривую $x = 0$, $z = y^2$.

Интегрируем систему уравнений

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0},$$

откуда $z=c_1$, $x^2+y^2=c_2$. Исключая x, y и z из уравнений

$$x^2+y^2=c_2,\quad z=c_1,\quad x=0,\quad z=y^2,$$

получаем $c_1=c_2$, откуда $z=x^2+y^2$.

Пример 17. Найдем общее решение уравнения

$$(x_1+x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=z-x_2.$$

Решение ищем в неявной форме

$$V(x_1,x_2,z)=0.$$

Тогда функция V должна удовлетворять уравнению характеристик

$$(x_1+x_2)\frac{\partial V}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+(z-x_2)\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Соответствующая система уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1+x_2}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dz}{z-x_2}$$

имеет общий интеграл

$$\frac{x_1}{x_2}-\ln x_2=c_1,\quad \frac{z}{x_2}+\ln x_2=c_2,$$

а уравнение характеристик имеет общее решение

$$V=\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}-\ln x_2,\frac{z}{x_2}+\ln x_2\right),$$

где Φ - произвольная дифференцируемая функция.

Следовательно, решение исходного уравнения получаем в неявной форме из соотношения

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}-\ln x_2,\frac{z}{x_2}+\ln x_2\right)=0.$$

Ограничиваясь только теми функциями Φ, для которых это уравнение можно разрешить относительно второго аргумента, получаем решение исходного уравнения в явном виде

$$z = x_2 \Psi\left(\frac{x_1}{x_2} - \ln x_2\right) + x_2 \ln x_2,$$

где Ψ - произвольная функция.

Пример 18. Требуется построить интегральную поверхность уравнения

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y,$$

проходящую через прямую $z = y = -x$.

Сначала составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = d\lambda.$$

Один первый интеграл находим, составляя линейную комбинацию уравнений:

$$\frac{dx + dy + dz}{0} = d\lambda,$$

и интегрируя полученное уравнение. В итоге имеем первый интеграл

$$x + y + z = c_1.$$

Следующий первый интеграл находим аналогично, составляя другую комбинацию:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{0} = d\lambda.$$

Отсюда получаем еще один первый интеграл

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

Для описания прямой $z = y = -x$ в качестве параметра выберем x и прямую записываем в параметрической форме: $z = -x$, $y = -x$, $x = x$. Подставляя в первые интегралы вместо z и y их представление из уравнений прямой, получаем два уравнения $-x = c_1$ и $3x^2 = c_2$. Исключая x, получаем уравнение $3c_1^2 = c_2$. Заменяя в этом уравнении c_1 и c_2 левыми частями первых интегралов, получаем решение поставленной задачи в следующей форме:

$$3(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление.* Ростов-на-Дону: изд-во «Феникс», 1997 г.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов.* Ростов-на-Дону: изд-во «Феникс», 1998 г., 4-е изд.

3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. *Лекции по математическому анализу.* М.: Высшая школа, 1999 г.

4. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* ЛКИ, 2008 г.

5. Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* Едиториал УРСС, 2007 г.

6. Филлипов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* Либроком, 2009 г.

7. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения.* ЛКИ, 2008 г.

б) дополнительная литература:

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями.* Либроком, 2009 г.

2. Пантелеев А.В. и др. *Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах.* Высшая школа, 2001 г.

3. Самойленко А.М. *Дифференциальные уравнения. Практический курс.* Омега-Л, 2006 г.

4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. *Дифференциальные уравнения. Курс высшей математики и математической физики. Выпуск 6,* 2002 г.

5. Мир математических уравнений: http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm

6. Математические этюды: http://www.etudes.ru/

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Персональные компьютеры, мультимедийный проектор, ноутбуки, экраны.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций ПрООП ВПО по направлению «020100 ХИМИЯ», квалификация (степень) «бакалавр», а также в соответствии с Образовательным стандартом высшего профессионального образования принятым в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет".

Авторы: Чупахин Александр Павлович, д.ф.-м.н., заведующий кафедры высшей математики ММФ НГУ, заведующий лабораторией ИГиЛ СО РАН;

Данилова Кира Николаевна, к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры высшей математики ММФ НГУ, ученый секретарь ИГиЛ СО РАН;

Нещадим Михаил Владимирович, д.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ММФ НГУ, внс ИМ СО РАН;

Черевко Александр Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ММФ НГУ, нс ИГиЛ СО РАН.

Рецензент Волков Юрий Степанович, профессор кафедры высшей математики НГУ, заместитель директора ИМ СО РАН.

Программа одобрена на заседании кафедры высшей математики ММФ НГУ "26" мая 2014 г., протокол заседания № 2

Секретарь кафедры к.ф.-м.н. ____________ Ж.Л. Мальцева